Interpolação

Cálculo Numérico

Bóris Marin

UFABC

Forma de Newton — Continuação

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Já vimos que há *apenas um* polinômio de grau $d \leq n - 1$ que interpola os n pontos.

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Já vimos que há *apenas um* polinômio de grau $d \leq n-1$ que interpola os n pontos.
- Como exemplo, vimos que há um poliômio de grau 2 que interpola $(0,1),(2,2),(3,4)$.

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 1 & & \\
 & & \frac{1}{2} & \\
2 & 2 & & \frac{1}{2} \\
 & & 2 & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-2)$$

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Já vimos que há *apenas um* polinômio de grau $d \leq n-1$ que interpola os n pontos.
- Como exemplo, vimos que há um poliômio de grau 2 que interpola $(0,1),(2,2),(3,4)$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & \color{red}{1} & & \\
 & & \color{teal}{\frac{1}{2}} & \\
2 & 2 & & \color{blue}{\frac{1}{2}} \\
 & & 2 & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

$$P_2(x) = \color{red}{1} + \color{teal}{\frac{1}{2}}(x-0) + \color{blue}{\frac{1}{2}}(x-0)(x-2)$$

- Ou seja, não há polinômio de graus 0 ou 1 que também o façam.

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Quantos polinômios *de grau 3* interpolam os mesmos pontos? Vimos outro exemplo, adicionando o ponto $(1, 0)$ à lista

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & 1 & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \\
2 & 2 & & \frac{1}{2} & \\
 & & 2 & & -\frac{1}{2} \\
3 & 4 & & 0 & \\
 & & 2 & & \\
1 & 0 & & &
\end{array}
$$

$$P_3(x) = P_2(x) - \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3)$$

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Quantos polinômios *de grau 3* interpolam os mesmos pontos? Vimos outro exemplo, adicionando o ponto $(1, 0)$ à lista

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \\
2 & 2 & & \frac{1}{2} & \\
 & & 2 & & -\frac{1}{2} \\
3 & 4 & & 0 & \\
 & & 2 & & \\
1 & 0 & & &
\end{array}
$$

$$P_3(x) = P_2(x) - \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3)$$

- Mudando y_4 para qualquer outro valor além de 0, obtemos um polinômio distinto de grau 3.

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Ou seja, há *infinitos* polinômios de grau 3 que interpolam 3 pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, já que para qualquer x_4 há infinitas escolhas de y_4 possíveis, cada uma originando um polinômio distinto

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Ou seja, há *infinitos* polinômios de grau 3 que interpolam 3 pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, já que para qualquer x_4 há infinitas escolhas de y_4 possíveis, cada uma originando um polinômio distinto
- Na verdade, olhando novamente $P_3(x)$

$$P_3(x) = P_2(x) - \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3)$$

vemos que é possível gerar polinômios de grau 3 por 3 pontos escolhendo coeficientes de 3o. grau genéricos:

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Ou seja, há *infinitos* polinômios de grau 3 que interpolam 3 pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, já que para qualquer x_4 há infinitas escolhas de y_4 possíveis, cada uma originando um polinômio distinto
- Na verdade, olhando novamente $P_3(x)$

$$P_3(x) = P_2(x) - \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3)$$

vemos que é possível gerar polinômios de grau 3 por 3 pontos escolhendo coeficientes de 3o. grau genéricos:

- Qualquer polinômio com forma

$$P_3(x) = P_2(x) + cx(x-2)(x-3) \;\; c \neq 0$$

passará por $(0,0), (2,2), (3,4)$

Quantos Polinômios de grau g interpolam n pontos?

- Ou seja, há *infinitos* polinômios de grau 3 que interpolam 3 pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, já que para qualquer x_4 há infinitas escolhas de y_4 possíveis, cada uma originando um polinômio distinto
- Na verdade, olhando novamente $P_3(x)$

$$P_3(x) = P_2(x) - \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3)$$

  vemos que é possível gerar polinômios de grau 3 por 3 pontos escolhendo coeficientes de 3o. grau genéricos:
- Qualquer polinômio com forma

$$P_3(x) = P_2(x) + cx(x-2)(x-3) \; c \neq 0$$

  passará por $(0,0), (2,2), (3,4)$
- A mesma técnica permite gerar polinômios de grau $g \geq n$.

Aproximando Funções por Polinômios

Polinômios e Compressão de Dados

- Suponha que os pontos a serem interpolados sejam "amostras" dos infinitos pontos na curva $y = f(x)$

Polinômios e Compressão de Dados

- Suponha que os pontos a serem interpolados sejam “amostras” dos infinitos pontos na curva $y = f(x)$
- O polinômio de grau $n - 1$ que interpola n destes pontos pode ser visto como uma versão “comprimida” de $f(x)$.

Polinômios e Compressão de Dados

- Suponha que os pontos a serem interpolados sejam "amostras" dos infinitos pontos na curva $y = f(x)$
- O polinômio de grau $n-1$ que interpola n destes pontos pode ser visto como uma versão "comprimida" de $f(x)$.
- Esta versão "simplificada" pode substituir $f(x)$ para fins computacionais

Polinômios e Compressão de Dados

- Suponha que os pontos a serem interpolados sejam “amostras” dos infinitos pontos na curva $y = f(x)$
- O polinômio de grau $n-1$ que interpola n destes pontos pode ser visto como uma versão “comprimida” de $f(x)$.
- Esta versão “simplificada” pode substituir $f(x)$ para fins computacionais
- Isto é o que ocorre, por exemplo, em uma calculadora: temos uma tecla *seno*. Mas a calculadora só possui *hardware* para fazer multiplicações e adições.

Polinômios e Compressão de Dados

- Suponha que os pontos a serem interpolados sejam "amostras" dos infinitos pontos na curva $y = f(x)$
- O polinômio de grau $n - 1$ que interpola n destes pontos pode ser visto como uma versão "comprimida" de $f(x)$.
- Esta versão "simplificada" pode substituir $f(x)$ para fins computacionais
- Isto é o que ocorre, por exemplo, em uma calculadora: temos uma tecla *seno*. Mas a calculadora só possui *hardware* para fazer multiplicações e adições.
- De alguma maneira, a calculadora utiliza polinômios (definidos em termos destas operações) para calcular outras funções.

Polinômios e Compressão de Dados

- Suponha que os pontos a serem interpolados sejam "amostras" dos infinitos pontos na curva $y = f(x)$
- O polinômio de grau $n - 1$ que interpola n destes pontos pode ser visto como uma versão "comprimida" de $f(x)$.
- Esta versão "simplificada" pode substituir $f(x)$ para fins computacionais
- Isto é o que ocorre, por exemplo, em uma calculadora: temos uma tecla *seno*. Mas a calculadora só possui *hardware* para fazer multiplicações e adições.
- De alguma maneira, a calculadora utiliza polinômios (definidos em termos destas operações) para calcular outras funções.
- Este é um tipo de compressão "com perdas" (*lossy*), já que $\sin(x)$ não é um polinômio. Mas **qual é o erro**?

Aproximando Funções por Polinômios

- Exemplo: Interpolemos a função $f(x) = \sin(x)$ por 4 pontos equispaçados em $[0, \pi/2]$

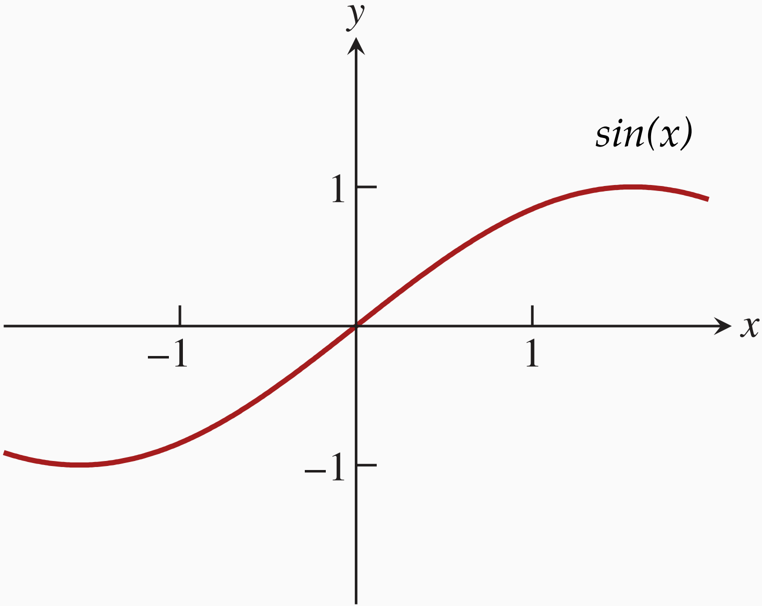
Aproximando Funções por Polinômios

- Exemplo: Interpolemos a função $f(x) = \sin(x)$ por 4 pontos equispaçados em $[0, \pi/2]$
- Representando os quatro pontos com 4 casas decimais, temos

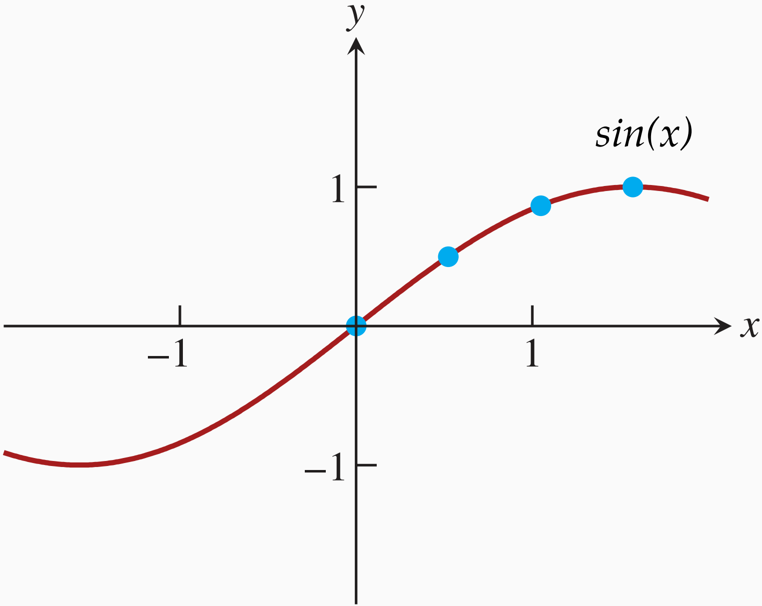
$$
\begin{array}{c|llll}
0 & 0.0000 & & & \\
 & & 0.9549 & & \\
\frac{\pi}{6} & 0.5000 & & -0.2443 & \\
 & & 0.6990 & & -0.1139 \\
\frac{2\pi}{6} & 0.8660 & & -0.4232 & \\
 & & 0.2559 & & \\
\frac{3\pi}{6} & 1.0000 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= 0 + 0.9549x - 0.2443x(x - \frac{\pi}{6}) - 0.1139x(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{3}) \\
&= 0 + x(0.9549 + (x - \frac{\pi}{6})(-0.2443 + (x - \frac{\pi}{3})(-0.1139)))
\end{aligned}
$$

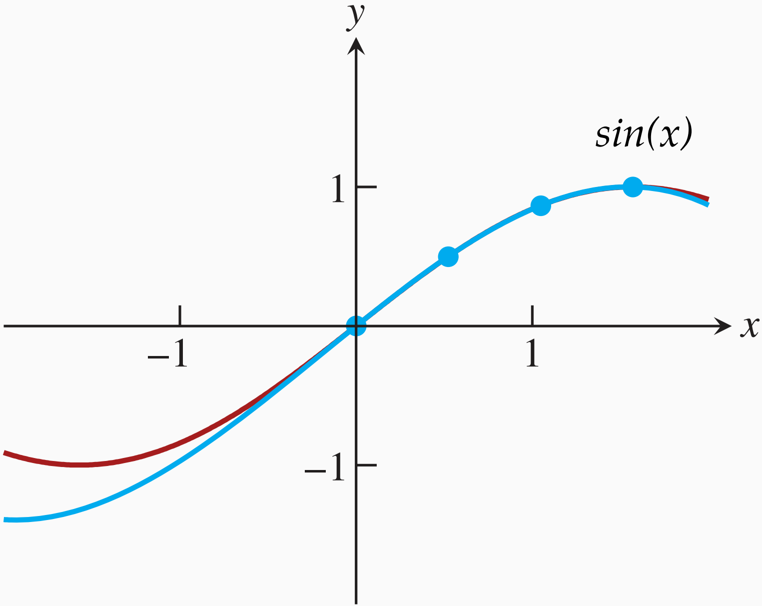
Aproximando Funções por Polinômios



Aproximando Funções por Polinômios



Aproximando Funções por Polinômios



Aproximando Funções por Polinômios

- Nesta resolução, o $P_3(x)$ é praticamente indistinguível de $\sin(x)$ em $[0, \pi/2]$

Aproximando Funções por Polinômios

- Nesta resolução, o $P_3(x)$ é praticamente indistinguível de $\sin(x)$ em $[0, \pi/2]$
- Mas e para o resto dos Reais (como na calculadora)?

Aproximando Funções por Polinômios

- Nesta resolução, o $P_3(x)$ é praticamente indistinguível de $\sin(x)$ em $[0, \pi/2]$
- Mas e para o resto dos Reais (como na calculadora)?
- Notemos que, dada as simetrias de $\sin(x)$, quaisquer valores da função podem ser reduzidos a valores em $[0, \pi/2]$

Aproximando Funções por Polinômios

- Nesta resolução, o $P_3(x)$ é praticamente indistinguível de $\sin(x)$ em $[0, \pi/2]$
- Mas e para o resto dos Reais (como na calculadora)?
- Notemos que, dada as simetrias de $\sin(x)$, quaisquer valores da função podem ser reduzidos a valores em $[0, \pi/2]$
- Isso se chama um *domínio fundamental* de $f(x) = \sin(x)$.

x	$\sin(x)$	$\sin_1(x)$	erro
1	0.8415	0.8411	0.0004
2	0.9093	0.9102	0.0009
3	0.1411	0.1428	0.0017
4	-0.7568	-0.7557	0.0011
14	0.9906	0.9928	0.0022
1000	0.8269	0.8263	0.0006

Aproximando Funções por Polinômios

- Nesta resolução, o $P_3(x)$ é praticamente indistinguível de $\sin(x)$ em $[0, \pi/2]$
- Mas e para o resto dos Reais (como na calculadora)?
- Notemos que, dada as simetrias de $\sin(x)$, quaisquer valores da função podem ser reduzidos a valores em $[0, \pi/2]$
- Isso se chama um *domínio fundamental* de $f(x) = \sin(x)$.

x	$\sin(x)$	$\sin_1(x)$	erro
1	0.8415	0.8411	0.0004
2	0.9093	0.9102	0.0009
3	0.1411	0.1428	0.0017
4	-0.7568	-0.7557	0.0011
14	0.9906	0.9928	0.0022
1000	0.8269	0.8263	0.0006

- O erro parece estar, em geral, abaixo de 1%.

Interpolação: Erro

Fórmula para o erro de interpolação

- Supondo o mesmo problema anterior: dada $f(x)$, construímos um polinômio interpolador $P(x)$.

Fórmula para o erro de interpolação

- Supondo o mesmo problema anterior: dada $f(x)$, construímos um polinômio interpolador $P(x)$.
- Supomos tomados n pontos do gráfico de $f(x)$, ou seja, $P(x)$ tem grau $n-1$ ou menor

Fórmula para o erro de interpolação

- Supondo o mesmo problema anterior: dada $f(x)$, construímos um polinômio interpolador $P(x)$.
- Supomos tomados n pontos do gráfico de $f(x)$, ou seja, $P(x)$ tem grau $n-1$ ou menor
- O **erro de interpolação** em x é $f(x) - P(x)$.

Fórmula para o erro de interpolação

- Supondo o mesmo problema anterior: dada $f(x)$, construímos um polinômio interpolador $P(x)$.
- Supomos tomados n pontos do gráfico de $f(x)$, ou seja, $P(x)$ tem grau $n-1$ ou menor
- O **erro de interpolação** em x é $f(x) - P(x)$.
- Este erro é dado por:

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

com c entre o maior o menor dentre $x, x_1, \dots, x_n$

Erro de interpolação: seno

- Com esta fórmula, podemos calcular o erro na nossa aproximação de $\sin(x)$.

$$\sin(x) - P(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{2\pi}{6}\right)\left(x-\frac{3\pi}{6}\right)}{4!} f''''(x)$$

Erro de interpolação: seno

- Com esta fórmula, podemos calcular o erro na nossa aproximação de $\sin(x)$.

$$\sin(x) - P(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{2\pi}{6}\right)\left(x-\frac{3\pi}{6}\right)}{4!} f''''(x)$$

- Temos $0 < c < \pi/2$. Como $f''''(x) = \sin(x)$ está entre 0 e 1 neste intervalo, temos um majorante para o erro:

$$|\sin(x) - P(x)| \leq \frac{\left|(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{2\pi}{6}\right)\left(x-\frac{3\pi}{6}\right)\right|}{24} |1|$$

Erro de interpolação: seno

- Para $x = 1$, o "pior caso" possível é então

$$|\sin(1) - P(1)| \leq \frac{\left|(1-0)\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\left(1-\frac{2\pi}{6}\right)\left(1-\frac{3\pi}{6}\right)\right|}{24}|1| \approx 0.0005348$$

Erro de interpolação: seno

- Para $x = 1$, o "pior caso" possível é então

$$|\sin(1) - P(1)| \leq \frac{\left|(1-0)\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\left(1-\frac{2\pi}{6}\right)\left(1-\frac{3\pi}{6}\right)\right|}{24}|1| \approx 0.0005348$$

- Tínhamos obtido 0.0004 para $x = 1$, o que está dentro do 'pior caso'.

Erro de interpolação: seno

- Para $x = 1$, o "pior caso" possível é então

$$|\sin(1) - P(1)| \leq \frac{\left|(1-0)\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\left(1-\frac{2\pi}{6}\right)\left(1-\frac{3\pi}{6}\right)\right|}{24}|1| \approx 0.0005348$$

- Tínhamos obtido 0.0004 para $x = 1$, o que está dentro do 'pior caso'.
- Note que o erro será menor para x longe das bordas (mais termos menores nos produtos). Por exemplo, em $x = 0.2$

$$|\sin(0.2) - P(0.2)| \leq \frac{\left|(0.2-0)\left(0.2-\frac{\pi}{6}\right)\left(0.2-\frac{2\pi}{6}\right)\left(0.2-\frac{3\pi}{6}\right)\right|}{24}|1| \approx 0.00313$$

Erro de interpolação: seno

- Para $x = 1$, o "pior caso" possível é então

$$|\sin(1) - P(1)| \leq \frac{\left|(1-0)\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\left(1-\frac{2\pi}{6}\right)\left(1-\frac{3\pi}{6}\right)\right|}{24}|1| \approx 0.0005348$$

- Tínhamos obtido 0.0004 para $x = 1$, o que está dentro do 'pior caso'.
- Note que o erro será menor para x longe das bordas (mais termos menores nos produtos). Por exemplo, em $x = 0.2$

$$|\sin(0.2) - P(0.2)| \leq \frac{\left|(0.2-0)\left(0.2-\frac{\pi}{6}\right)\left(0.2-\frac{2\pi}{6}\right)\left(0.2-\frac{3\pi}{6}\right)\right|}{24}|1| \approx 0.00313$$

- ou seja, o erro máximo é seis vezes maior para um ponto mais próximo da borda. Precisamente:

$$|\sin(0.2) - P(0.2)| = |0.19867 - 0.20056| = 0.00189$$

Erro de interpolação: exponencial

- Exemplo: encontre um majorante para a diferença entre $f(x) = e^x$ e o polinômio que a interpola em $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$, para os pontos $x = 0.25$ e $x = 0.75$

Erro de interpolação: exponencial

- Exemplo: encontre um majorante para a diferença entre $f(x) = e^x$ e o polinômio que a interpola em $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$, para os pontos $x = 0.25$ e $x = 0.75$
- Erro numa interpolação:

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

Erro de interpolação: exponencial

- Exemplo: encontre um majorante para a diferença entre $f(x) = e^x$ e o polinômio que a interpola em $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$, para os pontos $x = 0.25$ e $x = 0.75$
- Erro numa interpolação:

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

- Não é necessário então construir o polinômio interpolador!

Erro de interpolação: exponencial

- Substituindo os pontos, temos

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{\left|(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right|}{5!} f^{(5)}(c)$$

com $-1 < c < 1$.

Erro de interpolação: exponencial

- Substituindo os pontos, temos

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{\left|(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right|}{5!} f^{(5)}(c)$$

  com $-1 < c < 1$.
- A quinta derivada é $f^{(5)}(c) = e^c$.

Erro de interpolação: exponencial

- Substituindo os pontos, temos

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{\left|(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right|}{5!} f^{(5)}(c)$$

  com $-1 < c < 1$.
- A quinta derivada é $f^{(5)}(c) = e^c$.
- Como e^x é estritamente crescente, seu máximo é o ponto mais a direita do intervalo, ou seja $|f^{(5)}| \leq e^1$ em $[-1, 1]$. Neste intervalo:

$$|e^x - P_4(x)| \leq \frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{5!} e$$

Erro de interpolação: exponencial

- Em $x = 0.25$, o erro de interpolação satisfaz

$$|e^{0.25} - P_4(0.25)| \leq \frac{(1.25)(0.75)(0.25)(-0.25)(-0.75)}{120} e \approx 0.000995$$

Erro de interpolação: exponencial

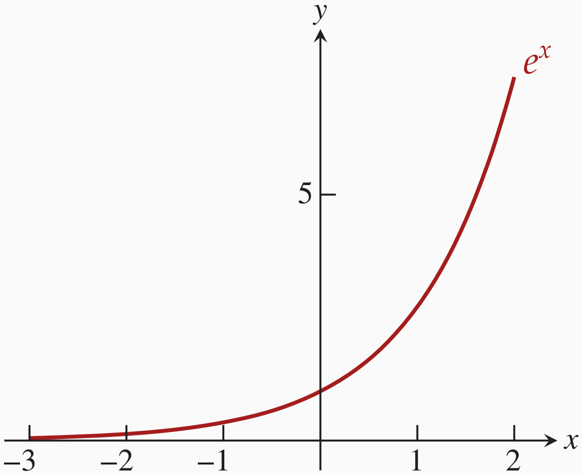
- Em $x = 0.25$, o erro de interpolação satisfaz

$$|e^{0.25} - P_4(0.25)| \leq \frac{(1.25)(0.75)(0.25)(-0.25)(-0.75)}{120} e \approx 0.000995$$

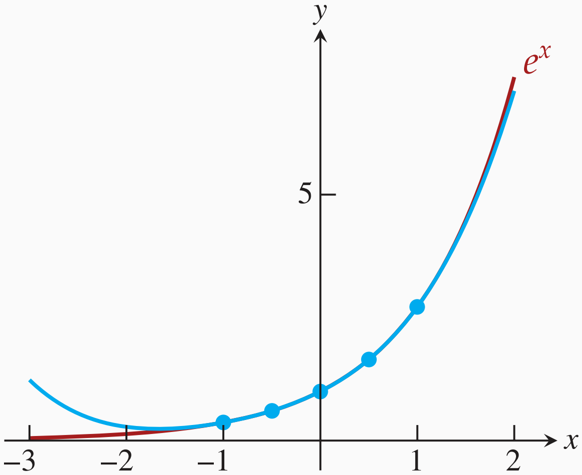
- Em $x = 0.75$, o erro é potencialmente maior:

$$|e^{0.75} - P_4(0.75)| \leq \frac{(1.75)(1.25)(0.75)(0.25)(0.25)}{120} e \approx 0.002323$$

Erro de interpolação: exponencial



Erro de interpolação: exponencial



Demonstração

Fenômeno de Runge

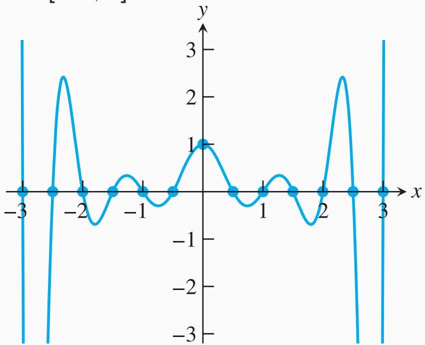
- Polinômios podem ajustar quaisquer conjuntos de pontos (com x_i distintos). Mas podem ser "mal-comportados".

Fenômeno de Runge

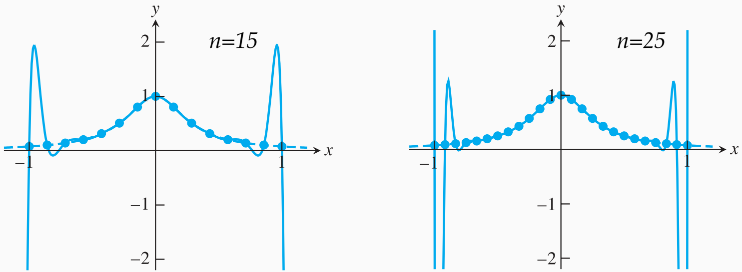
- Polinômios podem ajustar quaisquer conjuntos de pontos (com x_i distintos). Mas podem ser "mal-comportados".
- Será que o erro diminui ao aumentarmos o número de pontos em um intervalo?

Fenômeno de Runge

- Polinômios podem ajustar quaisquer conjuntos de pontos (com x_i distintos). Mas podem ser "mal-comportados".
- Será que o erro diminui ao aumentarmos o número de pontos em um intervalo?
- Exemplo de Runge: Interpolação de $f(x) = \frac{1}{1+12x^2}$ para x equispaçados em $[-1, 1]$

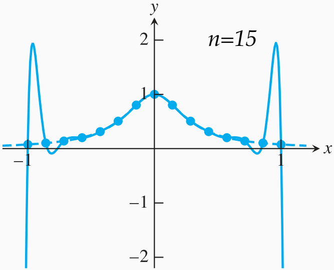


Fenômeno de Runge



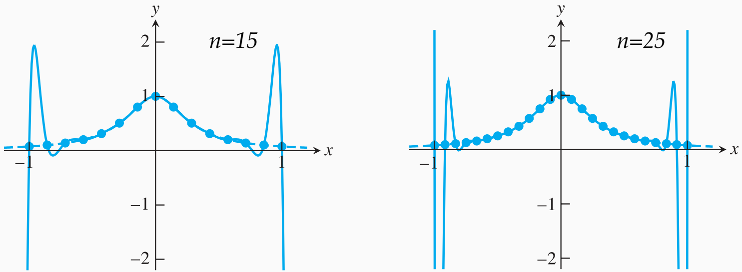
- Na verdade, não é possível garantir que $P_N \to f$ quando $n \to \infty$

Fenômeno de Runge



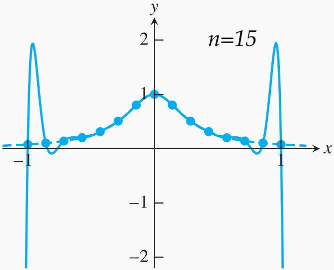
- Na verdade, não é possível garantir que $P_N \to f$ quando $n \to \infty$
- Este exemplo mostra que é possível obter erros bastante grandes para algumas funções

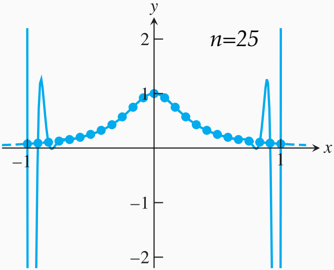
Fenômeno de Runge



- Na verdade, não é possível garantir que $P_N \to f$ quando $n \to \infty$
- Este exemplo mostra que é possível obter erros bastante grandes para algumas funções
- Alguma solução intuitiva?

Fenômeno de Runge





- Na verdade, não é possível garantir que $P_N \to f$ quando $n \to \infty$
- Este exemplo mostra que é possível obter erros bastante grandes para algumas funções
- Alguma solução intuitiva?
- Espaçamento não uniforme de nós pode ajudar (Chebyshev)

Interpolação por Partes

Splines

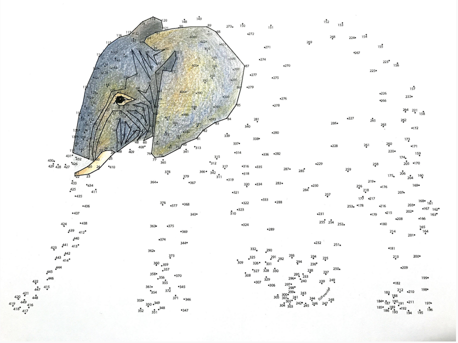
- Até agora, tentamos interpolar usando um único polinômio que passe por todos os pontos

Splines

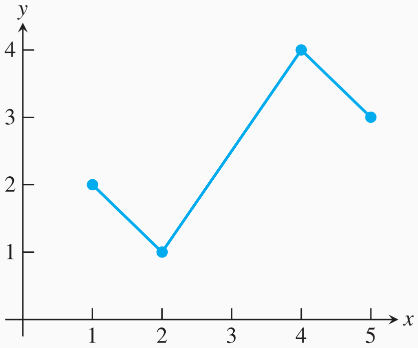
- Até agora, tentamos interpolar usando um único polinômio que passe por todos os pontos
- Uma alternativa é usar vários polinômios de grau menor, para subconjuntos de pontos

Splines

- Até agora, tentamos interpolar usando um único polinômio que passe por todos os pontos
- Uma alternativa é usar vários polinômios de grau menor, para subconjuntos de pontos
- O exemplo mais intuitivo (ligue os pontos!) é usar polinômios de primeiro grau a cada par de pontos



Splines Lineares



- Dados $(1,2),(2,1),(4,4)$, passamos uma função linear $y = a_i + b_i x$ entre cada para par $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$:

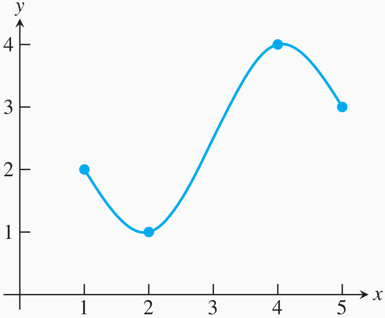
$$S_1(x) = 2 - (x-1) \text{ em } [1,2]$$

$$S_2(x) = 1 + \frac{3}{2}(x-2) \text{ em } [2,4]$$

$$S_3(x) = 4 - (x-4) \text{ em } [4,5].$$

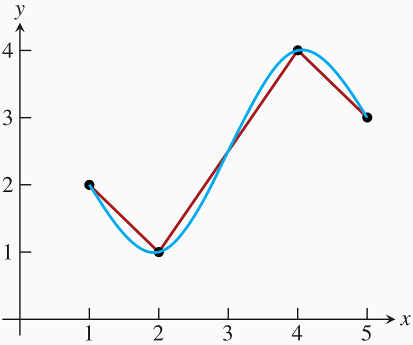
Splines Cúbicos

- E se tentarmos usar polinômios cúbicos ao invés de lineares?



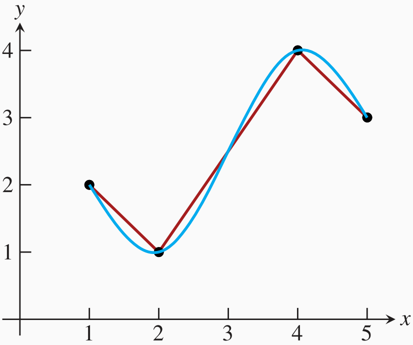
$$S_1(x) = 2 - \frac{13}{8}(x-1) + 0(x-1)^2 + \frac{5}{8}(x-1)^3 \text{ em } [1,2]$$
$$S_2(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 - \frac{5}{8}(x-2)^3 \text{ em } [1,2]$$
$$S_3(x) = 4 - \frac{1}{4}(x-4) - \frac{15}{8}(x-4)^2 + \frac{5}{8}(x-4)^3 \text{ em } [1,2]$$

Splines Cúbicos



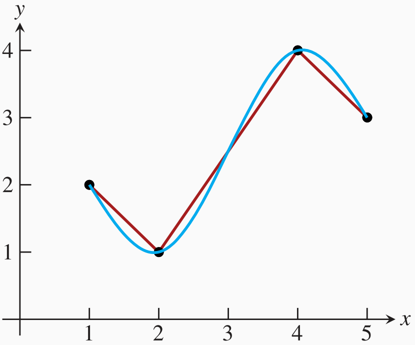
- Splines cúbicos resolvem o problema da falta de suavidade dos splines lineares

Splines Cúbicos



- Splines cúbicos resolvem o problema da falta de suavidade dos splines lineares
- Note as transições suaves entre cada S_i em cada ponto base, ou *nó*.

Splines Cúbicos



- Splines cúbicos resolvem o problema da falta de suavidade dos splines lineares
- Note as transições suaves entre cada S_i em cada ponto base, ou *nó*.
- Isso é obtido igualando as derivadas de ordem 0,1,2 de S_i e S_{i+1} em cada nó

Splines cúbicos

- Dados $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ (x_i distintos e crescentes), um spline cúbico é o conjunto de polinômios de grau 3

$$
\begin{aligned}
S_1(x) &= y_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \text{ em } [x_1, x_2] \\
S_2(x) &= y_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 \text{ em } [x_2, x_3] \\
&\vdots \\
S_{n-1}(x) &= y_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3 \\
&\qquad \text{em } [x_{n-1}, x_n]
\end{aligned}
$$

(com as propriedades listadas a seguir!)

Splines cúbicos

Propriedade 1

- $S_i(x_i) = y_i$ e $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$

Splines cúbicos

Propriedade 1

- $S_i(x_i) = y_i$ e $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$
- Esta propriedade garante que a spline interpola os pontos!

Splines cúbicos

Propriedade 2

- $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$

Splines cúbicos

Propriedade 2

- $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$
- Esta propriedade garante que as inclinações das partes vizinhas do spline sejam idênticas nos pontos de encontro.

Splines cúbicos

Propriedade 2

- $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$

Propriedade 2

- $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$
- Esta propriedade garante que as curvaturas das partes vizinhas do spline sejam idênticas nos pontos de encontro.

Splines cúbicos

- Para encontrar um spline cúbico, temos de determinar os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i que façam com que as propriedades 1-3 sejam satisfeitas.

Splines cúbicos

- Para encontrar um spline cúbico, temos de determinar os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i que façam com que as propriedades 1-3 sejam satisfeitas.
- Quantas condições são impostar por cada propriedade?

Splines cúbicos

- Para encontrar um spline cúbico, temos de determinar os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i que façam com que as propriedades 1-3 sejam satisfeitas.
- Quantas condições são impostar por cada propriedade?
- P1: $S_i(x_i) = y_i$ e $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$

Splines cúbicos

- Para encontrar um spline cúbico, temos de determinar os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i que façam com que as propriedades 1-3 sejam satisfeitas.
- Quantas condições são impostar por cada propriedade?
- P1: $S_i(x_i) = y_i$ e $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$
  - A 1a. parte da P1 já está embutida na forma do polinômio, já que a constante em cada S_i é y_i

Splines cúbicos

- Para encontrar um spline cúbico, temos de determinar os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i que façam com que as propriedades 1-3 sejam satisfeitas.
- Quantas condições são impostar por cada propriedade?
- P1: $S_i(x_i) = y_i$ e $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$
  - A 1a. parte da P1 já está embutida na forma do polinômio, já que a constante em cada S_i é y_i
  - A 2a. parte da P1 consiste em $n-1$ equações para os coeficientes.

Splines cúbicos

- Quantas condições são impostar por cada propriedade?

Splines cúbicos

- Quantas condições são impostar por cada propriedade?
- P2: $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$

Splines cúbicos

- Quantas condições são impostar por cada propriedade?
- P2: $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$
- P3: $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$

Splines cúbicos

- Quantas condições são impostar por cada propriedade?
- P2: $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$
- P3: $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$
    - cada uma delas nos dá $n-2$ equações

Splines cúbicos

- Quantas condições são impostar por cada propriedade?
- P2: $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$
- P3: $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ para $i = 2, \ldots, n-1$
  - cada uma delas nos dá $n-2$ equações
- total $n - 1 + 2(n-2) = 3n - 5$ equações independentes.

Splines cúbicos

- Temos então $3n - 5$ equações.

Splines cúbicos

- Temos então $3n - 5$ equações.
- Mas quantas incógnitas?

Splines cúbicos

- Temos então $3n - 5$ equações.
- Mas quantas incógnitas?
- Cada S_i, precisamos de b_i, c_i, d_i (os a_i são fixos), ou seja $3(n-1) = 3n - 3$ incógnitas.

Splines cúbicos

- Temos então $3n - 5$ equações.
- Mas quantas incógnitas?
- Cada S_i, precisamos de b_i, c_i, d_i (os a_i são fixos), ou seja $3(n-1) = 3n - 3$ incógnitas.
- Se não houver condições adicionais, o sistema resultante é subdeterminado, tendo infinitas soluções. Ou seja, há infinitos splines cúbicos passando por $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

Splines cúbicos

- Temos então $3n - 5$ equações.
- Mas quantas incógnitas?
- Cada S_i, precisamos de b_i, c_i, d_i (os a_i são fixos), ou seja $3(n-1) = 3n - 3$ incógnitas.
- Se não houver condições adicionais, o sistema resultante é subdeterminado, tendo infinitas soluções. Ou seja, há infinitos splines cúbicos passando por $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
- Costuma-se aproveitar-se desta "falta" de equações para impor condições adicionais sobre os splines. São necessárias duas equações adicionais para chegarmos a um sistema de $m = 3n - 3$ equações e m incógnitas.

Splines naturais

- A maneira mais simples de fazê-lo é exigir que o spline $S(x)$ tenha pontos de inflexão nos extremos do intervalo $[x_1, x_n]$

Splines naturais

- A maneira mais simples de fazê-lo é exigir que o spline $S(x)$ tenha pontos de inflexão nos extremos do intervalo $[x_1, x_n]$
- Isto equivale a impor

$$S_1''(x_1) = 0 \text{ e } S_{n-1}''(x_n) = 0$$

Splines naturais

- A maneira mais simples de fazê-lo é exigir que o spline $S(x)$ tenha pontos de inflexão nos extremos do intervalo $[x_1, x_n]$
- Isto equivale a impor

$$S_1''(x_1) = 0 \text{ e } S_{n-1}''(x_n) = 0$$

- Um spline que satisfaz a estas condições adicionais é chamado **spline natural**.

Splines naturais

- A maneira mais simples de fazê-lo é exigir que o spline $S(x)$ tenha pontos de inflexão nos extremos do intervalo $[x_1, x_n]$
- Isto equivale a impor

$$S_1''(x_1) = 0 \text{ e } S_{n-1}''(x_n) = 0$$

- Um spline que satisfaz a estas condições adicionais é chamado **spline natural**.
- (mas é possíveis escolher outras condições, como por exemplo fixar valores para a primeira, segunda ou até mesmo a terceira derivadas.)

Splines naturais

- Chegamos enfim a um sistema de $3n - 3$ equações e incógnitas.

Splines naturais

- Chegamos enfim a um sistema de $3n - 3$ equações e incógnitas.
- Pela 2a. parte de P1, temos $n - 1$ equações

$$
\begin{aligned}
y_2 = S_1(x_2) &= y_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 \\
&\vdots \\
y_n = S_{n-1}(x_n) &= y_{n-1} + b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 \\
&\qquad + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3
\end{aligned}
$$

Splines naturais

- A P2 gera $n-2$ equações

$$
\begin{aligned}
0 &= S_1'(x_2) - S_2'(x_2) = b_1 + 2c_1(x_2 - x_1) + 3d_1(x_2 - x_1)^2 - b_2 \\
&\vdots \\
0 &= S_{n-2}'(x_{n-1}) - S_{n-1}'(x_{n-1}) = b_{n-2} + 2c_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) \\
&\qquad\qquad + 3d_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2})^2 - b_{n-1}
\end{aligned}
$$

Splines naturais

- A P3 gera $n-2$ equações

$$0 = S_1''(x_2) - S_2''(x_2) = 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) - 2c_2$$

$$\vdots$$

$$0 = S_{n-2}''(x_{n-1}) - S_{n-1}''(x_{n-1}) = 2c_{n-2} + 6d_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) - 2c_{n-1}$$

Splines naturais

- Ao invés de resolver este sistema diretamente, há uma maneira de simplificá-lo, desacoplando as equações

Splines naturais

- Ao invés de resolver este sistema diretamente, há uma maneira de simplificá-lo, desacoplando as equações
- A idéia é chegar a um sistema menor para os c_i, e fórmulas diretas para b_i, d_i em termos dos c_i

Splines naturais

- Ao invés de resolver este sistema diretamente, há uma maneira de simplificá-lo, desacoplando as equações
- A idéia é chegar a um sistema menor para os c_i, e fórmulas diretas para b_i, d_i em termos dos c_i
- Para simplificar, introduzimos uma incógnita $c_n = S''_{n-1}(x_n)/2$

Splines naturais

- Ao invés de resolver este sistema diretamente, há uma maneira de simplificá-lo, desacoplando as equações
- A idéia é chegar a um sistema menor para os c_i, e fórmulas diretas para b_i, d_i em termos dos c_i
- Para simplificar, introduzimos uma incógnita $c_n = S''_{n-1}(x_n)/2$
- Usaremos a notação $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta_i = y_{i+1} - y_i$

Splines naturais

- Ao invés de resolver este sistema diretamente, há uma maneira de simplificá-lo, desacoplando as equações
- A idéia é chegar a um sistema menor para os c_i, e fórmulas diretas para b_i, d_i em termos dos c_i
- Para simplificar, introduzimos uma incógnita $c_n = S''_{n-1}(x_n)/2$
- Usaremos a notação $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta_i = y_{i+1} - y_i$
- Desta forma, podemos resolver as equações de P3 para

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i} \quad \text{para } i = 1, \ldots, n-1$$

Splines naturais

- Resolvendo as equações de $P1$ para b_i, temos

$$
\begin{aligned}
b_i &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i\delta_i - d_i\delta_i^2 \\
&= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i\delta_i - \frac{\delta_i}{3}(c_{i+1} - c_i) \\
&= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})
\end{aligned}
$$

Splines naturais

- Substituindo as equações para b_i e d_i anteriores naquelas da P2, temos mais $n-2$ equações:

$$\delta_1 c_1 + 2(\delta_1 + \delta_2)c_2 + \delta_2 c_3 = 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\delta_{n-2} c_{n-2} + 2(\delta_{n-2} + \delta_{n-1})c_{n-1} + \delta_{n-1} c_n = 3\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}}\right)$$

Splines naturais

- As duas última equações são dadas pela condição de spline natural:

$$
\begin{aligned}
S_1''(x_1) = 0 &\implies 2c_1 = 0 \\
S_{n-1}''(x_n) = 0 &\implies 2c_n = 0
\end{aligned}
$$

Splines naturais

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ \delta_1 & 2\delta_1 + 2\delta_2 & \delta_2 & 0 & \ddots & & \\ 0 & \delta_2 & 2\delta_2 + 2\delta_3 & \delta_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & & \delta_{n-2} & 2\delta_{n-2}2 + 2\delta_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ \vdots \\ \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Splines naturais

- Ou seja, depois que o sistema acima é resolvido para os c_i, encontramos os b_i e d_i via as respectivas equações dadas acima.

Splines naturais

- Ou seja, depois que o sistema acima é resolvido para os c_i, encontramos os b_i e d_i via as respectivas equações dadas acima.
- O sistema é *sempre* solúvel para os c_i (matriz estritamente diagonal dominante), o que leva a b_i, d_i também únicos.

Splines naturais

- Ou seja, depois que o sistema acima é resolvido para os c_i, encontramos os b_i e d_i via as respectivas equações dadas acima.
- O sistema é *sempre* solúvel para os c_i (matriz estritamente diagonal dominante), o que leva a b_i, d_i também únicos.
- Ou seja, para $n > 2$ e um conjunto de pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ com x_i distintos, há apenas um spline cúbico natural que interpola os pontos.

Splines naturais — exemplo

- Encontremos o spline cúbico natural passando por $(0, 3), (1, -2), (2, 1)$.

Splines naturais — exemplo

- Encontremos o spline cúbico natural passando por $(0,3),(1,-2),(2,1)$.
- Diretamente, temos $a_1 = y_1 = 3$, $a_2 = y_2 = -2$, $a_3 = y_3 = 1$

Splines naturais — exemplo

- Encontremos o spline cúbico natural passando por $(0, 3), (1, -2), (2, 1)$.
- Diretamente, temos $a_1 = y_1 = 3$, $a_2 = y_2 = -2$, $a_3 = y_3 = 1$
- As diferenças são $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\Delta_1 = -5$ e $\Delta_2 = 3$.

Splines naturais — exemplo

- Encontremos o spline cúbico natural passando por $(0, 3), (1, -2), (2, 1)$.
- Diretamente, temos $a_1 = y_1 = 3$, $a_2 = y_2 = -2$, $a_3 = y_3 = 1$
- As diferenças são $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\Delta_1 = -5$ e $\Delta_2 = 3$.
- O sistema para c_i fica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $[0, 6, 0]$

Splines naturais — exemplo

- Resolvemos então as equações para b_i, d_i:

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3\delta_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3\delta_2} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$b_1 = \frac{\Delta_1}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{3}(2c_1 + c_2) = -5 - \frac{1}{3}(6) = -7$$

$$b_2 = \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\delta_2}{3}(2c_2 + c_3) = 3 - \frac{1}{3}(12) = -1$$

Splines naturais — exemplo

- Resolvemos então as equações para b_i, d_i:

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3\delta_1} = \frac{6}{3} = 2$$
$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3\delta_2} = \frac{-6}{3} = -2$$
$$b_1 = \frac{\Delta_1}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{3}(2c_1 + c_2) = -5 - \frac{1}{3}(6) = -7$$
$$b_2 = \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\delta_2}{3}(2c_2 + c_3) = 3 - \frac{1}{3}(12) = -1$$

- O spline cúbico fica então

$$S_1(x) = 3 - 7x + 0x^2 + 2x^3 \text{ em } [0, 1]$$
$$S_2(x) = -2 - 1(x-1) + 6(x-1)^2 - 2(x-1)^3 \text{ em } [1, 2]$$