Zeros de Funções Reais

Cálculo Numérico

Bóris Marin

UFABC

Resolvendo Equações

O Método de Newton-Raphson

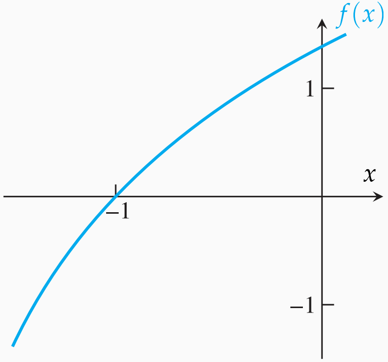
- O método de Newton-Raphson também é um método iterativo, mas que (frequentemente) converge mais rápido do que os métodos linearmente convergentes vistos anteriormente.

O Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson também é um método iterativo, mas que (frequentemente) converge mais rápido do que os métodos linearmente convergentes vistos anteriormente.
- Lembremos (FUV!) da associação entre a derivada e a melhor aproximação linear para uma função.

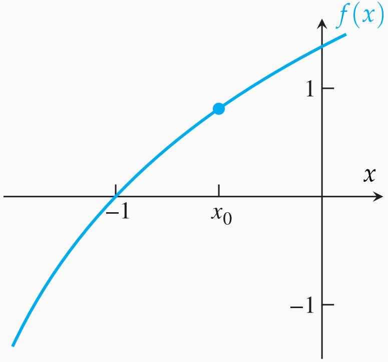
O Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson também é um método iterativo, mas que (frequentemente) converge mais rápido do que os métodos linearmente convergentes vistos anteriormente.
- Lembremos (FUV!) da associação entre a derivada e a melhor aproximação linear para uma função.



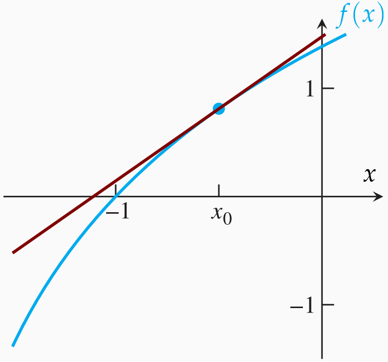
O Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson também é um método iterativo, mas que (frequentemente) converge mais rápido do que os métodos linearmente convergentes vistos anteriormente.
- Lembremos (FUV!) da associação entre a derivada e a melhor aproximação linear para uma função.



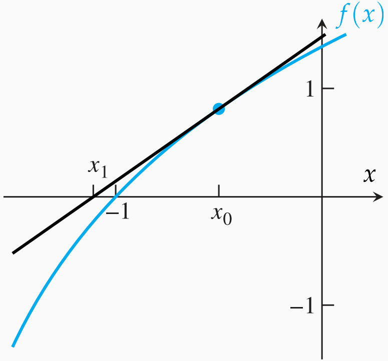
O Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson também é um método iterativo, mas que (frequentemente) converge mais rápido do que os métodos linearmente convergentes vistos anteriormente.
- Lembremos (FUV!) da associação entre a derivada e a melhor aproximação linear para uma função.



O Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson também é um método iterativo, mas que (frequentemente) converge mais rápido do que os métodos linearmente convergentes vistos anteriormente.
- Lembremos (FUV!) da associação entre a derivada e a melhor aproximação linear para uma função.



O Método de Newton-Raphson

- Começamos com uma estimativa x_0 para a raiz, como sempre.

O Método de Newton-Raphson

- Começamos com uma estimativa x_0 para a raiz, como sempre.
- Toma-se a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em x_0.

O Método de Newton-Raphson

- Começamos com uma estimativa x_0 para a raiz, como sempre.
- Toma-se a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em x_0.
- Esta reta intercepta o eixo x em x_1 — a nova estimativa.

O Método de Newton-Raphson

- Começamos com uma estimativa x_0 para a raiz, como sempre.
- Toma-se a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em x_0.
- Esta reta intercepta o eixo x em x_1 — a nova estimativa.
- A equação da reta tangente passando por x_0 é:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

O Método de Newton-Raphson

- Começamos com uma estimativa x_0 para a raiz, como sempre.
- Toma-se a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em x_0.
- Esta reta intercepta o eixo x em x_1 — a nova estimativa.
- A equação da reta tangente passando por x_0 é:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Esta reta intercepta o eixo x quando $y = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x - x_0) &= \cancelto{0}{y} - f(x_0) \\ x - x_0 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

O Método de Newton-Raphson

https://www.geogebra.org/m/khgQgtj3

Método de Newton — Erro/Exemplo

- Vamos usar o MN para encontrar soluções da equação $x^3 + x - 1 = 0$

i	x_n	$e_n = \lvert x_n - r \rvert$	e_n / e_{n-1}^2
0	-0.70000000	1.38232780	
1	0.12712551	0.55520230	0.2906
2	0.95767812	0.27535032	0.8933
3	0.73482779	0.05249999	0.6924
4	0.68459177	0.00226397	0.8214
5	0.68233217	0.00000437	0.8527
6	0.68232780	0.00000000	0.8541
7	0.68232780	0.00000000	

Método de Newton — Erro/Exemplo

- Vamos usar o MN para encontrar soluções da equação $x^3 + x - 1 = 0$
- Dado que $f'(x) = 3x^2 + 1$, devemos iterar

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

i	x_n	$e_n = \lvert x_n - r \rvert$	e_n/e_{n-1}^2
0	-0.70000000	1.38232780	
1	0.12712551	0.55520230	0.2906
2	0.95767812	0.27535032	0.8933
3	0.73482779	0.05249999	0.6924
4	0.68459177	0.00226397	0.8214
5	0.68233217	0.00000437	0.8527
6	0.68232780	0.00000000	0.8541
7	0.68232780	0.00000000	

Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.

Método de Newton — Erro/Exemplo

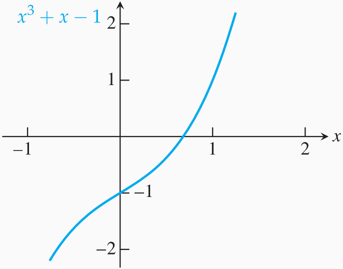
- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)

Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.

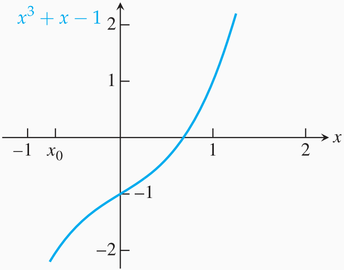
Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.



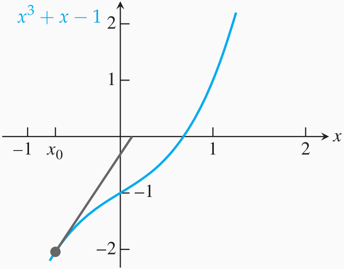
Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.



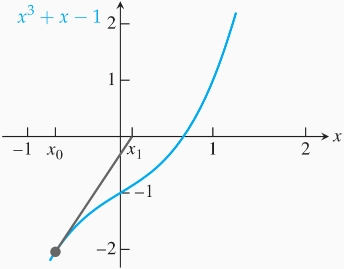
Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.



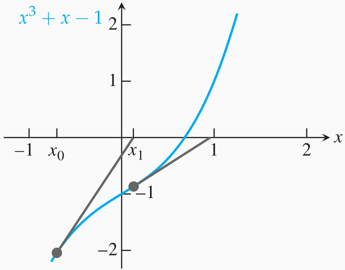
Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.



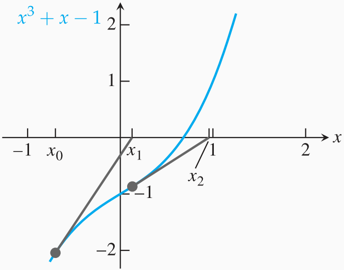
Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.



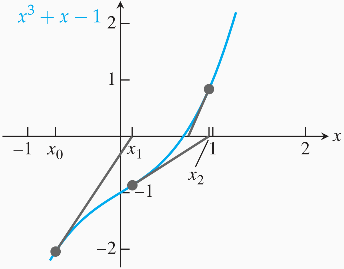
Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.



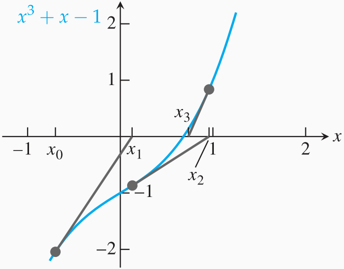
Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.



Método de Newton — Erro/Exemplo

- Após apenas 6 passos, temos uma aproximação para a raiz com 8 dígitos corretos.
- Notemos que, depois que o método se estabiliza, o número de casas corretas dobra a cada iteração (vermelho)
- Esta é uma característica de métodos que convergem *quadraticamente*.



Convergência do Método de Newton

- Sendo $e_n = |r - x_n|$ o erro no passo n, dizemos que um método iterativo é *quadraticamente convergente* se

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} < \infty$$

Convergência do Método de Newton

- Sendo $e_n = |r - x_n|$ o erro no passo n, dizemos que um método iterativo é *quadraticamente convergente* se

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} < \infty$$

- Parece que o Método de Newton-Raphson está convergindo quadraticamente no nosso exemplo. Antes, verifiquemos que ele converge localmente, dado que é uma IPF de forma

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (f'(x) \neq 0)$$

$$\implies g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Convergência do Método de Newton

- Sendo $e_n = |r - x_n|$ o erro no passo n, dizemos que um método iterativo é *quadraticamente convergente* se

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} < \infty$$

- Parece que o Método de Newton-Raphson está convergindo quadraticamente no nosso exemplo. Antes, verifiquemos que ele converge localmente, dado que é uma IPF de forma

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (f'(x) \neq 0)$$
$$\implies g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

- Como $f(r) = 0$ (raiz!), temos que $g'(r) = 0$: Converge!

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Lembremos (FUV!) do Teorema de Taylor: uma função pode ser expandida ao redor de um ponto x_0 em termos de um polinômio

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}}_{\text{Resto de Taylor}}$$

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Lembremos (FUV!) do Teorema de Taylor: uma função pode ser expandida ao redor de um ponto x_0 em termos de um polinômio

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}}_{\text{Resto de Taylor}}$$

- A parte polinomial até ordem k em $x - x_0$ (que não contém o Resto) chama-se **Polinômio de Taylor de ordem** k.

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Lembremos (FUV!) do Teorema de Taylor: uma função pode ser expandida ao redor de um ponto x_0 em termos de um polinômio

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}}_{\text{Resto de Taylor}}$$

- A parte polinomial até ordem k em $x - x_0$ (que não contém o Resto) chama-se **Polinômio de Taylor de ordem** k.
- Note que a $k + 1$-derivada no Resto é calculada num ponto c entre x e x_0.

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Queremos encontrar uma raiz r de $f(x)$, usando o MN.

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Queremos encontrar uma raiz r de $f(x)$, usando o MN.
- Expandimos $f(x)$ ao redor de uma estimativa x_n em Taylor (1a. ordem), visando determinar $f(r)$:

$$f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + f''(c_n)\frac{(r - x_n)^2}{2!}$$

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Queremos encontrar uma raiz r de $f(x)$, usando o MN.
- Expandimos $f(x)$ ao redor de uma estimativa x_n em Taylor (1a. ordem), visando determinar $f(r)$:

$$f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + f''(c_n)\frac{(r - x_n)^2}{2!}$$

- Lembremos que c_n está entre x_n e r. Como r é uma raiz, temos

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + f''(c_n)\frac{(r - x_n)^2}{2!}$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = r - x_n + \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}\frac{(r - x_n)^2}{2} \qquad (f'(x_n) \neq 0)$$

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Podemos então comparar a próxima iterada do MN com a raiz (lembrando que $e_n = |x_n - r|$):

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} \frac{(r - x_n)^2}{2}$$

$$x_{n+1} - r = e_n^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} = e_n^2 \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right|$$

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Podemos então comparar a próxima iterada do MN com a raiz (lembrando que $e_n = |x_n - r|$):

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} \frac{(r - x_n)^2}{2}$$

$$x_{n+1} - r = e_n^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} = e_n^2 \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right|$$

- Como c_n está entre x_n e r, também convergirá para r:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|$$

Convergência Quadrática do Método de Newton

- Podemos então comparar a próxima iterada do MN com a raiz (lembrando que $e_n = |x_n - r|$):

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} \frac{(r - x_n)^2}{2}$$

$$x_{n+1} - r = e_n^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$$

$$e_{n+1} = e_n^2 \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right|$$

- Como c_n está entre x_n e r, também convergirá para r:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|$$

- Ou seja, o MN converge quadraticamente, com $e_{n+1} \approx M e_n^2$ (supondo $f'(r) \neq 0$).

Comparando Convergência

- Métodos linearmente convergentes: $e_{n+1} \approx S e_n$

Comparando Convergência

- Métodos linearmente convergentes: $e_{n+1} \approx S e_n$
    - Bissecção: $S = 1/2$

Comparando Convergência

- Métodos linearmente convergentes: $e_{n+1} \approx S e_n$
  - Bissecção: $S = 1/2$
  - IPF: $S = |g'(r)|$

Comparando Convergência

- Métodos linearmente convergentes: $e_{n+1} \approx S e_n$
  - Bissecção: $S = 1/2$
  - IPF: $S = |g'(r)|$
- Métodos quadraticamente convergentes: $e_{n+1} \approx M e_n^2$

Comparando Convergência

- Métodos linearmente convergentes: $e_{n+1} \approx S e_n$
  - Bissecção: $S = 1/2$
  - IPF: $S = |g'(r)|$
- Métodos quadraticamente convergentes: $e_{n+1} \approx M e_n^2$
  - Newton-Raphson: $M = |f''(r)/f'(r)|$

Comparando Convergência

- Métodos linearmente convergentes: $e_{n+1} \approx Se_n$
  - Bissecção: $S = 1/2$
  - IPF: $S = |g'(r)|$
- Métodos quadraticamente convergentes: $e_{n+1} \approx Me_n^2$
  - Newton-Raphson: $M = |f''(r)/f'(r)|$
- Apesar do valor de S ser crítico para métodos linearmente convergentes, o valor de M no caso quadrático não é tanto, devido ao termo com o erro ao quadrado

Comparando Convergência

- Métodos linearmente convergentes: $e_{n+1} \approx S e_n$
  - Bissecção: $S = 1/2$
  - IPF: $S = |g'(r)|$
- Métodos quadraticamente convergentes: $e_{n+1} \approx M e_n^2$
  - Newton-Raphson: $M = |f''(r)/f'(r)|$
- Apesar do valor de S ser crítico para métodos linearmente convergentes, o valor de M no caso quadrático não é tanto, devido ao termo com o erro ao quadrado
- A quarta coluna na tabela anterior agora faz mais sentido: para $f(x) = x^3 + x - 1$, temos $|f''(x_7)/f'(x_7)| \approx 0.85$

Raízes Babilônicas (mais uma vez)

- Voltemos ao método Babilônico para encontar raízes quadradas. Aplicando o MN a $f(x) = x^2 - a$, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Raízes Babilônicas (mais uma vez)

- Voltemos ao método Babilônico para encontar raízes quadradas. Aplicando o MN a $f(x) = x^2 - a$, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

- Ou seja, o Método Babilônico é um caso particular $(a = 2)$ do MN.

Raízes Babilônicas (mais uma vez)

- Voltemos ao método Babilônico para encontar raízes quadradas. Aplicando o MN a $f(x) = x^2 - a$, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

- Ou seja, o Método Babilônico é um caso particular $(a = 2)$ do MN.
- Verifiquems a convergência a $\sqrt{a}$. Sendo

$$f'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a}$$
$$f''(\sqrt{a}) = 2$$

temos que o método converge quadraticamente, já que

$$e_{n+1} \approx M e_n^2 \qquad M = \frac{2}{2 \cdot 2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Convergência Linear do Método de Newton

- Obtemos a expressão para o erro no MN assumindo que $f'(r) \neq 0$. Isso quer dizer que ele não funciona neste caso?

Convergência Linear do Método de Newton

- Obtemos a expressão para o erro no MN assumindo que $f'(r) \neq 0$. Isso quer dizer que ele não funciona neste caso?
- Vejamos um exemplo: vamos usar o MN para encontrar a raiz de $f(x) = x^2$ (que deve ser $r = 0$!)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Convergência Linear do Método de Newton

- Obtemos a expressão para o erro no MN assumindo que $f'(r) \neq 0$. Isso quer dizer que ele não funciona neste caso?
- Vejamos um exemplo: vamos usar o MN para encontrar a raiz de $f(x) = x^2$ (que deve ser $r = 0!$)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}$$

Convergência Linear do Método de Newton

- Obtemos a expressão para o erro no MN assumindo que $f'(r) \neq 0$. Isso quer dizer que ele não funciona neste caso?
- Vejamos um exemplo: vamos usar o MN para encontrar a raiz de $f(x) = x^2$ (que deve ser $r = 0$!)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}$$

- Ou seja, neste caso o MN é dado por uma divisão por dois!

Convergência Linear do Método de Newton

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$$

i	x_n	$e_n = \lvert x_n - r\rvert$	e_n/e_{n-1}
0	1.000	1.000	
1	0.500	0.500	0.5000
2	0.250	0.250	0.5000
3	0.125	0.125	0.5000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- Temos *convergência linear*, com $S = 1/2$!

Convergência Linear do Método de Newton

- Afinal, o MN é linearmente ou quadraticamente convergente?

Convergência Linear do Método de Newton

- Afinal, o MN é linearmente ou quadraticamente convergente?
- Como sempre, **depende**:

Convergência Linear do Método de Newton

- Afinal, o MN é linearmente ou quadraticamente convergente?
- Como sempre, **depende**:
  - Se r é uma **raiz dupla** de $f(x)$, ou seja, se $f'(r) = 0$, temos *convergência linear*

Convergência Linear do Método de Newton

- Afinal, o MN é linearmente ou quadraticamente convergente?
- Como sempre, **depende**:
  - Se r é uma **raiz dupla** de $f(x)$, ou seja, se $f'(r) = 0$, temos *convergência linear*
  - Se r é uma **raiz simples** de $f(x)$, ou seja, se $f'(r) \neq 0$, temos *convergência quadrática*

Convergência Linear do Método de Newton

- Afinal, o MN é linearmente ou quadraticamente convergente?
- Como sempre, **depende**:
  - Se r é uma **raiz dupla** de $f(x)$, ou seja, se $f'(r) = 0$, temos *convergência linear*
  - Se r é uma **raiz simples** de $f(x)$, ou seja, se $f'(r) \neq 0$, temos *convergência quadrática*
- Isto vale para quaisquer raízes com multiplicidade $m > 1$ (sendo as $m - 1$ derivadas nulas em r)

Convergência Linear do Método de Newton

- Afinal, o MN é linearmente ou quadraticamente convergente?
- Como sempre, **depende**:
  - Se r é uma **raiz dupla** de $f(x)$, ou seja, se $f'(r) = 0$, temos *convergência linear*
  - Se r é uma **raiz simples** de $f(x)$, ou seja, se $f'(r) \neq 0$, temos *convergência quadrática*
- Isto vale para quaisquer raízes com multiplicidade $m > 1$ (sendo as $m - 1$ derivadas nulas em r)
- Ou seja, no pior caso (raízes múltiplas), o Método de Newton está na mesma categoria de convergência que Bissecção ou Iteração do Ponto Fixo.

Método da Secante: Rápido, sem Derivadas!

- O Método de Newton converge mais rapidamente (fora o caso de raízes múltiplas) do que Bissecção e Iteração do Ponto Fixo.

Método da Secante: Rápido, sem Derivadas!

- O Método de Newton converge mais rapidamente (fora o caso de raízes múltiplas) do que Bissecção e Iteração do Ponto Fixo.
- Este ganho está associado à uma informação adicional acerca da função: sua derivada.

Método da Secante: Rápido, sem Derivadas!

- O Método de Newton converge mais rapidamente (fora o caso de raízes múltiplas) do que Bissecção e Iteração do Ponto Fixo.
- Este ganho está associado à uma informação adicional acerca da função: sua derivada.
- Infelizamente, nem sempre temos acesso a uma expressão analítica para a derivada da função. Será que há um método "no meio do caminho"?

Método da Secante: Rápido, sem Derivadas!

- O Método de Newton converge mais rapidamente (fora o caso de raízes múltiplas) do que Bissecção e Iteração do Ponto Fixo.
- Este ganho está associado à uma informação adicional acerca da função: sua derivada.
- Infelizmente, nem sempre temos acesso a uma expressão analítica para a derivada da função. Será que há um método "no meio do caminho"?
- O *Método da Secante* substitui a derivada por uma aproximação (via uma reta secante...), e converge quase tão rápido quanto o MN.

Método da Secante: Rápido, sem Derivadas!

- O Método de Newton converge mais rapidamente (fora o caso de raízes múltiplas) do que Bissecção e Iteração do Ponto Fixo.
- Este ganho está associado à uma informação adicional acerca da função: sua derivada.
- Infelizmente, nem sempre temos acesso a uma expressão analítica para a derivada da função. Será que há um método "no meio do caminho"?
- O *Método da Secante* substitui a derivada por uma aproximação (via uma reta secante...), e converge quase tão rápido quanto o MN.
- Há outros métodos baseados na mesma idéia, utilizando parábolas (Müller, interpolação quadrática inversa), que são utilizados em pacotes matemáticos "de gente grande"!

Método da Secante

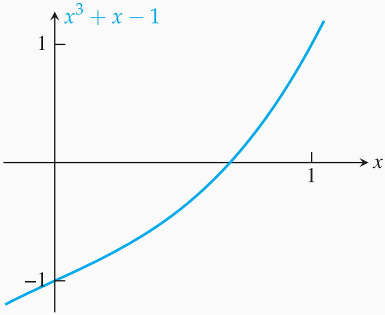
- A essência do Método da Secante consiste em aproximar a derivada como um quociente: a reta tangente passa a ser uma secante, passando pelas duas últimas estimativas para a raiz.

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Método da Secante

- A essência do Método da Secante consiste em aproximar a derivada como um quociente: a reta tangente passa a ser uma secante, passando pelas duas últimas estimativas para a raiz.

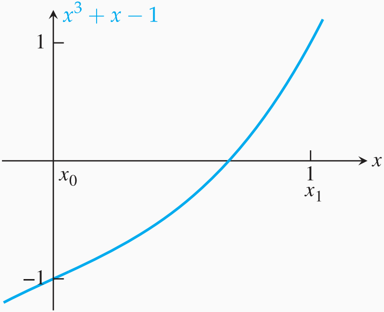
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$



Método da Secante

- A essência do Método da Secante consiste em aproximar a derivada como um quociente: a reta tangente passa a ser uma secante, passando pelas duas últimas estimativas para a raiz.

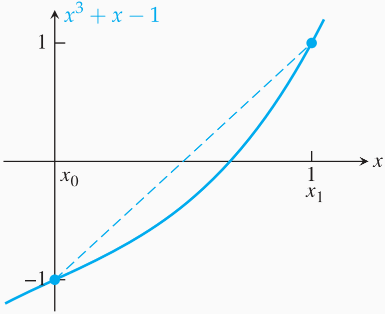
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$



Método da Secante

- A essência do Método da Secante consiste em aproximar a derivada como um quociente: a reta tangente passa a ser uma secante, passando pelas duas últimas estimativas para a raiz.

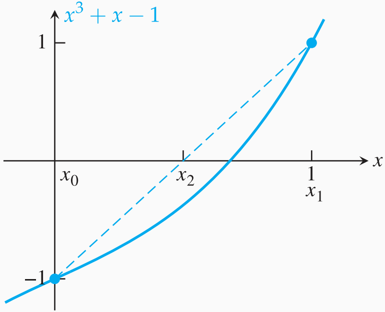
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$



Método da Secante

- A essência do Método da Secante consiste em aproximar a derivada como um quociente: a reta tangente passa a ser uma secante, passando pelas duas últimas estimativas para a raiz.

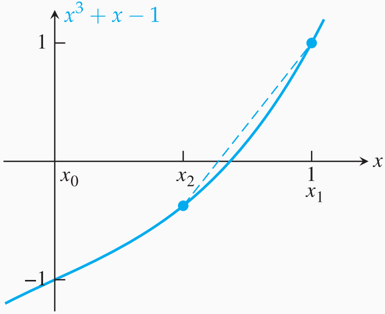
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$



Método da Secante

- A essência do Método da Secante consiste em aproximar a derivada como um quociente: a reta tangente passa a ser uma secante, passando pelas duas últimas estimativas para a raiz.

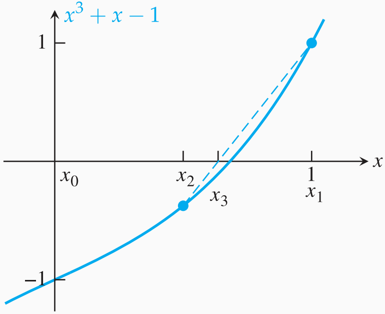
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$



Método da Secante

- A essência do Método da Secante consiste em aproximar a derivada como um quociente: a reta tangente passa a ser uma secante, passando pelas duas últimas estimativas para a raiz.

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$



Método da Secante

- Diferentemente de IPF e MN, o método da Secante requer **duas** estimativas iniciais.

Método da Secante

- Diferentemente de IPF e MN, o método da Secante requer **duas** estimativas iniciais.
- Supondo que o método converge para r e que $f'(r) \neq 0$, é possível mostrar que o o erro comporta-se como

$$e_{n+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right| e_n e_{n-1}$$

Método da Secante

- Diferentemente de IPF e MN, o método da Secante requer **duas** estimativas iniciais.
- Supondo que o método converge para r e que $f'(r) \neq 0$, é possível mostrar que o o erro comporta-se como

$$e_{n+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right| e_n e_{n-1}$$

- e que isso implica em

$$e_{n+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|^{\alpha - 1} e_n^{\alpha} \qquad \left(\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62\right)$$

Método da Secante

- Diferentemente de IPF e MN, o método da Secante requer **duas** estimativas iniciais.
- Supondo que o método converge para r e que $f'(r) \neq 0$, é possível mostrar que o o erro comporta-se como

$$e_{n+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right| e_n e_{n-1}$$

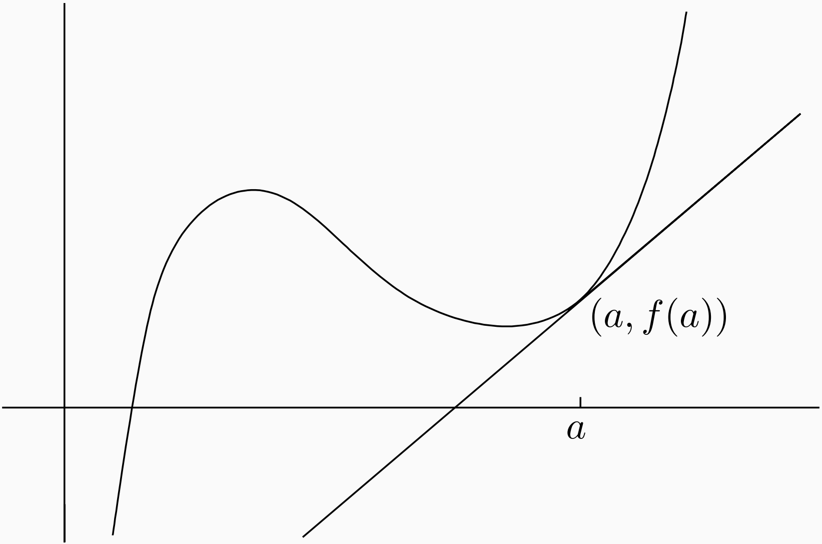
- e que isso implica em

$$e_{n+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|^{\alpha - 1} e_n^{\alpha} \qquad \left(\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62\right)$$

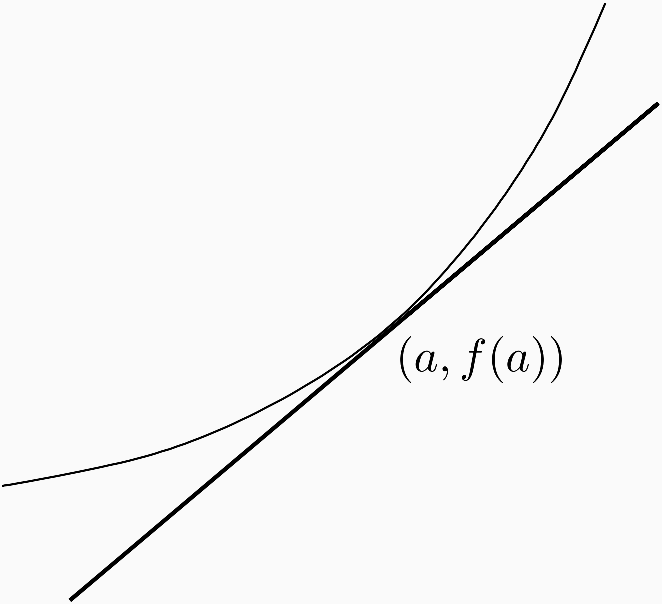
- Este tipo de convergência chama-se **superlinear**: a convergência do Método da Secante situa-se entre àquelas dos métodos linearmente e quadraticamente convergentes.

Extra: Polinômios de Taylor

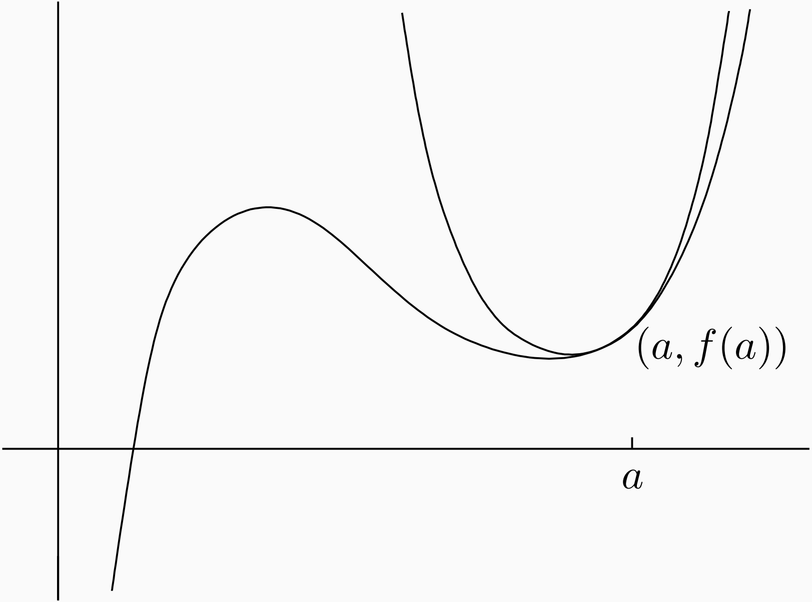
Polinômios de Taylor (bem pouco!)



Polinômios de Taylor (bem pouco!)



Polinômios de Taylor (bem pouco!)



Polinômios de Taylor (bem pouco!)

- Por que paramos em aproximações lineares?
- Podemos seguir o mesmo raciocínio que utilizamos no caso linear, mas tentar uma aproximação quadrática.
- Tínhamos a reta tangente a f em a, $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. O polinômio quadrático que melhor aproxima f nas proximidades de a é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

- Chamamos esta aproximação de $P_2(x)$

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

Polinômios de Taylor (bem pouco!)

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

- Note que, em $x = a$, temos $P_2(a) = f(a)$
- O mesmo ocorre para P':
  $P_2'(x) = f'(x) + f''(x)(x-a) \implies P_2'(a) = f'(a)$
- O mesmo ocorre para P'': $P_2''(a) = f''(a)$
- Ou seja, estamos tomando uma quadrática com mesma inclinação e *concavidade* do que f em $x = a$
- A partir daí, todas as outras derivadas são nulas ($f''(a)$ é constante)

Polinômios de Taylor

- Por que então não fazer um polinômio de grau $N > 2$?
- Os *Polinômios de Taylor* nos dão exatamente isso:

$$\boxed{P_N(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N}$$

- Ou, de forma mais compacta

$$\boxed{P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

Polinômios de Taylor

https://www.geogebra.org/m/UgzGFmA9