Interpolação

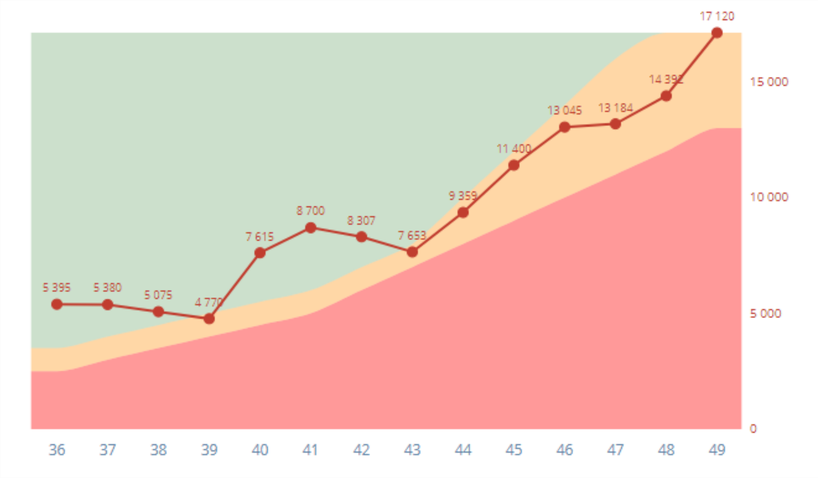
Cálculo Numérico

Bóris Marin

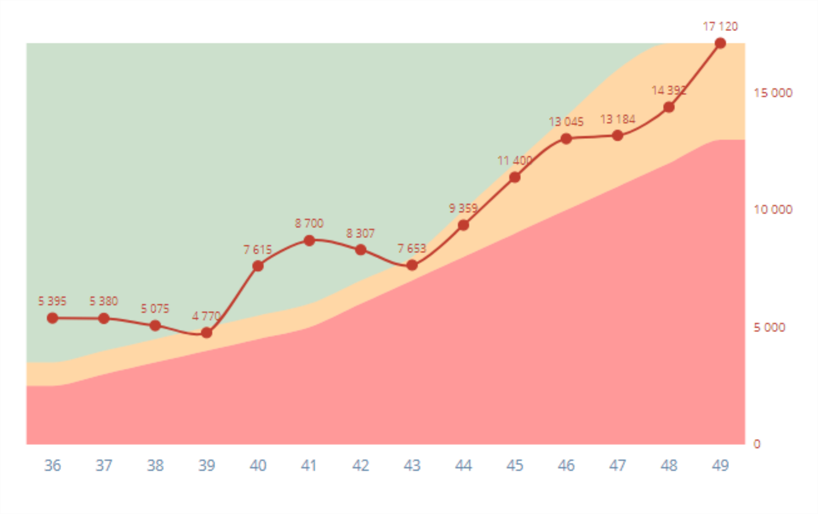
UFABC

Motivação

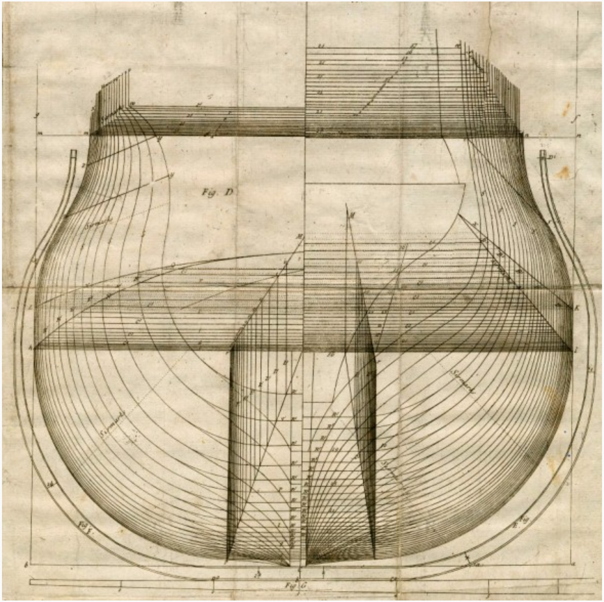
Interpolação e dados tabulados



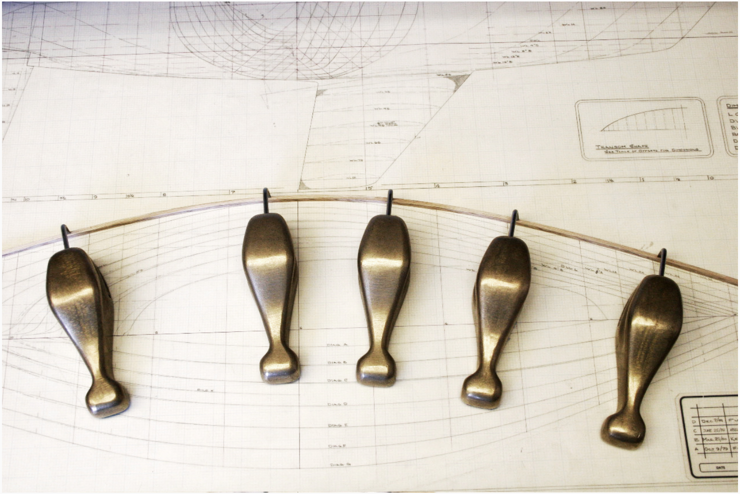
Interpolação e dados tabulados



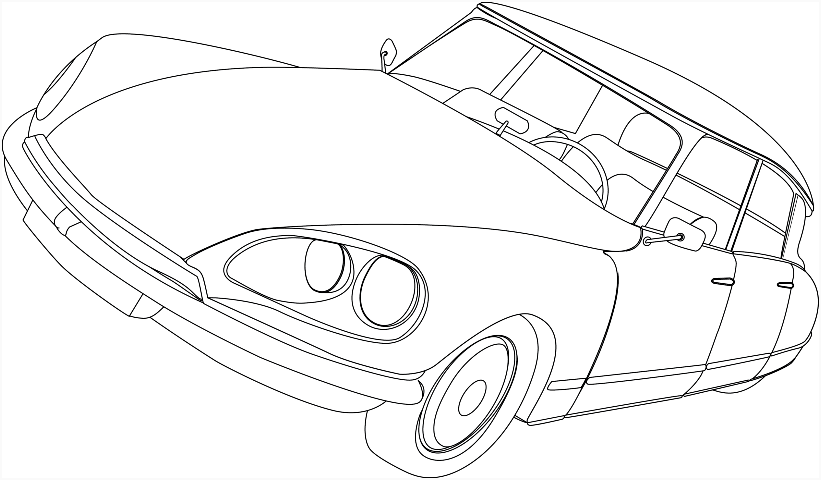
Interpolação e Construção



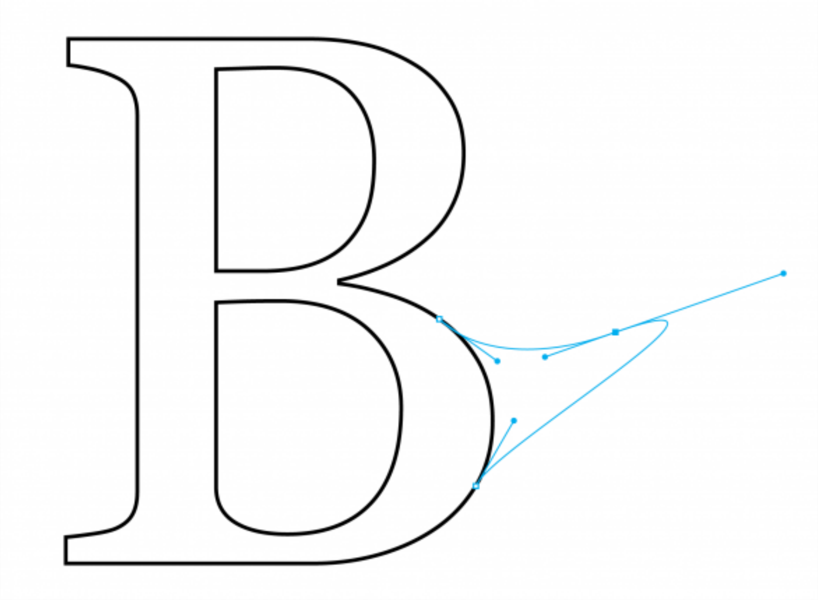
Interpolação e Construção



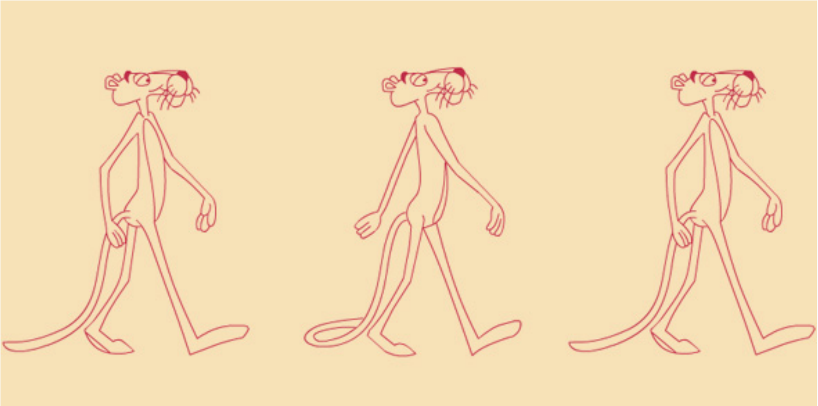
Interpolação e Engenharia



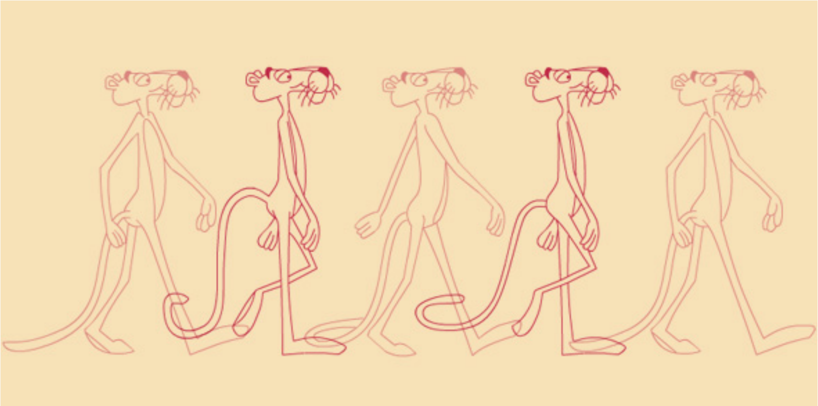
Interpolação e Tipografia



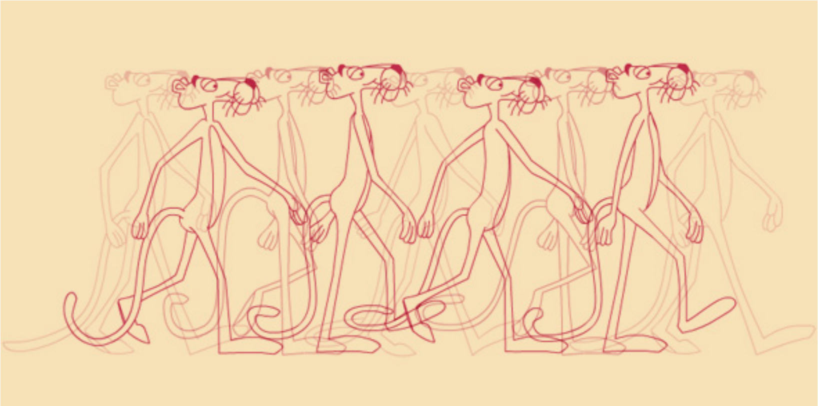
Interpolação e Animação



Interpolação e Animação



Interpolação e Animação



Interpolação — Abstração Simples

- Suponha um conjunto discreto de pontos (x_i, y_i)

Interpolação — Abstração Simples

- Suponha um conjunto discreto de pontos (x_i, y_i)
- Por exemplo,dados obtidos num experimento: Taxa de reação (química) em função da temperatura

Interpolação — Abstração Simples

- Suponha um conjunto discreto de pontos (x_i, y_i)
- Por exemplo,dados obtidos num experimento: Taxa de reação (química) em função da temperatura
- Para representar *todos* os possíveis pares, necessitaríamos de uma quantidade infinita de informação

Interpolação — Abstração Simples

- Suponha um conjunto discreto de pontos (x_i, y_i)
- Por exemplo,dados obtidos num experimento: Taxa de reação (química) em função da temperatura
- Para representar *todos* os possíveis pares, necessitaríamos de uma quantidade infinita de informação
- Encontrar uma função (eg polinômio) que passe pelos pontos: "compressão", através de uma regra calculável num número finito de passos

Interpolação — Abstração Simples

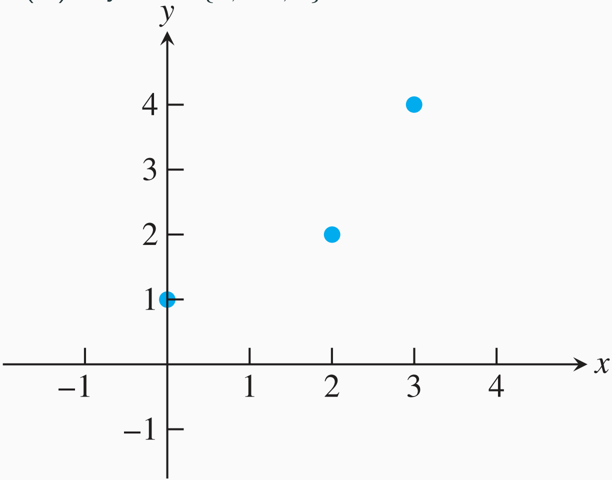
- Suponha um conjunto discreto de pontos (x_i, y_i)
- Por exemplo,dados obtidos num experimento: Taxa de reação (química) em função da temperatura
- Para representar *todos* os possíveis pares, necessitaríamos de uma quantidade infinita de informação
- Encontrar uma função (eg polinômio) que passe pelos pontos: "compressão", através de uma regra calculável num número finito de passos
- Sempre haverá algum erro. Será que é aceitável para nosso problema?

Interpolação — Abstração Simples

- A função $y = P(x)$ *interpola* os pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ se $P(x_i) = y_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

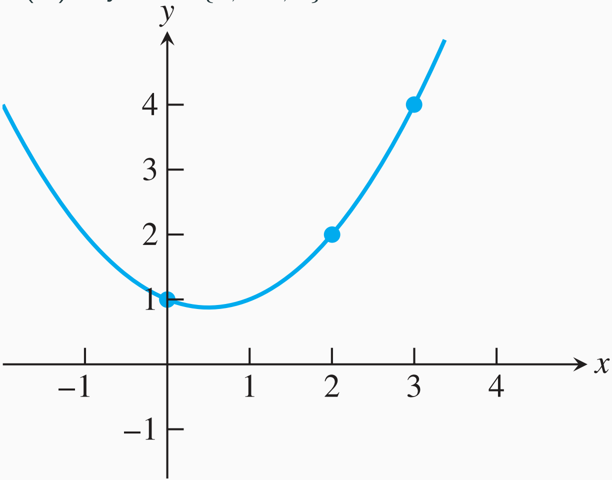
Interpolação — Abstração Simples

- A função $y = P(x)$ *interpola* os pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ se $P(x_i) = y_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$



Interpolação — Abstração Simples

- A função $y = P(x)$ *interpola* os pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ se $P(x_i) = y_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$



Interpolação Polinomial

- Focaremos em *polinômios* para interpolação.

Interpolação Polinomial

- Focaremos em *polinômios* para interpolação.
    - propriedades matemáticas simples

Interpolação Polinomial

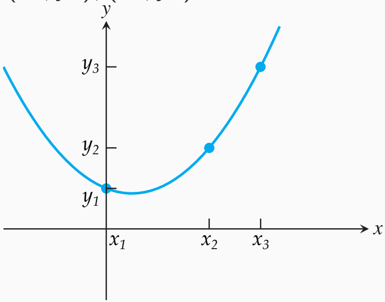
- Focaremos em *polinômios* para interpolação.
  - propriedades matemáticas simples
  - convenientes para computadores (somam e multiplicam *floats*)

Interpolação Polinomial

- Focaremos em *polinômios* para interpolação.
  - propriedades matemáticas simples
  - convenientes para computadores (somam e multiplicam *floats*)
- Podemos tratar interpolação polinomial de uma forma direta:

Interpolação Polinomial

- Focaremos em *polinômios* para interpolação.
  - propriedades matemáticas simples
  - convenientes para computadores (somam e multiplicam *floats*)
- Podemos tratar interpolação polinomial de uma forma direta:
- Vamos determinar, por exemplo, a parábola que passa pelos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$:



Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Um polinômio quadrático geral tem a forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Um polinômio quadrático geral tem a forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

- Queremos determinar a, b, c para que P_2 interpole os pontos dados. Ou seja, queremos que $p(x_1) = y_1$,$p(x_2) = y_2$,$p(x_2) = y_2$:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3 \end{aligned}$$

Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Um polinômio quadrático geral tem a forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

- Queremos determinar a, b, c para que P_2 interpole os pontos dados. Ou seja, queremos que $p(x_1) = y_1$,$p(x_2) = y_2$,$p(x_2) = y_2$:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3 \end{aligned}$$

- Note que isto é nada mais do que um sistema linear!

Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Em geral, para n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Em geral, para n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
- Para um polinômio de grau k, há $k + 1$ coeficientes a determinar

Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Em geral, para n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
- Para um polinômio de grau k, há $k+1$ coeficientes a determinar
- Isto nos sugere tomar $k = n - 1$, já que temos n equações

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_0 & + & x_1 \cdot a_1 & + & x_1^2 \cdot a_2 & + & \ldots & + & x_1^{n-1} \cdot a_{n-1} & = & y_1 \\
a_0 & + & x_2 \cdot a_1 & + & x_2^2 \cdot a_2 & + & \ldots & + & x_2^{n-1} \cdot a_{n-1} & = & y_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\
a_0 & + & x_n \cdot a_1 & + & x_n^2 \cdot a_2 & + & \ldots & + & x_n^{n-1} \cdot a_{n-1} & = & y_n
\end{array}
$$

- Ou seja, temos um sistema linear! Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Ou seja, temos um sistema linear! Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- A matriz se chama *Matriz de Vandermonde*.

Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Ou seja, temos um sistema linear! Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- A matriz se chama *Matriz de Vandermonde*.
- Sabemos resolver sistemas!

Interpolação Polinomial — Problema Linear

- Ou seja, temos um sistema linear! Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- A matriz se chama *Matriz de Vandermonde*.
- Sabemos resolver sistemas!
- Veremos que este métodos só é satisfatório para problemas pequenos, com pontos bem espaçados e com escalas similares.

Parênteses — Calculando Polinômios

- Qual é a melhor maneira de calcular, por exemplo em $x = \frac{1}{2}$

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

Parênteses — Calculando Polinômios

- Qual é a melhor maneira de calcular, por exemplo em $x = \frac{1}{2}$

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

- Maneira 'óbvia':

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}$$

Parênteses — Calculando Polinômios

- Qual é a melhor maneira de calcular, por exemplo em $x = \frac{1}{2}$

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

- Maneira 'óbvia':

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}$$

- Temos um total de 10 multiplicações e 4 adições.

Parênteses — Calculando Polinômios

- Qual é a melhor maneira de calcular, por exemplo em $x = \frac{1}{2}$

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

- Maneira 'óbvia':

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}$$

- Temos um total de 10 multiplicações e 4 adições.
- Evidentemente, há estratégias melhores. Podemos armazenar os produtos parciais ao calcular potências de $\frac{1}{2}$.

Calculando Polinômios

- Vamos armazenar produtos parciais ao calcular potências de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Calculando Polinômios

- Vamos armazenar produtos parciais ao calcular potências de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

- Podemos agora somar os termos

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}$$

Calculando Polinômios

- Vamos armazenar produtos parciais ao calcular potências de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

- Podemos agora somar os termos

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}$$

- Agora, temos 3 multiplicações por $\frac{1}{2}$, mais 4 outras multiplicações. Ou seja, baixamos para 7 multiplicações e as mesmas 4 adições.

Calculando Polinômios

- Vamos armazenar produtos parciais ao calcular potências de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

- Podemos agora somar os termos

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}$$

- Agora, temos 3 multiplicações por $\frac{1}{2}$, mais 4 outras multiplicações. Ou seja, baixamos para 7 multiplicações e as mesmas 4 adições.
- Dá para fazer melhor?

Calculando Polinômios — Método de Horner

- Vamos escrever o polinômio “do avesso”:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -1 + x(5 - 3x + 3x^2 + 2x^3) \\
&= -1 + x(5 + x(-3 + 3x + 2x^2)) \\
&= -1 + x(5 + x(-3 + x(3 + 2x))) \\
&= -1 + x \cdot (5 + x \cdot (-3 + x \cdot (3 + 2 \cdot x)))
\end{aligned}
$$

Calculando Polinômios — Método de Horner

- Vamos escrever o polinômio "do avesso":

$$\begin{aligned}
P(x) &= -1 + x(5 - 3x + 3x^2 + 2x^3) \\
&= -1 + x(5 + x(-3 + 3x + 2x^2)) \\
&= -1 + x(5 + x(-3 + x(3 + 2x))) \\
&= -1 + x \cdot (5 + x \cdot (-3 + x \cdot (3 + 2 \cdot x)))
\end{aligned}$$

- Basta agora calcular de dentro para fora:

$$\begin{aligned}
&\text{multiplicar } \frac{1}{2} \cdot 2, \quad \text{somar} + 3 \to 4 \\
&\text{multiplicar } \frac{1}{2} \cdot 4, \quad \text{somar} - 3 \to -1 \\
&\text{multiplicar } \frac{1}{2} \cdot -1, \text{somar} + 5 \to \frac{9}{2} \\
&\text{multiplicar } \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2}, \text{ somar } \ -1 \to \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Calculando Polinômios — Método de Horner

- Vamos escrever o polinômio "do avesso":

$$\begin{aligned} P(x) &= -1 + x(5 - 3x + 3x^2 + 2x^3) \\ &= -1 + x(5 + x(-3 + 3x + 2x^2)) \\ &= -1 + x(5 + x(-3 + x(3 + 2x))) \\ &= -1 + x \cdot (5 + x \cdot (-3 + x \cdot (3 + 2 \cdot x))) \end{aligned}$$

- Basta agora calcular de dentro para fora:

$$\begin{aligned} &\text{multiplicar } \frac{1}{2} \cdot 2, \quad \text{somar} + 3 \to 4 \\ &\text{multiplicar } \frac{1}{2} \cdot 4, \quad \text{somar} - 3 \to -1 \\ &\text{multiplicar } \frac{1}{2} \cdot -1, \text{somar} + 5 \to \frac{9}{2} \\ &\text{multiplicar } \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2}, \text{ somar } -1 \to \frac{5}{4} \end{aligned}$$

- Chegamos a 4 multiplicações e 4 adições.

Calculando Polinômios — Método de Horner

- Em geral, o *Método de Horner* aplicado a um polinômio de grau n requer n multiplicações e n adições.

Calculando Polinômios — Método de Horner

- Em geral, o *Método de Horner* aplicado a um polinômio de grau n requer n multiplicações e n adições.
- Apesar de um polinômio na forma padrão $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ poder ser escrito como

$$a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(a_4))))$$

Calculando Polinômios — Método de Horner

- Em geral, o *Método de Horner* aplicado a um polinômio de grau n requer n multiplicações e n adições.
- Apesar de um polinômio na forma padrão $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ poder ser escrito como

$$a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(a_4))))$$

- Problemas de interpolação utilizam uma forma mais geral:

$$a_0 + (x - r_0)(a_1 + (x - r_1)(a_2 + (x - r_2)(a_3 + (x - r_3)(a_4))))$$

Calculando Polinômios — Método de Horner

- Em geral, o *Método de Horner* aplicado a um polinômio de grau n requer n multiplicações e n adições.
- Apesar de um polinômio na forma padrão $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ poder ser escrito como

$$a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(a_4))))$$

- Problemas de interpolação utilizam uma forma mais geral:

$$a_0 + (x - r_0)(a_1 + (x - r_1)(a_2 + (x - r_2)(a_3 + (x - r_3)(a_4))))$$

- Os valores r_i são chamados de *pontos base* (se forem nulos, recuperamos a primeira forma).

Avaliando Interpolação "direta" (problema linear)

- Custo para determinar o polinômio P(x): *caro*.

Avaliando Interpolação "direta" (problema linear)

- Custo para determinar o polinômio P(x): *caro*.
  - resolução de um sistema linear$(n+1) \times (n+1)$ denso — p. ex. Eliminação Gaussiana: $\mathcal{O}(n^3)$

Avaliando Interpolação "direta" (problema linear)

- Custo para determinar o polinômio P(x): *caro*.
  - resolução de um sistema linear$(n+1) \times (n+1)$ denso — p. ex. Eliminação Gaussiana: $\mathcal{O}(n^3)$
  - A Matriz de Vandermonde é mal-comportada numericamente (problemas de condicionamento, espec. para n grande e $x_i \approx x_j$)

Avaliando Interpolação “direta” (problema linear)

- Custo para determinar o polinômio P(x): *caro*.
  - resolução de um sistema linear$(n+1) \times (n+1)$ denso — p. ex. Eliminação Gaussiana: $\mathcal{O}(n^3)$
  - A Matriz de Vandermonde é mal-comportada numericamente (problemas de condicionamento, espec. para n grande e $x_i \approx x_j$)
- Custo para calcular $P(x)$ (x qqer): uma vez conhecidos os coeficientes, *barato*, usando o método de Horner.

Avaliando Interpolação “direta” (problema linear)

- Custo para determinar o polinômio P(x): *caro*.
  - resolução de um sistema linear$(n+1)\times(n+1)$ denso — p. ex. Eliminação Gaussiana: $\mathcal{O}(n^3)$
  - A Matriz de Vandermonde é mal-comportada numericamente (problemas de condicionamento, espec. para n grande e $x_i \approx x_j$)
- Custo para calcular $P(x)$ (x qqer): uma vez conhecidos os coeficientes, *barato*, usando o método de Horner.
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *imediato*:

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

Avaliando Interpolação “direta” (problema linear)

- Custo para determinar o polinômio P(x): *caro*.
  - resolução de um sistema linear$(n+1) \times (n+1)$ denso — p. ex. Eliminação Gaussiana: $\mathcal{O}(n^3)$
  - A Matriz de Vandermonde é mal-comportada numericamente (problemas de condicionamento, espec. para n grande e $x_i \approx x_j$)
- Custo para calcular $P(x)$ (x qqer): uma vez conhecidos os coeficientes, *barato*, usando o método de Horner.
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *imediato*:

  $$P_n'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

- Interpolação incremental: interpolar por $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ é mais fácil se já sabemos $P_{n-1}(x)$ que interpola $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?

Avaliando Interpolação “direta” (problema linear)

- Custo para determinar o polinômio P(x): *caro*.
  - resolução de um sistema linear$(n+1) \times (n+1)$ denso — p. ex. Eliminação Gaussiana: $\mathcal{O}(n^3)$
  - A Matriz de Vandermonde é mal-comportada numericamente (problemas de condicionamento, espec. para n grande e $x_i \approx x_j$)
- Custo para calcular $P(x)$ (x qqer): uma vez conhecidos os coeficientes, *barato*, usando o método de Horner.
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *imediato*:

  $$P_n'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

- Interpolação incremental: interpolar por $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ é mais fácil se já sabemos $P_{n-1}(x)$ que interpola $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?
  - *Não*. A cada novo ponto, precisamos calcular um novo sistema do zero.

Interpolação Polinomial de Lagrange

- A interpolação de Lagrange envolve uma representação para polinômios diferente de uma combinação linear de monômios.

Interpolação Polinomial de Lagrange

- A interpolação de Lagrange envolve uma representação para polinômios diferente de uma combinação linear de monômios.
- Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, podemos encontrar um polinômio de grau $d = n - 1$ que interpola os pontos.

Interpolação Polinomial de Lagrange

- A interpolação de Lagrange envolve uma representação para polinômios diferente de uma combinação linear de monômios.
- Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, podemos encontrar um polinômio de grau $d = n - 1$ que interpola os pontos.
- Por examplo, dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, o **Polinômio Interpolador de Lagrange** é

$$P_2(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- A interpolação de Lagrange envolve uma representação para polinômios diferente de uma combinação linear de monômios.
- Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, podemos encontrar um polinômio de grau $d = n - 1$ que interpola os pontos.
- Por examplo, dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, o **Polinômio Interpolador de Lagrange** é

$$P_2(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

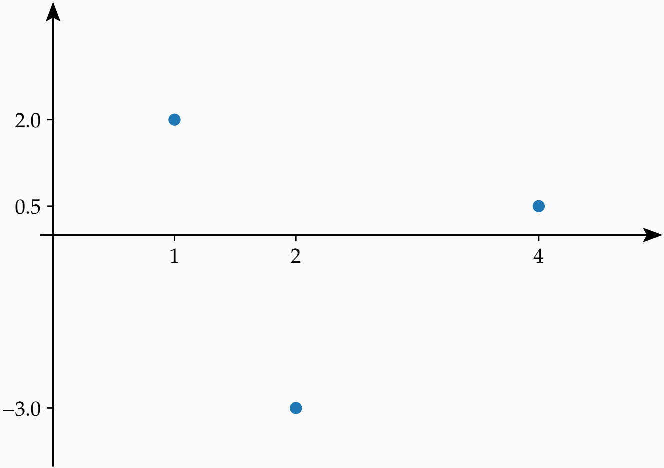
- Verifique que ele de fato interpola os (x_i, y_i)!

Interpolação Polinomial de Lagrange

- De onde vem isso?

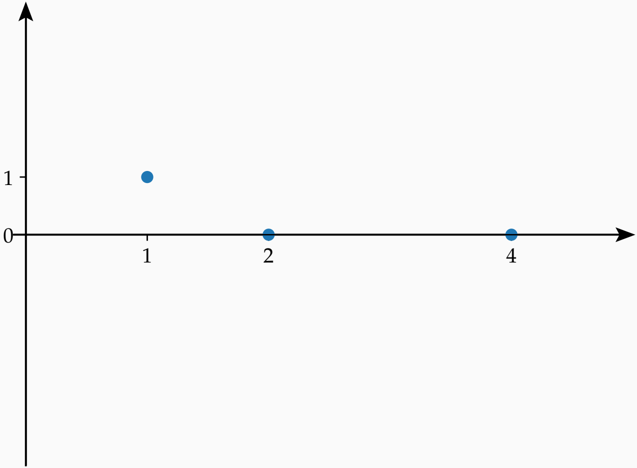
Interpolação Polinomial de Lagrange

- De onde vem isso?



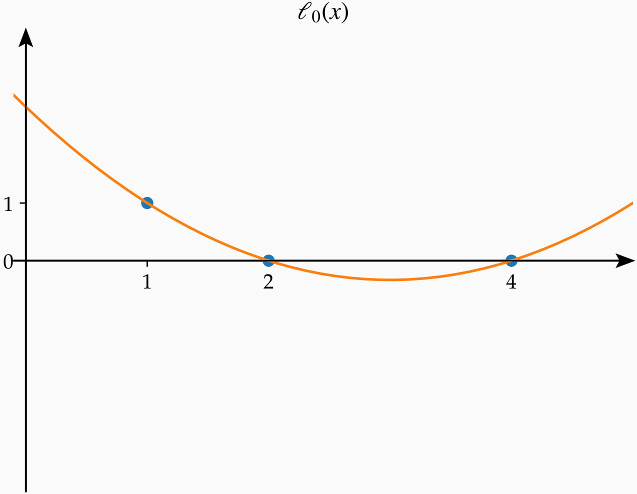
Interpolação Polinomial de Lagrange

- De onde vem isso?



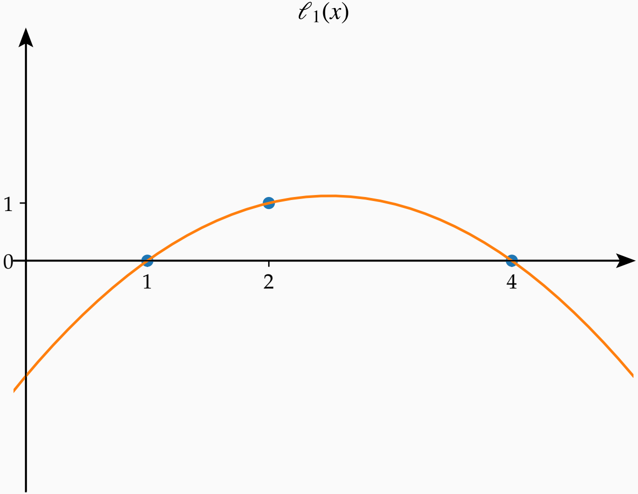
Interpolação Polinomial de Lagrange

- De onde vem isso?



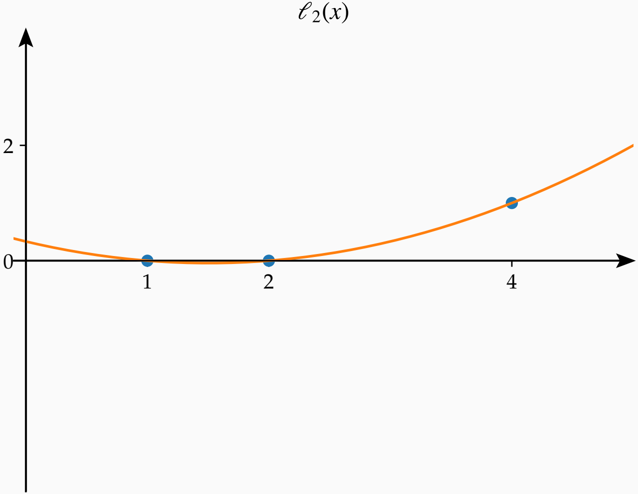
Interpolação Polinomial de Lagrange

- De onde vem isso?



Interpolação Polinomial de Lagrange

- De onde vem isso?



Interpolação Polinomial de Lagrange

- Exemplo: Encontre o polinômio de Lagrange de grau 2 que interpola $(0, 1), (2, 2), (3, 4)$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Exemplo: Encontre o polinômio de Lagrange de grau 2 que interpola $(0,1),(2,2),(3,4)$
- Forma de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= 1\frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)} + 2\frac{(x-0)(x-3)}{(2-0)(2-3)} + 4\frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} \\
&= \frac{1}{6}(x^2-5x+6) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-3x) - 4\frac{1}{3}(x^2-2x) \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1
\end{aligned}
$$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Caso geral: dados n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, definimos para todos k entre 1 e n um polinômio de grau $n-1$

$$\begin{aligned}\ell_k(x) &= \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}\\ &\equiv \frac{\prod_{j\neq k}(x-x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k-x_j)} \quad \textit{Polinômios de Lagrange.}\end{aligned}$$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Caso geral: dados n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, definimos para todos k entre 1 e n um polinômio de grau $n-1$

$$\begin{aligned}\ell_k(x) &= \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \\ &\equiv \frac{\prod_{j\neq k}(x-x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k-x_j)} \quad \textit{Polinômios de Lagrange.}\end{aligned}$$

- Ou seja: $\ell_k(x_k) = 1$ e $\ell_k(x_j) = 0$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Caso geral: dados n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, definimos para todos k entre 1 e n um polinômio de grau $n-1$

$$\begin{aligned}\ell_k(x) &= \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \\ &\equiv \frac{\prod_{j\neq k}(x-x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k-x_j)} \quad \textit{Polinômios de Lagrange.}\end{aligned}$$

- Ou seja: $\ell_k(x_k) = 1$ e $\ell_k(x_j) = 0$
- Para a achar o polinômio completo, basta somar os ℓ_k, com um fator de escala para levar os pontos de 1 ao y correspondente:

$$\boxed{P_{n-1}(x) = y_1\ell_1(x) + \ldots + y_n\ell_n(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} y_i\ell_i(x)}$$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Importante: dados n pontos com x_i distintos, *há um único* polinômio de grau $n-1$ *ou menor* que passa por todos (x_i, y_i).

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Importante: dados n pontos com x_i distintos, *há um único* polinômio de grau $n-1$ *ou menor* que passa por todos (x_i, y_i).
- Prova: Suponha que existam $P(x)$ e $Q(x)$, de grau máximo $n-1$, que interpolam os n pontos.

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Importante: dados n pontos com x_i distintos, *há um único* polinômio de grau $n-1$ *ou menor* que passa por todos (x_i, y_i).
- Prova: Suponha que existam $P(x)$ e $Q(x)$, de grau máximo $n-1$, que interpolam os n pontos.
- $P(x_1) = Q(x_1) = y_1, P(x_2) = Q(x_2) = y_2, \ldots P(x_n) = Q(x_n) = y_n$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Importante: dados n pontos com x_i distintos, *há um único* polinômio de grau $n-1$ *ou menor* que passa por todos (x_i, y_i).
- Prova: Suponha que existam $P(x)$ e $Q(x)$, de grau máximo $n-1$, que interpolam os n pontos.
- $P(x_1) = Q(x_1) = y_1, P(x_2) = Q(x_2) = y_2, \ldots P(x_n) = Q(x_n) = y_n$
- Seja $H(x) = P(x) - Q(x)$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Importante: dados n pontos com x_i distintos, *há um único* polinômio de grau $n-1$ *ou menor* que passa por todos (x_i, y_i).
- Prova: Suponha que existam $P(x)$ e $Q(x)$, de grau máximo $n-1$, que interpolam os n pontos.
- $P(x_1) = Q(x_1) = y_1, P(x_2) = Q(x_2) = y_2, \ldots P(x_n) = Q(x_n) = y_n$
- Seja $H(x) = P(x) - Q(x)$
- Então $0 = H(x_1) = H(x_2) = \ldots = H(x_n)$ (H tem n zeros)

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Importante: dados n pontos com x_i distintos, *há um único* polinômio de grau $n-1$ *ou menor* que passa por todos (x_i, y_i).
- Prova: Suponha que existam $P(x)$ e $Q(x)$, de grau máximo $n-1$, que interpolam os n pontos.
- $P(x_1) = Q(x_1) = y_1, P(x_2) = Q(x_2) = y_2, \ldots P(x_n) = Q(x_n) = y_n$
- Seja $H(x) = P(x) - Q(x)$
- Então $0 = H(x_1) = H(x_2) = \ldots = H(x_n)$ (H tem n zeros)
- Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, um polinômio de grau d tem no máximo d zeros (a não ser que seja nulo).

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Importante: dados n pontos com x_i distintos, *há um único* polinômio de grau $n-1$ *ou menor* que passa por todos (x_i, y_i).
- Prova: Suponha que existam $P(x)$ e $Q(x)$, de grau máximo $n-1$, que interpolam os n pontos.
- $P(x_1) = Q(x_1) = y_1, P(x_2) = Q(x_2) = y_2, \ldots P(x_n) = Q(x_n) = y_n$
- Seja $H(x) = P(x) - Q(x)$
- Então $0 = H(x_1) = H(x_2) = \ldots = H(x_n)$ (H tem n zeros)
- Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, um polinômio de grau d tem no máximo d zeros (a não ser que seja nulo).
- Então, H é nulo, e $P(x) \equiv Q(x)$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 3 ou menor que interpola os pontos $(0, 2), (1, 1), (2, 0), (3, -1)$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 3 ou menor que interpola os pontos $(0,2),(1,1),(2,0),(3,-1)$
- Forma de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & 2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 1\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
& + 0\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} - 1\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\
= {} & \frac{1}{3}(x^3-6x^2+11x-6) + \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x) - \frac{1}{6}(x^3+x^2+2x) \\
= {} & -x+2
\end{aligned}
$$

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 3 ou menor que interpola os pontos $(0,2),(1,1),(2,0),(3,-1)$
- Forma de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
P(x) = 2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 1\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
+ 0\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} - 1\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x) - \frac{1}{6}(x^3 + x^2 + 2x)
$$

$$
= -x + 2
$$

- O teorema anterior garante que há um único polinômio de grau 3 *ou menor* passando pelos 4 pontos.

Interpolação Polinomial de Lagrange

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 3 ou menor que interpola os pontos $(0,2),(1,1),(2,0),(3,-1)$
- Forma de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
P(x) = 2&\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 1\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
&+ 0\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} - 1\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\
&= \frac{1}{3}(x^3-6x^2+11x-6) + \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x) - \frac{1}{6}(x^3+x^2+2x) \\
&= -x+2
\end{aligned}
$$

- O teorema anterior garante que há um único polinômio de grau 3 *ou menor* passando pelos 4 pontos.
- Isso não significa que ele *precise* ser de grau 3!

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
    - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.
  - Entretanto, obter a forma $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é caro ($\mathcal{O}(n^2)$ operações para cada ℓ_i, $\mathcal{O}(n^3)$ para $P_n(x)$)

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.
  - Entretanto, obter a forma $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ é caro ($\mathcal{O}(n^2)$ operações para cada ℓ_i, $\mathcal{O}(n^3)$ para $P_n(x)$)
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *significativo*.

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.
  - Entretanto, obter a forma $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é caro ($\mathcal{O}(n^2)$ operações para cada ℓ_i, $\mathcal{O}(n^3)$ para $P_n(x)$)
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *significativo*.
  - não precisamos dos a_n para calcular somente alguns pontos.

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.
  - Entretanto, obter a forma $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é caro ($\mathcal{O}(n^2)$ operações para cada ℓ_i, $\mathcal{O}(n^3)$ para $P_n(x)$)
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *significativo*.
  - não precisamos dos a_n para calcular somente alguns pontos.
  - para cada $\ell_i(x)$, n subtrações e n multiplicações

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.
  - Entretanto, obter a forma $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é caro ($\mathcal{O}(n^2)$ operações para cada ℓ_i, $\mathcal{O}(n^3)$ para $P_n(x)$)
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *significativo*.
  - não precisamos dos a_n para calcular somente alguns pontos.
  - para cada $\ell_i(x)$, n subtrações e n multiplicações
  - n^2 é melhor do que n^3 para os a_n

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
    - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.
    - Entretanto, obter a forma $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é caro ($\mathcal{O}(n^2)$ operações para cada ℓ_i, $\mathcal{O}(n^3)$ para $P_n(x)$)
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *significativo*.
    - não precisamos dos a_n para calcular somente alguns pontos.
    - para cada $\ell_i(x)$, n subtrações e n multiplicações
    - n^2 é melhor do que n^3 para os a_n
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *não imediato*.

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.
  - Entretanto, obter a forma $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é caro ($\mathcal{O}(n^2)$ operações para cada ℓ_i, $\mathcal{O}(n^3)$ para $P_n(x)$)
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *significativo*.
  - não precisamos dos a_n para calcular somente alguns pontos.
  - para cada $\ell_i(x)$, n subtrações e n multiplicações
  - n^2 é melhor do que n^3 para os a_n
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *não imediato*.
  - A derivada de cada ℓ_i gera N termos, com $(N-1)$ produtos cada

Avaliando a Interpolação de Lagrange

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - Escrevemos $P(x)$ diretamente, sem ter de resolver sistema algum.
  - Entretanto, obter a forma $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ é caro ($\mathcal{O}(n^2)$ operações para cada ℓ_i, $\mathcal{O}(n^3)$ para $P_n(x)$)
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *significativo*.
  - não precisamos dos a_n para calcular somente alguns pontos.
  - para cada $\ell_i(x)$, n subtrações e n multiplicações
  - n^2 é melhor do que n^3 para os a_n
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *não imediato*.
  - A derivada de cada ℓ_i gera N termos, com $(N-1)$ produtos cada
- Interpolação incremental: *Não*. A cada novo ponto, precisamos reconstruir o polinômio completo (o que é barato, entretanto).

Polinômio Interpolador de Newton

- Os polinômos de Newton são outra forma de construir polinômios interpoladores.

Polinômio Interpolador de Newton

- Os polinômos de Newton são outra forma de construir polinômios interpoladores.
- Duas vantagens principais:

Polinômio Interpolador de Newton

- Os polinômos de Newton são outra forma de construir polinômios interpoladores.
- Duas vantagens principais:
  - Cálcular $P(x)$ para x qualquer é barato

Polinômio Interpolador de Newton

- Os polinômos de Newton são outra forma de construir polinômios interpoladores.
- Duas vantagens principais:
    - Cálcular $P(x)$ para x qualquer é barato
    - Possibilitam interpolação incremental (adicionar um novo ponto (x_{n+1}, y_{n+1}) dado um polinômio que interpola outros (x_n, y_n)).

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- Queremos interpolar $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- Queremos interpolar $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
- **passo 0**: Polinômio de grau 0 que interpola (x_0, y_0):

$$P_0(x) = y_0$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo 1**: Polinômio de grau 1 que interpola (x_0, y_0) **e** (x_1, y_1):

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo 1**: Polinômio de grau 1 que interpola (x_0, y_0) **e** (x_1, y_1):
- Aproveitamos $P_0(x)$, que já interpola (x_0, y_0):

$$P_1(x) = P_0(x) + M_1(x)$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo 1**: Polinômio de grau 1 que interpola (x_0, y_0) **e** (x_1, y_1):
- Aproveitamos $P_0(x)$, que já interpola (x_0, y_0):

$$P_1(x) = P_0(x) + M_1(x)$$

- $M_1(x)$ tem grau 1, e satisfaz

$$\underbrace{P_1(x_0)}_{y_0} = \underbrace{P_0(x_0)}_{y_0} + M_1(x_0) \implies M_1(x_0) = 0$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo 1**: Polinômio de grau 1 que interpola (x_0, y_0) **e** (x_1, y_1):
- Aproveitamos $P_0(x)$, que já interpola (x_0, y_0):

$$P_1(x) = P_0(x) + M_1(x)$$

- $M_1(x)$ tem grau 1, e satisfaz

$$\underbrace{P_1(x_0)}_{y_0} = \underbrace{P_0(x_0)}_{y_0} + M_1(x_0) \implies M_1(x_0) = 0$$

- Então, x_0 é raiz de $M_1(x)$, logo $M_1(x) = c_1(x - x_0)$.

$$P_1(x_1) = P_0(x_1) + \underbrace{c_1(x_1 - x_0)}_{M_1(x_1)} \implies$$

$$c_1 = \frac{P_1(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo 2**: Polinômio de grau 2 que interpola (x_0, y_0), (x_1, y_1) **e** (x_2, y_2):
$$P_2(x) = P_1(x) + M_2(x)$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo 2**: Polinômio de grau 2 que interpola (x_0, y_0), (x_1, y_1) **e** (x_2, y_2):
$$P_2(x) = P_1(x) + M_2(x)$$
- $M_2(x)$ tem grau 2, e satisfaz

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{P_2(x_0)}_{y_0} = \underbrace{P_1(x_0)}_{y_0} + M_2(x_0) \\ \underbrace{P_2(x_1)}_{y_1} = \underbrace{P_1(x_1)}_{y_1} + M_2(x_1) \end{aligned}\right\} \implies M_2(x_0) = M_2(x_1) = 0$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo 2**: Polinômio de grau 2 que interpola (x_0, y_0), (x_1, y_1) **e** (x_2, y_2):

$$P_2(x) = P_1(x) + M_2(x)$$

- $M_2(x)$ tem grau 2, e satisfaz

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{P_2(x_0)}_{y_0} &= \underbrace{P_1(x_0)}_{y_0} + M_2(x_0) \\ \underbrace{P_2(x_1)}_{y_1} &= \underbrace{P_1(x_1)}_{y_1} + M_2(x_1) \end{aligned}\right\} \implies M_2(x_0) = M_2(x_1) = 0$$

- Então, $M_2(x) = c_2(x - x_0)(x - x_1)$. Substituindo $x \leftarrow x_2$

$$y_2 = P_2(x_2) = P_1(x_2) + \underbrace{c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}_{M_2(x_2)} \implies$$

$$c_2 = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo k**: Polinômio de grau k que interpola $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo k**: Polinômio de grau k que interpola $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$
- no passo anterior, chegamos a P_{k-1} que interpola $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$.

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + M_k(x) \quad M_k(x) \text{ tem grau k.}$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo k**: Polinômio de grau k que interpola $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$
- no passo anterior, chegamos a P_{k-1} que interpola $(x_0, y_0), \dots, (x_{k-1}, y_{k-1})$.

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + M_k(x) \quad M_k(x) \text{ tem grau k.}$$

- Para qualqer $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, temos

$$\underbrace{P_k(x_i)}_{y_i} = \underbrace{P_{k-1}(x_i)}_{y_i} + M_k(x_i) \implies M_k(x_i) = 0$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- **passo k**: Polinômio de grau k que interpola $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$
- no passo anterior, chegamos a P_{k-1} que interpola $(x_0, y_0), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$.

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + M_k(x) \quad M_k(x) \text{ tem grau k.}$$

- Para qualqer $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, temos

$$\underbrace{P_k(x_i)}_{y_i} = \underbrace{P_{k-1}(x_i)}_{y_i} + M_k(x_i) \implies M_k(x_i) = 0$$

- Então, $M_k(x) = c_k(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})$. Subst. $x \leftarrow x_k$

$$y_k = P_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + \underbrace{c_k(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})}_{M_k(x_k)} \implies$$

$$c_k = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})} \equiv \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)}$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- Geramos $P_k(x)$ incrementalmente, somando $M_k(x)$ ao $P_{n-1}(x)$. Após N passos:

$$P_N(x) = M_0(x) + M_1(x) + \ldots + M_N(x)$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- Geramos $P_k(x)$ incrementalmente, somando $M_k(x)$ ao $P_{n-1}(x)$. Após N passos:

$$P_N(x) = M_0(x) + M_1(x) + \ldots + M_N(x)$$

- Sendo que cada $M_i(x)$ pode ser escrito como

$$M_i(x) = c_i n_i(x) \quad \text{onde } n_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

- Geramos $P_k(x)$ incrementalmente, somando $M_k(x)$ ao $P_{n-1}(x)$. Após N passos:

$$P_N(x) = M_0(x) + M_1(x) + \ldots + M_N(x)$$

- Sendo que cada $M_i(x)$ pode ser escrito como

$$M_i(x) = c_i n_i(x) \quad \text{onde } n_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

- Ou seja

$$P_N(x) = c_0 n_0(x) + c_1 n_1(x) + \ldots + c_n n_N(x) \equiv \sum_{i=0}^{N} c_i n_i(x)$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i n_i(x)$$

- Os $n_i(x)$ são os *Polinômios de Newton* (compare com os *Polinômios de Lagrange* acima)

$$\begin{aligned}
n_0(x) &= 1 \\
n_1(x) &= x - x_0 \\
n_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\
&\vdots \\
n_k(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})
\end{aligned}$$

Polinômios de Newton: Idéia Básica

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i n_i(x)$$

- Os $n_i(x)$ são os *Polinômios de Newton* (compare com os *Polinômios de Lagrange* acima)

$$\begin{aligned}
n_0(x) &= 1 \\
n_1(x) &= x - x_0 \\
n_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\
&\vdots \\
n_k(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})
\end{aligned}$$

- Já vimos como determinar os c_i diretamente. Mas há uma maneira mais eficiente e sistemática.

Diferenças Divididas de Newton

- Vamos supor que estamos interpolando n pontos advindos de uma função, $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$

Diferenças Divididas de Newton

- Vamos supor que estamos interpolando n pontos advindos de uma função, $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$
- Seja $f[x_1 \dots x_n]$ o coeficiente do termo em x^{n-1} no polinômio (único!) que interpola $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$.

Diferenças Divididas de Newton

- Vamos supor que estamos interpolando n pontos advindos de uma função, $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$
- Seja $f[x_1 \ldots x_n]$ o coeficiente do termo em x^{n-1} no polinômio (único!) que interpola $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.
- Por exemplo, vimos que $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ interpola os pontos $(0, 1), (2, 2), (3, 4)$

Diferenças Divididas de Newton

- Vamos supor que estamos interpolando n pontos advindos de uma função, $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$
- Seja $f[x_1 \ldots x_n]$ o coeficiente do termo em x^{n-1} no polinômio (único!) que interpola $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.
- Por exemplo, vimos que $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ interpola os pontos $(0, 1), (2, 2), (3, 4)$
- Então, $f[0\ 2\ 3] = \frac{1}{2}$

Diferenças Divididas de Newton

- Seja $f[x_0 \ldots x_{n-1}]$ o coeficiente do termo em x^{n-1} no polinômio (único!) que interpola $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

Diferenças Divididas de Newton

- Seja $f[x_0 \dots x_{n-1}]$ o coeficiente do termo em x^{n-1} no polinômio (único!) que interpola $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.
- Segundo esta notação, temos a *fórmula de diferenças divididas de Newton*

$$\begin{aligned} P(x) = f[x_1] &+ f[x_1\ x_2](x - x_1) \\ &+ f[x_1\ x_2\ x_3](x - x_1)(x - x_2) \\ &+ f[x_1\ x_2\ x_3\ x_4](x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &+ \dots \\ &+ f[x_1 \dots x_n](x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Diferenças Divididas de Newton

- Os coeficientes $f[x_1 \dots x_k]$ podem ser calculados recursivamente. Começamos listando os pontos:

$$
\begin{array}{c|c}
x_1 & f(x_1) \\
x_2 & f(x_2) \\
\vdots & \vdots \\
x_n & f(x_n)
\end{array}
$$

Diferenças Divididas de Newton

- Os coeficientes $f[x_1 \dots x_k]$ podem ser calculados recursivamente. Começamos listando os pontos:

$$\begin{array}{c|c} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & f(x_n) \end{array}$$

- As diferenças divididas são os números reais

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_k \ x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f[x_k \ x_{k+1} \ x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1} \ x_{k+2}] - f[x_k \ x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

$$f[x_k \ x_{k+1} \ x_{k+2} \ x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1} \ x_{k+2} \ x_{k+3}] - f[x_k \ x_{k+1} \ x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}$$

Diferenças Divididas de Newton

- As diferenças divididas são os números reais

$$
\begin{aligned}
f[x_k] &= f(x_k) \\
f[x_k \; x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} \\
f[x_k \; x_{k+1} \; x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1} \; x_{k+2}] - f[x_k \; x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \\
f[x_k \; x_{k+1} \; x_{k+2} \; x_{k+3}] &= \frac{f[x_{k+1} \; x_{k+2} \; x_{k+3}] - f[x_k \; x_{k+1} \; x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}
\end{aligned}
$$

Diferenças Divididas de Newton

- As diferenças divididas são os números reais

$$
\begin{aligned}
&f[x_k] = f(x_k)\\
&f[x_k\ x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}\\
&f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}\ x_{k+2}] - f[x_k\ x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}\\
&f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}\ x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1}\ x_{k+2}\ x_{k+3}] - f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}
\end{aligned}
$$

- O polinômio interpolador é

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1 \dots x_i](x - x_1)\dots(x - x_{i-1})$$

Diferenças Divididas de Newton

- Os cálculos podem ser arranjados em uma tabela:

$$
\begin{array}{c|ccc}
x_1 & f[x_1] & & \\
 & & f[x_1\ x_2] & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1\ x_2\ x_3] \\
 & & f[x_2\ x_3] & \\
x_3 & f[x_3] & &
\end{array}
$$

Diferenças Divididas de Newton

- Os cálculos podem ser arranjados em uma tabela:

$$\begin{array}{c|cccc}
x_1 & f[x_1] & & & \\
 & & f[x_1\ x_2] & & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1\ x_2\ x_3] \\
 & & f[x_2\ x_3] & & \\
x_3 & f[x_3] & & &
\end{array}$$

- Os coeficientes do polinômio interpolador podem ser lidos no lado superior do triângulo

Diferenças Divididas de Newton

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 2 que interpola $(0,1),(2,2),(3,4)$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & & \\
 & & \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2} & \\
2 & 2 & & f[x_1\ x_2\ x_3] \\
 & & f[x_2\ x_3] & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

Diferenças Divididas de Newton

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 2 que interpola $(0,1),(2,2),(3,4)$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \\
2 & 2 & & & f[x_1\ x_2\ x_3] \\
 & & \frac{4-2}{3-2} = 2 & & \\
3 & 4 & & &
\end{array}
$$

Diferenças Divididas de Newton

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 2 que interpola $(0,1),(2,2),(3,4)$

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 1 & & \\
 & & \frac{1}{2} & \\
2 & 2 & & \frac{2-\frac{1}{2}}{3-0} = \frac{1}{2} \\
 & & 2 & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

Diferenças Divididas de Newton

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 2 que interpola $(0,1),(2,2),(3,4)$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & \color{red}{1} & & \\
 & & \color{teal}{\frac{1}{2}} & \\
2 & 2 & & \color{blue}{\frac{1}{2}} \\
 & & 2 & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

Diferenças Divididas de Newton

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 2 que interpola $(0, 1), (2, 2), (3, 4)$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & \color{red}{1} & & \\
 & & \color{teal}{\frac{1}{2}} & \\
2 & 2 & & \color{blue}{\frac{1}{2}} \\
 & & 2 & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

- Lendo os coeficientes no topo do triângulo, temos

$$P(x) = \color{red}{1} + \color{teal}{\frac{1}{2}}(x-0) + \color{blue}{\frac{1}{2}}(x-0)(x-2)$$

Diferenças Divididas de Newton

- Exemplo: Encontre o polinômio de grau 2 que interpola $(0,1),(2,2),(3,4)$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & & \\
 & & \frac{1}{2} & \\
2 & 2 & & \frac{1}{2} \\
 & & 2 & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

- Lendo os coeficientes no topo do triângulo, temos

$$P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-2)$$

- Ou, na forma aninhada (Horner):

$$P(x) = 1 + (x-0)\left(\frac{1}{2} + (x-2)\cdot\frac{1}{2}\right)$$

(pontos base $r_1 = 0, r_2 = 2$)

Diferenças Divididas: Interpolação Incremental

- O que acontece se obtemos mais dados?

Diferenças Divididas: Interpolação Incremental

- O que acontece se obtemos mais dados?
- Vamos tentar adicionar o ponto $(1, 0)$ ao exemplo anterior:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \\
2 & 2 & & \frac{1}{2} & \\
 & & 2 & & -\frac{1}{2} \\
3 & 4 & & 0 & \\
 & & 2 & & \\
1 & 0 & & &
\end{array}
$$

Diferenças Divididas: Interpolação Incremental

- O que acontece se obtemos mais dados?
- Vamos tentar adicionar o ponto $(1,0)$ ao exemplo anterior:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \\
2 & 2 & & \frac{1}{2} & \\
 & & 2 & & -\frac{1}{2} \\
3 & 4 & & 0 & \\
 & & 2 & & \\
1 & 0 & & &
\end{array}
$$

- Lendo os coeficientes no topo do triângulo, temos

$$P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-2) - \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3)$$

Avaliando a Interpolação de Newton

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.

Avaliando a Interpolação de Newton

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
    - feito recursivamente via diferenças divididas

Avaliando a Interpolação de Newton

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
    - feito recursivamente via diferenças divididas
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *barato*.

Avaliando a Interpolação de Newton

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - feito recursivamente via diferenças divididas
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *barato*.
  - Método de Horner com pontos base: n pontos, $3n$ operações

Avaliando a Interpolação de Newton

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - feito recursivamente via diferenças divididas
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *barato*.
  - Método de Horner com pontos base: n pontos, $3n$ operações
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *imediato*.

Avaliando a Interpolação de Newton

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - feito recursivamente via diferenças divididas
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *barato*.
  - Método de Horner com pontos base: n pontos, $3n$ operações
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *imediato*.
  - Podemos obter derivadas iterativamente, assim como calculamos o valor de $P(x)$ para um dado x

Avaliando a Interpolação de Newton

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - feito recursivamente via diferenças divididas
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *barato*.
  - Método de Horner com pontos base: n pontos, $3n$ operações
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *imediato*.
  - Podemos obter derivadas iterativamente, assim como calculamos o valor de $P(x)$ para um dado x
- Interpolação incremental: *Sim!*

Avaliando a Interpolação de Newton

- Custo para determinar o polinômio P(x): *barato*.
  - feito recursivamente via diferenças divididas
- Custo para calcular $P(x)$, x qqer: *barato*.
  - Método de Horner com pontos base: n pontos, $3n$ operações
- Cálculo das derivadas de $P(x)$: *imediato*.
  - Podemos obter derivadas iterativamente, assim como calculamos o valor de $P(x)$ para um dado x
- Interpolação incremental: *Sim!*
  - nova linha na tabela (ver acima)