Zeros de Funções Reais

Cálculo Numérico

Bóris Marin

UFABC

Motivação

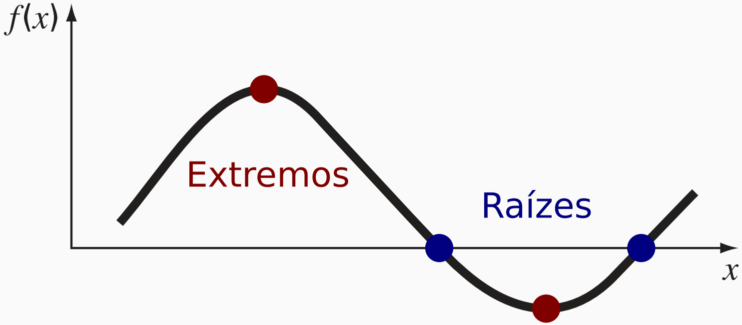
Diversão Computacional

- Primeira Aula: Bissecção

http://127.0.0.1:8888

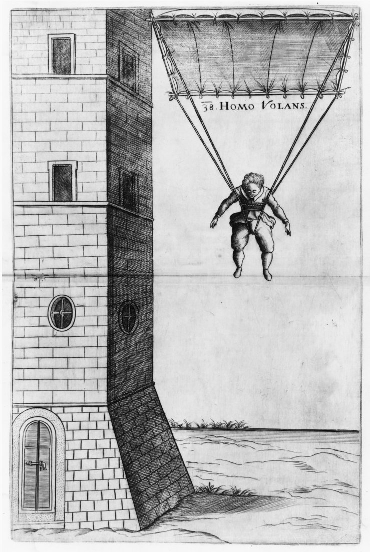
Resolvendo Equações

Visão Geral



Exemplo - Paraquedas

- Problemas tipo "velocidade terminal"
- Paraquedas é aberto a uma altura h_0
- Quanto tempo demorará para atingir o chão?



Paraquedas - Física!

- Suposição (será que é boa?) de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do paraquedista: $F_A = \alpha v(t)$

Paraquedas - Física!

- Suposição (será que é boa?) de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do paraquedista: $F_A = \alpha v(t)$
- Isso na verdade só vale para velocidades pequenas, objetos pequenos (fluxo laminar) – e chama-se lei de Stokes

Paraquedas - Física!

- Suposição (será que é boa?) de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do paraquedista: $F_A = \alpha v(t)$
- Isso na verdade só vale para velocidades pequenas, objetos pequenos (fluxo laminar) – e chama-se lei de Stokes
- Um modelo melhor usaria a "equação do arrasto" (dependência quadrática com a velocidade)

$$F_A = \frac{1}{2}\rho v^2 A C_a$$

Paraquedas - Física!

- Suposição (será que é boa?) de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do paraquedista: $F_A = \alpha v(t)$
- Isso na verdade só vale para velocidades pequenas, objetos pequenos (fluxo laminar) – e chama-se lei de Stokes
- Um modelo melhor usaria a "equação do arrasto" (dependência quadrática com a velocidade)

$$F_A = \frac{1}{2}\rho v^2 A C_a$$

- sendo ρ é a densidade do fluido, A a área projetada do objeto, e C_a o coeficiente de arrasto (que depende da geometria do objeto e do número de Reynolds)

Paraquedas — Velocidade Terminal

- 2a. lei de Newton (velocidade positiva de cima para baixo):

$$m\dot{v}(t) = mg - \underbrace{\alpha v(t)}_{\text{resistência do ar}}$$

Paraquedas — Velocidade Terminal

- 2a. lei de Newton (velocidade positiva de cima para baixo):

$$m\dot{v}(t) = mg - \underbrace{\alpha v(t)}_{\text{resistência do ar}}$$

- Seja v^* a velocidade de equilíbrio (resultante é nula): $v^* = \frac{mg}{\alpha}$. Fazendo $w(t) = v(t) - v^*$, a dinâmica fica

$$m\dot{w}(t) = m\dot{v}(t) = mg - \alpha v(t) = \alpha v^* - \alpha v(t) = -\alpha w(t)$$

Paraquedas — Velocidade Terminal

- 2a. lei de Newton (velocidade positiva de cima para baixo):

$$m\dot{v}(t) = mg - \underbrace{\alpha v(t)}_{\text{resistência do ar}}$$

- Seja v^* a velocidade de equilíbrio (resultante é nula): $v^* = \frac{mg}{\alpha}$. Fazendo $w(t) = v(t) - v^*$, a dinâmica fica

$$m\dot{w}(t) = m\dot{v}(t) = mg - \alpha v(t) = \alpha v^* - \alpha v(t) = -\alpha w(t)$$

- ou seja, $\dot{w} = -\frac{\alpha}{m} w$. Sendo $\frac{\alpha}{m} = \frac{g}{v^*}$,

$$w(t) = w_0 e^{-\frac{g}{v^*} t}$$

Paraquedas — Velocidade Terminal

- 2a. lei de Newton (velocidade positiva de cima para baixo):

$$m\dot{v}(t) = mg - \underbrace{\alpha v(t)}_{\text{resistência do ar}}$$

- Seja v^* a velocidade de equilíbrio (resultante é nula): $v^* = \frac{mg}{\alpha}$. Fazendo $w(t) = v(t) - v^*$, a dinâmica fica

$$m\dot{w}(t) = m\dot{v}(t) = mg - \alpha v(t) = \alpha v^* - \alpha v(t) = -\alpha w(t)$$

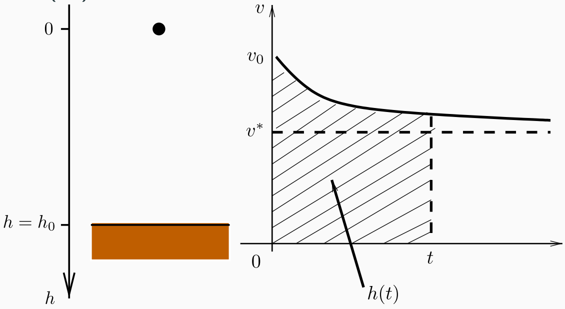
- ou seja, $\dot{w} = -\frac{\alpha}{m} w$. Sendo $\frac{\alpha}{m} = \frac{g}{v^*}$,

$$w(t) = w_0 e^{-\frac{g}{v^*} t}$$

- essa expressão faz sentido? o que acontece para $v_0 \lesseqgtr v^*$?

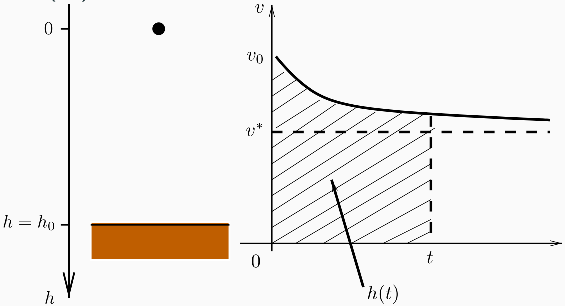
Paraquedas — Tempo de queda

- Supondo que a altura inicial seja $h(0) = 0$, queremos encontrar t_0 tal que $h(t_0) = h_0$



Paraquedas — Tempo de queda

- Supondo que a altura inicial seja $h(0) = 0$, queremos encontrar t_0 tal que $h(t_0) = h_0$



- A distância percorrida é dada pela área sob o gráfico de $v(t)$

$$h(t) - \cancelto{0}{h(0)} = \int_0^t v(s) \mathrm{d}s$$

Paraquedas — Tempo de queda

- Integrando $v(t)$:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t (v^* + [v(0) - v^*]e^{-\frac{g}{v^*}s})ds \\
&= \int_0^t v^* ds + [v(0) - v^*] \int_0^t e^{-\frac{g}{v^*}s} ds \\
&= v^* t + [v(0) - v^*] \left(-\frac{v^*}{g}\right) (e^{-\frac{g}{v^*}t} - 1)
\end{aligned}$$

Paraquedas — Tempo de queda

- Integrando $v(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t (v^* + [v(0) - v^*]e^{-\frac{g}{v^*}s})ds \\ &= \int_0^t v^* ds + [v(0) - v^*] \int_0^t e^{-\frac{g}{v^*}s} ds \\ &= v^* t + [v(0) - v^*] \left(-\frac{v^*}{g}\right) (e^{-\frac{g}{v^*}t} - 1) \end{aligned}$$

- ou seja

$$h(t) = \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*] + v^* t - \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*]e^{-\frac{g}{v^*}t}$$

Paraquedas — Tempo de queda

- Queremos determinar t_0 tal que $h(t_0) = h_0$

$$h_0 = \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*] + v^* t_0 - \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*]e^{-\frac{g}{v^*}t_0}$$

Paraquedas — Tempo de queda

- Queremos determinar t_0 tal que $h(t_0) = h_0$

$$h_0 = \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*] + v^* t_0 - \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*]e^{-\frac{g}{v^*}t_0}$$

- Fazendo

$$A = \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*] - h_0$$

$$B = v^*$$

$$C = \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*]$$

$$D = \frac{v^*}{g}$$

Paraquedas — Tempo de queda

- Queremos determinar t_0 tal que $h(t_0) = h_0$

$$h_0 = \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*] + v^* t_0 - \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*]e^{-\frac{g}{v^*}t_0}$$

- Fazendo

$$\begin{aligned} A &= \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*] - h_0 \\ B &= v^* \\ C &= \frac{v^*}{g}[v(0) - v^*] \\ D &= \frac{v^*}{g} \end{aligned}$$

- Isso se resume então a encontrar os zeros de

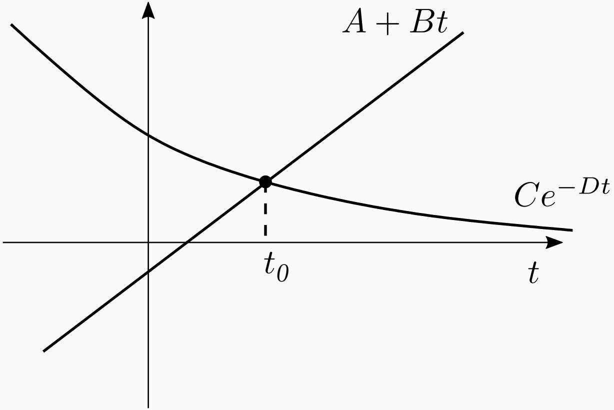
$$f(t) = A + Bt - Ce^{-Dt}$$

Paraquedista — Raiz

- Esse é o tipo de problema que estudaremos!

$$f(t) = A + Bt - Ce^{-Dt} = 0$$

$$A + Bt = Ce^{-Dt}$$



Zeros: Bissecção

- Intuimos o método da Bissecção na primeira aula

Zeros: Bissecção

- Intuimos o método da Bissecção na primeira aula
- Como saber se uma função ($\mathbb{R}$, contínua) tem uma raiz em determinado intervalo $[a, b]$?

Zeros: Bissecção

- Intuimos o método da Bissecção na primeira aula
- Como saber se uma função ($\mathbb{R}$, contínua) tem uma raiz em determinado intervalo $[a, b]$?
- Se a função *muda de sinal* em $[a, b]$, há (pelo menos) uma raiz neste intervalo (por quê?)

Zeros: Bissecção

- Intuimos o método da Bissecção na primeira aula
- Como saber se uma função ($\mathbb{R}$, contínua) tem uma raiz em determinado intervalo $[a, b]$?
- Se a função *muda de sinal* em $[a, b]$, há (pelo menos) uma raiz neste intervalo (por quê?)
- Equivalentemente , Se $f(a)f(b) < 0$, existe (pelo menos) um número $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$

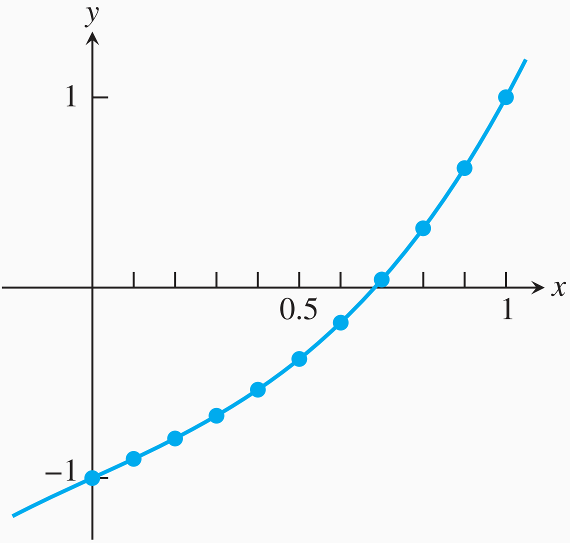
Zeros: Bissecção

- Intuimos o método da Bissecção na primeira aula
- Como saber se uma função ($\mathbb{R}$, contínua) tem uma raiz em determinado intervalo $[a, b]$?
- Se a função *muda de sinal* em $[a, b]$, há (pelo menos) uma raiz neste intervalo (por quê?)
- Equivalentemente , Se $f(a)f(b) < 0$, existe (pelo menos) um número $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$
- Uma vez que determinamos um intervalo contendo uma raiz, podemos refiná-lo, cortando-o ao meio (bissecção...), e escolhendo, dentre os dois criados, aquele que contenha a raiz

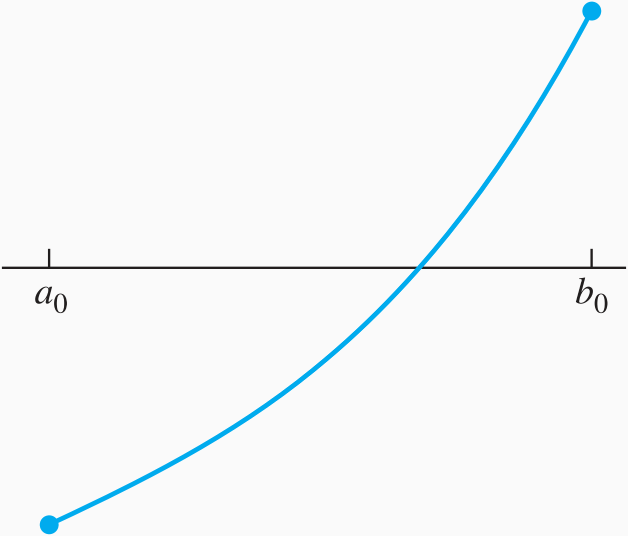
Zeros: Bissecção

- Intuimos o método da Bissecção na primeira aula
- Como saber se uma função ($\mathbb{R}$, contínua) tem uma raiz em determinado intervalo $[a, b]$?
- Se a função *muda de sinal* em $[a, b]$, há (pelo menos) uma raiz neste intervalo (por quê?)
- Equivalentemente , Se $f(a)f(b) < 0$, existe (pelo menos) um número $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$
- Uma vez que determinamos um intervalo contendo uma raiz, podemos refiná-lo, cortando-o ao meio (bissecção...), e escolhendo, dentre os dois criados, aquele que contenha a raiz
- E assim recursivamente...

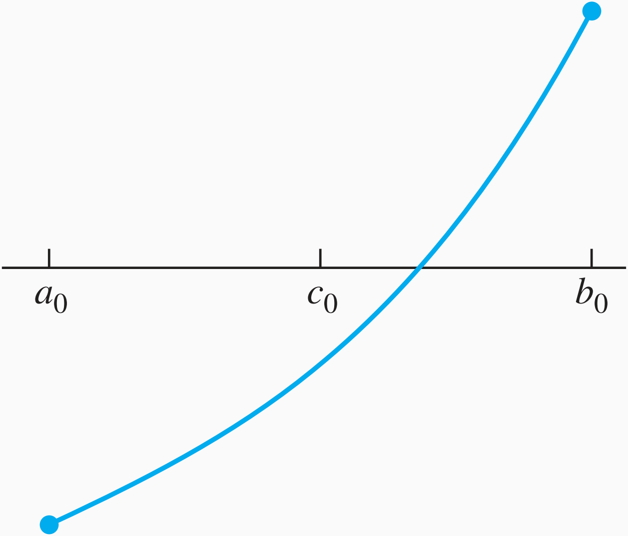
Bissecção



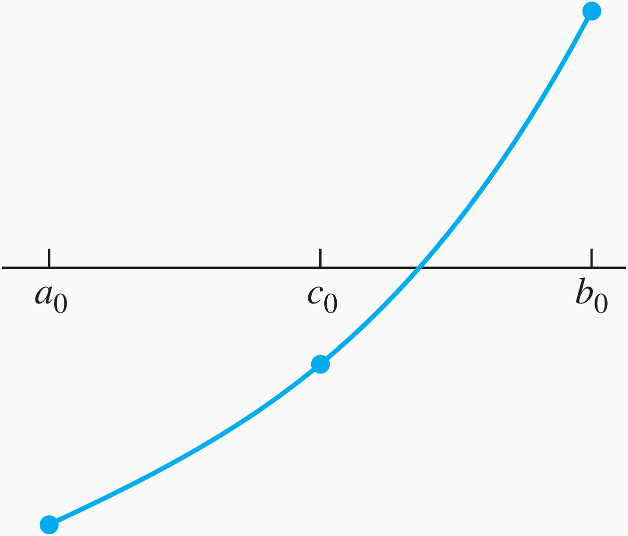
Bissecção



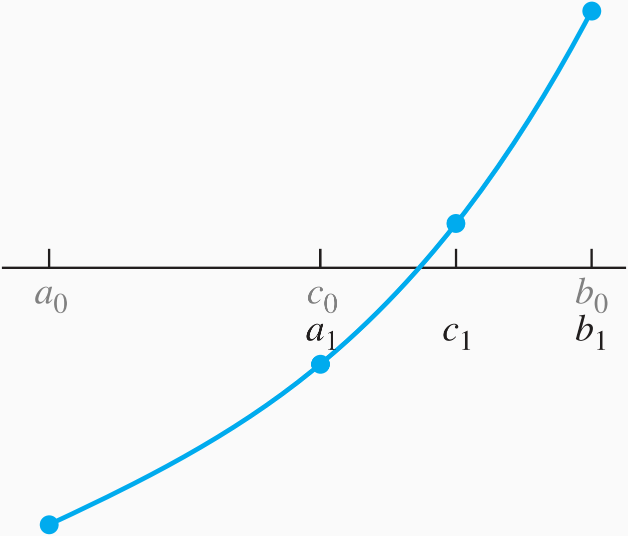
Bissecção



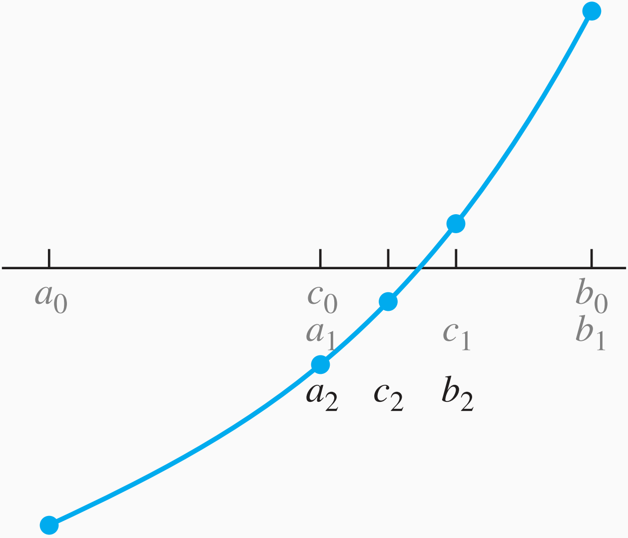
Bissecção



Bissecção



Bissecção



Bissecção: Erro

- Note que, ao contrário do método "gráfico" (que no limite exige um número infinito de avaliações da função), só calculamos $f(x)$ quando necessário

Bissecção: Erro

- Note que, ao contrário do método "gráfico" (que no limite exige um número infinito de avaliações da função), só calculamos $f(x)$ quando necessário
- Ao final de uma iteração, o método produz um novo *intervalo* que contém a raiz

Bissecção: Erro

- Note que, ao contrário do método "gráfico" (que no limite exige um número infinito de avaliações da função), só calculamos $f(x)$ quando necessário
- Ao final de uma iteração, o método produz um novo *intervalo* que contém a raiz
- Mais especificamente, cada passo requer *uma* nova avaliação da função, e diminui o comprimento intervalo pela metade -Ou seja, após n iterados (intervalo inicial: $[a, b]$, raiz r):

$$\text{estimativa: } x_c = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\text{erro na solução: } |x_c - r| < \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

$$\text{avaliações da função: } n + 2$$

Bisseção: Erro / Exemplo

- Um exemplo: quantos passos são necessários para calcular a raiz de
$$f(x) = \cos(x) - x$$
no intervalo $[0, 1]$, **correta até seis casas decimais**?

Bisseção: Erro / Exemplo

- Um exemplo: quantos passos são necessários para calcular a raiz de

$$f(x) = \cos(x) - x$$

  no intervalo $[0, 1]$, **correta até seis casas decimais**?
- Nota: um resultado é "correto até p casas decimais" se o erro é menor do que 0.5×10^{-p}

Bisseção: Erro / Exemplo

- Um exemplo: quantos passos são necessários para calcular a raiz de
$$f(x) = \cos(x) - x$$
no intervalo $[0, 1]$, **correta até seis casas decimais**?
- Nota: um resultado é "correto até p casas decimais" se o erro é menor do que 0.5×10^{-p}
- Sendo o erro após n passos $(b - a)/2^{n+1} = 1/2^{n+1}$, queremos
$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.5 \times 10^{-6} \implies n > \frac{6}{\log_{10}(2)} \approx \frac{6}{0.301} \approx 19.9$$

Bisseção: Erro / Exemplo

- Um exemplo: quantos passos são necessários para calcular a raiz de
$$f(x) = \cos(x) - x$$
no intervalo $[0, 1]$, **correta até seis casas decimais**?
- Nota: um resultado é "correto até p casas decimais" se o erro é menor do que 0.5×10^{-p}
- Sendo o erro após n passos $(b-a)/2^{n+1} = 1/2^{n+1}$, queremos
$$\frac{1}{2^{n+1}} < 0.5 \times 10^{-6} \implies n > \frac{6}{\log_{10}(2)} \approx \frac{6}{0.301} \approx 19.9$$
- Precisamos então de 20 passos.

Bisseção: Erro / Exemplo

n	a_n	$f(a_n)$	c_n	$f(c_n)$	b_n	$f(b_n)$
0	0.000000	+	0.500000	+	1.000000	-
1	0.500000	+	0.750000	-	1.000000	-
2	0.500000	+	0.625000	+	0.750000	-
3	0.625000	+	0.687500	+	0.750000	-
4	0.687500	+	0.718750	+	0.750000	-
5	0.718750	+	0.734375	+	0.750000	-
6	0.734375	+	0.742188	-	0.750000	-
7	0.734375	+	0.738281	+	0.742188	-
8	0.738281	+	0.740234	-	0.742188	-
9	0.738281	+	0.739258	-	0.740234	-
10	0.738281	+	0.738770	+	0.739258	-
11	0.738769	+	0.739014	+	0.739258	-
12	0.739013	+	0.739136	-	0.739258	-
13	0.739013	+	0.739075	+	0.739136	-
14	0.739074	+	0.739105	-	0.739136	-
15	0.739074	+	0.739090	-	0.739105	-
16	0.739074	+	0.739082	+	0.739090	-
17	0.739082	+	0.739086	-	0.739090	-
18	0.739082	+	0.739084	+	0.739086	-
19	0.739084	+	0.739085	-	0.739086	-
20	0.739084	+	0.739085	-	0.739085	-

Bissecção: Erro

- Lembremos da questão levantada na primeira aula: quando parar a bissecção?

Bissecção: Erro

- Lembremos da questão levantada na primeira aula: quando parar a bissecção?
- Para bissecção sempre é possível, escolhida uma precisão, determinar o número necessário de passos!

Bissecção: Erro

- Lembremos da questão levantada na primeira aula: quando parar a bissecção?
- Para bissecção sempre é possível, escolhida uma precisão, determinar o número necessário de passos!
- Algoritmos mais sofisticados não são tão previsíveis e, em geral, não é possível achar uma relação direta entre precisão e número de iterados

Bissecção: Erro

- Lembremos da questão levantada na primeira aula: quando parar a bissecção?
- Para bissecção sempre é possível, escolhida uma precisão, determinar o número necessário de passos!
- Algoritmos mais sofisticados não são tão previsíveis e, em geral, não é possível achar uma relação direta entre precisão e número de iterados
- Estudaremos estes **critérios de parada** caso a caso.

Bissecção: Erro

- Lembremos da questão levantada na primeira aula: quando parar a bissecção?
- Para bissecção sempre é possível, escolhida uma precisão, determinar o número necessário de passos!
- Algoritmos mais sofisticados não são tão previsíveis e, em geral, não é possível achar uma relação direta entre precisão e número de iterados
- Estudaremos estes **critérios de parada** caso a caso.
- Lembremos também que, mesmo para a bissecção, a precisão finita da aritmética nos computadores limita o número possível de dígitos corretos

Zeros: Métodos iterativos

- Consideremos o seguinte exemplo: alguém (isso é tão anos 90...) já brincou com a calculadora, apertando a mesma tecla várias vezes seguidas?

```
x = 0.1
for i in range(100):
    x = cos(x)
    print('{:.6f}'.format(x))
```

```
0.995004, 0.544499, 0.855387, 0.655927, 0.792483, 0.702079,
0.763501, 0.722420, 0.750208, 0.731547, 0.744142, 0.735669,
0.741382, 0.737536, 0.740128, 0.738383, 0.739558, 0.738766,
0.739300, 0.738940, 0.739183, 0.739020, 0.739129, 0.739055,
0.739105, 0.739072, 0.739094, 0.739079, 0.739089, 0.739082,
0.739087, 0.739084, 0.739086, 0.739085, 0.739086, 0.739085,
0.739085, ...
```

Métodos iterativos

- A sequência de aplicações de cos converge (com 6 casas decimais) para 0.739085

Métodos iterativos

- A sequência de aplicações de cos converge (com 6 casas decimais) para 0.739085
- Se ‘r’ é o número para qual converge a sequência de números gerada pela aplicação iterativa da função cosseno, temos que $\cos(r) = r$

Métodos iterativos

- A sequência de aplicações de cos converge (com 6 casas decimais) para 0.739085
- Se 'r' é o número para qual converge a sequência de números gerada pela aplicação iterativa da função cosseno, temos que $\cos(r) = r$
- Um número r é chamado de **ponto fixo** de uma função f se

$$\boxed{g(r) = r \iff r \text{ é ponto fixo de } g}$$

Métodos iterativos

- A sequência de aplicações de cos converge (com 6 casas decimais) para 0.739085
- Se 'r' é o número para qual converge a sequência de números gerada pela aplicação iterativa da função cosseno, temos que $\cos(r) = r$
- Um número r é chamado de **ponto fixo** de uma função f se

$$\boxed{g(r) = r \iff r \text{ é ponto fixo de } g}$$

- Outro exemplo: $g(x) = x^3$ tem 3 pontos fixos: $-1, 0, 1$.

Pontos fixos

- Alguns slides acima, usamos bissecção para encontrar raízes de $\cos(x) - x = 0$

Pontos fixos

- Alguns slides acima, usamos bissecção para encontrar raízes de $\cos(x) - x = 0$
- Notemos que a equação de ponto-fixo $\cos(x) = x$ é o mesmo problema, mas de outro ponto de vista

Pontos fixos

- Alguns slides acima, usamos bissecção para encontrar raízes de $\cos(x) - x = 0$
- Notemos que a equação de ponto-fixo $\cos(x) = x$ é o mesmo problema, mas de outro ponto de vista
- Esta é a base do método chamado **Iteração de Ponto Fixo** (IPF).

Pontos fixos

- Alguns slides acima, usamos bissecção para encontrar raízes de $\cos(x) - x = 0$
- Notemos que a equação de ponto-fixo $\cos(x) = x$ é o mesmo problema, mas de outro ponto de vista
- Esta é a base do método chamado **Iteração de Ponto Fixo** (IPF).
- Atenção: o processo *não necessariamente converge!*

Pontos fixos

- Alguns slides acima, usamos bissecção para encontrar raízes de $\cos(x) - x = 0$
- Notemos que a equação de ponto-fixo $\cos(x) = x$ é o mesmo problema, mas de outro ponto de vista
- Esta é a base do método chamado **Iteração de Ponto Fixo** (IPF).
- Atenção: o processo *não necessariamente converge!*
- Em outras palavras: se no programa acima, que calculava

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad \text{(dado } x_0\text{)}$$

eventualmente $x_{n+1} = x_n$, então esta será uma solução de $g(x) - x = 0$

Pontos fixos e Solução de Equações

- Há várias maneiras de transformar problemas tipo $f(x) = 0$ em um problema de ponto fixo $g(x) = x$. Por exemplo:

$$x^3 + x - 1 = 0$$

Pontos fixos e Solução de Equações

- Há várias maneiras de transformar problemas tipo $f(x) = 0$ em um problema de ponto fixo $g(x) = x$. Por exemplo:

$$x^3 + x - 1 = 0$$

- Esta expressão pode ser reescrita como

$$x = \underbrace{1 - x^3}_{g(x)}$$

Pontos fixos e Solução de Equações

- Há várias maneiras de transformar problemas tipo $f(x) = 0$ em um problema de ponto fixo $g(x) = x$. Por exemplo:

$$x^3 + x - 1 = 0$$

- Esta expressão pode ser reescrita como

$$x = \underbrace{1 - x^3}_{g(x)}$$

- Ou ainda isolando o x^3

$$x = \underbrace{\sqrt[3]{1 - x}}_{g(x)}$$

Pontos fixos e Solução de Equações

- Há várias maneiras de transformar problemas tipo $f(x) = 0$ em um problema de ponto fixo $g(x) = x$. Por exemplo:

$$x^3 + x - 1 = 0$$

- Esta expressão pode ser reescrita como

$$x = \underbrace{1 - x^3}_{g(x)}$$

- Ou ainda isolando o x^3

$$x = \underbrace{\sqrt[3]{1 - x}}_{g(x)}$$

- Ou ainda (de onde?!), somando $2x^3$ aos dois lados:

$$x^3 + x = 1 + 2x^3 \implies x(3x^2 + 1) = 1 + 2x^3$$

$$\implies x = \underbrace{\frac{1 + 2x^3}{1 + 3x^2}}_{g(x)}$$

Visualizando Iterações

- Vamos agora visualizar o que acontece ao iterarmos cada uma das $g(x)$ acima

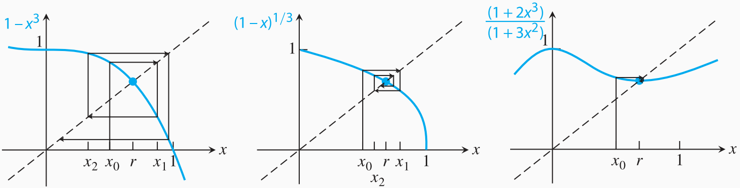
Visualizando Iterações

- Vamos agora visualizar o que acontece ao iterarmos cada uma das $g(x)$ acima
- Lembremos: todas supostamente são maneira de encontrar uma solução para

$$x^3 + x - 1 = 0$$

https://www.geogebra.org/m/pzpgzv9t

Visualizando Iterações — Con(Di)vergência

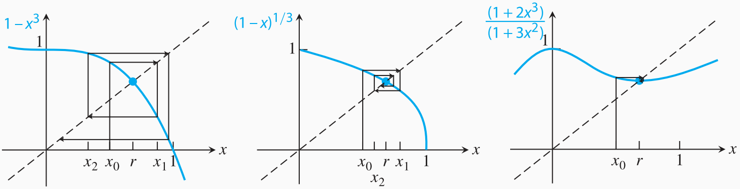


Partindo de $x_0 = 0.5$, as iterações de

- $g(x) = 1 - x^3$: **divergem!!**

nota: solução exata $x = \frac{\sqrt[3]{2(9+\sqrt{93})}-2\sqrt[3]{\frac{3}{9+\sqrt{93}}}}{\sqrt[3]{6^2}} \approx 0.68233$

Visualizando Iterações — Con(Di)vergência

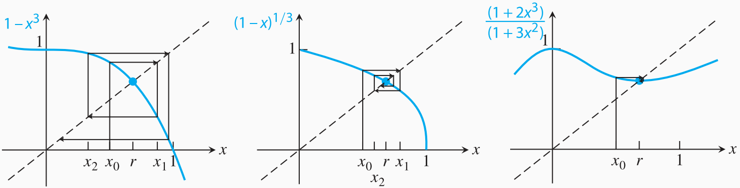


Partindo de $x_0 = 0.5$, as iterações de

- $g(x) = 1 - x^3$: **divergem!!**
- $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$ convergem "lentamente" para ≈ 0.6823

nota: solução exata $x = \dfrac{\sqrt[3]{2(9+\sqrt{93})} - 2\sqrt[3]{\frac{3}{9+\sqrt{93}}}}{\sqrt[3]{6^2}} \approx 0.68233$

Visualizando Iterações — Con(Di)vergência

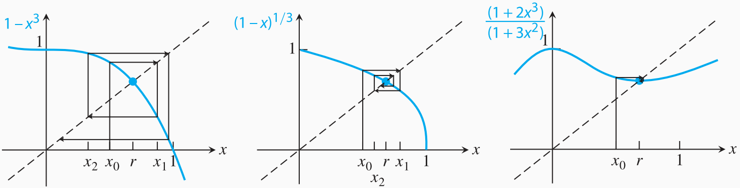


Partindo de $x_0 = 0.5$, as iterações de

- $g(x) = 1 - x^3$: **divergem!!**
- $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$ convergem "lentamente" para ≈ 0.6823
- $g(x) = \frac{1+2x^3}{1+3x^2}$ convergem "rápido" para ≈ 0.6823

nota: solução exata $x = \frac{\sqrt[3]{2(9+\sqrt{93})} - 2\sqrt[3]{\frac{3}{9+\sqrt{93}}}}{\sqrt[3]{6^2}} \approx 0.68233$

Visualizando Iterações — Con(Di)vergência

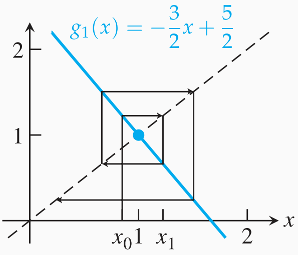


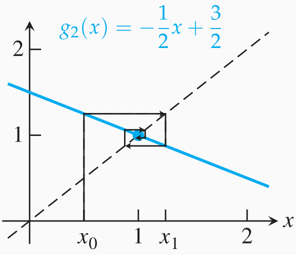
Partindo de $x_0 = 0.5$, as iterações de

- $g(x) = 1 - x^3$: **divergem!!**
- $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$ convergem "lentamente" para ≈ 0.6823
- $g(x) = \frac{1+2x^3}{1+3x^2}$ convergem "rápido" para ≈ 0.6823
- O que determina a convergência (e velocidade) das iterações?

nota: solução exata $x = \dfrac{\sqrt[3]{2(9+\sqrt{93})} - 2\sqrt[3]{\frac{3}{9+\sqrt{93}}}}{\sqrt[3]{6^2}} \approx 0.68233$

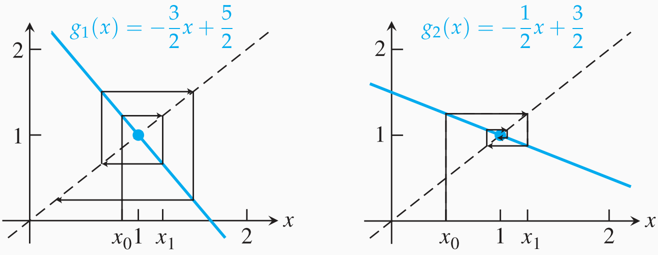
Convergência de IPF: Visão Geométrica





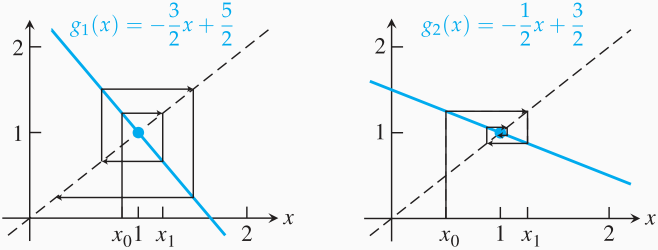
- $g_1(x), g_2(x)$ lineares, com ponto fixo em $x = 1$

Convergência de IPF: Visão Geométrica



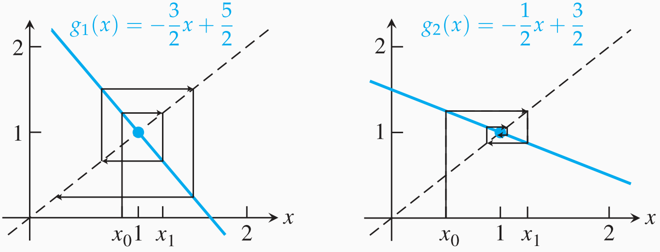
- $g_1(x), g_2(x)$ lineares, com ponto fixo em $x = 1$
- Qual é o valor da derivada das $g(x)$ em 1?

Convergência de IPF: Visão Geométrica



- $g_1(x), g_2(x)$ lineares, com ponto fixo em $x = 1$
- Qual é o valor da derivada das $g(x)$ em 1?
- (esquerda): como $|g_1'(1)| > 1$, $x_{n+1} - x_n$ aumenta conforme iteramos. Diverge!

Convergência de IPF: Visão Geométrica



- $g_1(x), g_2(x)$ lineares, com ponto fixo em $x = 1$
- Qual é o valor da derivada das $g(x)$ em 1?
- (esquerda): como $|g_1'(1)| > 1$, $x_{n+1} - x_n$ aumenta conforme iteramos. Diverge!
- (direita): como $|g_2'(1)| < 1$, $x_{n+1} - x_n$ diminui conforme iteramos. Converge!

Convergência de IPF: Visão Algébrica

- Escrevendo $g_1(x)$ em termos de $x - r$, onde $r = 1$ é o ponto fixo:

$$g_1(x) = -\frac{3}{2}(x - 1) + 1$$
$$g_1(x) - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$
$$x_{n+1} - 1 = -\frac{3}{2}(x_n - 1)$$

Convergência de IPF: Visão Algébrica

- Escrevendo $g_1(x)$ em termos de $x - r$, onde $r = 1$ é o ponto fixo:

$$g_1(x) = -\frac{3}{2}(x-1) + 1$$
$$g_1(x) - 1 = -\frac{3}{2}(x-1)$$
$$x_{n+1} - 1 = -\frac{3}{2}(x_n - 1)$$

- Sendo $e_n = |r - x_n|$ o erro no passo n, temos que

$$e_{n+1} = \frac{3}{2}e_n$$

Convergência de IPF: Visão Algébrica

- Escrevendo $g_1(x)$ em termos de $x - r$, onde $r = 1$ é o ponto fixo:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{3}{2}(x-1) + 1 \\ g_1(x) - 1 &= -\frac{3}{2}(x-1) \\ x_{n+1} - 1 &= -\frac{3}{2}(x_n - 1) \end{aligned}$$

- Sendo $e_n = |r - x_n|$ o erro no passo n, temos que

$$e_{n+1} = \frac{3}{2} e_n$$

- Em outras palavras, o erro cresce a cada passo. Diverge!

Convergência de IPF: Visão Algébrica

- Escrevendo $g_2(x)$ em termos de $x - r$, onde $r = 1$ é o ponto fixo:

$$g_2(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1$$
$$g_2(x) - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
$$x_{n+1} - 1 = -\frac{1}{2}(x_n - 1)$$

Convergência de IPF: Visão Algébrica

- Escrevendo $g_2(x)$ em termos de $x - r$, onde $r = 1$ é o ponto fixo:

$$
\begin{aligned}
g_2(x) &= -\frac{1}{2}(x-1)+1 \\
g_2(x) - 1 &= -\frac{1}{2}(x-1) \\
x_{n+1} - 1 &= -\frac{1}{2}(x_n - 1)
\end{aligned}
$$

- Sendo $e_n = |r - x_n|$ o erro no passo n, temos que

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n$$

Convergência de IPF: Visão Algébrica

- Escrevendo $g_2(x)$ em termos de $x - r$, onde $r = 1$ é o ponto fixo:

$$
\begin{aligned}
g_2(x) &= -\frac{1}{2}(x-1) + 1 \\
g_2(x) - 1 &= -\frac{1}{2}(x-1) \\
x_{n+1} - 1 &= -\frac{1}{2}(x_n - 1)
\end{aligned}
$$

- Sendo $e_n = |r - x_n|$ o erro no passo n, temos que

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n$$

- Em outras palavras, o erro cai pela metade a cada passo. Isso é **um tipo** de convergência.

IPF: Convergência Linear

- Sendo e_n o erro no n-ésimo passo de um método iterativo, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = S < 1$$

dizemos que o método tem **convergência linear** com taxa S.

IPF: Convergência Linear

- Sendo e_n o erro no n-ésimo passo de um método iterativo, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = S < 1$$

dizemos que o método tem **convergência linear** com taxa S.

- No caso anterior, Iteração de Ponto Fixo (IPF) para g_2 converge linearmente para a raiz 1, com taxa $S = 1/2$.

IPF: Convergência Linear

- Sendo e_n o erro no n-ésimo passo de um método iterativo, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = S < 1$$

  dizemos que o método tem **convergência linear** com taxa S.

- No caso anterior, Iteração de Ponto Fixo (IPF) para g_2 converge linearmente para a raiz 1, com taxa $S = 1/2$.

- Notemos que a relação entre S e a derivada (evidente para o caso linear) vale para qualquer função contínua e diferenciável g. Se $g(r) = r$ e $S = |g'(r)| < 1$, então IPF converge linearmente para r com taxa S, para estimativas iniciais próximas de r. Ou, para n grande, $e_{n+1} \approx |g'(r)|e_n$

Convergência Linear

- Vamos agora entender os resultados para $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ vistos geometricamente. Seja a raiz $r \approx 0.6823$.

Convergência Linear

- Vamos agora entender os resultados para $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ vistos geometricamente. Seja a raiz $r \approx 0.6823$.
- Para $g(x) = 1 - x^3$,
  $S = |g'(r)| = |-3(0.6823)^2| \approx 1.3966 > 1$. Como próximo a raízes o erro em IPF obedece $e_{n+1} \approx |g'(r)|e_n$, vemos que o método diverge.

Convergência Linear

- Vamos agora entender os resultados para $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ vistos geometricamente. Seja a raiz $r \approx 0.6823$.
- Para $g(x) = 1 - x^3$,
  $S = |g'(r)| = |-3(0.6823)^2| \approx 1.3966 > 1$. Como próximo a raízes o erro em IPF obedece $e_{n+1} \approx |g'(r)| e_n$, vemos que o método diverge.
- Para $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$,
  $S = |g'(r)| = |-\frac{1}{3}(1 - 0.6823)^{-2/3}| \approx 0.716 < 1$. Ou seja, IPF converge

Convergência Linear

- Vamos agora entender os resultados para $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ vistos geometricamente. Seja a raiz $r \approx 0.6823$.
- Para $g(x) = 1 - x^3$,
  $S = |g'(r)| = |-3(0.6823)^2| \approx 1.3966 > 1$. Como próximo a raízes o erro em IPF obedece $e_{n+1} \approx |g'(r)|e_n$, vemos que o método diverge.
- Para $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$,
  $S = |g'(r)| = |-\frac{1}{3}(1 - 0.6823)^{-2/3}| \approx 0.716 < 1$. Ou seja, IPF converge
- Para $g(x) = \frac{1+2x^3}{1+3x^2}$, temos

$$g'(x) = \frac{6x^2(1+3x^2) - (1+2x^3)6x}{(1+3x^2)^2} = \frac{6x\overbrace{(x^3+x-1)}^{f(x)}}{(1+3x^2)^2}$$

Como $f(r) = 0$ (r é raiz!), $S = |g'(r)| = 0$, e temos a convergência rápida vista anteriormente.

Convergência – Localidade

- Acima, falamos que IPF converge linearmente para estimativas iniciais "próximas" da raiz r

Convergência – Localidade

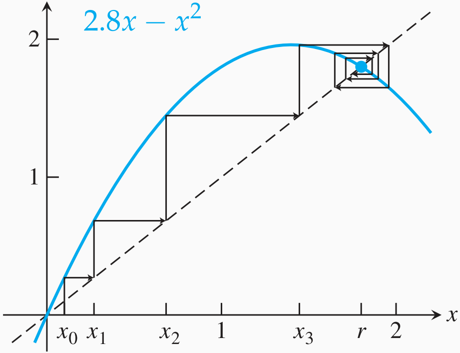
- Acima, falamos que IPF converge linearmente para estimativas iniciais "próximas" da raiz r
- Métodos com este tipo de comportamento são chamados de **localmente convergentes**

Convergência – Localidade

- Acima, falamos que IPF converge linearmente para estimativas iniciais “próximas” da raiz r
- Métodos com este tipo de comportamento são chamados de **localmente convergentes**
- Notemos que o Método da Bissecção é **globalmente** convergente.

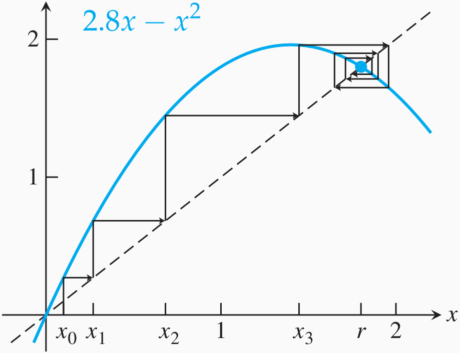
Convergência – Localidade

- Ainda assim, é possível que IPF convirja mesmo com um "chute" inicial "longe" da raiz:



Convergência – Localidade

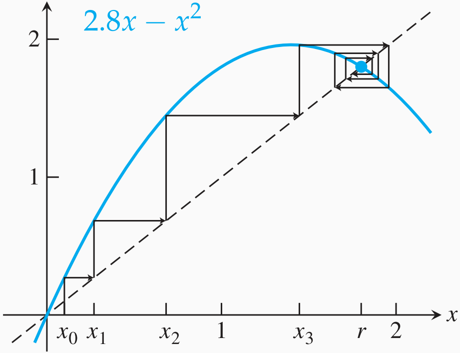
- Ainda assim, é possível que IPF convirja mesmo com um "chute" inicial "longe" da raiz:



- Por que, ao começar de $x_0 = 0.1$, achamos a raiz $r_2 = 1.8$ ao invés de $r_1 = 0$?

Convergência – Localidade

- Ainda assim, é possível que IPF convirja mesmo com um "chute" inicial "longe" da raiz:



- Por que, ao começar de $x_0 = 0.1$, achamos a raiz $r_2 = 1.8$ ao invés de $r_1 = 0$?
- Notemos que $|g'(0)| = 2.8 > 0$, enquanto que $|g'(1.8)| = 0.8 < 1$.

IFP: Convergência

- A análise de erros que fizemos para IPF utiliza o valor da raiz no cálculo do erro a cada passo e da taxa de convergência.

IFP: Convergência

- A análise de erros que fizemos para IPF utiliza o valor da raiz no cálculo do erro a cada passo e da taxa de convergência.
- Ou seja, só é possível utilizá-la *após* termos chegado a uma estimativa para a raiz.

IFP: Convergência

- A análise de erros que fizemos para IPF utiliza o valor da raiz no cálculo do erro a cada passo e da taxa de convergência.
- Ou seja, só é possível utilizá-la *após* termos chegado a uma estimativa para a raiz.
- No primeiro exemplo discutido (iterando $g(x) = \cos(x)$), podemos determinar que, de fato, há convergência para $r \approx 0.74$, já que $|g'(0.74)| = |-\sin(0.74)| \approx 0.67 < 1$

IFP: Convergência

- A análise de erros que fizemos para IPF utiliza o valor da raiz no cálculo do erro a cada passo e da taxa de convergência.
- Ou seja, só é possível utilizá-la *após* termos chegado a uma estimativa para a raiz.
- No primeiro exemplo discutido (iterando $g(x) = \cos(x)$), podemos determinar que, de fato, há convergência para $r \approx 0.74$, já que $|g'(0.74)| = |-\sin(0.74)| \approx 0.67 < 1$
- Entretanto, há casos para os quais *já sabemos* a taxa, antes mesmo de começar a iterar

Raízes Babilônicas

- O *método Babilônico* para o cálculo de raizes quadradas pode ser interpretado como IFP. Vamos usá-lo para estimar $\sqrt{2}$.

Raízes Babilônicas

- O *método Babilônico* para o cálculo de raizes quadradas pode ser interpretado como IFP. Vamos usá-lo para estimar $\sqrt{2}$.
- Comecemos com uma estimativa $x_0 = 1$. Ela é claramente muito baixa, de modo que $2/1 = 2$ é alta demais.

Raízes Babilônicas

- O *método Babilônico* para o cálculo de raizes quadradas pode ser interpretado como IFP. Vamos usá-lo para estimar $\sqrt{2}$.
- Comecemos com uma estimativa $x_0 = 1$. Ela é claramente muito baixa, de modo que $2/1 = 2$ é alta demais.
- Note que qualquer estimativa $1 < x_0 < 2$ e $\frac{2}{x_0}$ formam um intervalo que contém $\sqrt{2}$.

Raízes Babilônicas

- O *método Babilônico* para o cálculo de raizes quadradas pode ser interpretado como IFP. Vamos usá-lo para estimar $\sqrt{2}$.
- Comecemos com uma estimativa $x_0 = 1$. Ela é claramente muito baixa, de modo que $2/1 = 2$ é alta demais.
- Note que qualquer estimativa $1 < x_0 < 2$ e $\frac{2}{x_0}$ formam um intervalo que contém $\sqrt{2}$.
- Desta forma, faz sentido tomar a média destes dois valores como uma estimativa para $\sqrt{2}$:

$$x_1 = \frac{1 + \frac{2}{1}}{2} = \frac{3}{2}$$

Raízes Babilônicas

- O *método Babilônico* para o cálculo de raizes quadradas pode ser interpretado como IFP. Vamos usá-lo para estimar $\sqrt{2}$.
- Comecemos com uma estimativa $x_0 = 1$. Ela é claramente muito baixa, de modo que $2/1 = 2$ é alta demais.
- Note que qualquer estimativa $1 < x_0 < 2$ e $\frac{2}{x_0}$ formam um intervalo que contém $\sqrt{2}$.
- Desta forma, faz sentido tomar a média destes dois valores como uma estimativa para $\sqrt{2}$:

$$x_1 = \frac{1 + \frac{2}{1}}{2} = \frac{3}{2}$$

- Prosseguindo, notemos que $3/2$ é grande demais para ser $\sqrt{2}$, de modo que $2/(3/2) = 4/3$ é pequeno demais. Ou seja

$$x_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} = 1.41\bar{6}$$

IFP: Raízes Babilônicas

- Novamente, x_2 e $1/x_2$ delimitam $\sqrt{2}$. Mais um passo

$$x_3 = \frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \approx 1.414215686,$$

IFP: Raízes Babilônicas

- Novamente, x_2 e $1/x_2$ delimitam $\sqrt{2}$. Mais um passo

$$x_3 = \frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \approx 1.414215686,$$

- Esta estimativa está correta até a quinta casa.

IFP: Raízes Babilônicas

- Novamente, x_2 e $1/x_2$ delimitam $\sqrt{2}$. Mais um passo

$$x_3 = \frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \approx 1.414215686,$$

- Esta estimativa está correta até a quinta casa.
- Notemos que o processo pode ser visto como uma IPF:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$$

que tem $\sqrt{2}$ como ponto fixo (por quê?)

IFP: Raízes Babilônicas

- Qual será a taxa de convergência deste método? Sendo

$$g(x) = \frac{x + \frac{2}{x}}{2} \implies g'(x) = \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{2}$$

IFP: Raízes Babilônicas

- Qual será a taxa de convergência deste método? Sendo

$$g(x) = \frac{x + \frac{2}{x}}{2} \implies g'(x) = \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{2}$$

- Temos

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{(\sqrt{2})^2}\right) = 0$$

IFP: Raízes Babilônicas

- Qual será a taxa de convergência deste método? Sendo

$$g(x) = \frac{x + \frac{2}{x}}{2} \implies g'(x) = \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{2}$$

- Temos

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{(\sqrt{2})^2}\right) = 0$$

- Ou seja, as iterações convergem, e bastante rápido.

IFP: Raízes Babilônicas

- Qual será a taxa de convergência deste método? Sendo

$$g(x) = \frac{x + \frac{2}{x}}{2} \implies g'(x) = \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{2}$$

- Temos

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{(\sqrt{2})^2}\right) = 0$$

- Ou seja, as iterações convergem, e bastante rápido.
- Na próxima aula, veremos o *Método de Newton* — uma forma de IFP cuidadosamente construída para que $|g'(r)|$ seja sempre 0.

Relembrando: Erros

- Ao contrário do caso da Bissecção, o número de passos necessário para que IFP convirja dentro de determinada tolerância não é, em geral, previsível *a priori*.

Relembrando: Erros

- Ao contrário do caso da Bissecção, o número de passos necessário para que IFP convirja dentro de determinada tolerância não é, em geral, previsível *a priori*.
- É preciso então adotar um *critério de parada* para terminar o algoritmo. Em geral estes critérios baseiam-se em uma *tolerância* a erro T.

Relembrando: Erros

- Ao contrário do caso da Bissecção, o número de passos necessário para que IFP convirja dentro de determinada tolerância não é, em geral, previsível *a priori*.
- É preciso então adotar um *critério de parada* para terminar o algoritmo. Em geral estes critérios baseiam-se em uma *tolerância* a erro T.
- Vamos relembrar as definições de erro para entender como determinar *critérios de parada* para métodos iterativos.

Relembrando: Erros

- Suponha que estamos medindo o comprimento de uma ponte e de um parafuso, e obtemos 9999 cm e 9 cm, respectivamente

Relembrando: Erros

- Suponha que estamos medindo o comprimento de uma ponte e de um parafuso, e obtemos 9999 cm e 9 cm, respectivamente
- Supondo que os tamanhos corretos são 10 000 cm e 10 cm, temos em ambos os casos um *erro absoluto* de 1 cm

Relembrando: Erros

- Suponha que estamos medindo o comprimento de uma ponte e de um parafuso, e obtemos 9999 cm e 9 cm, respectivamente
- Supondo que os tamanhos corretos são 10 000 cm e 10 cm, temos em ambos os casos um *erro absoluto* de 1 cm
- É claro que o erro na medida do parafuso é relativamente muito maior. Define-se então o *erro relativo* normalizando o erro absoluto pelo valor real

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{|\text{valor real} - \text{valor aproximado}|}{|\text{valor real}|}$$

Relembrando: Erros

- Suponha que estamos medindo o comprimento de uma ponte e de um parafuso, e obtemos 9999 cm e 9 cm, respectivamente
- Supondo que os tamanhos corretos são 10 000 cm e 10 cm, temos em ambos os casos um *erro absoluto* de 1 cm
- É claro que o erro na medida do parafuso é relativamente muito maior. Define-se então o *erro relativo* normalizando o erro absoluto pelo valor real

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{|\text{valor real} - \text{valor aproximado}|}{|\text{valor real}|}$$

- Para o parafuso $\epsilon_r = 10\,\%$, enquanto que para a ponte, é $\epsilon_r = 0.01\,\%$.

Relembrando: Erros

- Estas definições dependem, evidentemente, de termos acesso ao *valor real* — o que só é possível em determinados problemas.

Relembrando: Erros

- Estas definições dependem, evidentemente, de termos acesso ao *valor real* — o que só é possível em determinados problemas.
- Como estimar o erro se *não sabemos* o valor real? Uma maneira é normalizar o erro usando o valor aproximado:

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{|\text{erro na aproximação}|}{|\text{valor aproximado}|}$$

Relembrando: Erros

- Estas definições dependem, evidentemente, de termos acesso ao *valor real* — o que só é possível em determinados problemas.
- Como estimar o erro se *não sabemos* o valor real? Uma maneira é normalizar o erro usando o valor aproximado:

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{|\text{erro na aproximação}|}{|\text{valor aproximado}|}$$

- Isso é possível, por exemplo, para o método da bissecção (para o qual o erro *não depende* do valor sendo calculado).

Relembrando: Erros

- Estas definições dependem, evidentemente, de termos acesso ao *valor real* — o que só é possível em determinados problemas.
- Como estimar o erro se *não sabemos* o valor real? Uma maneira é normalizar o erro usando o valor aproximado:

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{|\text{erro na aproximação}|}{|\text{valor aproximado}|}$$

- Isso é possível, por exemplo, para o método da bissecção (para o qual o erro *não depende* do valor sendo calculado).
- Para métodos iterativos, costuma-se utilizar *a diferença entre duas aproximações subsequentes* como estimativa do erro absoluto. O erro relativo fica então

$$\epsilon_{n+1}^{\text{rel}} = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \begin{array}{l} \rightarrow \text{erro absoluto aproximado} \\ \rightarrow \text{valor aproximado} \end{array}$$

Critérios de Parada

- Quando então decidimos parar de iterar?

Critérios de Parada

- Quando então decidimos parar de iterar?
- Pode-se utilizar uma tolerância em termos do erro *absoluto*:

$$|x_{n+1} - x_n| < T$$

Critérios de Parada

- Quando então decidimos parar de iterar?
- Pode-se utilizar uma tolerância em termos do erro *absoluto*:

$$|x_{n+1} - x_n| < T$$

- No caso de soluções não muito próximas a zero, pode-se também utilizar um critério baseado no erro *relativo*

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < T$$

Critérios de Parada

- Quando então decidimos parar de iterar?
- Pode-se utilizar uma tolerância em termos do erro *absoluto*:

$$|x_{n+1} - x_n| < T$$

- No caso de soluções não muito próximas a zero, pode-se também utilizar um critério baseado no erro *relativo*

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < T$$

- É comum então o uso de um critério "híbrido" absoluto/relativo para dar conta de soluções próximas de zero:

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{\max\left(|x_{n+1}|, \theta\right)} < T \qquad (\theta > 0)$$

Critérios de Parada

- Quando então decidimos parar de iterar?
- Pode-se utilizar uma tolerância em termos do erro *absoluto*:

$$|x_{n+1} - x_n| < T$$

- No caso de soluções não muito próximas a zero, pode-se também utilizar um critério baseado no erro *relativo*

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < T$$

- É comum então o uso de um critério "híbrido" absoluto/relativo para dar conta de soluções próximas de zero:

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{\max\left(|x_{n+1}|, \theta\right)} < T \qquad (\theta > 0)$$

- Também é comum limitar o número máximo de iterações — dando conta de casos que divergem.