Solução de Sistemas Lineares

Cálculo Numérico

Bóris Marin

UFABC

Motivação

Petróleo

- Em três poços de petróleo, situados em regiões distintas, o material coletado tem diferentes concentrações de duas substâncias A e B.

Petróleo

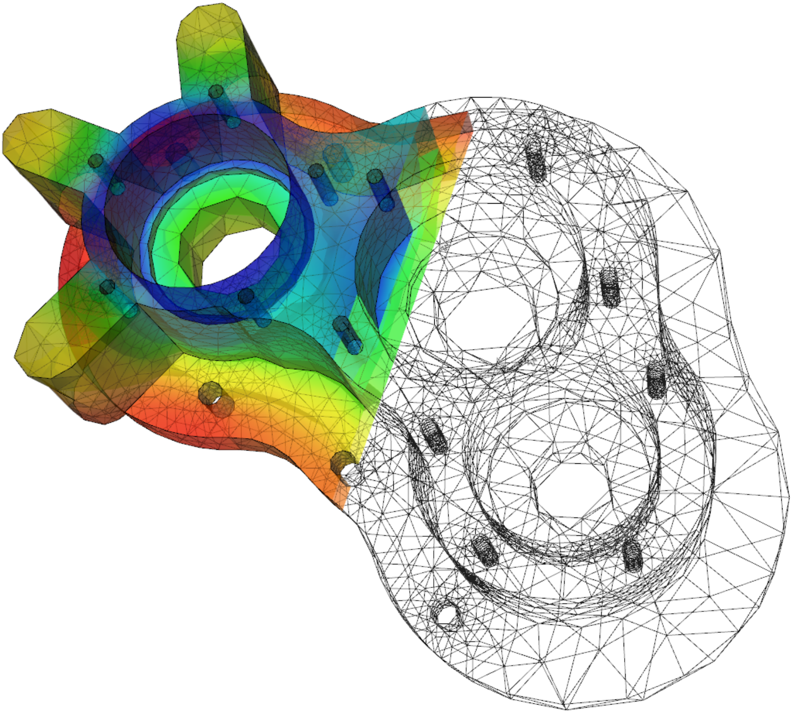
- Em três poços de petróleo, situados em regiões distintas, o material coletado tem diferentes concentrações de duas substâncias A e B.
- Uma central recebe o petróleo dos três poços, mas antes do refino precisa obter uma mistura com uma concentração escolhida das substâncias A e B

Petróleo

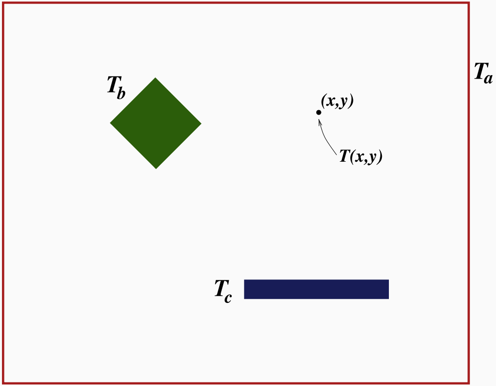
- Em três poços de petróleo, situados em regiões distintas, o material coletado tem diferentes concentrações de duas substâncias A e B.
- Uma central recebe o petróleo dos três poços, mas antes do refino precisa obter uma mistura com uma concentração escolhida das substâncias A e B
- Em cada litro de petróleo que será gerado para o refino, quanto petróleo de cada poço se deve colocar?

Petróleo

$$\begin{cases} c_{1A} \cdot q_1 + c_{2A} \cdot q_2 + c_{3A} \cdot q_3 = c_A \\ c_{1B} \cdot q_1 + c_{2B} \cdot q_2 + c_{3B} \cdot q_3 = c_B \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases}$$

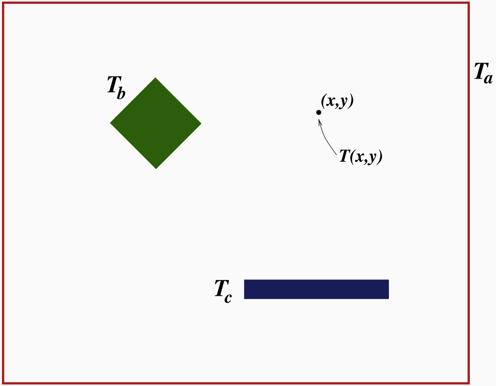


Equilíbrio Térmico ("termostático")



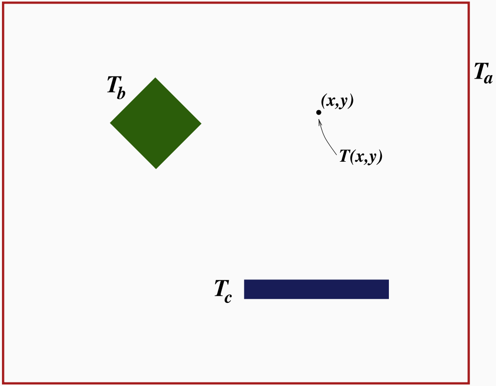
- entorno do quadrado (vermelho), temperatura T_a

Equilíbrio Térmico ("termostático")



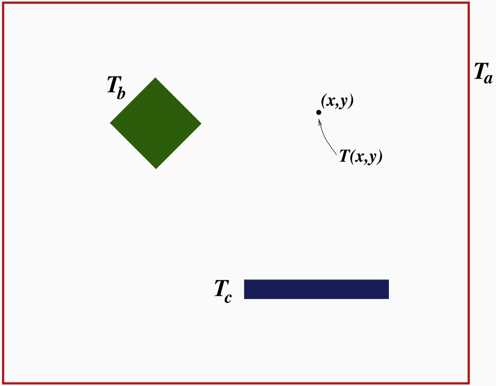
- entorno do quadrado (vermelho), temperatura T_a
- quadrado inclinado (verde), temperatura T_b

Equilíbrio Térmico ("termostático")



- entorno do quadrado (vermelho), temperatura T_a
- quadrado inclinado (verde), temperatura T_b
- barra azul, temperatura T_c

Equilíbrio Térmico ("termostático")



- entorno do quadrado (vermelho), temperatura T_a
- quadrado inclinado (verde), temperatura T_b
- barra azul, temperatura T_c
- **como se distribui a temperatura, no equilíbrio, em função da posição**?

Equilíbrio Térmico

- O problema de determinar o estado de *Equilíbrio Térmico* (ou similarmente *Equilíbrio Eletrostático*) de um sistema pode ser reduzido a um sistema de equações lineares

Equilíbrio Térmico

- O problema de determinar o estado de *Equilíbrio Térmico* (ou similarmente *Equilíbrio Eletrostático*) de um sistema pode ser reduzido a um sistema de equações lineares
- A equação que rege a distribuição de calor em função do tempo em determinada região se chama de *Equação do Calor*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \nabla^2 u \qquad (\alpha > 1, cte)$$

Equilíbrio Térmico

- O problema de determinar o estado de *Equilíbrio Térmico* (ou similarmente *Equilíbrio Eletrostático*) de um sistema pode ser reduzido a um sistema de equações lineares
- A equação que rege a distribuição de calor em função do tempo em determinada região se chama de *Equação do Calor*:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \nabla^2 u \qquad (\alpha > 1, cte)$$
- Essa equação aparece em diversos contextos da matática aplicada (probabilidade: Movimento Browniano, economia: solução da eq. de Black–Scholes)

Equilíbrio Térmico

- O problema de determinar o estado de *Equilíbrio Térmico* (ou similarmente *Equilíbrio Eletrostático*) de um sistema pode ser reduzido a um sistema de equações lineares
- A equação que rege a distribuição de calor em função do tempo em determinada região se chama de *Equação do Calor*:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \nabla^2 u \qquad (\alpha > 1, cte)$$
- Essa equação aparece em diversos contextos da matática aplicada (probabilidade: Movimento Browniano, economia: solução da eq. de Black–Scholes)
- Estamos interessados no *caso estacinário*: nada muda com o tempo:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \implies \boxed{\nabla^2 u = 0}$$

Equilíbrio Térmico

- O problema de determinar o estado de *Equilíbrio Térmico* (ou similarmente *Equilíbrio Eletrostático*) de um sistema pode ser reduzido a um sistema de equações lineares

- A equação que rege a distribuição de calor em função do tempo em determinada região se chama de *Equação do Calor*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \nabla^2 u \qquad (\alpha > 1, cte)$$

- Essa equação aparece em diversos contextos da matática aplicada (probabilidade: Movimento Browniano, economia: solução da eq. de Black–Scholes)

- Estamos interessados no *caso estacinário*: nada muda com o tempo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \implies \boxed{\nabla^2 u = 0}$$

Equilíbrio Térmico: Exemplo

- No caso do problema acima, a Equação de Laplace fica

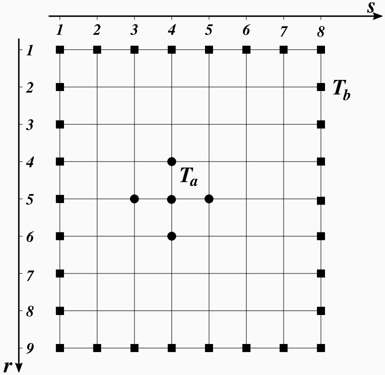
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Equilíbrio Térmico: Exemplo

- No caso do problema acima, a Equação de Laplace fica

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

- Para resolver EDPs numericamente, discretizamos o problema:

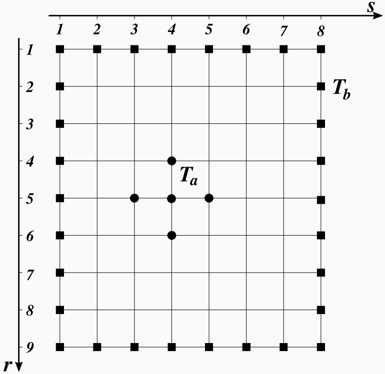


Equilíbrio Térmico: Exemplo

- No caso do problema acima, a Equação de Laplace fica

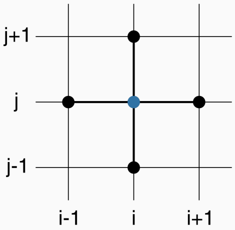
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

- Para resolver EDPs numericamente, discretizamos o problema:



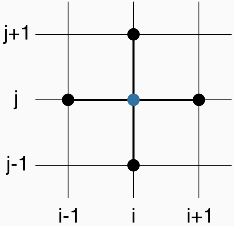
- Resolveremos este sistema numericamente no segundo trabalho!

Equilíbrio Térmico: Exemplo



- Uma das possíveis soluções numérica da Equação de Laplace toma uma forma simples: a temperatura em cada nó é a média da temperatura em seus vizinhos

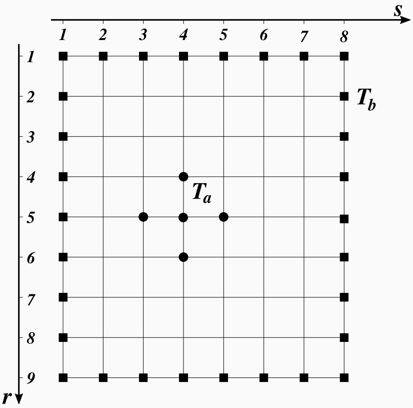
Equilíbrio Térmico: Exemplo



- Uma das possíveis soluções numérica da Equação de Laplace toma uma forma simples: a temperatura em cada nó é a média da temperatura em seus vizinhos
- Temos, enfim, um sistema de equações: por exemplo, para o nó 2,2 da figura anterior:

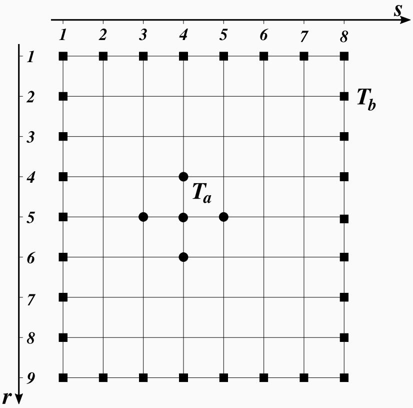
$$T_{22} = \frac{1}{4}(T_a + T_a + T_{32} + T_{23})$$

Equilíbrio Térmico: Exemplo



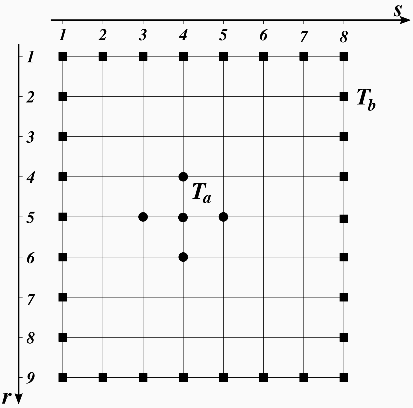
- Ficamos com um sistema com 37 equações e incógnitas:

Equilíbrio Térmico: Exemplo



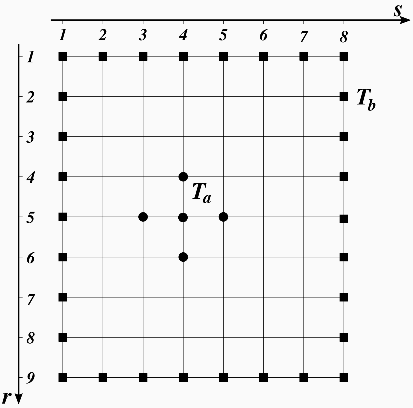
- Ficamos com um sistema com 37 equações e incógnitas:
  - $9 \times 8 = 72$ nós

Equilíbrio Térmico: Exemplo



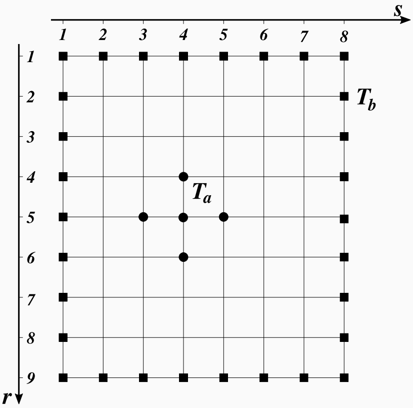
- Ficamos com um sistema com 37 equações e incógnitas:
  - $9 \times 8 = 72$ nós
  - menos 30 (bordas, T fixa)

Equilíbrio Térmico: Exemplo



- Ficamos com um sistema com 37 equações e incógnitas:
    - $9 \times 8 = 72$ nós
    - menos 30 (bordas, T fixa)
    - menos 5 (quadrado interno com T fixa)

Equilíbrio Térmico: Exemplo



- Ficamos com um sistema com 37 equações e incógnitas:
  - $9 \times 8 = 72$ nós
  - menos 30 (bordas, T fixa)
  - menos 5 (quadrado interno com T fixa)
  - final: 37 (nós "internos")

Resolvendo Sistemas Lineares — Métodos Diretos

Eliminação Gaussiana

Considere o sistema de equações lineares (escrito na forma algébrica)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

onde m é o número de equações e n é o número de incógnitas.

Sistemas — Forma Matricial

Este sistema pode ser escrito na *forma matricial*

$$Ax = b$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

onde A é chamada de *matriz dos coeficientes*, x de *vetor das incógnitas* e b de *vetor dos termos constantes*.

Sistemas — Forma Matricial

Definimos a *matriz completa* (também chamada de *matriz estendida*) de um sistema como $Ax = b$ como $[A|b]$, isto é,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Eliminação Gaussiana

- Como resolver este sistema?

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Eliminação Gaussiana

- Como resolver este sistema?

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

- O método de Eliminação Gaussiana aproveita-se do fato de que é fácil resolver um sistema nesta forma, dito *triangularizado*

Eliminação Gaussiana

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

- Resolvendo explicitamente: primeiro, isola-se x_n:

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n$$

Eliminação Gaussiana

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

- Resolvendo explicitamente: primeiro, isola-se x_n:

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n$$

- A penúltima equação é

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

Eliminação Gaussiana

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

- Resolvendo explicitamente: primeiro, isola-se x_n:

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n$$

- A penúltima equação é

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

- então

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \left(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n \right)$$

Eliminação Gaussiana

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & a_{33}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

- Resolvendo explicitamente: primeiro, isola-se x_n:

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n$$

- A penúltima equação é

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

- então

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \left(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n\right)$$

- E assim sucessivamente. Isso se chama *substituição regressiva*.

Eliminação Gaussiana

- Vamos ver como triangularizar um sistema com um exemplo:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + 4y + 2z &= 2 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

- Basta utilizar combinações lineares de linhas, ou permutá-las:

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana

- Vamos ver como triangularizar um sistema com um exemplo:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + 4y + 2z &= 2 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

- Basta utilizar combinações lineares de linhas, ou permutá-las:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 - 2\ell_1]{\ell_2 - 4\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana

- Vamos ver como triangularizar um sistema com um exemplo:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + 4y + 2z &= 2 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

- Basta utilizar combinações lineares de linhas, ou permutá-las:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 - 2\ell_1]{\ell_2 - 4\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana

- Chegamos então a uma matriz triangular, chamada de *matriz escalonada* do sistema.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

- Aplicando substitução regressiva, determinamos a solução x.
- Uma alternativa é seguir o procedimento de eliminação gaussiana, anulando os elementos da matriz estendida *acima* da diagonal. Neste caso, chega-se à *matriz escalonada reduzida*. Começamos fazendo $\ell_3 \div (-2)$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana

- Chegamos então a uma matriz triangular, chamada de *matriz escalonada* do sistema.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

- Aplicando substituição regressiva, determinamos a solução x.
- Uma alternativa é seguir o procedimento de eliminação gaussiana, anulando os elementos da matriz estendida *acima* da diagonal. Neste caso, chega-se à *matriz escalonada reduzida*. Começamos fazendo $\ell_3 \div (-2)$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2+3\ell_3]{\ell_1-\ell_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana

- Chegamos então a uma matriz triangular, chamada de *matriz escalonada* do sistema.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

- Aplicando substitução regressiva, determinamos a solução x.
- Uma alternativa é seguir o procedimento de eliminação gaussiana, anulando os elementos da matriz estendida *acima* da diagonal. Neste caso, chega-se à *matriz escalonada reduzida*. Começamos fazendo $\ell_3 \div (-2)$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2+3\ell_3]{\ell_1-\ell_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2\div(-1)]{\ell_1+\ell_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana: Escala

- Vamos aplicar EG no sistema abaixo, para $\epsilon > 0,\ \epsilon \ll 1$

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 2 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 1 & \epsilon & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1/\epsilon} \left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 0 & \epsilon - \frac{2}{\epsilon} & 3 - \frac{4}{\epsilon} \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana: Escala

- Vamos aplicar EG no sistema abaixo, para $\epsilon > 0, \ \epsilon \ll 1$

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 2 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 1 & \epsilon & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1/\epsilon} \left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 0 & \epsilon - \frac{2}{\epsilon} & 3 - \frac{4}{\epsilon} \end{array}\right]$$

- Ou seja

$$x_2 = \frac{3 - 4/\epsilon}{\epsilon - 2/\epsilon} = \frac{3\epsilon - 4}{\epsilon^2 - 2} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 2$$

Eliminação Gaussiana: Escala

- Vamos aplicar EG no sistema abaixo, para $\epsilon > 0,\ \epsilon \ll 1$

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 2 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 1 & \epsilon & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1/\epsilon} \left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 0 & \epsilon - \frac{2}{\epsilon} & 3 - \frac{4}{\epsilon} \end{array}\right]$$

- Ou seja

$$x_2 = \frac{3 - 4/\epsilon}{\epsilon - 2/\epsilon} = \frac{3\epsilon - 4}{\epsilon^2 - 2} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 2$$

- Mas x é dado por

$$x_1 = \frac{4 - 2x_2}{\epsilon} = \frac{2}{\epsilon}(\underbrace{{\color{red}2} - x_2}_{\text{o quê acontece aqui?}})$$

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Subtração de dois números próximos: *Cancelamento Catastrófico*!
- *Pivotamento Parcial*: trocamos as linhas a cada passo, para usar sempre o maior número (em módulo) de cada coluna como pivô:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 1 & \epsilon & 3 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Subtração de dois números próximos: *Cancelamento Catastrófico*!
- *Pivotamento Parcial*: trocamos as linhas a cada passo, para usar sempre o maior número (em módulo) de cada coluna como pivô:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 1 & \epsilon & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_1]{1 > \epsilon:\ \text{trocar}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \epsilon & 3 \\ \epsilon & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Subtração de dois números próximos: *Cancelamento Catastrófico*!
- *Pivotamento Parcial*: trocamos as linhas a cada passo, para usar sempre o maior número (em módulo) de cada coluna como pivô:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \epsilon & 2 & 4 \\ 1 & \epsilon & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_1]{1>\epsilon:\ \text{trocar}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \epsilon & 3 \\ \epsilon & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 - \epsilon\ell_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \epsilon & 3 \\ 0 & 2-\epsilon^2 & 4-3\epsilon \end{array}\right]$$

- Desta forma,

$$x_2 = \frac{4-4\epsilon}{2-\epsilon^2} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 2 \qquad x_1 = \underbrace{3-\epsilon x_2}_{\text{agora sim!}}$$

Neste caso, não há cancelamento catastrófico.

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Mais um exemplo de Pivotamento Parcial

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Mais um exemplo de Pivotamento Parcial

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{\max(|\mathrm{col}_1|)=2} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Mais um exemplo de Pivotamento Parcial

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{\max(|\mathrm{col}_1|)=2} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

- Note a troca de linhas. Seguimos eliminando a coluna 1:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2-(-\frac{1}{2})\ell_1} \left[\begin{array}{lrr|r} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Mais um exemplo de Pivotamento Parcial

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{\max(|\mathrm{col}_1|)=2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

- Note a troca de linhas. Seguimos eliminando a coluna 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 - (-\frac{1}{2})\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

- Pivotamento parcial também dá conta de pivôs nulos!

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Continuando (col. 2): Não é necessário trocar linhas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & \color{blue}{1} & 1 & 1 \\ 0 & \color{blue}{-1} & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Continuando (col. 2): Não é necessário trocar linhas.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & \color{blue}{1} & 1 & 1 \\ 0 & \color{blue}{-1} & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3-(-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana — Pivotamento Parcial

- Continuando (col. 2): Não é necessário trocar linhas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & \color{blue}{1} & 1 & 1 \\ 0 & \color{blue}{-1} & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3 - (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

- Agora, basta substituição regressiva:

$$\begin{aligned} 4x_3 = 0 &\implies x_3 = 0 \\ 1x_2 + \cancelto{0}{1x_3} = 1 &\implies x_2 = 1 \\ 2x_1 + \cancelto{2}{2x_2} + \cancelto{0}{4x_3} = 0 &\implies x_1 = -1 \end{aligned}$$

A decomposição $A = LU$

Matrizes Triangulares

- Qual é o efeito desta multiplicação por uma *matriz triangular inferior*?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - ca_{11} & a_{22} - ca_{12} & a_{23} - ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrizes Triangulares

- Qual é o efeito desta multiplicação por uma *matriz triangular inferior*?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - ca_{11} & a_{22} - ca_{12} & a_{23} - ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- A linha ℓ_2 de A foi substituida por $\ell_2 - c\ell_1$

A decomposição $A = LU$

Matrizes Triangulares

- Qual é o efeito desta multiplicação por uma *matriz triangular inferior*?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - ca_{11} & a_{22} - ca_{12} & a_{23} - ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- A linha ℓ_2 de A foi substituida por $\ell_2 - c\ell_1$
- $L_{21} = -c$

Fatos sobre matrizes triangulares

- Basta trocar o sinal para inveter a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fatos sobre matrizes triangulares

- Basta trocar o sinal para inveter a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação simplesmente adiciona o elemento:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ c_2 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & c_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fatos sobre matrizes triangulares

- Basta trocar o sinal para inveter a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação simplesmente adiciona o elemento:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ c_2 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & c_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Desta forma, basta coletar os coeficientes usados na eliminação (atenção! usar sempre subtrações $\ell_m - c\ell_n$) para determinar a matriz L.

A decomposição $A = LU$

- Exemplo. Começamos com eliminação na col. 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3-(-3)\ell_1]{\ell_2-2\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

A decomposição $A = LU$

- Exemplo. Começamos com eliminação na col. 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - (-3)\ell_1]{\ell_2 - 2\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

- Eliminação na col. 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - (-\frac{7}{3})\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

A decomposição $A = LU$

- Exemplo. Começamos com eliminação na col. 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3-(-3)\ell_1]{\ell_2-2\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

- Eliminação na col. 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3-(-\frac{7}{3})\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

- A matriz L que descreve cada passo fica então

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

A decomposição $A = LU$

- A etapa de eliminação (sem pivotamento ainda!) pode ser vista como uma decomposição da matriz A em duas matrizes triangulares:

A decomposição $A = LU$

- A etapa de eliminação (sem pivotamento ainda!) pode ser vista como uma decomposição da matriz A em duas matrizes triangulares:
  - Uma matriz triangular superior U, representando a forma escalonada de A

A decomposição $A = LU$

- A etapa de eliminação (sem pivotamento ainda!) pode ser vista como uma decomposição da matriz A em duas matrizes triangulares:
    - Uma matriz triangular superior U, representando a forma escalonada de A
    - Uma matriz triangular inferior L, indicando os multiplicadores usados na eliminação.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

A decomposição $A = LU$

- Como fica a etapa de substitução dada a decomposição $A = LU$?

A decomposição $A = LU$

- Como fica a etapa de substitução dada a decomposição $A = LU$?
- O problema $Ax = b$ fica $LUx = b$

A decomposição $A = LU$

- Como fica a etapa de substitução dada a decomposição $A = LU$?
- O problema $Ax = b$ fica $LUx = b$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$

A decomposição $A = LU$

- Como fica a etapa de substitução dada a decomposição $A = LU$?
- O problema $Ax = b$ fica $LUx = b$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:

A decomposição $A = LU$

- Como fica a etapa de substitução dada a decomposição $A = LU$?
- O problema $Ax = b$ fica $LUx = b$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:
    1) Resolver $Lc = b$ para encontrar c (subst. progressiva)

A decomposição $A = LU$

- Como fica a etapa de substitução dada a decomposição $A = LU$?
- O problema $Ax = b$ fica $LUx = b$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:
  1) Resolver $Lc = b$ para encontrar c (subst. progressiva)
  2) Resolver $Ux = c$ para encontrar x (subst. regressiva)

A decomposição $PA = LU$

Matrizes de Permutação

- Qual é o efeito desta multiplicação por uma *matriz identidade com linhas trocadas* P?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Matrizes de Permutação

- Qual é o efeito desta multiplicação por uma *matriz identidade com linhas trocadas* P?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

- A permutação das linhas $2, 3$ da matriz identidade resultou numa matriz produto idêntica a A, a menos das linhas $2, 3$ permutadas.

A decomposição $PA = LU$

- $PA = LU$ é simplesmente a decomposição LU de uma versão de A com as linhas trocadas.

A decomposição $PA = LU$

- $PA = LU$ é simplesmente a decomposição LU de uma versão de A com as linhas trocadas.
- Utilizaremos P para armazenar as permutações no processo de pivotamento. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{pivota } \ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{P = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A decomposição $PA = LU$

- $PA = LU$ é simplesmente a decomposição LU de uma versão de A com as linhas trocadas.

- Utilizaremos P para armazenar as permutações no processo de pivotamento. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{pivota } \ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{P = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Eliminação na col. 1:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - \frac{1}{4}\ell_1]{\ell_2 - \frac{2}{4}\ell_1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A decomposição $PA = LU$

- Continuando: Coluna 2 — pivotamento

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{pivota } \ell_3 \leftrightarrow \ell_2]{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

A decomposição $PA = LU$

- Continuando: Coluna 2 — pivotamento

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{pivota } \ell_3 \leftrightarrow \ell_2]{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

- Coluna 2 — eliminação

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - \left(-\frac{1}{2}\right)\ell_2} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{2}{4} & -\frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

A decomposição $PA = LU$

- Com isso, terminamos a decomposição:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}$$

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:
- O problema $Ax = b$ fica $PAx = LUx = Pb$

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:
- O problema $Ax = b$ fica $PAx = LUx = Pb$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:
- O problema $Ax = b$ fica $PAx = LUx = Pb$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:
- O problema $Ax = b$ fica $PAx = LUx = Pb$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:
    1) Resolver $Lc = Pb$ para encontrar c (subst. progressiva)

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:
- O problema $Ax = b$ fica $PAx = LUx = Pb$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:
  1) Resolver $Lc = Pb$ para encontrar c (subst. progressiva)
  2) Resolver $Ux = c$ para encontrar x (subst. regressiva)

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:
- O problema $Ax = b$ fica $PAx = LUx = Pb$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:
  1) Resolver $Lc = Pb$ para encontrar c (subst. progressiva)
  2) Resolver $Ux = c$ para encontrar x (subst. regressiva)
- Em retrospecto, a decomposição $PA = LU$

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:
- O problema $Ax = b$ fica $PAx = LUx = Pb$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:
  1) Resolver $Lc = Pb$ para encontrar c (subst. progressiva)
  2) Resolver $Ux = c$ para encontrar x (subst. regressiva)
- Em retrospecto, a decomposição $PA = LU$
  - contém toda a lógica de pivotamento e eliminação, numa forma compacta: útil para implementações eficientes.

A decomposição $PA = LU$

- Para fazer a etapa de substituição:
- O problema $Ax = b$ fica $PAx = LUx = Pb$
- Seja um vetor auxiliar $c = Ux$
- A substituição fica então:
  1) Resolver $Lc = Pb$ para encontrar c (subst. progressiva)
  2) Resolver $Ux = c$ para encontrar x (subst. regressiva)
- Em retrospecto, a decomposição $PA = LU$
  - contém toda a lógica de pivotamento e eliminação, numa forma compacta: útil para implementações eficientes.
  - é independente do vetor b: útil para resolver o mesmo problema várias vezes, para condições (b) distintas.

Amplificação de Erros — Motivação

- Suponha que tenhamos um sistema $Ax = b$, e sabemos A^{-1} (nota: quase nunca é uma boa idéia inverter matrizes numericamente!)

Amplificação de Erros — Motivação

- Suponha que tenhamos um sistema $Ax = b$, e sabemos A^{-1} (nota: quase nunca é uma boa idéia inverter matrizes numericamente!)
- A solução é simplemente dada por $x_0 = A^{-1}b$.

Amplificação de Erros — Motivação

- Suponha que tenhamos um sistema $Ax = b$, e sabemos A^{-1} (nota: quase nunca é uma boa idéia inverter matrizes numericamente!)
- A solução é simplemente dada por $x_0 = A^{-1}b$.
- Se houver um erro em Δb em b (por exemplo, imprecisão na medida da temperatura), temos um erro na solução x:

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}(b + \Delta b) = A^{-1}b + A^{-1}\Delta b = x_0 + A^{-1}\Delta b \\ \Delta x &= x - x_0 = A^{-1}\Delta b \end{aligned}$$

Amplificação de Erros — Motivação

- Suponha que tenhamos um sistema $Ax = b$, e sabemos A^{-1} (nota: quase nunca é uma boa idéia inverter matrizes numericamente!)
- A solução é simplemente dada por $x_0 = A^{-1}b$.
- Se houver um erro em Δb em b (por exemplo, imprecisão na medida da temperatura), temos um erro na solução x:

$$x = A^{-1}(b + \Delta b) = A^{-1}b + A^{-1}\Delta b = x_0 + A^{-1}\Delta b$$
$$\Delta x = x - x_0 = A^{-1}\Delta b$$

- Se o erro em Δb produzir um erro grande Δx, temos um *problema mal condicionado*.

Amplificação de Erros

- Vejamos um exemplo:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 10^{-10} & 1 - 10^{-10} \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - 10^{10} & 10^{10} \\ 1 + 10^{10} & -10^{10} \end{bmatrix}$$

Amplificação de Erros

- Vejamos um exemplo:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 10^{-10} & 1 - 10^{-10} \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - 10^{10} & 10^{10} \\ 1 + 10^{10} & -10^{10} \end{bmatrix}$$

- Para $b = (1, 1)$, a solução é $x = (1, 1)$

Amplificação de Erros

- Vejamos um exemplo:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 10^{-10} & 1 - 10^{-10} \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - 10^{10} & 10^{10} \\ 1 + 10^{10} & -10^{10} \end{bmatrix}$$

- Para $b = (1, 1)$, a solução é $x = (1, 1)$
- O que acontece se fizermos uma mudança Δb em b?

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 - 10^{10}(\Delta b_1 - \Delta b_2) \\ \Delta b_1 + 10^{10}(\Delta b_1 - \Delta b_2) \end{bmatrix}$$

Amplificação de Erros

- Vejamos um exemplo:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 10^{-10} & 1 - 10^{-10} \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - 10^{10} & 10^{10} \\ 1 + 10^{10} & -10^{10} \end{bmatrix}$$

- Para $b = (1, 1)$, a solução é $x = (1, 1)$
- O que acontece se fizermos uma mudança Δb em b?

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 - 10^{10}(\Delta b_1 - \Delta b_2) \\ \Delta b_1 + 10^{10}(\Delta b_1 - \Delta b_2) \end{bmatrix}$$

- Esta é uma propriedade da matriz A, independentemente de algoritmos ou arredondamento numérico.

Amplificação de Erros

- Vejamos um exemplo:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 10^{-10} & 1 - 10^{-10} \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - 10^{10} & 10^{10} \\ 1 + 10^{10} & -10^{10} \end{bmatrix}$$

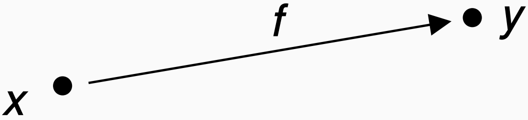
- Para $b = (1, 1)$, a solução é $x = (1, 1)$
- O que acontece se fizermos uma mudança Δb em b?

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 - 10^{10}(\Delta b_1 - \Delta b_2) \\ \Delta b_1 + 10^{10}(\Delta b_1 - \Delta b_2) \end{bmatrix}$$

- Esta é uma propriedade da matriz A, independentemente de algoritmos ou arredondamento numérico.
- Imagine o caso escalar: se A é muito pequeno, seu inverso é muito grande. Então, mesmo um erro pequeno nos dados é amplificado por este inverso.

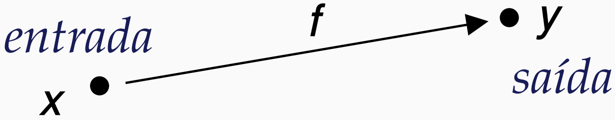
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



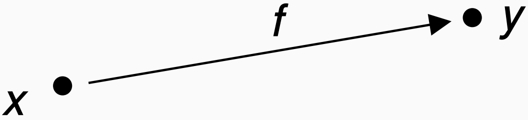
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



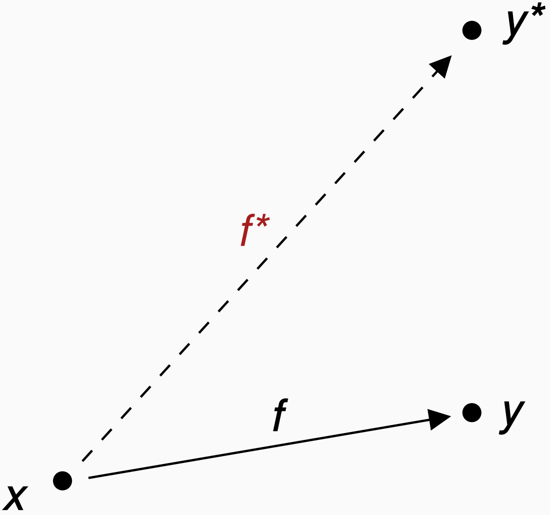
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



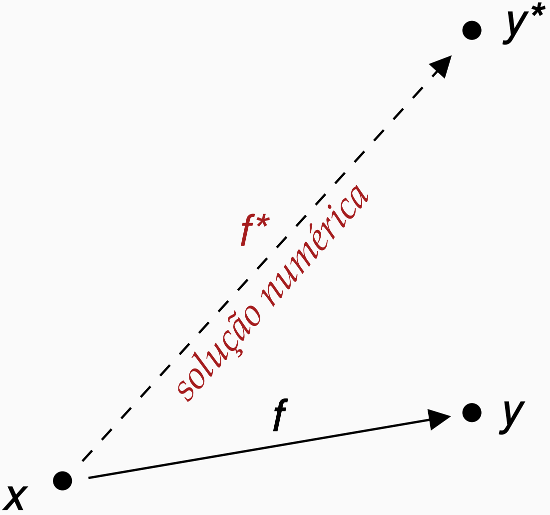
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



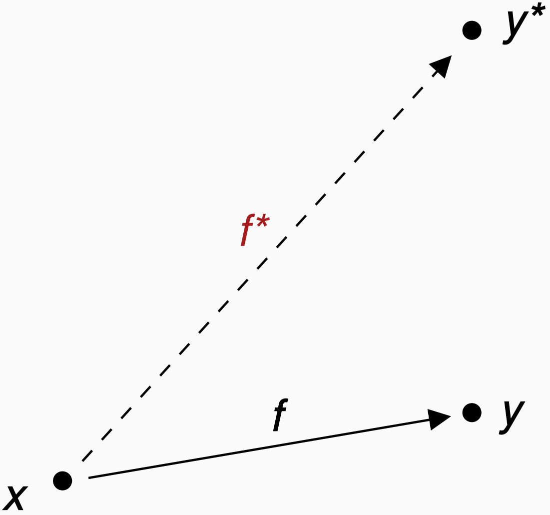
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



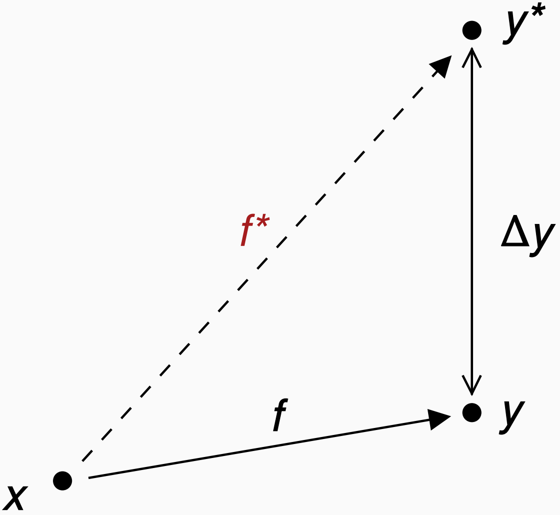
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



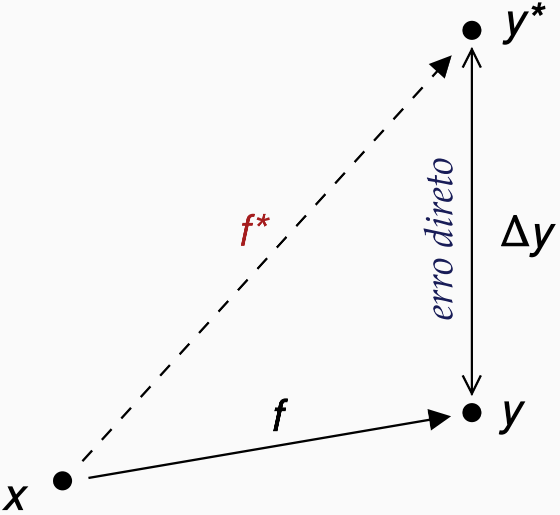
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



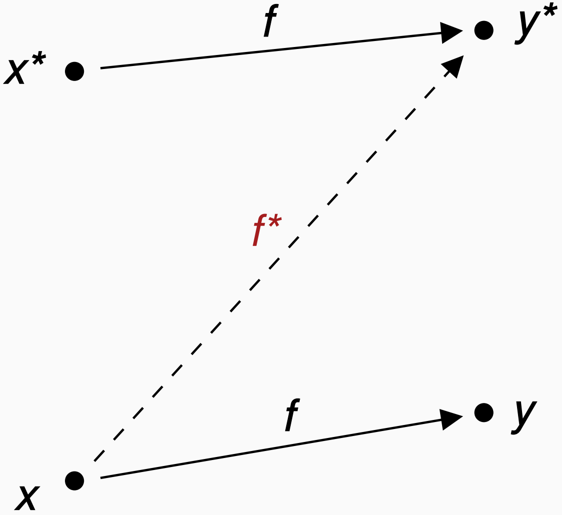
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



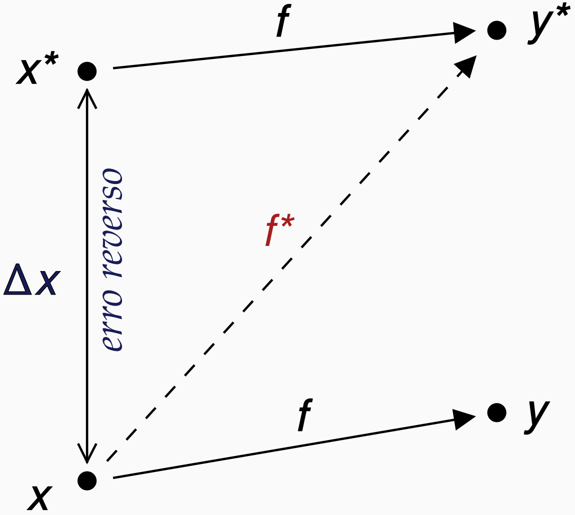
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



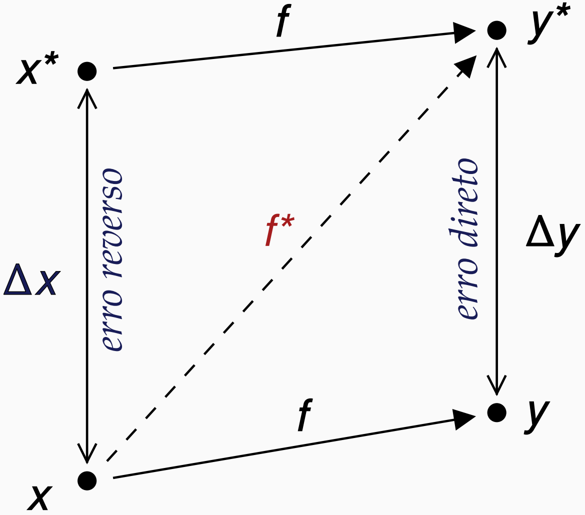
Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



Amplificação de Erros

- Erros: direto (forward) e reverso (backward)



Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na “saída” do problema.

Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na "saída" do problema.
- *Erro reverso* (backward): determina qual problema resolvemos *na verdade*

Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na "saída" do problema.
- *Erro reverso* (backward): determina qual problema resolvemos *na verdade*
- No caso concreto da solução de um sistema $Ax = b$, b é a entrada e x a saída.

Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na "saída" do problema.
- *Erro reverso* (backward): determina qual problema resolvemos *na verdade*
- No caso concreto da solução de um sistema $Ax = b$, b é a entrada e x a saída.
    - seja x_0 a solução *exata*: $x_0 = A^{-1}b$

Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na "saída" do problema.
- *Erro reverso* (backward): determina qual problema resolvemos *na verdade*
- No caso concreto da solução de um sistema $Ax = b$, b é a entrada e x a saída.
  - seja x_0 a solução *exata*: $x_0 = A^{-1}b$
  - nosso procedimento numérico (truncamento, etc) produz uma aproximação x^*. Erro direto: $\epsilon_{\text{dir}} = |x_0 - x^*|$

Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na "saída" do problema.
- *Erro reverso* (backward): determina qual problema resolvemos *na verdade*
- No caso concreto da solução de um sistema $Ax = b$, b é a entrada e x a saída.
  - seja x_0 a solução *exata*: $x_0 = A^{-1}b$
  - nosso procedimento numérico (truncamento, etc) produz uma aproximação x^*. Erro direto: $\epsilon_{\text{dir}} = |x_0 - x^*|$
  - x^* é solução **exata** de um problema "perturbado" $Ax^* = b^*$

Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na "saída" do problema.
- *Erro reverso* (backward): determina qual problema resolvemos *na verdade*
- No caso concreto da solução de um sistema $Ax = b$, b é a entrada e x a saída.
  - seja x_0 a solução *exata*: $x_0 = A^{-1}b$
  - nosso procedimento numérico (truncamento, etc) produz uma aproximação x^*. Erro direto: $\epsilon_{\text{dir}} = |x_0 - x^*|$
  - x^* é solução **exata** de um problema "perturbado" $Ax^* = b^*$
  - podemos então medir o erro reverso como a diferença nas "entradas": $\epsilon_{\text{rev}} = |b - b^*| = |b - Ax^*|$

Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na "saída" do problema.
- *Erro reverso* (backward): determina qual problema resolvemos *na verdade*
- No caso concreto da solução de um sistema $Ax = b$, b é a entrada e x a saída.
  - seja x_0 a solução *exata*: $x_0 = A^{-1}b$
  - nosso procedimento numérico (truncamento, etc) produz uma aproximação x^*. Erro direto: $\epsilon_{\text{dir}} = |x_0 - x^*|$
  - x^* é solução **exata** de um problema "perturbado" $Ax^* = b^*$
  - podemos então medir o erro reverso como a diferença nas "entradas": $\epsilon_{\text{rev}} = |b - b^*| = |b - Ax^*|$
  - A diferença $Ax^* - b$ se chama **resíduo**. Fácil de calcular, ao contrário do erro direto (que depende da solução verdadeira x_0).

Amplificação de Erros

- *Erro direto* (forward): erro na "saída" do problema.
- *Erro reverso* (backward): determina qual problema resolvemos *na verdade*
- No caso concreto da solução de um sistema $Ax = b$, b é a entrada e x a saída.
  - seja x_0 a solução *exata*: $x_0 = A^{-1}b$
  - nosso procedimento numérico (truncamento, etc) produz uma aproximação x^*. Erro direto: $\epsilon_{\text{dir}} = |x_0 - x^*|$
  - x^* é solução **exata** de um problema "perturbado" $Ax^* = b^*$
  - podemos então medir o erro reverso como a diferença nas "entradas": $\epsilon_{\text{rev}} = |b - b^*| = |b - Ax^*|$
  - A diferença $Ax^* - b$ se chama **resíduo**. Fácil de calcular, ao contrário do erro direto (que depende da solução verdadeira x_0).
  - Se $\epsilon_{\text{rev/dir}} = 0$, x^* é uma solução exata do problema.

Amplificação de Erros: Erros Similares

- Calculemos os erros direto e reverso para a solução aproximada $x_a = [1, 1]$ de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Amplificação de Erros: Erros Similares

- Calculemos os erros direto e reverso para a solução aproximada $x_a = [1, 1]$ de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- A solução correta é $x = [2, 1]$. Erro direto:

$$\|x - x_a\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1$$

Amplificação de Erros: Erros Similares

- Calculemos os erros direto e reverso para a solução aproximada $x_a = [1, 1]$ de
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$
- A solução correta é $x = [2, 1]$. Erro direto:
$$\|x - x_a\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1$$
- O erro reverso é dado por
$$\|b - Ax_a\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 3$$

Amplificação de Erros: Erros Similares

- Calculemos os erros direto e reverso para a solução aproximada $x_a = [1, 1]$ de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- A solução correta é $x = [2, 1]$. Erro direto:

$$\|x - x_a\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1$$

- O erro reverso é dado por

$$\|b - Ax_a\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 3$$

- Nota: utilizaremos a *norma infinito*: $\|x\|_\infty = \max(|x_i|)$

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos

- Calculemos os erros direto e reverso para a solução aproximada $x_a = [-1, 3.0001]$ de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 1.0001x_1 + x_2 = 2.0001 \end{cases}$$

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos

- Calculemos os erros direto e reverso para a solução aproximada $x_a = [-1, 3.0001]$ de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 1.0001x_1 + x_2 = 2.0001 \end{cases}$$

- A solução correta é $x = [1, 1]$. Erro direto $\|x - x_a\|_\infty$:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -2.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 2.0001$$

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos

- Calculemos os erros direto e reverso para a solução aproximada $x_a = [-1, 3.0001]$ de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 1.0001x_1 + x_2 = 2.0001 \end{cases}$$

- A solução correta é $x = [1, 1]$. Erro direto $\|x - x_a\|_\infty$:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -2.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 2.0001$$

- Erro reverso $\|b - Ax_a\|_\infty$:

$$\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.0001$$

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos

- Calculemos os erros direto e reverso para a solução aproximada $x_a = [-1, 3.0001]$ de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 1.0001x_1 + x_2 = 2.0001 \end{cases}$$

- A solução correta é $x = [1, 1]$. Erro direto $\|x - x_a\|_\infty$:

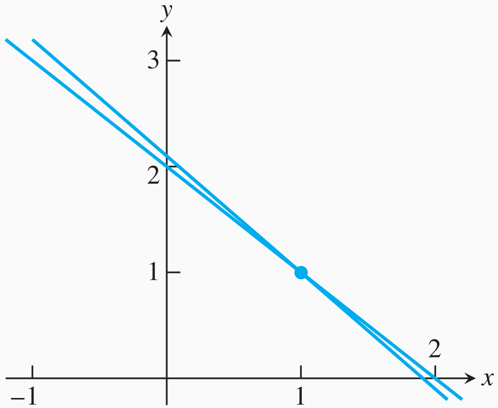
$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -2.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 2.0001$$

- Erro reverso $\|b - Ax_a\|_\infty$:

$$\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.0001$$

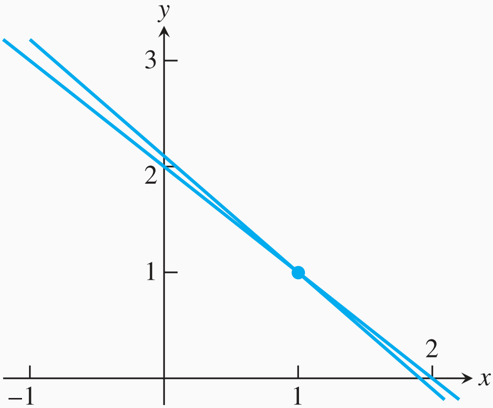
- Por os erros são tão diferentes neste caso?

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos



- Retas são quase paralelas: a solução aproximada $[-1, 3.0001]$, apesar de distante da real $[1, 1]$, "quase" está nas duas retas.

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos



- Retas são quase paralelas: a solução aproximada $[-1, 3.0001]$, apesar de distante da real $[1, 1]$, "quase" está nas duas retas.
- Neste caso, pequenas mudanças na "entrada" (retas) causam grandes mudanças na "saída" (intersecção).

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos

- Sendo $r = b - Ax_a$ o resíduo, temos os erros relativos

$$\varepsilon_{\text{rev}} = \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \varepsilon_{\text{dir}} = \frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos

- Sendo $r = b - Ax_a$ o resíduo, temos os erros relativos

$$\varepsilon_{\text{rev}} = \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \varepsilon_{\text{dir}} = \frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

- O *fator de amplificação de erro* para $Ax + b$ é a razão entre eles

$$\text{fator de amplificação de erro} = \frac{\varepsilon_{\text{dir}}}{\varepsilon_{\text{rev}}} = \frac{\frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}}{\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}}$$

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos

- Sendo $r = b - Ax_a$ o resíduo, temos os erros relativos

$$\varepsilon_{\text{rev}} = \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \varepsilon_{\text{dir}} = \frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

- O *fator de amplificação de erro* para $Ax + b$ é a razão entre eles

$$\text{fator de amplificação de erro} = \frac{\varepsilon_{\text{dir}}}{\varepsilon_{\text{rev}}} = \frac{\frac{\|x-x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}}{\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}}$$

- Para o exemplo anterior, temos

$$\varepsilon_{\text{rev}} = \frac{0.0001}{2.0001} \approx 0.005\% \qquad \varepsilon_{\text{dir}} = \frac{2.0001}{1} \approx 200\%$$

Amplificação de Erros: Erros (muito) distintos

- Sendo $r = b - Ax_a$ o resíduo, temos os erros relativos

$$\varepsilon_{\text{rev}} = \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \varepsilon_{\text{dir}} = \frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

- O *fator de amplificação de erro* para $Ax + b$ é a razão entre eles

$$\text{fator de amplificação de erro} = \frac{\varepsilon_{\text{dir}}}{\varepsilon_{\text{rev}}} = \frac{\frac{\|x-x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}}{\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}}$$

- Para o exemplo anterior, temos

$$\varepsilon_{\text{rev}} = \frac{0.0001}{2.0001} \approx 0.005\% \qquad \varepsilon_{\text{dir}} = \frac{2.0001}{1} \approx 200\%$$

- Ou seja, o fator de amplificação de erro é

$$\frac{2.0001}{\frac{0.0001}{2.0001}} = 40004.0001$$

Número de Condicionamento

- Notemos que o fator de amplificação de erros depende dos erros na "entrada" (b, no caso de estarmos resolvendo $Ax + b$ para vários b).

Número de Condicionamento

- Notemos que o fator de amplificação de erros depende dos erros na "entrada" (b, no caso de estarmos resolvendo $Ax + b$ para vários b).
- O *número de condicionamento* de uma matriz quadrada A é o **maior fator de amplificação de erro possível** ao resolver $Ax = b$, sobre todos b.

Número de Condicionamento

- Notemos que o fator de amplificação de erros depende dos erros na "entrada" (b, no caso de estarmos resolvendo $Ax + b$ para vários b).
- O *número de condicionamento* de uma matriz quadrada A é o **maior fator de amplificação de erro possível** ao resolver $Ax = b$, sobre todos b.
- O número de condicionamento é dado por

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Número de Condicionamento

- Notemos que o fator de amplificação de erros depende dos erros na "entrada" (b, no caso de estarmos resolvendo $Ax + b$ para vários b).
- O *número de condicionamento* de uma matriz quadrada A é o **maior fator de amplificação de erro possível** ao resolver $Ax = b$, sobre todos b.
- O número de condicionamento é dado por

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

- Nota: a norma infinito de uma matriz $\|A\|_\infty$ é dada pelo valor máximo (entre todas as linhas) da soma do valor absoluto dos elementos de cada linha.

Número de Condicionamento

- Para o exemplo anterior, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 10001 & -10000 \end{bmatrix}$$

Número de Condicionamento

- Para o exemplo anterior, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 10001 & -10000 \end{bmatrix}$$

- Sendo $\|A\| = 2.0001$ e $\|A^{-1}\| = 20001$, temos

$$\text{cond}(A) = (2.0001)(20001) = 40004.0001$$

Número de Condicionamento

- Para o exemplo anterior, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 10001 & -10000 \end{bmatrix}$$

- Sendo $\|A\| = 2.0001$ e $\|A^{-1}\| = 20001$, temos

$$\text{cond}(A) = (2.0001)(20001) = 40004.0001$$

- que é exatamente o fator encontrado no exemplo anterior — o pior caso possível

Número de Condicionamento

- Para o exemplo anterior, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 10001 & -10000 \end{bmatrix}$$

- Sendo $\|A\| = 2.0001$ e $\|A^{-1}\| = 20001$, temos

$$\text{cond}(A) = (2.0001)(20001) = 40004.0001$$

- que é exatamente o fator encontrado no exemplo anterior — o pior caso possível
- Ou seja, a amplificação de erros será menor para qualquer outro b

Número de Condicionamento

- Na solução de sistemas lineares, fatores de amplificação de erro da ordem de $\operatorname{cond} A$ são possíveis.

Número de Condicionamento

- Na solução de sistemas lineares, fatores de amplificação de erro da ordem de cond A são possíveis.
- Lembremos que a representação de números em ponto flutuante introduz erros relativos da ordem de $\epsilon_{\text{máquina}}$.

Número de Condicionamento

- Na solução de sistemas lineares, fatores de amplificação de erro da ordem de cond A são possíveis.
- Lembremos que a representação de números em ponto flutuante introduz erros relativos da ordem de $\epsilon_{\text{máquina}}$.
- Ou seja, dado um erro desta ordem em b, o *erro reverso* relativo nunca será menor do que $\epsilon_{\text{máq}}$

Número de Condicionamento

- Na solução de sistemas lineares, fatores de amplificação de erro da ordem de $\operatorname{cond} A$ são possíveis.
- Lembremos que a representação de números em ponto flutuante introduz erros relativos da ordem de $\epsilon_{\text{máquina}}$.
- Ou seja, dado um erro desta ordem em b, o *erro reverso* relativo nunca será menor do que $\epsilon_{\text{máq}}$
- Assim sendo, *erros diretos* relativos da ordem de $\epsilon_{\text{máq}} \cdot \operatorname{cond}(A)$ são possíveis ao resolver $Ax + b$

Número de Condicionamento

- Na solução de sistemas lineares, fatores de amplificação de erro da ordem de $\text{cond}\, A$ são possíveis.
- Lembremos que a representação de números em ponto flutuante introduz erros relativos da ordem de $\epsilon_{\text{máquina}}$.
- Ou seja, dado um erro desta ordem em b, o *erro reverso* relativo nunca será menor do que $\epsilon_{\text{máq}}$
- Assim sendo, *erros diretos* relativos da ordem de $\epsilon_{\text{máq}} \cdot \text{cond}(A)$ são possíveis ao resolver $Ax + b$
- Em outras palavras: se $\text{cond}\, A \approx 10^k$, devemos nos preparar para perder k dígitos de precisão ao calcular x.

Número de Condicionamento

- Na solução de sistemas lineares, fatores de amplificação de erro da ordem de $\operatorname{cond} A$ são possíveis.
- Lembremos que a representação de números em ponto flutuante introduz erros relativos da ordem de $\epsilon_{\text{máquina}}$.
- Ou seja, dado um erro desta ordem em b, o *erro reverso* relativo nunca será menor do que $\epsilon_{\text{máq}}$
- Assim sendo, *erros diretos* relativos da ordem de $\epsilon_{\text{máq}} \cdot \operatorname{cond}(A)$ são possíveis ao resolver $Ax + b$
- Em outras palavras: se $\operatorname{cond} A \approx 10^k$, devemos nos preparar para perder k dígitos de precisão ao calcular x.
- No exemplo anterior, $\operatorname{cond} A \approx 10^4$. Em precisão dupla (aprox. 16 alg. sign.), esperamos $16 - 4 = 12$ dígitos de precisão em x.