Numeričke metode financijske matematike

Prva domaća zadaća

Sadržaj:

Prvi zadatak – SOR metoda i metoda potencija

Generiranje matrica A_1 i A_2

Prvotno sam odabrao da mi dimenzije matrica bude $13x13$. Zatim se konstruirao normirani vektor $x0$ tako da bude dimenzije 13. Matricu A_1 naštimamo tako da ima izoliranu svojstvenu vrijednost, a matricu A_2 tako da su sve svojstvene vrijednosti bliske pa tako i najveća među njima.

A_1 dobijemo tako da dijagonalnu matricu D_1, koja je nastala pomoću MATLAB-ove funkcije diag(), pomnožimo s matricom Q_1 s lijeva i desna. Matrica Q_1 je nastala MATLAB-ovom funkcijom qr() primijenjenu na slučajno izabranu matricu X_1. Analogno se dobije matrica A_2. Kod je spremljen pod nazivom *matrice1.m.*

Ovakvim konstruiranjem dobiju se dvije (A_1 i A_2) matrice, pozitivno definitne jer su im svojstvene vrijednosti strogo pozitivni realni brojevi, regularne jer su slične dijagonalnim matricama čija je determinanta različita od nula. Konstrukcijom smo dobili Cramerov sustav koji je rješiv.

Provedba prvog zadatka

Gore navede matrice te $b_1,\ b_2,\ x0, x, tol$ i ω se nalaze u datoteci *matrice1*. U *zadatak1.m* pozivaju se sve funkcije koje su u zadatku zadane. Izlazni podatci nalaze se u datoteci *rezultati1*.

Rezultati prvog zadatka

U tablici su dani neki od rezultata

	A_1	A_2
UVJETOVANOST	1000.000000000004	2.199999999999998usv
OPTIMALNI OMEGA	0.740000000000000	1.040000000000000
SPEKTRALNI RADIJUS	0.993606650461477	9.245309238646585e-02
BROJ ITERACIJA	2129	9
APROKSIMACIJA RIJEŠENJA $A_i x = b_i$	1.000000061895773 0.999999778008287 0.999999956864058 1.000000011702239	0.999999998512338 0.999999998202433 0.999999999528199 0.999999999473865

	1.000002018956956 0.999999497140130 0.999999887356065 1.000000333656857 1.000000724030563 1.000000133332243 0.999999999057222 0.999999962494696 1.000000479731538	0.999999999742793 1.000000000350385 0.999999998719061 1.000000000635351 0.999999998588091 0.999999999665166 0.999999999174471 1.000000000695710 0.999999999582322

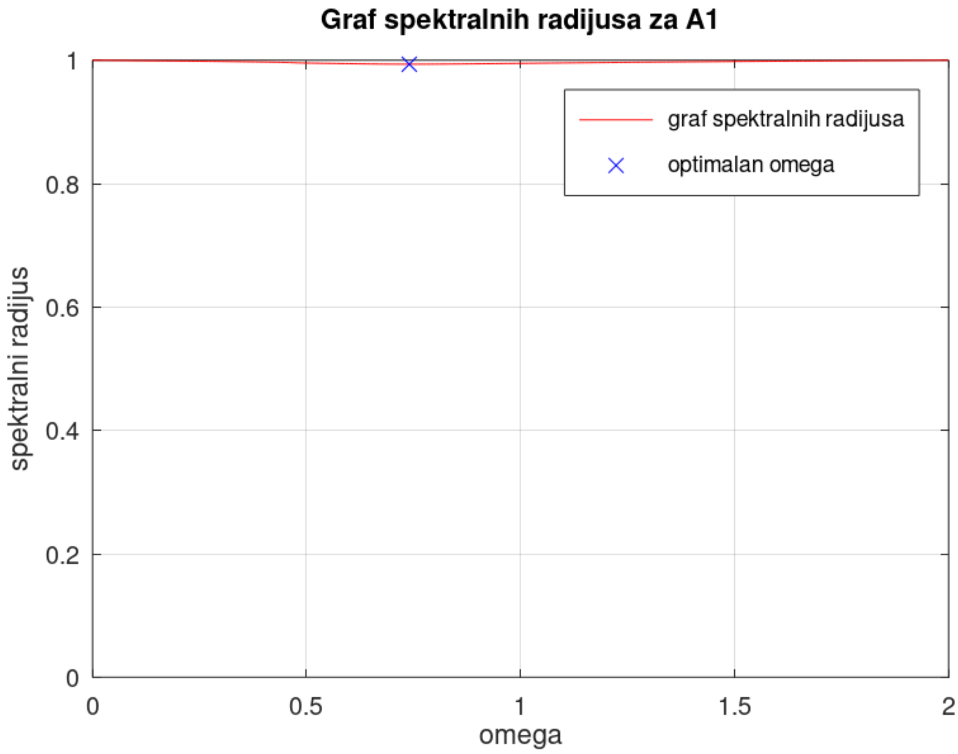
Matrica A_1 je simetrična i pozitivno definitna pa SOR metoda konvergira za $\omega \in \langle 0,2 \rangle$ i za svaku početnu iteraciju, to znamo po sljedećem teoremu.

Teorem. *Ako je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ simetrična pozitivno definitna matrica, tada SOR metoda konvergira za $\omega \in <0, 2>$. SOR metoda ne konvergira za $\omega \leq 0$ i $\omega \geq 2$.*

SOR metoda konvergira sporo (2129 iteracija) jer je spektralni radijus za optimalni parametar blizu 1, to slijedi iz teorema o konvergenciji standardnih iteracija i teoremu koji govori o kriteriju zaustavljanja. Za razliku od SOR-a, metoda potencija za matricu A_1 konvergira brzo jer iz teorema o konvergenciji metode potencija koristimo činjenicu da je dominantna svojstvena vrijednost dobro izolirana od ostatka spektra.

Teorem. *Ako je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$dijagonalizabilna matrica, čije su svojstvene vrijednosti λ_i , i = 1,…,n uređene na način $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, neka su svojstveni vektori definirani kao $Av_i = \lambda_i v_i$, $||v_i||_2 = 1$, i = 1, … , n. Pretpostavljamo da zapis od $x0$ u bazi svojstvenih vektora ima netrivijalnu komponentu u smjeru v_1, tada niz x_k linearno konvergira k lim (k⟶∞) $x_k = v_1$, a konvergencija ovisi o izrazu $(|\lambda 2| \ / \ |\lambda 1|)^k$, tj. kako se brzo taj izraz približava nuli.*

Na sljedećem grafu dani su spektralni radijusi matrice A_1 za $\omega \in \langle 0,2 \rangle$ te očitani spektralni radijus za optimalan parametar ω.



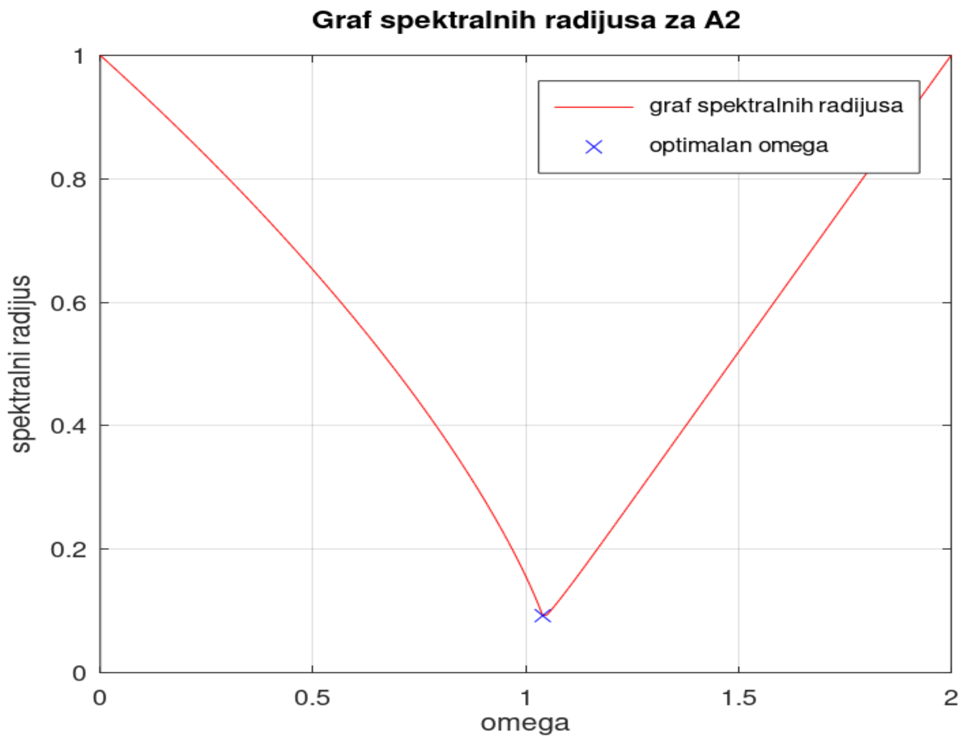
Matrica A_2 je simetrična i pozitivno definitna pa SOR metoda konvergira za $\omega \in \langle 0,2 \rangle$ i za svaku početnu iteraciju.

Teorem. *Ako je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ simetrična pozitivno definitna matrica, tada SOR metoda konvergira za $\omega \in <0, 2>$. SOR metoda ne konvergira za $\omega \leq 0$ i $\omega \geq 2$.*

SOR metoda konvergira brzo (9 iteracija) jer je spektralni radijus za optimalni parametar blizu 0, to slijedi iz teorema o konvergenciji standardnih iteracija i teoremu koji govori o kriteriju zaustavljanja. Za razliku od SOR-a, metoda potencija za matricu A_2 konvergira sporo jer iz teorema o konvergenciji metode potencija koristimo činjenicu da je dominantna svojstvena vrijednost slabo izolirana od ostatka spektra.

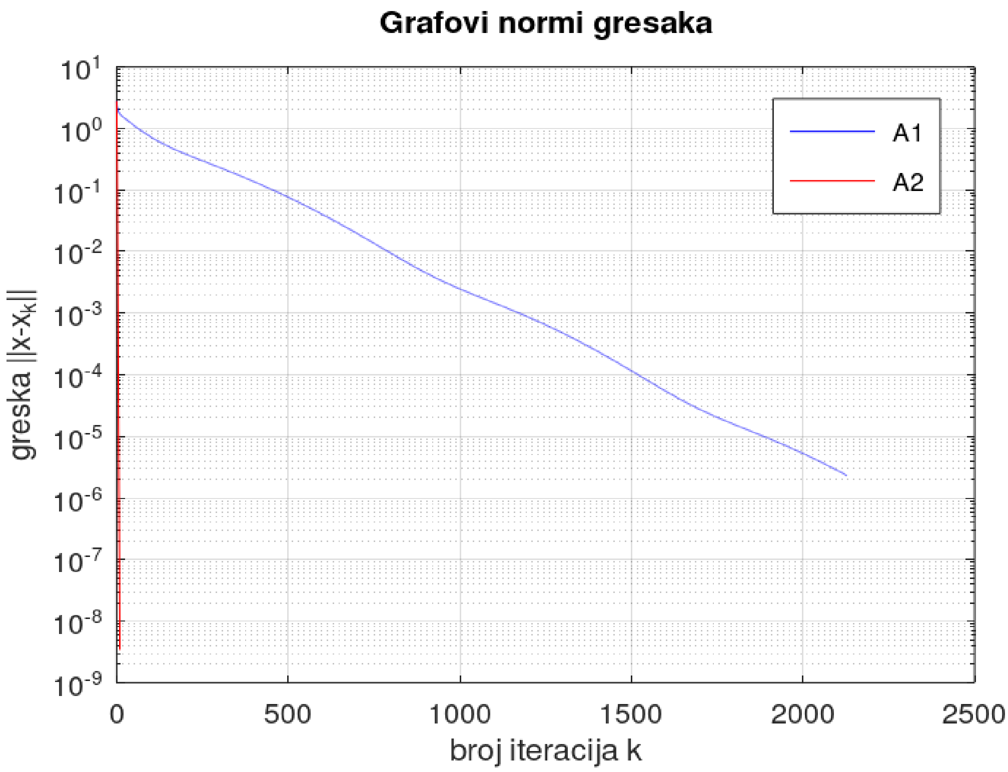
Teorem. *Ako je matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$dijagonalizabilna matrica, čije su svojstvene vrijednosti λ_i , $i = 1, \ldots, n$ uređene na način $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, neka su svojstveni vektori definirani kao $Av_i = \lambda_i v_i$, $||v_i||_2 = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Pretpostavljamo da zapis od $x0$ u bazi svojstvenih vektora ima netrivijalnu komponentu u smjeru v_1, tada niz x_k linearno konvergira k lim $(k \to \infty)$ $x_k = v_1$, a konvergencija ovisi o izrazu ($|\lambda 2|$ / $|\lambda 1|$ $)^k$, tj. kako se brzo taj izraz približava nuli.*

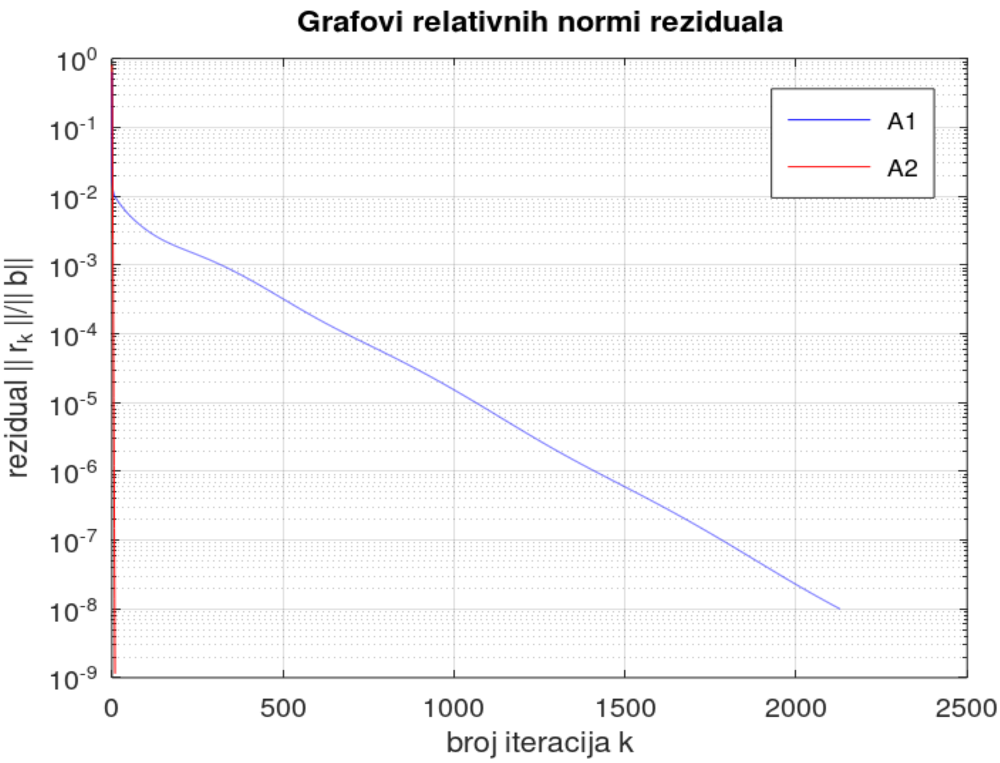
Na sljedećem grafu dani su spektralni radijusi matrice A_2 za $\omega \in \langle 0,2 \rangle$ te očitani spektralni radijus za optimalan parametar ω.



Primijetimo da je uvjetovanost matrice A_1 veća od uvjetovanosti matrice A_2 što također utječe da A_1 sporije konvergira.

Pogledajmo sada grafove normi grešaka i relativnih normi reziduala. Grafovi samo potvrđuju gornje razmatranje da imamo sporu konvergenciju za matricu A_1 te brzu konvergenciju za A_2.





Iz diskutiranog vidimo da se dobiveni rezultati poklapaju s gore navedenim svojstvima matrice.

Drugi zadatak – Metoda konjugiranih gradijenata i Schurova dekompozicija

Generiranje matrica A_3 i A_4

Prvotno sam odabrao da mi dimenzije matrica bude $13x13$. Zatim se konstruira normirani vektor $x0$ tako da bude dimenzije 13. Matricu A_3 naštimamo tako da imamo različite svojstvene vrijednosti od kojih neke nisu bliske po modulu, a matricu A_4 tako da imamo višestruke svojstvene vrijednosti bliske po modulu.

A_3 dobijemo tako da dijagonalnu matricu D_1, koja je nastala pomoću MATLAB-ove funkcije diag(), pomnožimo s matricom Q_3 s lijeva i desna. Matrica Q_3 je nastala MATLAB-ovom funkcijom qr() primijenjenu na slučajno izabranu matricu X_3. Analogno se dobije matrica A_4. Kod je spremljen pod nazivom *matrice2.m.*

Ovakvim konstruiranjem dobiju se dvije simetrične matrice, pozitivno definitne jer su im svojstvene vrijednosti strogo pozitivni realni brojevi, regularne jer su slične dijagonalnim matricama čija je determinanta različita od nula. Konstrukcijom smo dobili Cramerov sustav koji je rješiv.

Provedba drugog zadatka

Gore navede matrice te $b_3,\ b_4,\ x0, tol, x$ i n (dimenzija matrice) se nalaze u datoteci *matrice2*. U *zadatak2.m* pozivaju se sve funkcije koje su u zadatku zadane. Izlazni podatci nalaze se u datoteci *rezultati2*.

Rezultati drugog zadatka

U tablici su dani neki od rezultata.

	A_3	A_4
UVJETOVANOST	8333.333333332399	1.100000000000001
BROJ ITERACIJA	17	3
APROKSIMACIJA RIJEŠENJA $A_i x = b_i$	1.000000000001938 1.000000000001439 0.999999999994701 1.000000000000166 0.999999999999929	1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000

	1.000000000004838 1.000000000000856 1.000000000002604 0.999999999996281 0.999999999998434 1.000000000002327 0.999999999999402 0.999999999998794	1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000 1.000000000000000
SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI IZRAČUNATE POMOĆU SCHUROVE DEKOMPOZICIJE	4.999999131040155e+02 1.000000868959840e+02 5.599999999999939e-01 5.100000000000040e-01 4.599999999999949e-01 4.099999999999970e-01 3.599999999999974e-01 3.099999999999994e-01 2.600000000000036e-01 2.100000000000021e-01 1.599999999999906e-01 1.100000000000013e-01 6.000000000000119e-02	1.099999999999989e+01 1.049999999999327e+01 1.000000000000674e+01 1.000039112216344e+01 1.049960887783655e+01 1.000000000000000e+01 9.999999999999998e+00 9.999999999999989e+00 1.000000000000000e+01 9.999999999999996e+00 9.999999999999996e+00 9.999999999999989e+00 1.000000000000000e+01

Budući da sam samostalno generirao matrice A_3 i A_4 tako da nemaju imaginarnih svojstvenih vrijednosti po teoremu o realnoj Schurovoj dekompoziciji na dijagonalnoj matrici T se pojavljuju realne svojstvene vrijednosti.

Matrice A_3 i A_4 su simetrične i pozitivno definitne pa po teoremu s predavanja znamo da metoda konjugirani gradijenata konvergira. Štoviše metoda konjugiranih gradijenata je m konačna, kao vrsta metode konjugiranih smjerova.

Teorem. *Metoda konjugiranih smjerova je m-koračna metoda ($m \leq n$), u smislu da je u m-tom koraku aproksimacija x_m jednaka rješenju $x = A^{-1}b$.*

Uvjetovanost matrice A_3 je puno veća od uvjetovanosti matrice A_4 što utječe na brzinu konvergencije. Matrica A_3 će sporije konvergirati. Također, još jedan razlog za sporiju konvergenciju matrice A_3 je zbog odabira svojstvenih vrijednosti što sam opisao u odlomku Generiranje matrica A_3 i A_4. Razlog tomu leži u zaključku da matrice za koje metoda konjugiranih gradijenata brže konvergira su:

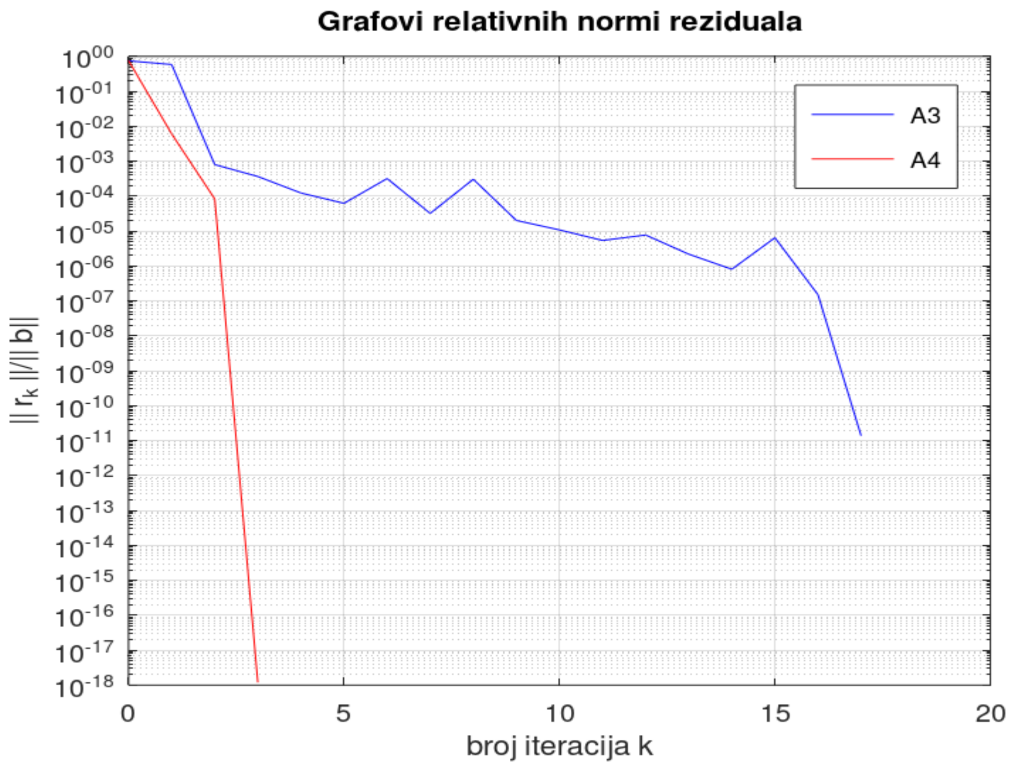
- matrice koje imaju puno višestrukih svojstvenih vrijednosti
- matrice koje imaju nakupine vrlo bliskih svojstvenih vrijednosti jer za njih polinom niskog stupnja može davati male vrijednosti.

Iz ovog zaključka slijedi i koloar koji kaže da da možemo očekivati sporiju konvergenciju za loše uvjetovane matrice.

Koloar. Primjenjiva je sljedeća ocjena greške $||e_k||_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa_2(A)}-1}{\sqrt{\kappa_2(A)}+1}\right)^k ||e_0||_A$, pri čemu je

$\kappa_2\ (A) = ||A||_2||A^{-1}||_2 = \lambda max\ /\ \lambda min$ broj uvjetovanosti matrice A.

Pogledajmo sada grafove normi grešaka i relativnih normi reziduala. Grafovi samo potvrđuju gornje razmatranje da imamo sporu konvergenciju za matricu A_3 te brzu konvergenciju za A_4.



Iz diskutiranog vidimo da se dobiveni rezultati poklapaju s gore navedenim svojstvima matrice.