Diferenciação e Integração

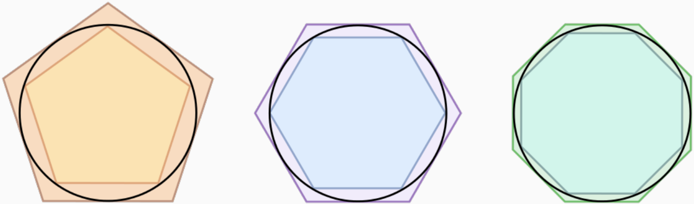
Cálculo Numérico

Bóris Marin

UFABC

Motivação

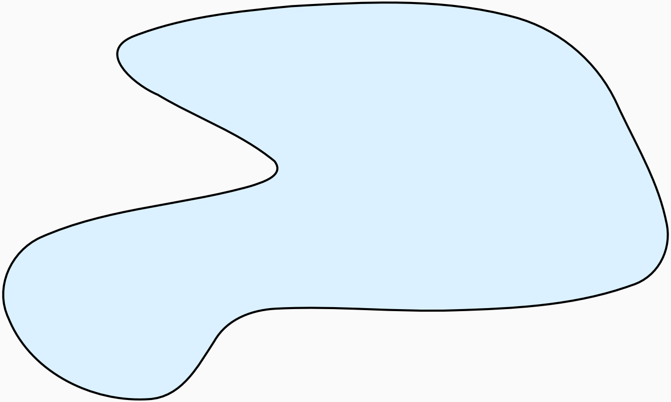
Área do círculo: Arquimedes



https://www.geogebra.org/m/Q3eP6x4R

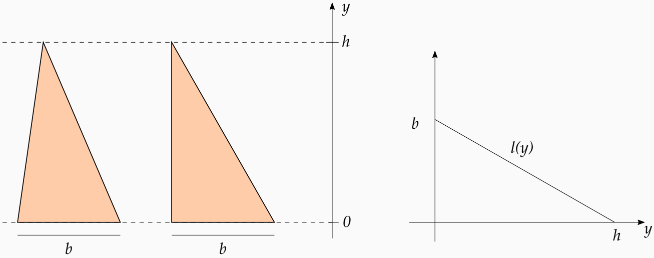
Áreas, volumes e comprimentos de curvas

Áreas, volumes e comprimentos de curvas

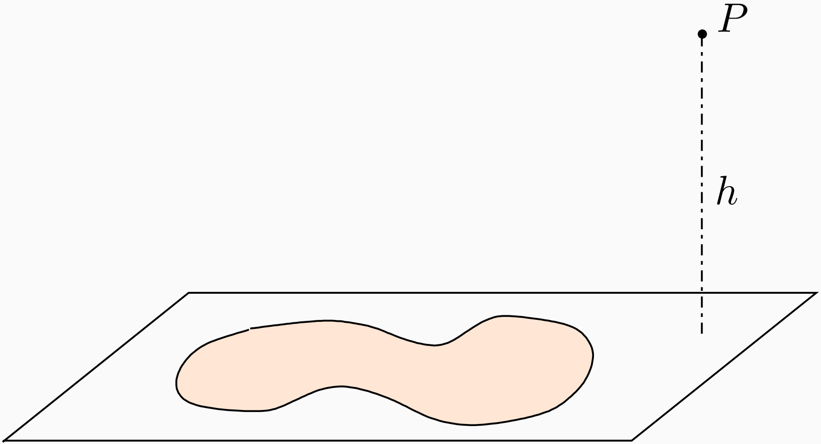


- Qual a área de uma figura arbitrária? Ou uma "ilha"?

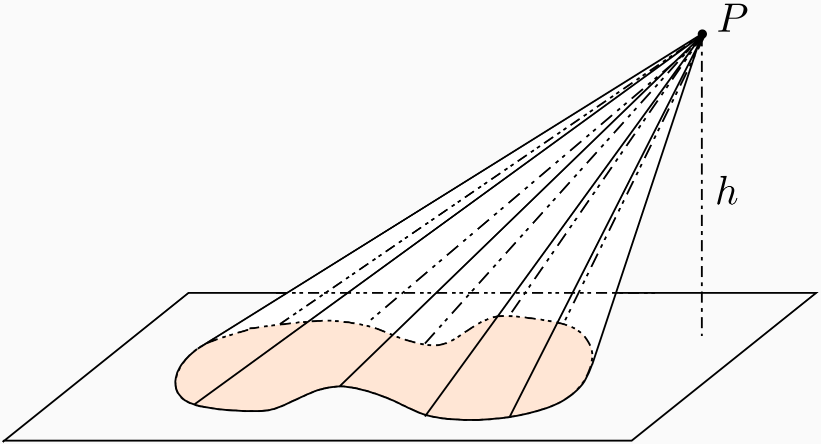
Áreas, volumes e comprimentos de curvas



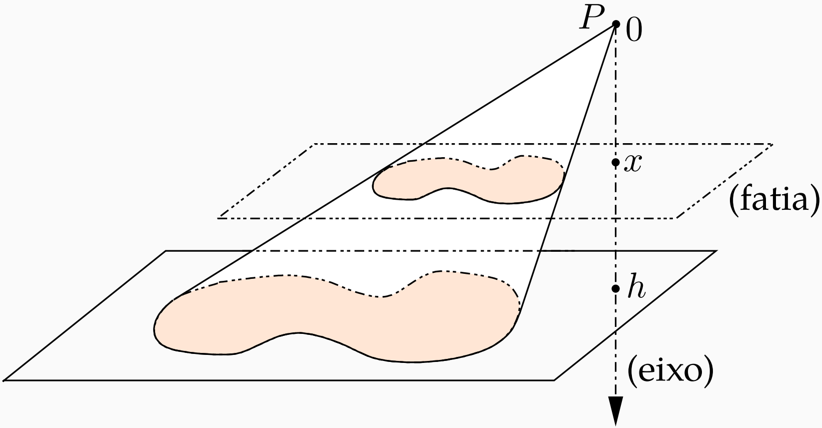
- Princípio de Cavalieri: "dados dois conjuntos A e B, se houver uma linha L tal que toda perpendicular a L cruze A e B em intervalos de tamanhos iguais, então A e B têm a mesma área."

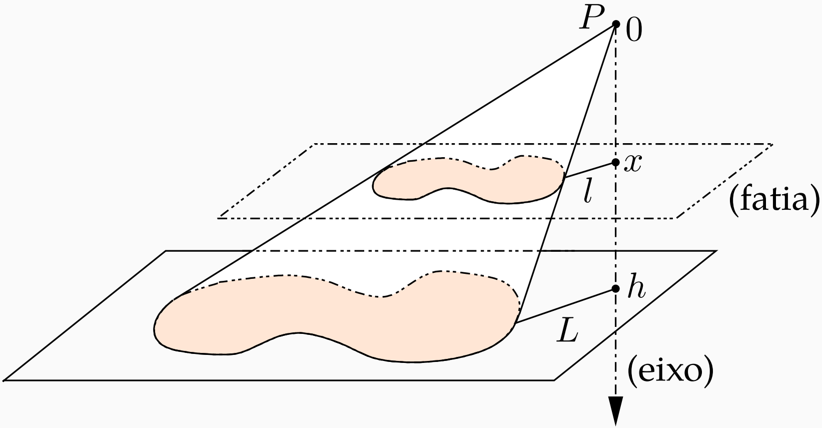

P
h

Áreas, volumes e comprimentos de curvas

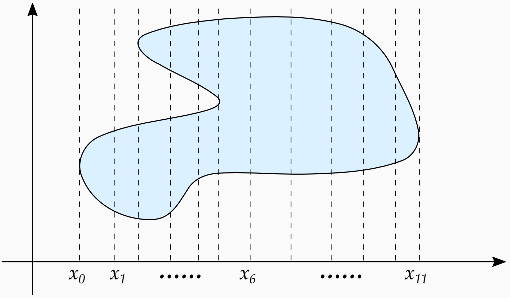


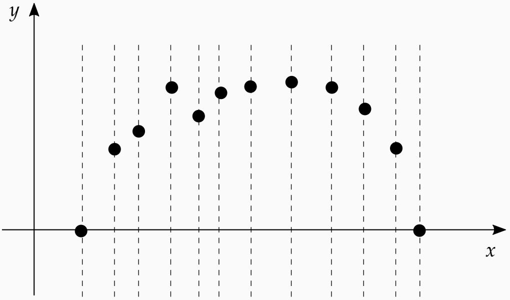
Áreas, volumes e comprimentos de curvas




P
0
x
l
(fatia)
h
L
(eixo)

Áreas, volumes e comprimentos de curvas





Teorema Fundamental do Cálculo

- Para que tudo isso? o TFC nos diz que, para calcular

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Para que tudo isso? o TFC nos diz que, para calcular

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- basta encontrar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, e fazer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Para que tudo isso? o TFC nos diz que, para calcular

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- basta encontrar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, e fazer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Nem todas as funções (na verdade, quase nenhuma), podem ser expressas como uma "fórmula" (combinações de funções elementares tipo $-(3 + 2\cos(x)))$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Para que tudo isso? o TFC nos diz que, para calcular

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- basta encontrar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, e fazer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Nem todas as funções (na verdade, quase nenhuma), podem ser expressas como uma "fórmula" (combinações de funções elementares tipo $-(3 + 2\cos(x)))$
- Mas são justamente essas que sabemos derivar/antiderivar!

Teorema Fundamental do Cálculo

- Para que tudo isso? o TFC nos diz que, para calcular

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- basta encontrar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, e fazer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Nem todas as funções (na verdade, quase nenhuma), podem ser expressas como uma "fórmula" (combinações de funções elementares tipo $-(3 + 2\cos(x)))$
- Mas são justamente essas que sabemos derivar/antiderivar!
- Mesmo nos atendo a este tipo de função, nem todas admitem primitivas em termos de combinações finitas de funções elementares.

Diferenciação Numérica

Diferenciação no Computador

- Há duas maneiras de fazer Cálculo no computador: *numericamente* e *simbolicamente*. Focaremos mais na primeira.

Diferenciação no Computador

- Há duas maneiras de fazer Cálculo no computador: *numericamente* e *simbolicamente*. Focaremos mais na primeira.
- Computação simbólica está mais alinhada com os métodos "elementares" do Cálculo: dada $f(x)$ em termos de combinações de funções elementares, seguimos regras (cadeia, produto etc) básicas e chegamos à derivada.

Diferenciação no Computador

- Há duas maneiras de fazer Cálculo no computador: *numericamente* e *simbolicamente*. Focaremos mais na primeira.
- Computação simbólica está mais alinhada com os métodos "elementares" do Cálculo: dada $f(x)$ em termos de combinações de funções elementares, seguimos regras (cadeia, produto etc) básicas e chegamos à derivada.
- O mesmo vale para integrais (no caso em que há primitiva elementar): basta que o computador siga as "regras básicas".

Diferenciação no Computador

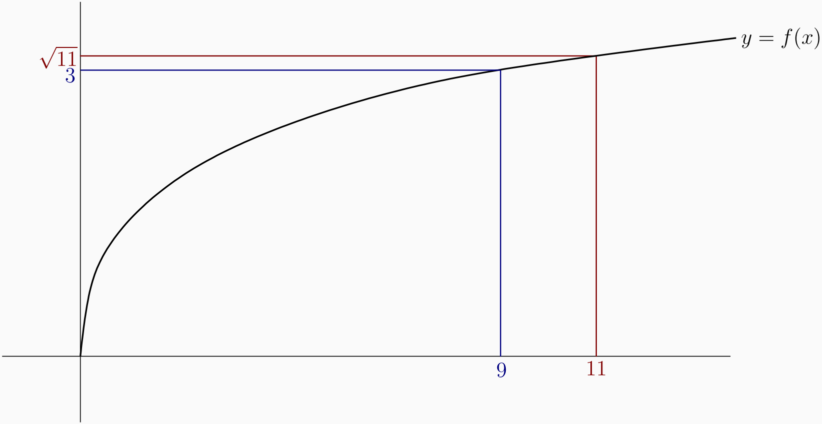
- Há duas maneiras de fazer Cálculo no computador: *numericamente* e *simbolicamente*. Focaremos mais na primeira.
- Computação simbólica está mais alinhada com os métodos "elementares" do Cálculo: dada $f(x)$ em termos de combinações de funções elementares, seguimos regras (cadeia, produto etc) básicas e chegamos à derivada.
- O mesmo vale para integrais (no caso em que há primitiva elementar): basta que o computador siga as "regras básicas".
- Na prática, funções são comumente dadas / medidas como uma conjunto tabulado de pontos (p. ex. lista de pares $\{(t_1, T_1), \ldots, (t_n, T_N)\}$ tempo/Temperatura)

Diferenciação no Computador

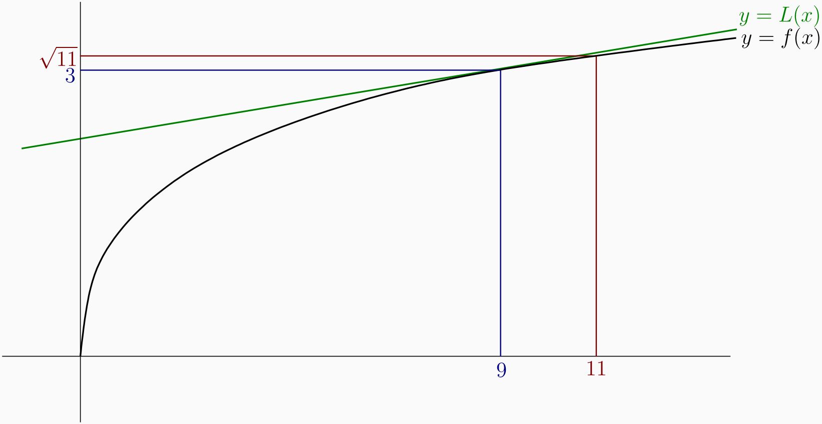
- Há duas maneiras de fazer Cálculo no computador: *numericamente* e *simbolicamente*. Focaremos mais na primeira.
- Computação simbólica está mais alinhada com os métodos "elementares" do Cálculo: dada $f(x)$ em termos de combinações de funções elementares, seguimos regras (cadeia, produto etc) básicas e chegamos à derivada.
- O mesmo vale para integrais (no caso em que há primitiva elementar): basta que o computador siga as "regras básicas".
- Na prática, funções são comumente dadas / medidas como uma conjunto tabulado de pontos (p. ex. lista de pares $\{(t_1, T_1), \ldots, (t_n, T_N)\}$ tempo/Temperatura)
- Neste caso, não é possível utilizar métodos simbólicos

Recapitulando: Polinômios de Taylor

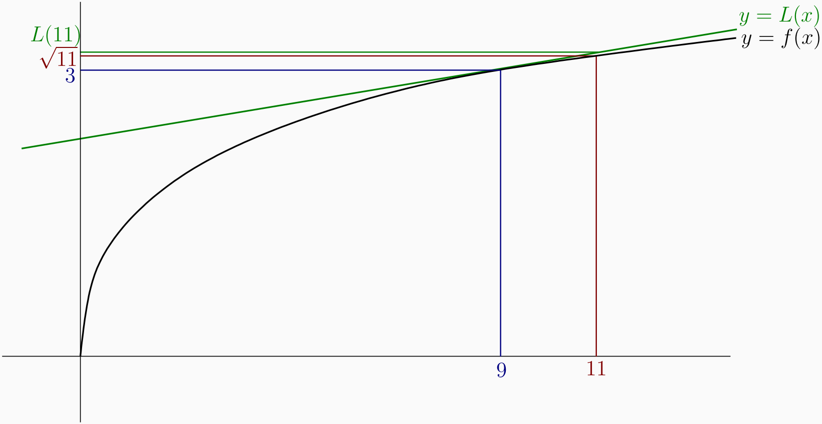
Linearização



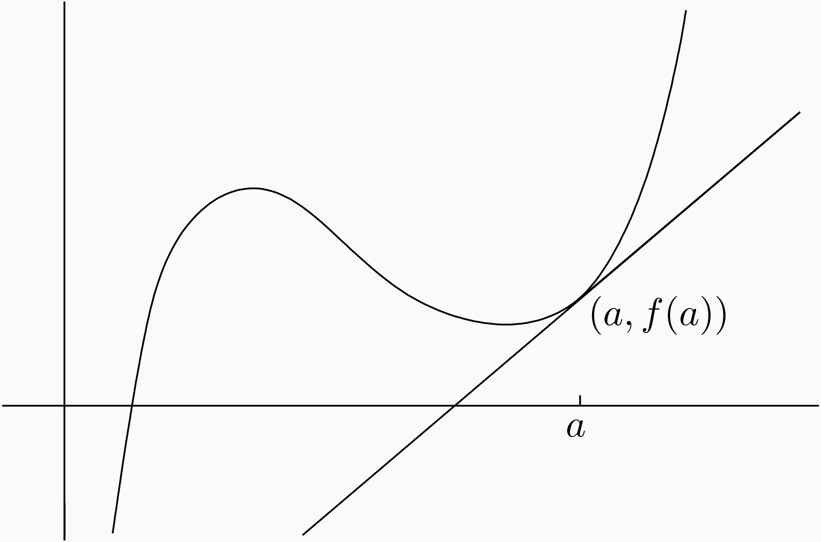
Linearização



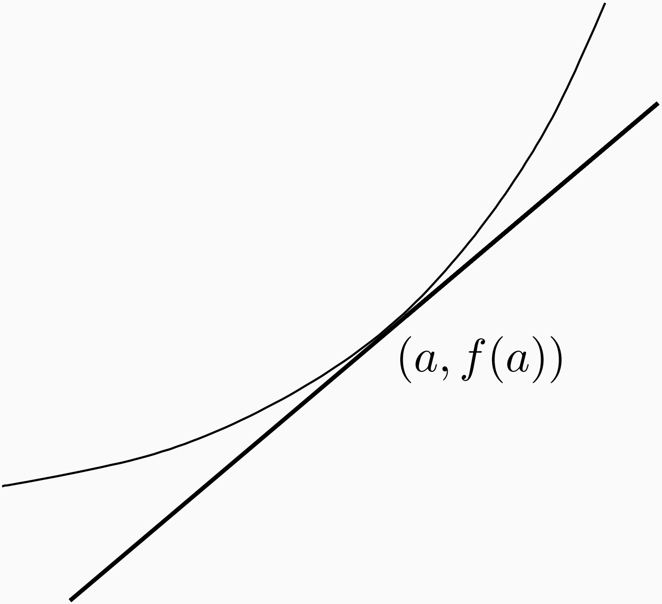
Linearização



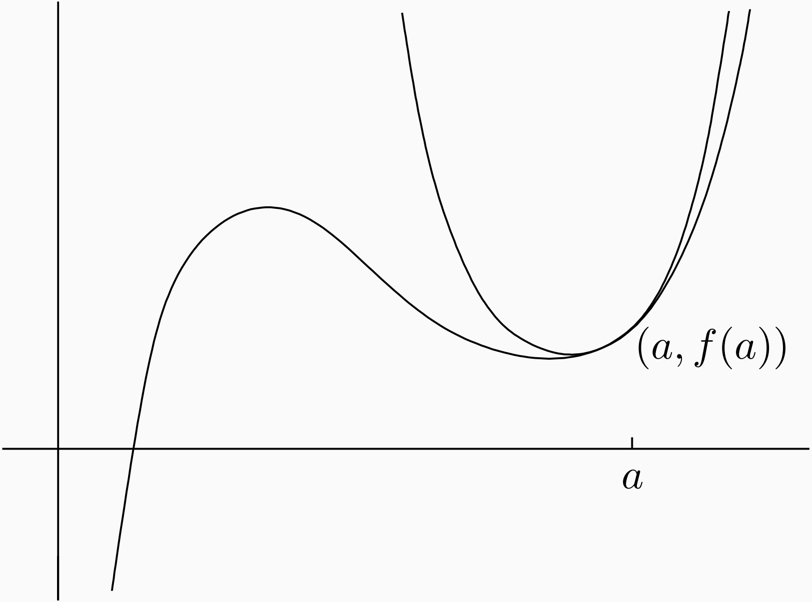
Polinômios de Taylor



Polinômios de Taylor



Polinômios de Taylor



Polinômios de Taylor

- Por que paramos em aproximações lineares?

Polinômios de Taylor

- Por que paramos em aproximações lineares?
- Podemos seguir o mesmo raciocínio que utilizamos no caso linear, mas tentar uma aproximação quadrática.

Polinômios de Taylor

- Por que paramos em aproximações lineares?
- Podemos seguir o mesmo raciocínio que utilizamos no caso linear, mas tentar uma aproximação quadrática.
- Tínhamos a reta tangente a f em a, $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. O polinômio quadrático que melhor aproxima f nas proximidades de a é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

Polinômios de Taylor

- Por que paramos em aproximações lineares?
- Podemos seguir o mesmo raciocínio que utilizamos no caso linear, mas tentar uma aproximação quadrática.
- Tínhamos a reta tangente a f em a, $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. O polinômio quadrático que melhor aproxima f nas proximidades de a é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

- Chamamos esta aproximação de $P_2(x)$

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

Polinômios de Taylor

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

- Note que, em $x = a$, temos $P_2(a) = f(a)$

Polinômios de Taylor

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

- Note que, em $x = a$, temos $P_2(a) = f(a)$
- O mesmo ocorre para P':
  $P_2'(x) = f'(x) + f''(x)(x-a) \implies P_2'(a) = f'(a)$

Polinômios de Taylor

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

- Note que, em $x = a$, temos $P_2(a) = f(a)$
- O mesmo ocorre para P':
  $P_2'(x) = f'(x) + f''(x)(x-a) \implies P_2'(a) = f'(a)$
- O mesmo ocorre para P'': $P_2''(a) = f''(a)$

Polinômios de Taylor

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

- Note que, em $x = a$, temos $P_2(a) = f(a)$
- O mesmo ocorre para P':
  $P_2'(x) = f'(x) + f''(x)(x-a) \implies P_2'(a) = f'(a)$
- O mesmo ocorre para P'': $P_2''(a) = f''(a)$
- Ou seja, estamos tomando uma quadrática com mesma inclinação e *concavidade* do que f em $x = a$

Polinômios de Taylor

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

- Note que, em $x = a$, temos $P_2(a) = f(a)$
- O mesmo ocorre para P':
  $P_2'(x) = f'(x) + f''(x)(x-a) \implies P_2'(a) = f'(a)$
- O mesmo ocorre para P'': $P_2''(a) = f''(a)$
- Ou seja, estamos tomando uma quadrática com mesma inclinação e *concavidade* do que f em $x = a$
- A partir daí, todas as outras derivadas são nulas ($f''(a)$ é constante)

Polinômios de Taylor

- Por que então não fazer um polinômio de grau $N > 2$?

Polinômios de Taylor

- Por que então não fazer um polinômio de grau $N > 2$?
- Os *Polinômios de Taylor* nos dão exatamente isso:

$$\boxed{P_N(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N}$$

Polinômios de Taylor

- Por que então não fazer um polinômio de grau $N > 2$?
- Os *Polinômios de Taylor* nos dão exatamente isso:

$$\boxed{P_N(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N}$$

- Ou, de forma mais compacta

$$\boxed{P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

Polinômios de Taylor

- Outra forma comum (e mais apropriada para nosso contexto) é expressá-los como

$$\boxed{f(x+h) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n}$$

Polinômios de Taylor

- Outra forma comum (e mais apropriada para nosso contexto) é expressá-los como

$$\boxed{f(x+h) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n}$$

- Neste caso, como fica $f(x-h)$?

Diferenciação

Diferenciação numérica: Diferenças Finitas

- Definição de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Diferenciação numérica: Diferenças Finitas

- Definição de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Pelo teorema de Taylor, se f for diferenciável ao menos duas vezes

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c) \quad (c \text{ entre } x \text{ e } x+h)$$

Diferenciação numérica: Diferenças Finitas

- Definição de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Pelo teorema de Taylor, se f for diferenciável ao menos duas vezes

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c) \quad (c \text{ entre } x \text{ e } x+h)$$

- Isso implica a **fórmula de diferença posterior de dois pontos**

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(c) \quad (c \text{ entre } x \text{ e } x+h)$$

Diferenças Finitas

- Numa aproximação finita, não é possível calcular o limite na definição de derivada

Diferenças Finitas

- Numa aproximação finita, não é possível calcular o limite na definição de derivada
- Mas a fórmula de diferença posterior nos diz que, para h pequeno, temos uma boa aproximação:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Diferenças Finitas

- Numa aproximação finita, não é possível calcular o limite na definição de derivada
- Mas a fórmula de diferença posterior nos diz que, para h pequeno, temos uma boa aproximação:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- E o segundo termo da expansão de Taylor ($\frac{h}{2} f''(c)$) é tratado como um erro.

Diferenças Finitas

- Numa aproximação finita, não é possível calcular o limite na definição de derivada
- Mas a fórmula de diferença posterior nos diz que, para h pequeno, temos uma boa aproximação:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- E o segundo termo da expansão de Taylor ($\frac{h}{2} f''(c)$) é tratado como um erro.
- Como o erro é proporcional a h, podemos torná-lo menor diminuindo h. Este método é dito *de primeira ordem* em h.

Diferenças Finitas

- Numa aproximação finita, não é possível calcular o limite na definição de derivada
- Mas a fórmula de diferença posterior nos diz que, para h pequeno, temos uma boa aproximação:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- E o segundo termo da expansão de Taylor ($\frac{h}{2} f''(c)$) é tratado como um erro.
- Como o erro é proporcional a h, podemos torná-lo menor diminuindo h. Este método é dito *de primeira ordem* em h.
- Se o erro é $\mathcal{O}(h^n)$, temos uma *aproximação de **ordem** n*

Diferenças Finitas

- Exemplo: vamos aproximar a derivada de $f(x) = 1/x$ em $x = 2$, usando $h = 0.1$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{2}}{0.1} \approx -0.2381$$

Diferenças Finitas

- Exemplo: vamos aproximar a derivada de $f(x) = 1/x$ em $x = 2$, usando $h = 0.1$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{2}}{0.1} \approx -0.2381$$

- A diferença entre esta aproximação e o valor "verdadeiro" é o erro

$$-0.2381 - (-0.25) = 0.0119$$

Diferenças Finitas

- Exemplo: vamos aproximar a derivada de $f(x) = 1/x$ em $x = 2$, usando $h = 0.1$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{2}}{0.1} \approx -0.2381$$

- A diferença entre esta aproximação e o valor “verdadeiro” é o erro

$$-0.2381 - (-0.25) = 0.0119$$

- O erro previsto pela fórmula de diferença posterior é $\frac{h}{2} f''(c)$, com $2 \leq c \leq 2.1$. Sendo $f''(x) = 2x^{-3}$, o erro está entre

$$(0.1)^{-3} \approx 0.0125 \quad \text{e} \quad (0.1)(2.1)^{-3} \approx 0.0108$$

Diferenças Finitas

- Exemplo: vamos aproximar a derivada de $f(x) = 1/x$ em $x = 2$, usando $h = 0.1$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{2}}{0.1} \approx -0.2381$$

- A diferença entre esta aproximação e o valor "verdadeiro" é o erro

$$-0.2381 - (-0.25) = 0.0119$$

- O erro previsto pela fórmula de diferença posterior é $\frac{h}{2} f''(c)$, com $2 \leq c \leq 2.1$. Sendo $f''(x) = 2x^{-3}$, o erro está entre

$$(0.1)^{-3} \approx 0.0125 \quad \text{e} \quad (0.1)(2.1)^{-3} \approx 0.0108$$

- o que é consistente com o valor obtido.

Diferenças Finitas

- Exemplo: vamos aproximar a derivada de $f(x) = 1/x$ em $x = 2$, usando $h = 0.1$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{2}}{0.1} \approx -0.2381$$

- A diferença entre esta aproximação e o valor "verdadeiro" é o erro

$$-0.2381 - (-0.25) = 0.0119$$

- O erro previsto pela fórmula de diferença posterior é $\frac{h}{2}f''(c)$, com $2 \leq c \leq 2.1$. Sendo $f''(x) = 2x^{-3}$, o erro está entre

$$(0.1)^{-3} \approx 0.0125 \quad \text{e} \quad (0.1)(2.1)^{-3} \approx 0.0108$$

- o que é consistente com o valor obtido.
- Infelizmente, esta informação não costuma estar disponível...

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Como obter métodos de segunda ordem?

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Como obter métodos de segunda ordem?
- Indo além na expansão de Taylor: se f for diferenciável ao menos três vezes:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(c_1)$$

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Como obter métodos de segunda ordem?
- Indo além na expansão de Taylor: se f for diferenciável ao menos três vezes:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(c_1)$$

- assim como

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(c_2)$$

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Como obter métodos de segunda ordem?
- Indo além na expansão de Taylor: se f for diferenciável ao menos três vezes:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(c_1)$$

- assim como

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(c_2)$$

- lembrando que $x - h < c_2 < x < c_1 < x + h$

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Subtraindo as duas equações anteriores, temos

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12} f'''(c_1) - \frac{h^2}{12} f'''(c_2)$$

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Subtraindo as duas equações anteriores, temos

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12} f'''(c_1) - \frac{h^2}{12} f'''(c_2)$$

- O TVI nos permite juntar os termos de erro, de modo que temos a *fórmula de diferença central de três pontos*:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(c) \quad \text{com } x-h < c < x+h$$

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Exemplo: vamos aproximar a derivada de $f(x) = 1/x$ em $x = 2$, usando $h = 0.1$ e a diferença central de 3 pontos:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{1.9}}{0.2} \approx -0.2506$$

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Exemplo: vamos aproximar a derivada de $f(x) = 1/x$ em $x = 2$, usando $h = 0.1$ e a diferença central de 3 pontos:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{1.9}}{0.2} \approx -0.2506$$

- Erro: diferença entre esta aproximação e o valor "verdadeiro":

$$-0.206 - (-0.25) = 0.0006$$

Diferenças Finitas: 2a. Ordem

- Exemplo: vamos aproximar a derivada de $f(x) = 1/x$ em $x = 2$, usando $h = 0.1$ e a diferença central de 3 pontos:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{1.9}}{0.2} \approx -0.2506$$

- Erro: diferença entre esta aproximação e o valor "verdadeiro":

$$-0.206 - (-0.25) = 0.0006$$

- que é menor do que o o erro (0.0119) obtido por diferença posterior de 2 pontos

Diferenças Finitas: Derivadas superiores

- Como fazemos para aproximar a segunda derivada $f''(x)$?

Diferenças Finitas: Derivadas superiores

- Como fazemos para aproximar a segunda derivada $f''(x)$?
- Não muda quase nada. Usamos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)$$

Diferenças Finitas: Derivadas superiores

- Como fazemos para aproximar a segunda derivada $f''(x)$?
- Não muda quase nada. Usamos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)$$

- assim como

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2)$$

Diferenças Finitas: Derivadas superiores

- Como fazemos para aproximar a segunda derivada $f''(x)$?
- Não muda quase nada. Usamos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)$$

- assim como

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2)$$

- Somando as equações para eliminar a 1a. derivada, temos:

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) = h^2 f''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2)$$

Diferenças Finitas: Derivadas superiores

- Como fazemos para aproximar a segunda derivada $f''(x)$?
- Não muda quase nada. Usamos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)$$

- assim como

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2)$$

- Somando as equações para eliminar a 1a. derivada, temos:

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) = h^2 f''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2)$$

- sendo que $x-h < c_2 < x < c_1 < x+h$

Diferenças Finitas: Derivadas superiores

- Dividindo por h^2 e juntado termos em c_1, c_2, temos a *fórmula de diferença central de três pontos para a segunda derivada*:

$$f''(x) = \frac{f(x-h) + 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(c)$$

Diferenças Finitas: Derivadas superiores

- Dividindo por h^2 e juntado termos em c_1, c_2, temos a *fórmula de diferença central de três pontos para a segunda derivada*:

$$f''(x) = \frac{f(x-h) + 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(c)$$

- para algum c entre $x - h$ e $x + h$.

Diferenças Finitas: Erro

- Notemos que estamos quebrando uma regra importante: não subtrair dois números muito próximos

Diferenças Finitas: Erro

- Notemos que estamos quebrando uma regra importante: não subtrair dois números muito próximos
- Para derivação, isso não pode ser evitado: é um problema inerentemente instável.

Diferenças Finitas: Erro

- Notemos que estamos quebrando uma regra importante: não subtrair dois números muito próximos
- Para derivação, isso não pode ser evitado: é um problema inerentemente instável.
- Ou seja, estaremos *sempre* sujeitos a erros de arredondamento ao utilizar diferenciação numérica.

Diferenças Finitas: Erro

- Exemplo: aproxime a derivada de $f(x) = e^x$ em $x = 0$.

Diferenças Finitas: Erro

- Exemplo: aproxime a derivada de $f(x) = e^x$ em $x = 0$.
- A fórmula de dois pontos nos dá

$$f'(x) \approx \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Diferenças Finitas: Erro

- Exemplo: aproxime a derivada de $f(x) = e^x$ em $x = 0$.
- A fórmula de dois pontos nos dá

$$f'(x) \approx \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

- equanto que a a fórmula de três pontos nos dá

$$f'(x) \approx \frac{e^{x+h} - e^{x-h}}{2h}$$

h	dois pontos	erro	três pontos	erro
10^{-1}	1.05170918075648	-0.05170918075648	1.00166750019844	-0.00166750019844
10^{-2}	1.00501670841679	-0.00501670841679	1.00001666674999	-0.00001666674999
10^{-3}	1.00050016670838	-0.00050016670838	1.00000016666668	-0.00000016666668
10^{-4}	1.00005000166714	-0.00005000166714	1.00000000166689	-0.00000000166689
10^{-5}	1.00000500000696	-0.00000500000696	1.00000000001210	-0.00000000001210
10^{-6}	1.00000049996218	-0.00000049996218	0.99999999997324	0.00000000002676
10^{-7}	1.00000004943368	-0.00000004943368	0.99999999947364	0.00000000052636
10^{-8}	0.99999999392253	0.00000000607747	0.99999999392253	0.00000000607747
10^{-9}	1.00000008274037	-0.00000008274037	1.00000002722922	-0.00000002722922

Diferenças Finitas: Erro

h	dois pontos	erro	três pontos	erro
10^{-5}	1.00000500000696	-0.00000500000696	1.00000000001210	-0.00000000001210
10^{-6}	1.00000049996218	-0.00000049996218	0.99999999997324	0.00000000002676
10^{-7}	1.00000004943368	-0.00000004943368	0.99999999947364	0.00000000052636
10^{-8}	0.99999999392253	0.00000000607747	0.99999999392253	0.00000000607747
10^{-9}	1.00000008274037	-0.00000008274037	1.00000002722922	-0.00000002722922

- Inicialmente, o erro decresce conforme esperado: $\mathcal{O}(h)$ e $\mathcal{O}(h^2)$

Diferenças Finitas: Erro

h	dois pontos	erro	três pontos	erro
10^{-5}	1.00000500000696	-0.00000500000696	1.0000000001210	-0.0000000001210
10^{-6}	1.00000049996218	-0.00000049996218	0.99999999997324	0.0000000002676
10^{-7}	1.00000004943368	-0.00000004943368	0.99999999947364	0.0000000052636
10^{-8}	0.99999999392253	0.00000000607747	0.99999999392253	0.0000000607747
10^{-9}	1.00000008274037	-0.00000008274037	1.0000002722922	-0.0000002722922

- Inicialmente, o erro decresce conforme esperado: $\mathcal{O}(h)$ e $\mathcal{O}(h^2)$
- Para h muito pequeno, entretanto, a aproximação piora

Diferenças Finitas: Erro

h	dois pontos	erro	três pontos	erro
10^{-5}	1.00000500000696	-0.00000500000696	1.00000000001210	-0.00000000001210
10^{-6}	1.00000049996218	-0.00000049996218	0.99999999997324	0.00000000002676
10^{-7}	1.00000004943368	-0.00000004943368	0.99999999947364	0.00000000052636
10^{-8}	0.99999999392253	0.00000000607747	0.99999999392253	0.00000000607747
10^{-9}	1.00000008274037	-0.00000008274037	1.00000002722922	-0.00000002722922

- Inicialmente, o erro decresce conforme esperado: $\mathcal{O}(h)$ e $\mathcal{O}(h^2)$
- Para h muito pequeno, entretanto, a aproximação piora
- Ambas as fórmulas subtraem números próximos, perdendo algarismos significativos.

Diferenças Finitas: Erro

h	dois pontos	erro	três pontos	erro
10^{-5}	1.00000500000696	-0.00000500000696	1.00000000001210	-0.00000000001210
10^{-6}	1.00000049996218	-0.00000049996218	0.99999999997324	0.00000000002676
10^{-7}	1.00000004943368	-0.00000004943368	0.99999999947364	0.00000000052636
10^{-8}	0.99999999392253	0.00000000607747	0.99999999392253	0.00000000607747
10^{-9}	1.00000008274037	-0.00000008274037	1.00000002722922	-0.00000002722922

- Inicialmente, o erro decresce conforme esperado: $\mathcal{O}(h)$ e $\mathcal{O}(h^2)$
- Para h muito pequeno, entretanto, a aproximação piora
- Ambas as fórmulas subtraem números próximos, perdendo algarismos significativos.
- Para piorar, dividem por um número pequeno, amplificando o efeito.

Diferenças Finitas: Erro

- Seja $\hat{f}(x+h)$ a representação em ponto flutuante de $f(x+h)$

Diferenças Finitas: Erro

- Seja $\hat{f}(x+h)$ a representação em ponto flutuante de $f(x+h)$
- Lembrando: o erro relativo para PF é da ordem de $\epsilon_{\text{máq}}$

Diferenças Finitas: Erro

- Seja $\hat{f}(x+h)$ a representação em ponto flutuante de $f(x+h)$
- Lembrando: o erro relativo para PF é da ordem de $\epsilon_{\text{máq}}$
- Supondo valores ≈ 1, o erro absoluto também é $\approx \epsilon_{\text{máq}}$

Diferenças Finitas: Erro

- Seja $\hat{f}(x+h)$ a representação em ponto flutuante de $f(x+h)$
- Lembrando: o erro relativo para PF é da ordem de $\epsilon_{\text{máq}}$
- Supondo valores ≈ 1, o erro absoluto também é $\approx \epsilon_{\text{máq}}$
- Ou seja, $\hat{f}(x+h) = f(x+h) + \epsilon_1$, $\hat{f}(x-h) = f(x-h) + \epsilon_2$, $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| \approx \epsilon_{\text{máq}}$

Diferenças Finitas: Erro

- Seja $\hat{f}(x+h)$ a representação em ponto flutuante de $f(x+h)$
- Lembrando: o erro relativo para PF é da ordem de $\epsilon_{\text{máq}}$
- Supondo valores ≈ 1, o erro absoluto também é $\approx \epsilon_{\text{máq}}$
- Ou seja, $\hat{f}(x+h) = f(x+h) + \epsilon_1$, $\hat{f}(x-h) = f(x-h) + \epsilon_2$, $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| \approx \epsilon_{\text{máq}}$
- Para a derivada (usando a fórmula de diferença central):

$$
\begin{aligned}
f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{máq}} &= f'(x) - \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x-h)}{2h} \\
&= f'(x) - \frac{f(x+h) + \epsilon_1 - [f(x-h) + \epsilon_2]}{2h} \\
&= \left(f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right) + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2h} \\
&= \underbrace{[f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{fórmula}}]}_{\text{truncamento}} + \underbrace{\text{erro}_{\text{arredonda}}}_{\text{arredondamento}}
\end{aligned}
$$

Diferenças Finitas: Erro

$$f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{máq}} = \underbrace{\left[f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{fórmula}}\right]}_{\text{truncamento}} + \underbrace{\text{erro}_{\text{arredonda}}}_{\text{arredondamento}}$$

- Erro total:

Diferenças Finitas: Erro

$$f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{máq}} = \underbrace{\left[f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{fórmula}}\right]}_{\text{truncamento}} + \underbrace{\text{erro}_{\text{arredonda}}}_{\text{arredondamento}}$$

- Erro total:
  - truncamento: diferença entre derivada "correta" e fórmula de aproximação "correta"

Diferenças Finitas: Erro

$$f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{máq}} = \underbrace{\left[f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{fórmula}}\right]}_{\text{truncamento}} + \underbrace{\text{erro}_{\text{arredonda}}}_{\text{arredondamento}}$$

- Erro total:
  - truncamento: diferença entre derivada "correta" e fórmula de aproximação "correta"
  - arredondamento: perda de significância com implementação computacional

Diferenças Finitas: Erro

$$f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{máq}} = \underbrace{\left[f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{fórmula}}\right]}_{\text{truncamento}} + \underbrace{\text{erro}_{\text{arredonda}}}_{\text{arredondamento}}$$

- Erro total:
  - truncamento: diferença entre derivada "correta" e fórmula de aproximação "correta"
  - arredondamento: perda de significância com implementação computacional
- O valor absoluto do erro de arredondamento é:

$$\left|\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2h}\right| \leq \frac{2\epsilon_{\text{máq}}}{2h} = \frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h}$$

Diferenças Finitas: Erro

$$f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{máq}} = \underbrace{[f'(x)_{\text{exato}} - f'(x)_{\text{fórmula}}]}_{\text{truncamento}} + \underbrace{\text{erro}_{\text{arredonda}}}_{\text{arredondamento}}$$

- Erro total:
  - truncamento: diferença entre derivada "correta" e fórmula de aproximação "correta"
  - arredondamento: perda de significância com implementação computacional
- O valor absoluto do erro de arredondamento é:

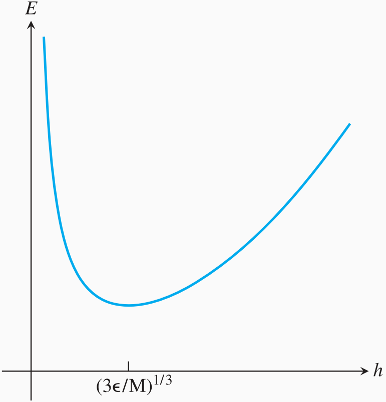
$$\left|\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2h}\right| \leq \frac{2\epsilon_{\text{máq}}}{2h} = \frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h}$$

- De modo que o valor absoluto do erro na aproximação de $f'(x)$ no computador tem como limite superior

$$E(h) \equiv \frac{h^2}{6} f'''(c) + \frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h} \quad x - h < c < x + h$$

Diferenças Finitas: Erro

$$E(h) \equiv \frac{h^2}{6} f'''(c) + \frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h} \quad x - h < c < x + h$$



Diferenças Finitas: Erro

- O erro $E(h)$ tem um mínimo em

$$0 = E'(h) = -\frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h^2} + \frac{f'''(c)}{3}h$$

Diferenças Finitas: Erro

- O erro $E(h)$ tem um mínimo em

$$0 = E'(h) = -\frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h^2} + \frac{f'''(c)}{3}h$$

- Seja $|f'''(c)| \approx |f'''(x)| \equiv M$. Resolvendo acima, temos

$$h = \left(\frac{3\epsilon_{\text{máq}}}{M}\right)^{1/3}$$

Diferenças Finitas: Erro

- O erro $E(h)$ tem um mínimo em

$$0 = E'(h) = -\frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h^2} + \frac{f'''(c)}{3}h$$

- Seja $|f'''(c)| \approx |f'''(x)| \equiv M$. Resolvendo acima, temos

$$h = \left(\frac{3\epsilon_{\text{máq}}}{M}\right)^{1/3}$$

- isto nos dá o incremento h correspondente a menor erro total.

Diferenças Finitas: Erro

- O erro $E(h)$ tem um mínimo em

$$0 = E'(h) = -\frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h^2} + \frac{f'''(c)}{3} h$$

- Seja $|f'''(c)| \approx |f'''(x)| \equiv M$. Resolvendo acima, temos

$$h = \left(\frac{3\epsilon_{\text{máq}}}{M} \right)^{1/3}$$

- isto nos dá o incremento h correspondente a menor erro total.
- em precisão dupla, temos $\epsilon_{\text{máq}}^{1/3} \approx 10^{-5}$, o que está de acordo com a tabela anterior.

Diferenças Finitas: Erro

- O erro $E(h)$ tem um mínimo em

$$0 = E'(h) = -\frac{\epsilon_{\text{máq}}}{h^2} + \frac{f'''(c)}{3}h$$

- Seja $|f'''(c)| \approx |f'''(x)| \equiv M$. Resolvendo acima, temos

$$h = \left(\frac{3\epsilon_{\text{máq}}}{M}\right)^{1/3}$$

- isto nos dá o incremento h correspondente a menor erro total.
- em precisão dupla, temos $\epsilon_{\text{máq}}^{1/3} \approx 10^{-5}$, o que está de acordo com a tabela anterior.
- Resumindo: Para a fórmula de diferença central de três pontos, a precisão vai melhorando conforme diminuimos h, *até aproximadamente a raíz cúbica de* $\epsilon_{máq}$. A partir deste valor, o erro pode começar a aumentar novamente.

Computação Simbólica

- Algumas linguagens contém suporte / pacotes que permitem o calcular derivadas "simbolicamente"

Computação Simbólica

- Algumas linguagens contém suporte / pacotes que permitem o calcular derivadas "simbolicamente"
- Este tipo de manipulação está muito mais próximo do cálculo que fazemos "à mão" (FUV):

```
>>>from sympy import *
>>>x, y, z = symbols('x y z')
>>>f = sin(3*x)
>>>diff(f)
3*cos(3*x)
```

Diferenciação Simbólica

- Podemos calcular qualquer derivada de f, por exemplo $f'''(x)$:

```
>>> diff(f, x, 3)
-27*cos(3*x)
```

Diferenciação Simbólica

- Podemos calcular qualquer derivada de f, por exemplo $f'''(x)$:

```
>>> diff(f, x, 3)
-27*cos(3*x)
```

- E até mesmo integrais...

```
>>>g = sin(x)
>>>integrate(g)
-cos(x)
>>>integrate(g, (x, 0, pi))
2
```

Computação Simbólica

- Última brincadeira:

```
>>>integrate(x**2 + x + 1)
 3    2
x    x
-- + -- + x
3    2
>>> integrate(sin(x)**7)
   7           5
cos (x)   3*cos (x)      3
------- - --------- + cos (x) - cos(x)
   7          5
```

- Mas o que acontece aqui?!

```
>>> integrate(exp(sin(x)))
  /
 |
 |  sin(x)
 | e       dx
 |
/
```

Integração Numérica

Quadratura

- O cálculo *numérico* de integrais definidas (ou *quadratura*) depende de ferramentas que já estudamos:

Quadratura

- O cálculo *numérico* de integrais definidas (ou *quadratura*) depende de ferramentas que já estudamos:
    - interpolação

Quadratura

- O cálculo *numérico* de integrais definidas (ou *quadratura*) depende de ferramentas que já estudamos:
  - interpolação
  - ajuste de funções por mínimos quadrados

Quadratura

- O cálculo *numérico* de integrais definidas (ou *quadratura*) depende de ferramentas que já estudamos:
  - interpolação
  - ajuste de funções por mínimos quadrados
- Seja f definida num intervalo $[a, b]$.

Quadratura

- O cálculo *numérico* de integrais definidas (ou *quadratura*) depende de ferramentas que já estudamos:
    - interpolação
    - ajuste de funções por mínimos quadrados
- Seja f definida num intervalo $[a, b]$.
- Se tivermos um polinômio interpolador $P(x)$ por alguns pontos de f, podemos aproximar

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Método de Newton-Cotes)}$$

Quadratura

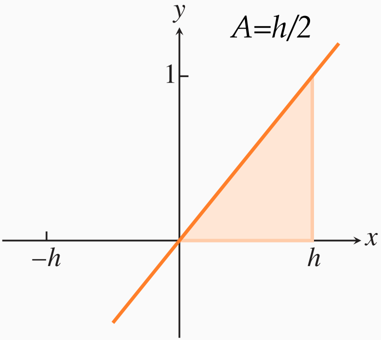
- O cálculo *numérico* de integrais definidas (ou *quadratura*) depende de ferramentas que já estudamos:
    - interpolação
    - ajuste de funções por mínimos quadrados
- Seja f definida num intervalo $[a, b]$.
- Se tivermos um polinômio interpolador $P(x)$ por alguns pontos de f, podemos aproximar

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Método de Newton-Cotes)}$$

- Por outro lado, se econtrarmos um polinômio de grau baixo $\mathcal{P}(x)$ que aproxima f "bem" (no sentido de MQ), fazemos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b \mathcal{P}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Quadratura Gaussiana)}$$

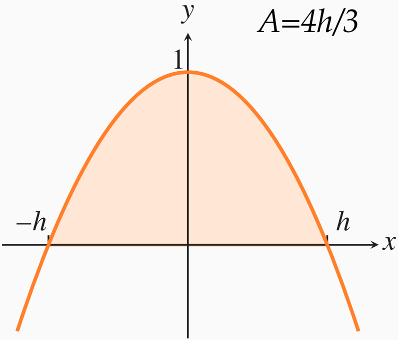
Integral Útil 1



- A área sob a reta que interpola os pontos $(0,0),(h,1)$ é

$$\int_0^h \frac{x}{h}\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}$$

Integral Útil 2

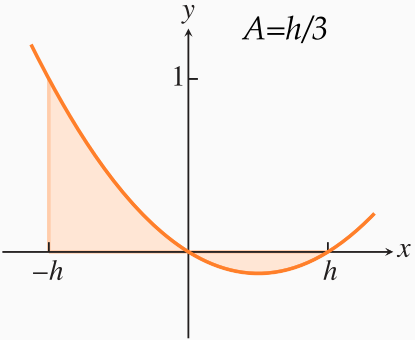


- A área sob a parábola $P(x)$ que interpola os pontos $(-h, 0), (0, 1), (h, 0)$ é

$$\int_{-h}^{h} P(x)\, \mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3h^2} = \frac{4}{3}h$$

Fórmulas de Newton-Cotes

Integral Útil 3

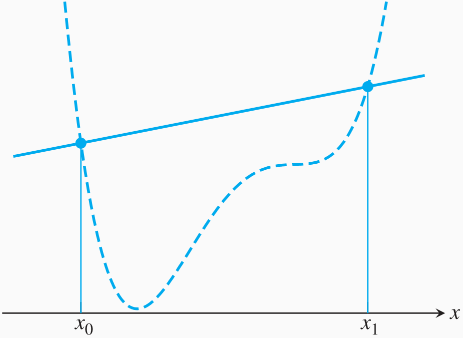


- A área sob a parábola $P(x)$ que interpola os pontos $(-h, 1), (0, 0), (h, 0)$ é

$$\int_{-h}^{h} P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}$$

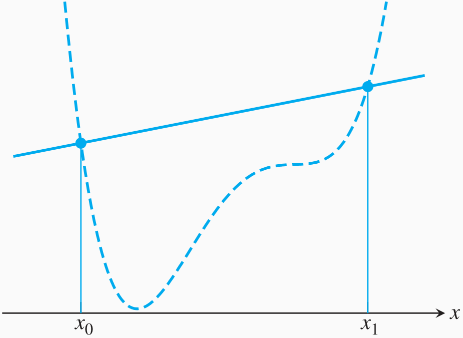
Regra do Trapézio

- Seja $f(x)$ com 2a. derivada contínua, definida em $[x_0, x_1]$.



Regra do Trapézio

- Seja $f(x)$ com 2a. derivada contínua, definida em $[x_0, x_1]$.



- Polinômio interpolador (Lagrange) por $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ (com $y_i = f(x_i)$):

$$f(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(c_x) = P(x) + E(x)$$

Regra do Trapézio

- Integrando ambos os lados, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} P(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} E(x)\,\mathrm{d}x$$

Regra do Trapézio

- Integrando ambos os lados, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} P(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} E(x)\,\mathrm{d}x$$

- A primeira integral é (fazendo $h = x_1 - x_0$ e usando a Integral Útil 1 acima):

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} P(x)\,\mathrm{d}x &= y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\mathrm{d}x + y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\mathrm{d}x \\ &= y_0 \frac{h}{2} + y_1 \frac{h}{2} = h\frac{y_0 + y_1}{2}\end{aligned}$$

Regra do Trapézio

- Integrando ambos os lados, temos

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} P(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} E(x)\,\mathrm{d}x$$

- A primeira integral é (fazendo $h = x_1 - x_0$ e usando a Integral Útil 1 acima):

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} P(x)\,\mathrm{d}x &= y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\mathrm{d}x + y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\mathrm{d}x \\ &= y_0 \frac{h}{2} + y_1 \frac{h}{2} = h\frac{y_0 + y_1}{2}\end{aligned}$$

- Note que estamos calculando a área de um trapézio!

Regra do Trapézio

- O termo do Erro fica (usando o TVM para integrais na 2a igualdade):

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} E(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)f''(c(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f''(c)}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f''(c)}{2}\int_{0}^{h}u(u-h)\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{h^3}{12}f''(c)
\end{aligned}$$

Regra do Trapézio

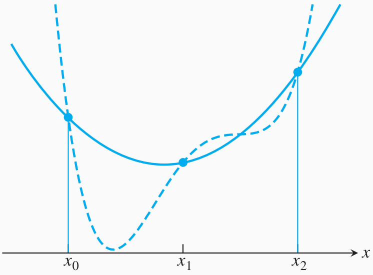
Resumo

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) - \frac{h^3}{12} f''(c)}$$

(com $h = x_1 - x_0$ e c entre x_0 e x_1)

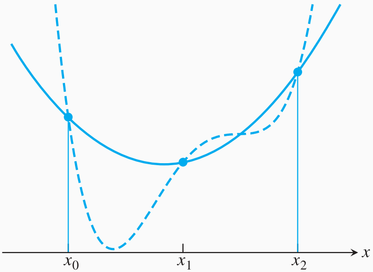
Regra de Simpson

- Similar à Regra do Trapézio, mas trocando a reta interpoladora por uma parábola



Regra de Simpson

- Similar à Regra do Trapézio, mas trocando a reta interpoladora por uma parábola



- Polinômio interpolador (Lagrange) por $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} f''(c_x) \\
&= P(x) + E(x)
\end{aligned}
$$

Regra de Simpson

- Integrando ambos os lados, temos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_2} E(x)\,\mathrm{d}x$$

Regra de Simpson

- Integrando ambos os lados, temos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_2} E(x)\,\mathrm{d}x$$

- A primeira integral é (fazendo $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$, e usando as Integrais Úteis 2 e 3):

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x &= y_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + y_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + y_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\,\mathrm{d}x \\
&= y_0 \frac{h}{3} + y_1 \frac{4h}{3} + y_2 \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

Regra de Simpson

- O termo do Erro fica

$$\int_{x_0}^{x_2} E(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$$

Regra de Simpson

- O termo do Erro fica

$$\int_{x_0}^{x_2} E(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$$

- (para algum c em $[x_0, x_2]$), se $f^{(4)}(x)$ existir e for contínua)

Regra de Simpson

Resumo

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)}$$

(com $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ e c entre x_0 e x_2)

Fórmulas de Newton-Cotes

- Exemplo: estimaremos, usando Trapézio e Simpson

$$\int_1^2 \ln(x)\, dx$$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Exemplo: estimaremos, usando Trapézio e Simpson

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Trapézio:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0.3466$$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Exemplo: estimaremos, usando Trapézio e Simpson

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Trapézio:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0.3466$$

- O erro para a Regra do Trapézio é $-h^3 f''(c)/12$, com $1 < c < 2$. Sendo $f''(x) = -1/x^2$, o erro máximo é

$$\frac{1^3}{12c^2} \leq \frac{1}{12} \approx 0.0834$$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Exemplo: estimaremos, usando Trapézio e Simpson

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Trapézio:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0.3466$$

- O erro para a Regra do Trapézio é $-h^3 f''(c)/12$, com $1 < c < 2$. Sendo $f''(x) = -1/x^2$, o erro máximo é

$$\frac{1^3}{12c^2} \leq \frac{1}{12} \approx 0.0834$$

- Ou seja, pela Regra do Trapézio

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = 0.3466 \pm 0.0834$$

Fórmulas de Newton-Cotes

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Simpson:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2) = \frac{0.5}{3}(\ln 1+4\ln\frac{3}{2}+\ln 2) \approx 0.3858$$

Fórmulas de Newton-Cotes

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Simpson:

  $$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2) = \frac{0.5}{3}(\ln 1+4\ln\frac{3}{2}+\ln 2) \approx 0.3858$$

- O erro para a Regra de Simpson é $-h^5 f^{(4)}(c)/90$, com $1 < c < 2$. Sendo $f^{(4)}(x) = -6/x^4$, o erro máximo é

  $$\frac{6(0.5)^5}{90c^4} \leq \frac{6(0.5)^5}{90} \approx 0.0021$$

Fórmulas de Newton-Cotes

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Simpson:

  $$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2) = \frac{0.5}{3}(\ln 1+4\ln\frac{3}{2}+\ln 2) \approx 0.3858$$

- O erro para a Regra de Simpson é $-h^5 f^{(4)}(c)/90$, com $1 < c < 2$. Sendo $f^{(4)}(x) = -6/x^4$, o erro máximo é

  $$\frac{6(0.5)^5}{90c^4} \leq \frac{6(0.5)^5}{90} \approx 0.0021$$

- Ou seja, pela Regra de Simpson

  $$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = 0.3858 \pm 0.0021$$

Fórmulas de Newton-Cotes

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Esta integral pode ser feita exatamente usando integração por partes:

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\,\ln x\big|_1^2 - x\big|_1^2 = 2\ln 2 - 1\ln 1 - 1 \approx 0.386294$$

Fórmulas de Newton-Cotes

$$\int_1^2 \ln(x)\, dx$$

- Esta integral pode ser feita exatamente usando integração por partes:

$$\int_1^2 \ln(x)\, dx = x \ln x|_1^2 - x|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 \ln 1 - 1 \approx 0.386294$$

- Ambas estimativas de erro são consistente e, conforme esperado, a Regra de Simpson é mais acurada do que a do Trapézio.

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.
- Regra do Trapézio: erro é $-h^3 f''(c)/12$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.
- Regra do Trapézio: erro é $-h^3 f''(c)/12$
  - se $f(x)$ for de grau 1 ou menor, o erro é 0

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.
- Regra do Trapézio: erro é $-h^3 f''(c)/12$
  - se $f(x)$ for de grau 1 ou menor, o erro é 0
  - Trapézio tem ordem de precisão 1

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.
- Regra do Trapézio: erro é $-h^3 f''(c)/12$
  - se $f(x)$ for de grau 1 ou menor, o erro é 0
  - Trapézio tem ordem de precisão 1
  - intuitivo: área sob uma reta é dada exatamente pelo trapézio.

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.
- Regra do Trapézio: erro é $-h^3 f''(c)/12$
  - se $f(x)$ for de grau 1 ou menor, o erro é 0
  - Trapézio tem ordem de precisão 1
  - intuitivo: área sob uma reta é dada exatamente pelo trapézio.
- Regra de Simpson: o erro é $-h^5 f^{(4)}(c)/90$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.
- Regra do Trapézio: erro é $-h^3 f''(c)/12$
  - se $f(x)$ for de grau 1 ou menor, o erro é 0
  - Trapézio tem ordem de precisão 1
  - intuitivo: área sob uma reta é dada exatamente pelo trapézio.
- Regra de Simpson: o erro é $-h^5 f^{(4)}(c)/90$
  - se $f(x)$ for de grau 3 ou menor, o erro é 0

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.
- Regra do Trapézio: erro é $-h^3 f''(c)/12$
  - se $f(x)$ for de grau 1 ou menor, o erro é 0
  - Trapézio tem ordem de precisão 1
  - intuitivo: área sob uma reta é dada exatamente pelo trapézio.
- Regra de Simpson: o erro é $-h^5 f^{(4)}(c)/90$
  - se $f(x)$ for de grau 3 ou menor, o erro é 0
  - Simpson tem ordem de precisão 3

Fórmulas de Newton-Cotes

- Comparamos regras de integração numérica pelo termo de erro:
- **ordem de precisão** de um método de integração: maior inteiro k para o qual polinômios de grau k ou menor são integrados exatamente.
- Regra do Trapézio: erro é $-h^3 f''(c)/12$
  - se $f(x)$ for de grau 1 ou menor, o erro é 0
  - Trapézio tem ordem de precisão 1
  - intuitivo: área sob uma reta é dada exatamente pelo trapézio.
- Regra de Simpson: o erro é $-h^5 f^{(4)}(c)/90$
  - se $f(x)$ for de grau 3 ou menor, o erro é 0
  - Simpson tem ordem de precisão 3
  - não é intuitivo que uma parábola interceptando uma cúbica em três pontos equispaçados tenha a mesma integral que a cúbica no intervalo.

Fórmulas de Newton-Cotes

- Uma última fórmula de Newton-Cotes: Regra dos 3/8 de Simpson

$$\boxed{\int_{x_0}^{x^3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)}$$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Uma última fórmula de Newton-Cotes: Regra dos 3/8 de Simpson

$$\boxed{\int_{x_0}^{x^3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)}$$

- Qual é a ordem desta regra?

Fórmulas de Newton-Cotes

- Uma última fórmula de Newton-Cotes: Regra dos 3/8 de Simpson

$$\boxed{\int_{x_0}^{x^3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)}$$

- Qual é a ordem desta regra?
- Basta ir testando monômios sucessivamente. P. ex., para x^2:

$$\frac{3h}{8}(x^2+3(x+h)^2+3(x+2h)^2+(x+3h)^2) = \underbrace{\frac{(x+3h)^3 - x^3}{3}}_{\int_{x_0}^{x+3h} x^2\,\mathrm{d}x}$$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Uma última fórmula de Newton-Cotes: Regra dos 3/8 de Simpson

$$\boxed{\int_{x_0}^{x^3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)}$$

- Qual é a ordem desta regra?
- Basta ir testando monômios sucessivamente. P. ex., para x^2:

$$\frac{3h}{8}(x^2 + 3(x+h)^2 + 3(x+2h)^2 + (x+3h)^2) = \underbrace{\frac{(x+3h)^3 - x^3}{3}}_{\int_{x_0}^{x+3h} x^2\,\mathrm{d}x}$$

- Vemos que a regra é exata para x, x^2, x^3, mas falha em x^4. Ou seja, sua ordem de precisão é 3.

Regras de Newton-Cotes Compostas

- As regras do Trapézio e de Simpson operam num intervalo único em x

Regras de Newton-Cotes Compostas

- As regras do Trapézio e de Simpson operam num intervalo único em x
- Uma extensão natural é utilizar vários subintervalos, somando cada resultado

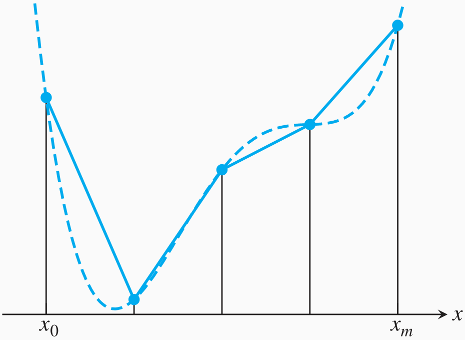
Regras de Newton-Cotes Compostas

- As regras do Trapézio e de Simpson operam num intervalo único em x
- Uma extensão natural é utilizar vários subintervalos, somando cada resultado
- Procedendo desta maneira, obtemos *regras compostas*

Regras de Newton-Cotes Compostas

- As regras do Trapézio e de Simpson operam num intervalo único em x
- Uma extensão natural é utilizar vários subintervalos, somando cada resultado
- Procedendo desta maneira, obtemos *regras compostas*
- https://ggbm.at/ac8v8wxt

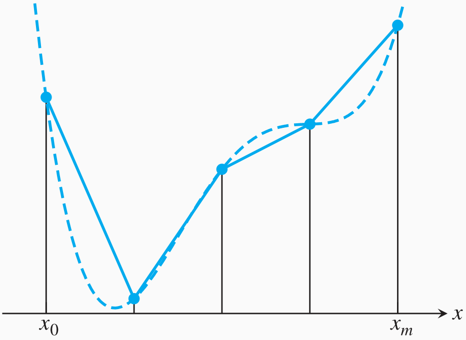
Regra do Trapézio Composta



- Consideremos uma partição regular do intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{m-2} < x_{m-1} < x_m = b$$

Regra do Trapézio Composta

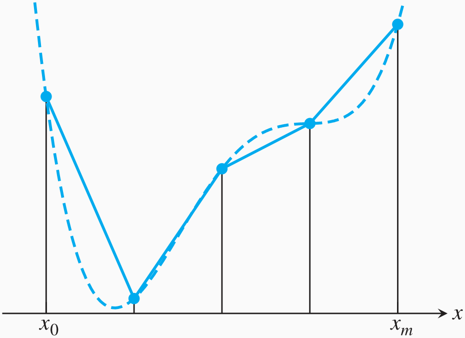


- Consideremos uma partição regular do intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{m-2} < x_{m-1} < x_m = b$$

- os x_i são equiespaçados, com $h = x_{i+1} - x_i$

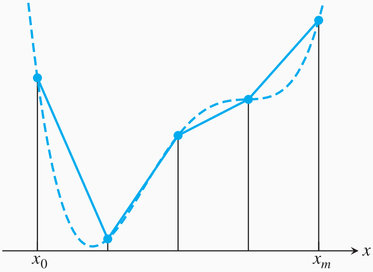
Regra do Trapézio Composta



- Para cada subintervalo, usamos a aproximação (com erro)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})] - \frac{h^3}{12} f''(c_i)$$

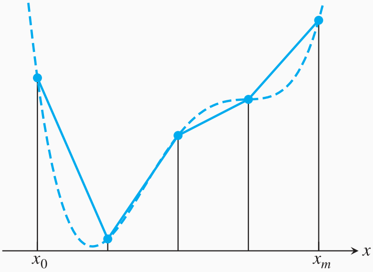
Regra do Trapézio Composta



- Somando os subintervalos (note as sobreposições!)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)\right] - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{12} f''(c_i)$$

Regra do Trapézio Composta



- Somando os subintervalos (note as sobreposições!)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)\right] - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{12} f''(c_i)$$

- Novamente, usamos o TVI para juntar os termos de erro:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{12} f''(c_i) = \frac{h^3}{12} m f''(c) \quad a < c < b$$

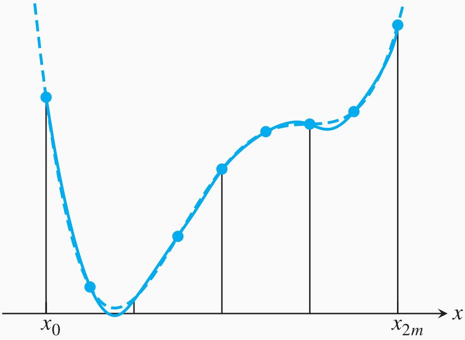
Regra do Trapézio Composta

Resumo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_m + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_i\right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(c)}$$

- na qual usamos $mh = (b-a)$ no termo de erro, e $a < c < b$.

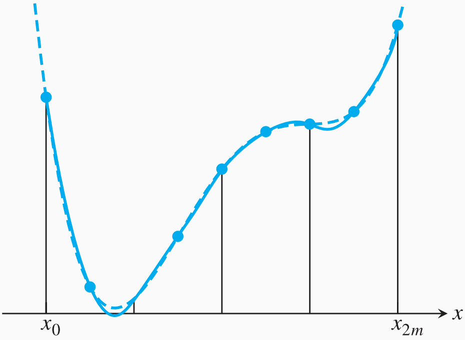
Regra de Simpson Composta



- Consideremos uma partição regular do intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{2m-2} < x_{2m-1} < x_2 m = b$$

Regra de Simpson Composta

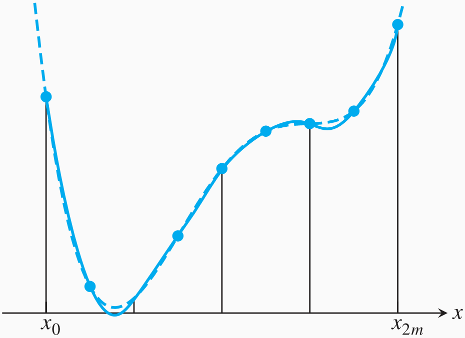


- Consideremos uma partição regular do intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{2m-2} < x_{2m-1} < x_2 m = b$$

- os x_i são equiespaçados, com $h = x_{i+1} - x_i$

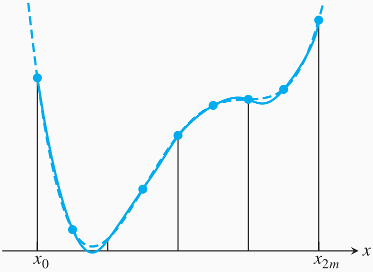
Regra de Simpson Composta



- Para cada subintervalo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, \ldots, m-1$ (comprimento $2h$), usamos a aproximação de Simpson

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(c_i)$$

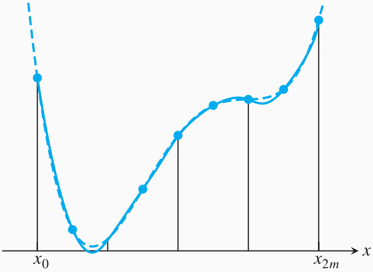
Regra de Simpson Composta



- Somando os subintervalos (só há sobreposições nos pares)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})\right] - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_i)$$

Regra de Simpson Composta



- Somando os subintervalos (só há sobreposições nos pares)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})\right] - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_i)$$

- Novamente, usamos o TVI para juntar os termos de erro:

$$\frac{h^5}{90}\sum_{i=0}^{m-1} f^{(4)}(c_i) = \frac{h^5}{90} m f^{(4)}(c) \quad a < c < b$$

Regra de Simpson Composta

Resumo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c)}$$

- na qual usamos $m \cdot 2h = (b - a)$ no termo de erro, e $a < c < b$.

Regras compostas

- Exemplo: aproximações com 4 "fatias" para

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Regras compostas

- Exemplo: aproximações com 4 “fatias” para

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Trapézio: 4 fatias em $[1,2] \implies h = 1/4$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x &\approx \frac{1/4}{2}\left[y_0 + y_4 + 2\sum_{i=1}^{3} y_i\right] = \\ &= \frac{1}{8}\left[\ln 1 + \ln 2 + 2(\ln 5/4 + \ln 6/4 + \ln 7/4)\right] \\ &\approx 0.3837\end{aligned}$$

Regras compostas

- Exemplo: aproximações com 4 "fatias" para
$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$
- Trapézio: 4 fatias em $[1,2] \implies h = 1/4$:
$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x &\approx \frac{1/4}{2}\left[y_0 + y_4 + 2\sum_{i=1}^{3} y_i\right] = \\ &= \frac{1}{8}\left[\ln 1 + \ln 2 + 2(\ln 5/4 + \ln 6/4 + \ln 7/4)\right] \\ &\approx 0.3837\end{aligned}$$
- O erro é, no máximo,
$$\frac{(b-a)h^2}{12}|f''(c)| = \frac{1/16}{12}\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{(16)(12)(1^2)} = \frac{1}{192} \approx 0.0052$$

Regras compostas

- Exemplo: aproximações com 4 “fatias” para

$$\int_1^2 \ln(x)\, dx$$

Regras compostas

- Exemplo: aproximações com 4 "fatias" para

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Simpson: 4 fatias em $[1, 2] \implies h = 1/8$:

$$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x \approx \frac{1/8}{3}\left[y_0 + y_8 + 4\sum_{i=1}^{4} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{3} y_{2i}\right] =$$

$$= \frac{1}{24}[\ln 1 + \ln 2 + 4(ln 9/8 + \ln 11/8 + \ln 13/8 + \ln 15/8)$$

$$+ 2(\ln 5/4 + \ln 6/4 + \ln 7/4)]$$

$$\approx 0.386292$$

Regras compostas

- Exemplo: aproximações com 4 "fatias" para

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Simpson: 4 fatias em $[1,2] \implies h = 1/8$:

$$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x \approx \frac{1/8}{3}\left[y_0 + y_8 + 4\sum_{i=1}^{4} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{3} y_{2i}\right] =$$

$$= \frac{1}{24}[\ln 1 + \ln 2 + 4(ln9/8 + \ln 11/8 + \ln 13/8 + \ln 15/8)$$

$$+ 2(\ln 5/4 + \ln 6/4 + \ln 7/4)]$$

$$\approx 0.386292$$

- O erro é, no máximo,

$$\frac{(b-a)h^2}{12}|f^{(4)}(c)| = \frac{1/8^4}{180}\frac{6}{c^4} \leq \frac{6}{(8^4)(180)(1^4)} \approx 0.000008$$

Regras compostas

- Usando a regra de Simpson composta, quantas "fatias" são necessárias para aproximar, com seis casas de precisão,

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x?$$

Regras compostas

- Usando a regra de Simpson composta, quantas "fatias" são necessárias para aproximar, com seis casas de precisão,

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x?$$

- Queremos que o erro satifaça

$$\frac{(\pi - 0)h^4}{180}|f^{(4)}(c)| < 0.5 \times 10^{-6}$$

Regras compostas

- Usando a regra de Simpson composta, quantas "fatias" são necessárias para aproximar, com seis casas de precisão,

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x?$$

- Queremos que o erro satifaça

$$\frac{(\pi - 0)h^4}{180} |f^{(4)}(c)| < 0.5 \times 10^{-6}$$

- Sendo $\frac{\mathrm{d}^4 \sin^2 x}{\mathrm{d}x^4} = -8 \cos 2x$, precisamos de

$$\frac{\pi h^4}{180} 8 < 0.5 \times 10^{-6} \implies h < 0.0435$$

Regras compostas

- Usando a regra de Simpson composta, quantas "fatias" são necessárias para aproximar, com seis casas de precisão,

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x?$$

- Queremos que o erro satifaça

$$\frac{(\pi - 0)h^4}{180}|f^{(4)}(c)| < 0.5 \times 10^{-6}$$

- Sendo $\frac{\mathrm{d}^4 \sin^2 x}{\mathrm{d}x^4} = -8\cos 2x$, precisamos de

$$\frac{\pi h^4}{180} 8 < 0.5 \times 10^{-6} \implies h < 0.0435$$

- Precisamos então de $m = \lceil \frac{\pi}{2h} \rceil = 37$ "fatias".

Métodos de Newton Cotes abertos

- Os métodos anteriores (Trapézio, Simpson) são ditos “fechados” por usarem os extremos do intervalo de integração

Métodos de Newton Cotes abertos

- Os métodos anteriores (Trapézio, Simpson) são ditos "fechados" por usarem os extremos do intervalo de integração
- Alguns integrandos podem ter singularidades removíveis nos extremos de integração, o que impede o uso de métodos "fechados"

Métodos de Newton Cotes abertos

- Os métodos anteriores (Trapézio, Simpson) são ditos "fechados" por usarem os extremos do intervalo de integração
- Alguns integrandos podem ter singularidades removíveis nos extremos de integração, o que impede o uso de métodos "fechados"
- Definimos então fórmulas de NC **abertas**, ou seja, que não usam os extremos do intervalo.

Métodos de Newton Cotes abertos

- Os métodos anteriores (Trapézio, Simpson) são ditos "fechados" por usarem os extremos do intervalo de integração
- Alguns integrandos podem ter singularidades removíveis nos extremos de integração, o que impede o uso de métodos "fechados"
- Definimos então fórmulas de NC **abertas**, ou seja, que não usam os extremos do intervalo.
- Por exemplo, como integrar

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x?$$

Regra do Ponto Médio

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = hf(w) + \frac{h^3}{24} f''(c)$$

- com $h = (x_1 - x0)$, w é o ponto médio $x_0 + h/2$ e $x_0 < c < x_1$

Regra do Ponto Médio

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = hf(w) + \frac{h^3}{24} f''(c)$$

- com $h = (x_1 - x0)$, w é o ponto médio $x_0 + h/2$ e $x_0 < c < x_1$
- Requer calcular a f apenas uma vez, mas ainda assim com metade do erro em relação à regra do Trapézio

Regra do Ponto Médio Composta

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\sum_{i=1}^{m} f(w_i) + \frac{(b-a)h^2}{24} f''(c)$$

- com $h = (b-a)/m$, $x_0 < c < x_1$ e w_i os pontos médios dos m subintervalos (iguais) de $[a, b]$

Regra do Ponto Médio Composta

- Vamos calcular, usando 10 “fatias”,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$$

Regra do Ponto Médio Composta

- Vamos calcular, usando 10 “fatias”,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$$

- Cuidado! aqui não podemos aplicar Trapézio/Simpson (singularidade em 0).

Regra do Ponto Médio Composta

- Vamos calcular, usando 10 “fatias”,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

- Cuidado! aqui não podemos aplicar Trapézio/Simpson (singularidade em 0).
- Mas Ponto Médio pode ser aplicado diretamente.

Regra do Ponto Médio Composta

- Vamos calcular, usando 10 "fatias",

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Cuidado! aqui não podemos aplicar Trapézio/Simpson (singularidade em 0).
- Mas Ponto Médio pode ser aplicado diretamente.
- Os pontos médios são $0.05, 0.15, \ldots, 0.95$, então

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0.1 \sum_1^{10} f(w_i) \approx 0.94620858$$

Regra do Ponto Médio Composta

- Vamos calcular, usando 10 "fatias",

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$$

- Cuidado! aqui não podemos aplicar Trapézio/Simpson (singularidade em 0).
- Mas Ponto Médio pode ser aplicado diretamente.
- Os pontos médios são $0.05, 0.15, \dots, 0.95$, então

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x \approx 0.1 \sum_1^{10} f(w_i) \approx 0.94620858$$

- A resposta correta até o 8o. dígito é 0.94608307

Precisão dos Métodos de Newton-Cotes

- Ordem de precisão: maior grau dos polinômios integrados exatamente por dada regra

Precisão dos Métodos de Newton-Cotes

- Ordem de precisão: maior grau dos polinômios integrados exatamente por dada regra
- Fórmula de Newton-Cotes de grau n têm ordem de precisão n (para n ímpar) e $n+1$ para n par:

Precisão dos Métodos de Newton-Cotes

- Ordem de precisão: maior grau dos polinômios integrados exatamente por dada regra
- Fórmula de Newton-Cotes de grau n têm ordem de precisão n (para n ímpar) e $n+1$ para n par:
  - Trapézio (NC grau 1) tem ordem de precisão 1

Precisão dos Métodos de Newton-Cotes

- Ordem de precisão: maior grau dos polinômios integrados exatamente por dada regra
- Fórmula de Newton-Cotes de grau n têm ordem de precisão n (para n ímpar) e $n+1$ para n par:
  - Trapézio (NC grau 1) tem ordem de precisão 1
  - Simpson (NC grau 2) tem ordem de precisão 3

Precisão dos Métodos de Newton-Cotes

- Ordem de precisão: maior grau dos polinômios integrados exatamente por dada regra
- Fórmula de Newton-Cotes de grau n têm ordem de precisão n (para n ímpar) e $n+1$ para n par:
  - Trapézio (NC grau 1) tem ordem de precisão 1
  - Simpson (NC grau 2) tem ordem de precisão 3
- Para a esta precisão, um método NC de ordem n calcula f $n+1$ vezes, em pontos equiespaçados.

Precisão dos Métodos de Newton-Cotes

- Ordem de precisão: maior grau dos polinômios integrados exatamente por dada regra
- Fórmula de Newton-Cotes de grau n têm ordem de precisão n (para n ímpar) e $n+1$ para n par:
  - Trapézio (NC grau 1) tem ordem de precisão 1
  - Simpson (NC grau 2) tem ordem de precisão 3
- Para a esta precisão, um método NC de ordem n calcula f $n+1$ vezes, em pontos equiespaçados.
- Esta é a maneira mais "eficiente" de particionar o intervalo?

Precisão dos Métodos de Newton-Cotes

- Ordem de precisão: maior grau dos polinômios integrados exatamente por dada regra
- Fórmula de Newton-Cotes de grau n têm ordem de precisão n (para n ímpar) e $n + 1$ para n par:
  - Trapézio (NC grau 1) tem ordem de precisão 1
  - Simpson (NC grau 2) tem ordem de precisão 3
- Para a esta precisão, um método NC de ordem n calcula f $n + 1$ vezes, em pontos equiespaçados.
- Esta é a maneira mais "eficiente" de particionar o intervalo?
- Não. O método de **Quadratura Gaussiana** usa $n + 1$ pontos para obter ordem de precisão $2n + 1$

Parênteses: Funções Ortogonais

- Como verificávamos se dois vetores eram ortogonais em GA?

Parênteses: Funções Ortogonais

- Como verificávamos se dois vetores eram ortogonais em GA?
- O mesmo vale para funções (vetores no espaço das funções)

Parênteses: Funções Ortogonais

- Como verificávamos se dois vetores eram ortogonais em GA?
- O mesmo vale para funções (vetores no espaço das funções)
- O conjunto de funções $\{p_0, \ldots, p_n\}$ em $[a, b]$ é **ortogonal** se

$$\overbrace{\int_a^b p_j(x) p_k(x) \, \mathrm{d}x}^{\text{produto escalar}} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \neq 0 & j = k \end{cases}$$

Parênteses: Funções Ortogonais

- Como verificávamos se dois vetores eram ortogonais em GA?
- O mesmo vale para funções (vetores no espaço das funções)
- O conjunto de funções $\{p_0, \ldots, p_n\}$ em $[a, b]$ é **ortogonal** se

$$\overbrace{\int_a^b p_j(x) p_k(x)\,\mathrm{d}x}^{\text{produto escalar}} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \neq 0 & j = k \end{cases}$$

- Se cada um dos polinômios no conjunto ortogonal $\{p_0, \ldots, p_n\}$ tem grau i, então qualquer polinômio de grau (até) n pode ser escrito como combinação linear dos p_i

Parênteses: Funções Ortogonais

- Como verificávamos se dois vetores eram ortogonais em GA?
- O mesmo vale para funções (vetores no espaço das funções)
- O conjunto de funções $\{p_0, \ldots, p_n\}$ em $[a, b]$ é **ortogonal** se

$$\overbrace{\int_a^b p_j(x) p_k(x) \, \mathrm{d}x}^{\text{produto escalar}} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \neq 0 & j = k \end{cases}$$

- Se cada um dos polinômios no conjunto ortogonal $\{p_0, \ldots, p_n\}$ tem grau i, então qualquer polinômio de grau (até) n pode ser escrito como combinação linear dos p_i
- Ou seja, $\{p_0, \ldots, p_n\}$ é uma **base** para o espaço dos polinômios de grau até n.

Parênteses: Funções Ortogonais

- Como verificávamos se dois vetores eram ortogonais em GA?
- O mesmo vale para funções (vetores no espaço das funções)
- O conjunto de funções $\{p_0, \ldots, p_n\}$ em $[a, b]$ é **ortogonal** se

$$\overbrace{\int_a^b p_j(x)p_k(x)\,\mathrm{d}x}^{\text{produto escalar}} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \neq 0 & j = k \end{cases}$$

- Se cada um dos polinômios no conjunto ortogonal $\{p_0, \ldots, p_n\}$ tem grau i, então qualquer polinômio de grau (até) n pode ser escrito como combinação linear dos p_i
- Ou seja, $\{p_0, \ldots, p_n\}$ é uma **base** para o espaço dos polinômios de grau até n.
- Cada p_i (grau i) tem i raízes distintas em $[a, b]$.

Parênteses: Funções Ortogonais

- Exemplo: vamos encontrar três polinômios ortogonais em $[-1, 1]$.

Parênteses: Funções Ortogonais

- Exemplo: vamos encontrar três polinômios ortogonais em $[-1, 1]$.
- $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x$ são bons candidatos, já que

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, \mathrm{d}x = 0$$

Parênteses: Funções Ortogonais

- Exemplo: vamos encontrar três polinômios ortogonais em $[-1, 1]$.
- $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x$ são bons candidatos, já que

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, \mathrm{d}x = 0$$

- Será que o terceiro é x^2?

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 \, \mathrm{d}x = 2/3 \neq 0 \implies 1, x^2 \text{ não são ortogonais em } [-1, 1].$$

Parênteses: Funções Ortogonais

- Exemplo: vamos encontrar três polinômios ortogonais em $[-1, 1]$.
- $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x$ são bons candidatos, já que

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, \mathrm{d}x = 0$$

- Será que o terceiro é x^2?

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 \, \mathrm{d}x = 2/3 \neq 0 \implies 1, x^2 \text{ não são ortogonais em } [-1, 1].$$

- Adicionando uma constante c a x^2, temos

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot (x^2 + c) \, \mathrm{d}x = 2/3 + 2c \overset{\downarrow}{=} 0 \iff c = -1/3$$

Parênteses: Funções Ortogonais

- Verificando agora para $p_1(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} x \cdot (x^2 - 1/3)\,\mathrm{d}x = 0$$

Parênteses: Funções Ortogonais

- Verificando agora para $p_1(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} x \cdot (x^2 - 1/3)\, \mathrm{d}x = 0$$

- Ou seja, $p_2(x) = x^2 - 1/3$ é ortogonal a ambos $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x$ em $[-1, 1]$

Parênteses: Funções Ortogonais

- Verificando agora para $p_1(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} x \cdot (x^2 - 1/3)\, \mathrm{d}x = 0$$

- Ou seja, $p_2(x) = x^2 - 1/3$ é ortogonal a ambos $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x$ em $[-1, 1]$
- Achamos então um conjunto ortogonal em $[-1, 1]$: $\{1, x, x^2 - 1/3\}$

Parênteses: Funções Ortogonais

- Verificando agora para $p_1(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} x \cdot (x^2 - 1/3)\,\mathrm{d}x = 0$$

- Ou seja, $p_2(x) = x^2 - 1/3$ é ortogonal a ambos $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x$ em $[-1, 1]$
- Achamos então um conjunto ortogonal em $[-1, 1]$: $\{1, x, x^2 - 1/3\}$
- Estes três polinômios são parte de um conjunto descoberto por Legendre.

Polinômios de Legendre

- Seja um conjunto com n polinômios definidos por

$$p_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} [(x^2 - 1)^i] \quad 0 \leq i \leq n$$

  Os p_i são ortogonais em $[-1, 1]$.

Polinômios de Legendre

- Seja um conjunto com n polinômios definidos por

$$p_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}[(x^2-1)^i] \quad 0 \leq i \leq n$$

  Os p_i são ortogonais em $[-1, 1]$.
- Note: $p_i(x)$ é um polinômio de grau i (i-ésima derivada de polinômo de grau $2i$)

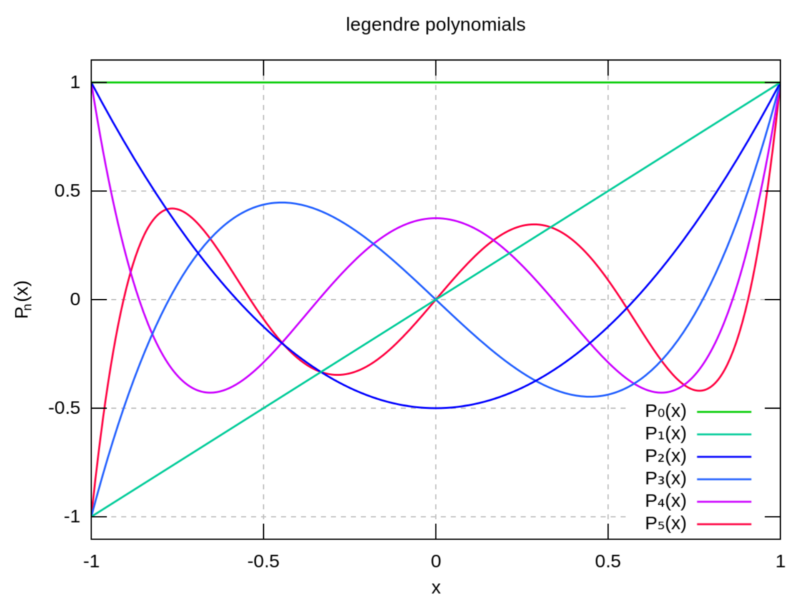
Polinômios de Legendre

- Seja um conjunto com n polinômios definidos por

$$p_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} [(x^2 - 1)^i] \quad 0 \leq i \leq n$$

  Os p_i são ortogonais em $[-1, 1]$.
- Note: $p_i(x)$ é um polinômio de grau i (i-ésima derivada de polinômo de grau $2i$)
- O n-ésimo polinômio de Legendre tem n raízes $x_1, \ldots, x_n$ em $[-1, 1]$

Polinômios de Legendre

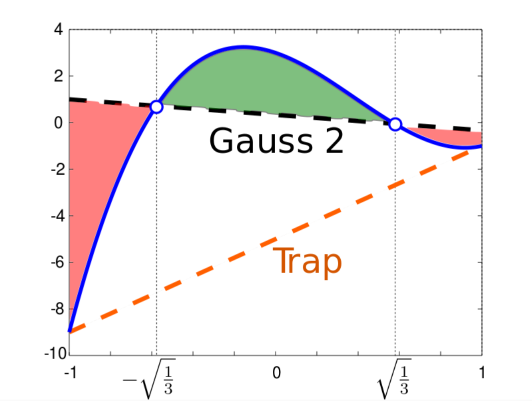


Quadratura Gaussiana

- Idéia similar às anteriores: aproximamos a integral da função pela integral do polinômio interpolador.

Quadratura Gaussiana

- Idéia similar às anteriores: aproximamos a integral da função pela integral do polinômio interpolador.
- Quadratura de Gauss-Legendre de f: combinação linear de $f(x_i)$, sendo x_i os zeros dos polinômios de Legendre.



Quadratura de Gauss-Legendre

- Para n fixo, seja $Q(x)$ o polinômio que interpola $f(x)$ nos nós $x_1, \ldots, x_n$ (zeros do Polinômio de Legendre)

Quadratura de Gauss-Legendre

- Para n fixo, seja $Q(x)$ o polinômio que interpola $f(x)$ nos nós $x_1, \ldots, x_n$ (zeros do Polinômio de Legendre)
- Usando a fórmula de Lagrange, temos

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} L_i f(x_i) \quad L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Para n fixo, seja $Q(x)$ o polinômio que interpola $f(x)$ nos nós $x_1, \ldots, x_n$ (zeros do Polinômio de Legendre)
- Usando a fórmula de Lagrange, temos

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} L_i f(x_i) \quad L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

- Integrando ambos os lados, obtemos a aproximação:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^{n} c_i f(x_i), \quad c_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)\,\mathrm{d}x}$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- As raízes dos polinômios de Legendre, bem como os valores dos coeficientes c_i, são conhecidos com bastante precisão:

n	raízes x_i			coeficientes c_i		
2	$-1/\sqrt{3}$	$=$	-0.57735026918963	1	$=$	1.00000000000000
	$1/\sqrt{3}$	$=$	0.57735026918963	1	$=$	1.00000000000000
3	$-\sqrt{3/5}$	$=$	-0.77459666924148	$5/9$	$=$	0.55555555555555
	0	$=$	0.00000000000000	$8/9$	$=$	0.88888888888888
	$\sqrt{3/5}$	$=$	0.77459666924148	$5/9$	$=$	0.55555555555555
4	$-\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$=$	-0.86113631159405	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180}$	$=$	0.34785484513745
	$-\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$	$=$	-0.33998104358486	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180}$	$=$	0.65214515486255
	$\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$	$=$	0.33998104358486	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180}$	$=$	0.65214515486255
	$\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$=$	0.86113631159405	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180}$	$=$	0.34785484513745

Quadratura de Gauss-Legendre

- Exemplo: aproximaremos a integral via GL:

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Exemplo: aproximaremos a integral via GL:

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

- Com $n = 2$ nós, temos

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$1 \cdot f(-\sqrt{1/3}) - 1 \cdot f(\sqrt{1/3}) \approx 1.69296344978123$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Exemplo: aproximaremos a integral via GL:
$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$
- Com $n = 2$ nós, temos
$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$
$$1 \cdot f(-\sqrt{1/3}) - 1 \cdot f(\sqrt{1/3}) \approx 1.69296344978123$$
- Com $n = 3$ nós, temos
$$\frac{5}{9} f\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{3/5}\right) \approx 1.71202024520191$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Exemplo: aproximaremos a integral via GL:

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

- Com $n = 2$ nós, temos

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$1 \cdot f(-\sqrt{1/3}) - 1 \cdot f(\sqrt{1/3}) \approx 1.69296344978123$$

- Com $n = 3$ nós, temos

$$\frac{5}{9} f\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{3/5}\right) \approx 1.71202024520191$$

- Com $n = 4$ nós, temos

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4) \approx 1.71122450459949$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Exemplo: aproximaremos a integral via GL:

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$

- Com $n = 2$ nós, temos

$$\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$1 \cdot f(-\sqrt{1/3}) - 1 \cdot f(\sqrt{1/3}) \approx 1.69296344978123$$

- Com $n = 3$ nós, temos

$$\frac{5}{9} f\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{3/5}\right) \approx 1.71202024520191$$

- Com $n = 4$ nós, temos

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4) \approx 1.71122450459949$$

- O valor correto com 14 casas é 1.71124878378430

Quadratura de Gauss-Legendre

- GL costuma chegar em aproximações mais precisa do que fórmulas "básicas" de Newton-Cotes, para um mesmo número de chamadas à função f.

Quadratura de Gauss-Legendre

- GL costuma chegar em aproximações mais precisa do que fórmulas "básicas" de Newton-Cotes, para um mesmo número de chamadas à função f.
- Isso se deve ao fato da Quadratura Gaussiana, usando um polinômio de Legendre de grau n em $[-1, 1]$, ter ordem de precisão $2n - 1$

Quadratura de Gauss-Legendre

- GL costuma chegar em aproximações mais precisa do que fórmulas "básicas" de Newton-Cotes, para um mesmo número de chamadas à função f.
- Isso se deve ao fato da Quadratura Gaussiana, usando um polinômio de Legendre de grau n em $[-1, 1]$, ter ordem de precisão $2n - 1$
- Isso significa que o método deve integrar um polinômio $P(x)$ de grau máximo $2n - 1$ exatamente.

Quadratura de Gauss-Legendre

- Demonstração: usando divisão longa de polinômios, temos

$$P(x) = S(x)p_n(x) + R(x) \quad S, R \text{ têm grau } < n$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Demonstração: usando divisão longa de polinômios, temos

$$P(x) = S(x)p_n(x) + R(x) \quad S, R \text{ têm grau } < n$$

- GL vai integrar o resto $R(x)$ exatamente: é a integral de um polinômio interpolador de grau $n-1$, que é idêntico a $R(x)$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Demonstração: usando divisão longa de polinômios, temos

$$P(x) = S(x)p_n(x) + R(x) \quad S, R \text{ têm grau } < n$$

- GL vai integrar o resto $R(x)$ exatamente: é a integral de um polinômio interpolador de grau $n-1$, que é idêntico a $R(x)$
- Nas raízes x_i de $p_n(x)$, $P(x_i) = R(x_i)$, já que $p_n(x_i) = 0, \forall i$. Então, as QGL serão iguais.

Quadratura de Gauss-Legendre

- Demonstração: usando divisão longa de polinômios, temos

$$P(x) = S(x)p_n(x) + R(x) \quad S, R \text{ têm grau } < n$$

- GL vai integrar o resto $R(x)$ exatamente: é a integral de um polinômio interpolador de grau $n-1$, que é idêntico a $R(x)$
- Nas raízes x_i de $p_n(x)$, $P(x_i) = R(x_i)$, já que $p_n(x_i) = 0, \forall i$. Então, as QGL serão iguais.
- Mas suas integrais também o são:

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} S(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_{1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Demonstração: usando divisão longa de polinômios, temos

$$P(x) = S(x)p_n(x) + R(x) \quad S, R \text{ têm grau } < n$$

- GL vai integrar o resto $R(x)$ exatamente: é a integral de um polinômio interpolador de grau $n-1$, que é idêntico a $R(x)$
- Nas raízes x_i de $p_n(x)$, $P(x_i) = R(x_i)$, já que $p_n(x_i) = 0, \forall i$. Então, as QGL serão iguais.
- Mas suas integrais também o são:

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} S(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_{1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x$$

- A integral em S é zero já que S pode ser escrito como combinação linear dos $p_n(x)$, e estes são ortogonais.

Quadratura de Gauss-Legendre

- Demonstração: usando divisão longa de polinômios, temos

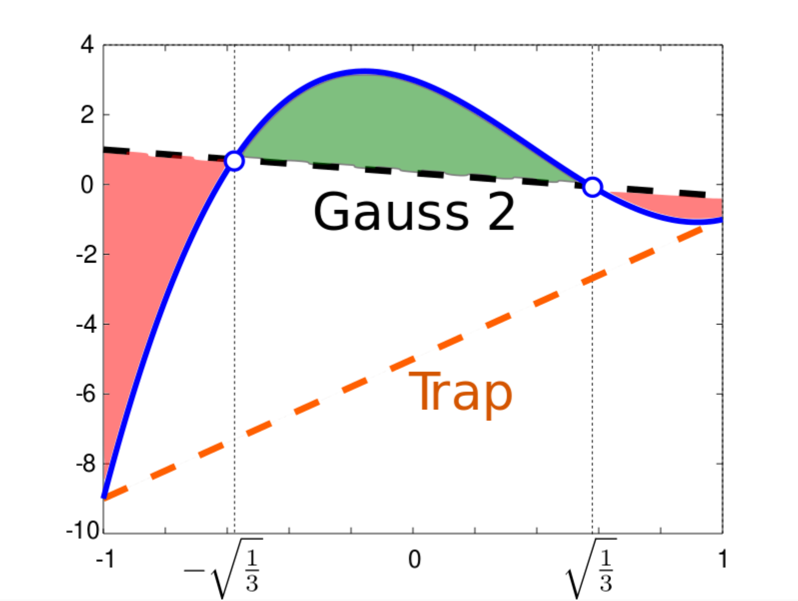
$$P(x) = S(x)p_n(x) + R(x) \quad S, R \text{ têm grau } < n$$

- GL vai integrar o resto $R(x)$ exatamente: é a integral de um polinômio interpolador de grau $n-1$, que é idêntico a $R(x)$
- Nas raízes x_i de $p_n(x)$, $P(x_i) = R(x_i)$, já que $p_n(x_i) = 0, \forall i$. Então, as QGL serão iguais.
- Mas suas integrais também o são:

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} S(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_{1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x$$

- A integral em S é zero já que S pode ser escrito como combinação linear dos $p_n(x)$, e estes são ortogonais.
- Ou seja: como QGL é exata em R, também o é para P.

Quadratura de Gauss-Legendre



Quadratura de Gauss-Legendre

- Até agora, fizemos integrais em $[-1, 1]$.

Quadratura de Gauss-Legendre

- Até agora, fizemos integrais em $[-1, 1]$.
- Para uma integral genérica num intervalo $[a, b]$, basta fazer uma substituição $t = (2x - a - b)/(b - a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right)\frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}t$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Voltemos ao exemplo manjado

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Voltemos ao exemplo manjado

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Aplicando QGL (via transformação anterior):

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{t+3}{2}\right)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

Quadratura de Gauss-Legendre

- Voltemos ao exemplo manjado

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Aplicando QGL (via transformação anterior):

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{t+3}{2}\right)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

- sendo $f(t) = \ln((t+3)/2)/2$, usando as raízes e coeficientes para $n = 4$, obtemos 0.38629449693871

Quadratura de Gauss-Legendre

- Voltemos ao exemplo manjado

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

- Aplicando QGL (via transformação anterior):

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{t+3}{2}\right)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

- sendo $f(t) = \ln((t+3)/2)/2$, usando as raízes e coeficientes para $n = 4$, obtemos 0.38629449693871
- Obtemos um valor mais preciso (exato $2\ln 2 - 1 \approx 0.38629436111989$) do que todos os métodos anteriores.

Apêndice

- Teorema do valor médio para integrais (um dos): se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e $g(x)$ é integrável e não muda de sinal em $[a, b]$, então existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Apêndice

- Teorema do valor médio para integrais (um dos): se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e $g(x)$ é integrável e não muda de sinal em $[a, b]$, então existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- No caso particular $g(x) = 1$, temos o método usual para determinar o valor médio de $f(x)$ em $[a, b]$:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$