CMS

3ème

SECTION MATH

CORRIGEES
DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 1

ABROUG FETHI
Professeur principal

RIAHI MOHAMED ALI
Professeur principal

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principal

CHAMS EDITION

MATHEMATIQUES

SOMMAIRE

CH1 : Généralités sur les fonctions

QCM :

1) c) f n'est ni paire, ni impaire

car : par exemple $3 \in D_f$ mais $(-3) \notin D_f$

2) b) (C_2) ne présente ni une fonction paire ni impaire car (C_2) est ni symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ni symétrique par rapport à O l'origine du repère.

3) c) f *est bornée sur IR*

car : * $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in IR$

$$* \ x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+4 \geq 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+4} \leq \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{x^2+4} \leq \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}$$

par suite : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout x $\in$ IR

4) $f(x) = \sqrt{|4-2x|}$

c) $D_f = IR.$ car pour tout $x \in IR,$

on a $|4-2x| \geq 0$

5) c) $D_f = IR\backslash\{-1{,}1\}$

car : $1 - |x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 1$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad ou \quad x = 1$$

Vrai - Faux :

1) Faux :

contre exemple : $f(x) = 1 + x^2$

2) Faux :

contre exemple :$f(x) = \frac{2}{x^2+4}$, $\in IR$,

$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ (voir QCM)

f est bornée sur IR mais f n'admet pas un minimum sur IR

3) Faux :

contre exemple : $f(x) = -x^2$, $D = IR$

on a , $f(x) \leq 0$ pour $tout\ x \in D$ et $f(0) = 0$

f admet un maximum en 0 mais f n'est pas minorée

4) Faux :

contre exemple : $f(x) = x^2$

f n'est pas bornée mais f est minorée par 0.

5) Faux :

contre exemple : $f(x) = \sqrt{x}$

$$1 \leq x \leq 3 \rightarrow 1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$$

f est bornée sur [1,3] mais f n'est pas majorée.

Mobiliser ses compétences :

$$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad pour\ x \in]1,+\infty[$$
$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{x-1}$$

1) Graphiquement $f(x) = g(x)\ pour$

$x \approx\ 1{,}8$

2) a) **si α est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ alors : $f(\alpha) = g(\alpha)$**

$\Rightarrow \sqrt{\alpha+2} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha-1} \Rightarrow (\alpha-1)\sqrt{\alpha+2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow\ (\alpha-1)^2(\alpha+2) = 2$

d'où α est une solution de l'équation :
$(x-1)^2(x+2) = 2$

b) $(x-1)^2(x+2) = 2$

équivaut à : $(x^2 - 2x + 1)(x+2) = 2$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = 2$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow\ x = 0\ ou\ x = -\sqrt{3}\ ou\ x = \sqrt{3}$

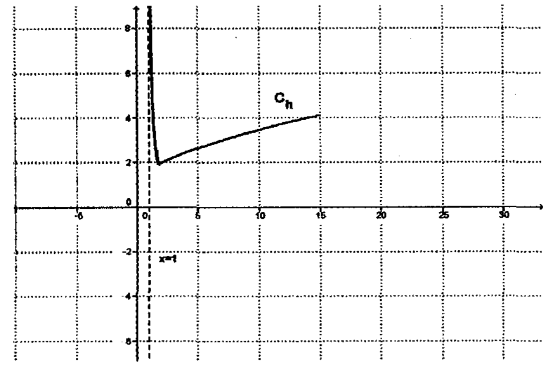
c) $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \in]1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

3) ■ $f(x) > g(x) \leftrightarrow x > \sqrt{3}$

■ $f(x) < g(x) \leftrightarrow 1 < x < \sqrt{3}$

4)

$h(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \in]1,\alpha] \\ f(x) & si\ x \in]1,+\infty[\end{cases}$



Exercices :

Ex ercice1 :

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- $D_f = IR$
- f est impaire car : pour tout x $D_f = IR$,

on a (-x) ϵ D_f

et $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = \frac{-x}{1+x^2}$

$f(-x) = -f(x)$

b) $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [0, +\infty[$

g n'est ni paire ni impaire

c) $h(x) = \sqrt{|x|}$

- $D_h = IR$
- h est paire car : pour tout $x \in D_h = IR$,

on a (-x) ϵ D_h

et $h(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = h(x)$

d) $k(x) = x^2 - x + 1$

- $D_k = IR$
- k n'est ni paire ni impaire

par exemple k(1)=1 ; k(-1)=3

$k(-1) \neq -k(1)$

Exercice 2 :

1) *si f et g* sont des fonctions paires,

alors pour tout $x \in D$, on a $(-x) \epsilon D$

et *f(-x) = f(x) ; g(-x) = g(x)*

* *(f . g) (-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = (f.g)(x)*

f.g est paire

* $(a.f + b.g)(-x) = a.f(-x) + b.g(-x)$

$= a\,f(x) + b\,g(x) = (a\,f + b\,g)(x)$

$a\,f + b\,g$ est paire.

2) si f et g sont impaires

alors pour tout x D , on a (-x) ϵ D

$et \; f(-x) = -f(x) \; ; \; g(-x) = -g(x)$

$$\begin{aligned} * \; (f.g)(-x) &= f(-x).g(-x) \\ &= (-f(x)).(-g(x)) \\ &= f(x).g(x) = (f.g)(x) \end{aligned}$$

$f.g$ est paire

$$\begin{aligned} * \; (a\,f + b\,g)(-x) &= a\,f(-x) + b\,g(-x) \\ &= -a\,f(x) - b\,g(x) \\ &= -[a\,f(x) + b\,g(x)] \\ &= -(a\,f + b\,g)(x) \end{aligned}$$

$a\,f + b\,g$ est impaire.

Exercice 3 :

a) * pour $x \epsilon I = [-1,1]$ on a : $2 \leq f(x) \leq 3$

$f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$

f admet 2 comme minimum en 1

f admet 3 comme maximum en (-1)

* $x \epsilon I = [-1,1]$, $g(x) = 2$

g admet un minimum et un maximum en tout réel x_0 de I

b) * pour tout $x \epsilon [1,3]$,on a : $2 \leq f(x) \leq 4$

$f(1) \leq f(x) \leq f(3)$

2 est un minimum de f *en* 1

4 est un maximum de f *en* 3.

* pour tout $x \epsilon [1,3]$,on a : $-1 \leq g(x) \leq 2$

$g(3) \leq g(x) \leq g(1)$

(-1) est un minimum de g en 3

2 est un maximum de g en 1

c) * pour $\epsilon\, [-2{,}4]$, on a : $0 \leq f(x) \leq 4$

$$f(-2) \leq f(x) \leq f(3)$$

0 est un minimum de f en (-2)

4 est un maximum de f en 3

* pour $\epsilon\, [-2{,}4]$, on a : $-1 \leq g(x) \leq 3$

$$g(3) \leq g(x) \leq g(-2)$$

g admet (-1) comme minimum en 3

g admet 3 comme maximum en (-2)

Exercice 4 :

1) a) $f(x) = 1 + |x| + 2x^2$

pour tout réel x, on a : $|x| + 2x^2 \geq 0$

$\Rightarrow 1 + |x| + 2x^2 \geq 1$

$\Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$

f admet 1 comme minimum en 0.

b) $g(x) = |x + 1| - 4$

pour tout réel x, on a : $|x + 1| \geq 0$

$\Rightarrow |x + 1| - 4 \geq -4 \Rightarrow g(x) \geq -4$

$\Rightarrow g(x) \geq g(-1)$

g admet -4 comme minimum en (-1).

2) a) $h(x) = \frac{1}{|x|+3} + 1$

pour tout réel x, on a : $|x| \geq 0$

$\Rightarrow |x| + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{|x|+3} \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{|x|+3} + 1 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow h(x) \leq \frac{4}{3}$

$\Rightarrow h(x) \leq h(0)$

f admet $\frac{4}{3}$ comme maximum en 0.

b) $k(x) = \frac{2}{1+x^2} - 3$

pour tout réel x, on a : $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{1+x^2} \leq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{1+x^2} - 3 \leq -1$

$\Rightarrow k(x) \leq -1 \Rightarrow k(x) \leq k(0)$

k admet (-1) comme maximum en 0.

Exercice 5 :

1) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

1) * soit : a et b deux réels de $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

$a \leq b \Rightarrow a - \frac{1}{2} \leq b - \frac{1}{2} \leq 0$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2})^2 \geq (b - \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq (b - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(a) \geq f(b)$

f est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

* soit : a et b deux réels de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$

$a \leq b \Rightarrow 0 \leq a - \frac{1}{2} \leq b - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2})^2 \leq (b - \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \leq (b - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(a) \leq f(b)$

f est croissante sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

2) $g(x)=\dfrac{2}{f(x)}$

* soit : a et b deux réels de $\left]0,\frac{1}{2}\right]$

$a \leq b \Rightarrow 0> f(a) \geq f(b)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(a)} \leq \dfrac{1}{f(b)} \Rightarrow \dfrac{2}{f(a)} \leq \dfrac{2}{f(b)}$

$\Rightarrow g(a) \leq g(b)$

g est croissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

* soit : a et b deux réels de $\left[\frac{1}{2},1\right[$

$a \leq b \Rightarrow 0 < f(a) \leq f(b)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(a)} \geq \dfrac{1}{f(b)} \Rightarrow \dfrac{2}{f(a)} \geq \dfrac{2}{f(b)}$

$\Rightarrow g(a) \geq g(b)$

g est décroissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$.

3) pour $\epsilon\,]0,1[$, on a:

$(x-\frac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 0 > f(x) \geq -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} \leq -4 \Rightarrow \frac{2}{f(x)} \leq -8$

$\Rightarrow g(x) \leq -8$

$\Rightarrow g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right)$

g admet -8 comme maximum en $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6 :

1) $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \in IR$

* pour tout $\epsilon\, IR$, on a: $g(x) \geq 0$

* $x^2+1 \geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$

$\Rightarrow g(x) \leq 1$

conclusion : $0 \leq g(x) \leq 1$ pour tout $x \in IR$

2) a) pour $x \in IR$,

$(x^2-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$

$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 1 \geq 4x^2$

$\Rightarrow (x^2+1)^2 \geq (2x)^2$

$\Rightarrow \sqrt{(x^2+1)^2} \geq \sqrt{(2x)^2}$

$\Rightarrow |x^2+1| \geq |2x|$

d'ou $x^2+1 \geq 2|x|$ car $x^2+1 \geq 0$

b) * $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1}$$

on a : $|2x| \leq x^2+1 \Rightarrow -2x \leq x^2+1$

$\Rightarrow \frac{-2x}{1+x^2} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{x^2}{x^2+1} + 1$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x) + 1$ or $g(x) \leq 1$

pour $x \in IR$

donc : $\boxed{f(x) \leq 2}$ pour tout $x \in IR$

* $f(x) = g(x) - \frac{2x}{x^2+1}$

$g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) - \frac{2x}{x^2+1} \geq -\frac{2x}{x^2+1}$

$\Rightarrow f(x) \geq -\frac{2x}{x^2+1}$

d'après a) pour tout $x \in IR$: $2x \leq x^2+1$

$\Longrightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \Longrightarrow \frac{-2x}{x^2+1} \geq -1$

D'où $\boxed{f(x) \geq -1}$

Conclusion :

$-1 \leq f(x) \leq 2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

Exercice7 :

1) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} - 2 \qquad x \in [0,+\infty[$

$* \ x \in [0,+\infty[$

$\sqrt{x} \geq 0 \Longrightarrow 1+\sqrt{x} \geq 1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} - 2 \leq -1$$

D'où $\boxed{f(x) \leq -1}$

On a : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} \geq 0$

D'où $\frac{1}{1+\sqrt{x}} - 2 \geq -2$

Par suite $f(x) \geq -2$

Conclusion : pour tout $x \in [0,+\infty[$

On a : $-2 \leq f(x) \leq -1$

2) $g(x) = \frac{1}{1+(2+x)^2} + 1, \ \ x \in \mathbb{R}$

$(2+x)^2 \geq 0 \Longrightarrow 1+(2+x)^2 \geq 1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+(2+x)^2} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+(2+x)^2} + 1 \leq 2$$

$\Longrightarrow \boxed{g(x) \leq 2}$

pour $x \in \mathbb{R}$ *on a* :

$$\frac{1}{1+(2+x)^2} \geq 0$$

d'où $\frac{1}{1+(2+x)^2} + 1 \geq 1$

par suite $g(x) \geq 1$

Conclusion :

$1 \leq g(x) \leq 2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

3°) $h(x) = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{2+x^2}}$

pour tout réel x on a :

$\frac{1}{2+x^2} \geq 0 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{2+x^2} \geq 1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2+x^2}} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{1+\frac{1}{2+x^2}} \leq 2$$

d'où $\boxed{h(x) \leq 2}$

$2+x^2 \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{1}{2+x^2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2+x^2}} \geq \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{1+\frac{1}{2+x^2}} \geq \frac{4}{3}$$

d'où $h(x) \geq \frac{4}{3}$

Conclusion :

$\frac{4}{3} \leq h(x) \leq 2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$(2+x)^2 \geq 0 \Longrightarrow (2+x)^2 \geq 1$

Exercice8 :

1°) $*\ P(x) = 0 \iff 2x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Delta = 49$

$$x' = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{5+7}{4} = 3$$

$*\ Q(x) = 0 \leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$

$\leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\leftrightarrow x - 1 = 0 \leftrightarrow x = 1$

$*\ R(x) = 0 \leftrightarrow -2x^2 + x - 5 = 0$

$\leftrightarrow 2x^2 - x + 5 = 0$

$\Delta = -39 < 0$

R n'admet pas de zéro.

2) a)

x	$-\infty$		$-1/2$		3		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$*$ *pour* $x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$

(C_P)*est au dessous de l'axedes abscisses*

$*$*pour* $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]3, +\infty[$

(C_P)*est au dessus de* (ox)

b) $Q(x) = -(x-1)^2 \leq 0$, d'ou
(C_Q)*est au dessous de l'axedes abscisses*

c) $(x) = -2x^2 + x - 5$; $\Delta = -39 < 0$

donc $R(x) < 0$, pour tout $x \in IR$

(C_R)*est au dessous de l'axedes abscisses*

3) a) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$

$$S_{IR} = \left[\frac{-1}{2}, 3\right] \backslash \{1\}$$

$b)$ $\frac{R(x)}{Q(x)} < 0$

$s_{IR} = \emptyset$

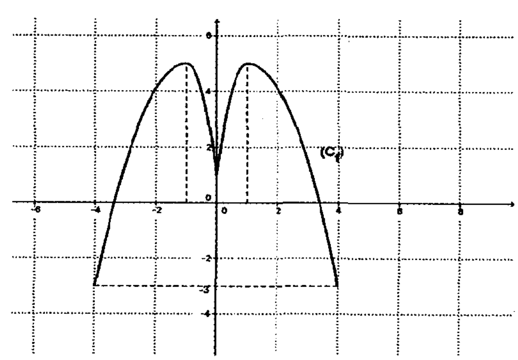
Exercice9 :

f décroissante sur $[1,4]$
f croissante sur $[0,1]$

(C_f) est symétrique par rapport à (Oy)

$f(0) = 1$; $f(x) \leq 5$ pour tout $x \in [-4,4]$
-3 est au minimum de f *sur* $[-4,0]$

par exemple:



* il ya plusieurs.

Exercice10 :

1) $a)$ $f(x) = |2x - 1| - 3x$

$2x - 1 = 0$ (=) $x = \frac{1}{2}$

$pour\ tout\ x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

$f(x) = -(2x-1) - 3x = 1 - 5x$

$pour\ x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$f(x) = (2x-1) - 3x = -x - 1$

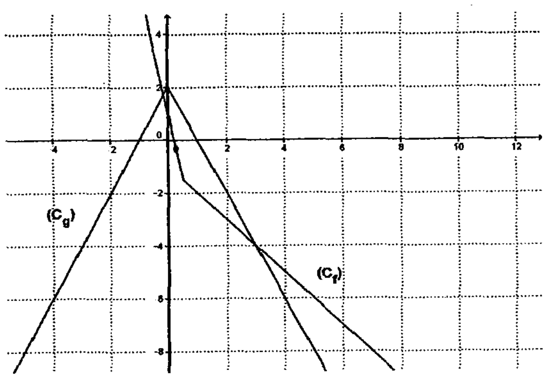
$$f(x) = \begin{cases} -5x + 1\ si\ x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \\ -x - 1\ si\ x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

b) $g(x) = 2 - 2|x|$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 2\ si\ x \leq 0 \\ -2x + 2\ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

g est paire



2)

$|2x-1| + 2|x| > 3x + 2$

$\Leftrightarrow\ |2x-1| - 3x > 2 - 2|x|$

$\Leftrightarrow\ f(x) > g(x)$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty\ ;\ -0{,}2[\cup]3, +\infty[$

Exercice11 :

$f(x) = 2x^2 - 4x$

1) (C_f) est une parabole de sommet $S(1,-2)$

$d'axe\ \Delta: x = 1$

2°) $g(x) = 2x^2 - 4.|x|$

a) $pour\ x \in D_g = \mathbb{R}$

$on\ a : (-x) \in D_g$

et $g(-x) = 2(-x)^2 - 4|-x|$

$= 2x^2 - 4|x| = g(x)$

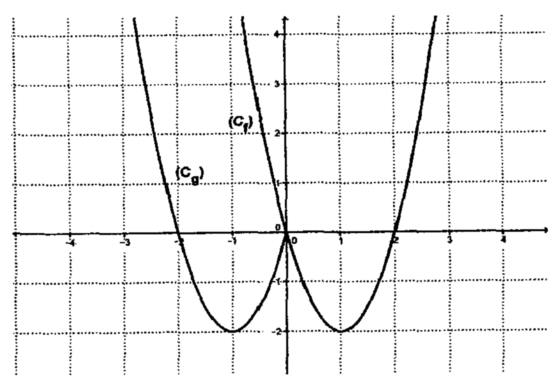
$g\ est\ une\ fonction\ paire$

b) $pour\ x \in [0, +\infty[$

$g(x) = 2x^2 - 4x = f(x)$

c) Voir figure

la droite des ordonnées est un axe de symétriepour (C_g)



Exercice12 :

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}$

$I =]0, +\infty[$

$Soit\ f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

$f_2(x) = \frac{1}{x}$

$f = f_1 + f_2$

$pour\ a\ et\ b\ \in]0,+\infty[$

$a \leq b \Rightarrow -\frac{1}{2}a \geq -\frac{1}{2}b$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}a + 3 \geq -\frac{1}{2}b + 3$

$\Rightarrow f_1(a) \geq f_2(b)$

$0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

$\Rightarrow f_2(a) \geq f_2(b)$

$par\ suite$:

$f_1(a) + f_2(a) \geq f_1(b) + f_2(b)$

$\Rightarrow f(a) \geq f(b)$

$donc\ f\ est\ décroissante\ sur]0,+\infty[$

b) $g = g_1 + g_2$

$avec\ g_1(x) = x^2 + 1$

$g_2(x) = \sqrt{x}$

$Soient\ a\ et\ b\ \in]0,+\infty[$

$0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$

$\Rightarrow a^2 + 1 \leq b^2 + 1$

$\Rightarrow g_1(a) \leq g_1(b)$

$0 < a \leq b \quad \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

$\Rightarrow g_2(a) \leq g_2(b)$

$Par\ suite\ g_1(a) + g_2(a) \leq g_1(b) + g_2(b)$

$\Rightarrow g(a) \leq g(b)$

$donc\ g\ est\ croissante\ sur]0,+\infty[$

c) $h = h_1 + h_2$

$avec\ h_1(x) = 1 - x^2$

$h_2(x) = -\sqrt{x+3}$

$Soient\ a\ et\ b\ \in]0,+\infty[$

$0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$

$\Rightarrow -b^2 \leq -a^2$

$\Rightarrow 1 - b^2 \leq 1 - a^2$

$\Rightarrow h_1(b) \leq h_1(a)$

$0 < a \leq b \Rightarrow a + 3 \leq b + 3$

$\Rightarrow \sqrt{a+3} \leq \sqrt{b+3}$

$\Rightarrow -\sqrt{b+3} \leq -\sqrt{a^2+3}$

$\Rightarrow h_2(b) \leq h_2(a)$

$Par\ suite$: $h_1(a) + h_2(a) \geq h_1(b) + h_2(b)$

$\Rightarrow h(a) \geq h(b)$

$donc\ h\ est\ décroissante\ sur\ ]0,+\infty[$

Exercice 13 :

1) $S(x) = PS \times PQ$

$\boxed{PQ = 2OM = 2x}$

$Le\ triangle\ OMP\ est\ rectangle\ en\ M\ donc$

$OM^2 + PM^2 = OP^2$

$\Rightarrow x^2 + PM^2 = 1^2$

$\Rightarrow PM = \sqrt{1 - x^2}$

$PS = 2PM$

$\boxed{PS = 2\sqrt{1 - x^2}}$

$Par\ suite\ \ S(x) = 4x.\sqrt{1 - x^2}$

2) $S(x) = 4x.\sqrt{1 - x^2}$

a) $D_S = [0,1]\ car\ M \in [OA]$

b) $S(x) \geq 0\ pour\ tout\ x \in [0,1]$

$S(x)\ est\ inférieure\ à\ l'aire\ du\ disque\ de\ centre\ O$

$de\ rayon\ 1\ d'où$: $S(x) \leq \pi \times 1^2$

$S(x) \leq \pi$

par suite : $0 \leq S(x) \leq \pi$

3) a) *soit* $x \in \mathbb{R}$ *, on a* : $(2x^2-1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x^4 \leq 1$$

$$\Rightarrow 4x^2(1-x^2) \leq 1$$

b) $S(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$ *avec* $x \in [0,1]$

pour $x \in [0,1]$ *on a* : $0 \leq 4x^2(1-x^2) \leq 1$

d'où $0 \leq \sqrt{4x^2(1-x^2)} \leq \sqrt{1}$

$$\Rightarrow 0 \leq 2|x|.\sqrt{1-x^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 4x\sqrt{1-x^2} \leq 2$$

$$\Rightarrow \boxed{S(x) \leq 2}$$

4) a) *PQRS est un carré lorsque* $PQ = PS$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{1-x^2}$ *et* $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2$ *avec* $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 1$ *et* $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$ *et* $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) *pour* $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S(x) = 2$ *et comme* $S(x) \leq 2$

donc S *admet* 2 comme maximum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 14 :

1) La longueur du côté du plus grand carré est $21cm$

Soit R: *le rayon d'un cercle de périmetre* $21cm$

On a : $2\pi R = 21$ d'où $\boxed{R = \frac{21}{2\pi}}$

$V = \pi R^2 h$

$V = \pi(\left(\frac{21}{2\pi}\right)^2 \times 21$

$V = \frac{21^3}{4\pi} = \frac{9261}{4\pi}$

$\boxed{V = \frac{9261}{4\pi} cm^3}$

2) a) $x \in]0,21]$

b) $V = \frac{x^3}{4\pi} cm^3$

c) $V = 400 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{4\pi} = 400$

$\Leftrightarrow \quad x^3 = 1600\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = 17{,}127$

$\boxed{x \approx 17cm}$

Exercice15 :

1) $f(t) = -20t^2 + 880t + 100$

a) $-20t^2 + 880t + 100 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -t^2 + 44t + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad t^2 - 44t - 5 = 0$

$\Delta' = 489$

$t' = 22 - \sqrt{489}$ et $t'' = 22 + \sqrt{489}$

t	$-\infty$		$22-\sqrt{489}$		$22+\sqrt{489}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $f(t) = -20.[t^2 - 44t - 5]$

$f(t) = -20[(t-22)^2 - 22^2 - 5]$

d'où $f(t) = -20.[(t-22)^2 - 489]$

Soient a *et* $b \in]-\infty, 22]$

$a \leq b \leq 22 \Longrightarrow a - 22 \leq b - 22 \leq 0$

$\Longrightarrow (a-22)^2 \geq (b-22)^2$

$\Longrightarrow (a-22)^2 - 489 \geq (b-22)^2 - 489$

$\Longrightarrow -20[(a-22)^2 - 489] \leq -20[(b-22)^2 - 489]$

$\Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

donc f est croissante sur $]-\infty, 22]$

pour a et b $\in [22, +\infty[$

$22 \leq a \leq b \Longrightarrow 0 \leq a - 22 \leq b - 22$

$\Longrightarrow (a-22)^2 \leq (b-22)^2$

$\Longrightarrow (a-22)^2 - 489 \leq (b-22)^2 - 489$

$\Longrightarrow -20[(a-22)^2 - 489] \geq -20[(b-22)^2 - 489]$

$\Longrightarrow \quad f(a) \geq f(b)$

donc f est décroissante sur $[22, +\infty[$

2) $D_B = \left[0, 22 + \sqrt{489}\right]$ *d'après 1)a)*

3) 2000 $\longrightarrow t = 5$

$B(5) = \sqrt{4000} = 63{,}24$ *milles dinars*

4) a) $B(t) = \sqrt{f(t)}$

f est croissante sur$[0, 22]$

donc B est croissante sur$[0, 22]$

f est décroissante sur$\left[22, 22 + \sqrt{489}\right]$

donc B est décroissante sur

$\left[22, 22 + \sqrt{489}\right]$

b) $B(t)$*est maximal pour* $t = 22 \longrightarrow$ année 2017

$Am = 2017$

$B(22) = \sqrt{9780}$

$B(22) = 98{,}89$ *milles dinars*

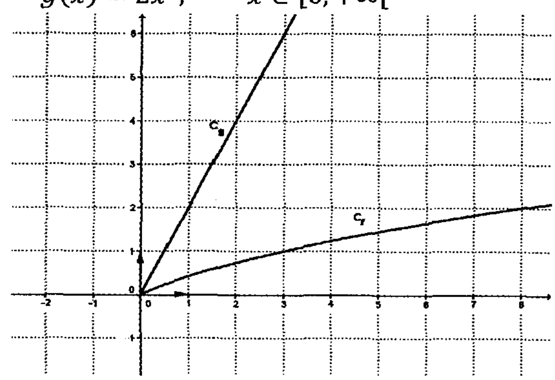
c) après l'année A_m les bénéfices annuels bruts de l'entreprise commencent à décroître .

On prévoit donc que l'entreprise commence à affronter des difficultés et finira par fermer ses portes.

Exercice 16 :

1) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

$g(x) = 2x$, $\quad x \in [0, +\infty[$



2) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \leq 2\sqrt{x} \\ x \in [0, +\infty[\end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 \leq 2x \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ x > 0 \end{cases}$

$S =]0, +\infty[$ *car* $(\mathcal{C}_f)$ *est au dessous de* $(\mathcal{C}_g)$

Exercice 17 :

$f(x) = x^2 - 6x + 6$

1) $f(x) = (x-3)^2 - 9 + 6$

$f(x) = (x-3)^2 - 3$

2) *Soient a et b* $\in]-\infty, 3]$

$a \leq b \leq 3 \Longrightarrow a - 3 \leq b - 3 \leq 0$

$\Longrightarrow (a-3)^2 \geq (b-3)^2$

$\Longrightarrow (a-3)^2 - 3 \geq (b-3)^2 - 3$

$\Longrightarrow f(a) \geq f(b)$

f *est décroissante sur* $]-\infty, 3]$

pour a *et* $b \in [3, +\infty[$

$3 \leq a \leq b \Longrightarrow 0 \leq a - 3 \leq b - 3$

$\Longrightarrow (a-3)^2 \leq (b-3)^2$

$\Longrightarrow (a-3)^2 - 3 \leq (b-3)^2 - 3$

$\Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

f *est croissante sur* $]3, +\infty]$

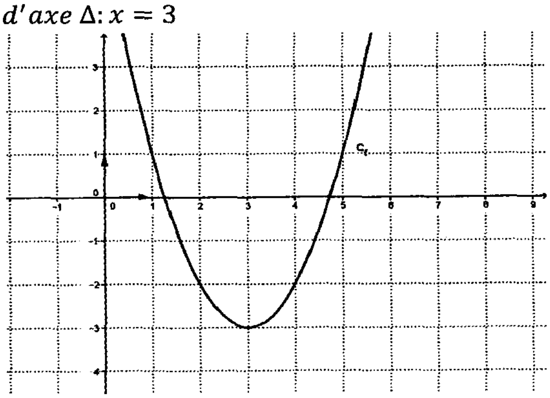
3) $(P): y = x^2$

$(\mathcal{C})$ *est l'image de* (P) *par la translation*

de vecteur $\vec{u} = 3.\vec{\imath} - 3.\vec{\jmath}$

4) $(\mathcal{C})$ *est la parabole de sommet* $S(3, -3)$

d'axe $\Delta: x = 3$



5) a) graphiquement $f(x) \leq 0$ *pour*

$x \in [\ 1{,}3\ ;\ 4{,}7\ ]$

Calculs :

$f(x) = 0 \iff x^2 - 6x + 6 = 0$

$\Delta = 36 - 24 = 12$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$x' = \frac{6-2\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}\ ;\quad x'' = 3 + \sqrt{3}$

x	$-\infty$	$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) \leq 0 \iff x \in [3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$

b) Graphiquement :

On trace la droite d'équation $y = 2$

$f(x) < 2$ *pour* $x \in]0{,}8\ ; 5{,}2[$

<u>Calculs :</u>

$f(x) < 2 \iff (x-3)^2 - 3 < 2$

$\iff (x-3)^2 < 5$

$\iff |x - 3| < \sqrt{5}$

$\iff -\sqrt{5} < x - 3 < \sqrt{5}$

$\iff 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}$

$S_{\mathbb{R}} =]3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}[$

c) Graphiquement :

$f(x) \geq -4$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ *car la droite d'équation* $y = -4$

est au dessous de $(\mathcal{C})$

<u>Calculs</u> :

$f(x) \geq -4 \iff x^2 - 6x + 6 \geq -4$

$\iff x^2 - 6x + 10 \geq 0$

$\Delta = -4 < 0$

Le signe de $(x^2 - 6x + 10)$ *est celui*

de $a = 1$

donc $x^2 - 6x + 10 > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

Exercice 18 :

$f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

$D_f = [-2, +\infty[$

1) Soient a et b $\in [-2, +\infty[$

$-2 \le a \le b \Rightarrow 0 \le a + 2 \le b + 2$

$\Rightarrow \sqrt{a+2} \le \sqrt{b+2}$

$\Rightarrow \sqrt{a+2} - 3 \le \sqrt{b+2} - 3$

$\Rightarrow f(a) \le f(b)$

f *est croissante sur* $[-2, +\infty[$

2) $(H): y = \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt{x}$ *pour* $x \in [-2, +\infty[$

$f(x) = g(x+2) - 3$

donc $(\mathcal{C}_f)$ est l'image de (H) par la

translation de vecteur $\vec{u} = -2.\vec{\imath} - 3.\vec{\jmath}$

2') $h(x) = -\sqrt{x+2} + 3$

$h(x) = -f(x)$

$f(x) \ge h(x) \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+2} - 3 \ge -\sqrt{x+2} + 3 \Leftrightarrow$

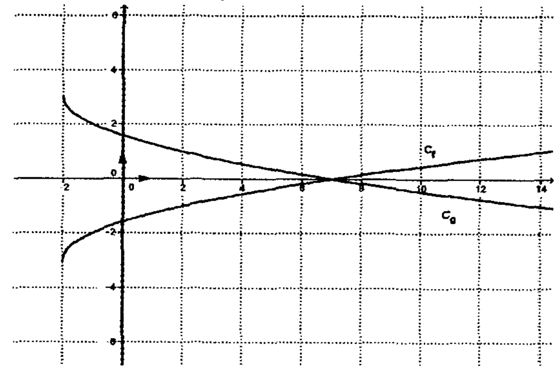
$2\sqrt{x+2} \ge 6 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \ge 3 \Leftrightarrow$

$x + 2 \ge 9 \Leftrightarrow x \ge 7$

* C_f est au dessous de C_g pour $x \in [-2,7]$

*C_f est au dessus de C_g pour $x \in [7, +\infty[$

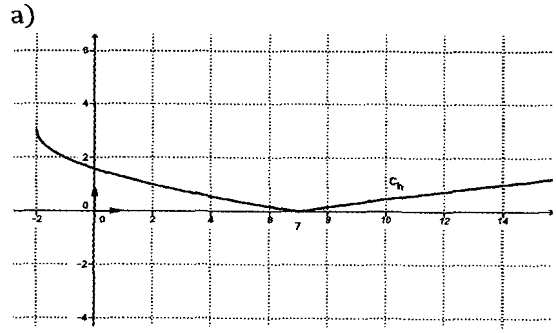
3) $(\mathcal{C}_h) = S_{(ox)}(\mathcal{C}_f)$



4) $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_h) \cap Q$

$Q: y \ge 0$

a)



b) $k(x) = |h(x)| = |f(x)|$

$k(x) = |\sqrt{x+2} - 3|$

Exercice 19 :

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

1) $f(x) = \dfrac{(x+3)-4}{x+3}$

$f(x) = \dfrac{x+3}{x+3} - \dfrac{4}{x+3}$

$f(x) = 1 - \dfrac{4}{x+3}$

pour $x \neq -3$ $f(x) = \dfrac{-4}{x+3} + 1$

$(a = -4\,;\ b = 3\,;\ c = 1)$

2°) Soient a et b $\in]-\infty, -3[$

$a \leq b \Rightarrow a + 3 \leq b + 3 \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a+3} \geq \dfrac{1}{b+3}$

$\Rightarrow \dfrac{-4}{a+3} \leq \dfrac{-4}{b+3}$

$\Rightarrow \dfrac{-4}{a+3} + 1 \leq \dfrac{-4}{b+3} + 1$

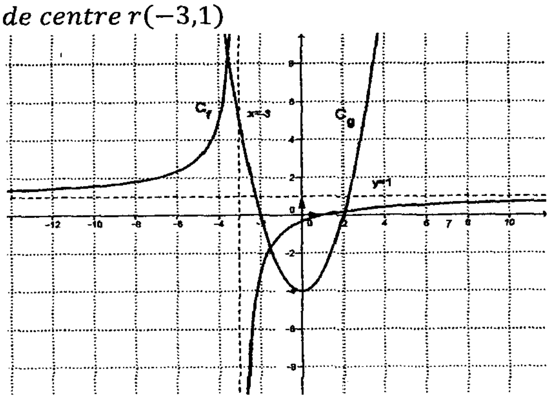
$\Rightarrow f(a) \leq f(b)$

donc f *est croissante sur* $]-\infty, -3[$

de même f *est croissante sur* $]-3, +\infty[$

3)
(C) *est une hyperbole d'asymptotes les droites d'équations respectives* $x = -3$ *et* $y = 1$

de centre $r(-3,1)$



4) $\frac{x-1}{x+3} = x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$f(x) = g(x)$ avec $g(x) = x^2 - 4$

Soit $(\mathcal{C}_g)$ *la parbole d'équation* $y = x^2 - 4$

$(\mathcal{C}_g)$ *est de sommet* $S(0, -4)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \approx -1{,}7$ *ou* $x \approx 2{,}1$

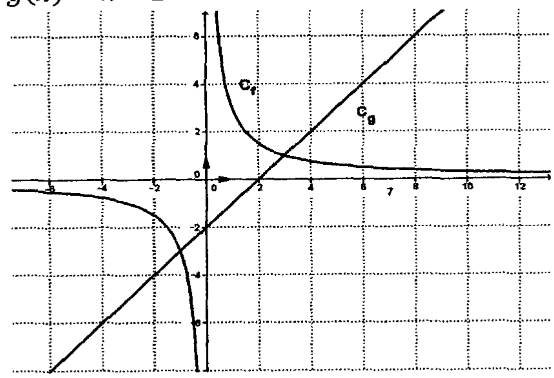
Exercice20 :

Soit (H) *l'hyperbole d'éq :* $y = {}^{3}/_{x}$

$f(x) = {}^{3}/_{x}$

Δ*: la droite d'éq :* $y = x - 2$

$g(x) = x - 2$



$(H) \cap \Delta = \{A(-1, -3)\,;B(3, 1)\}$

$S_{IR^2} = \{(-1, -3)\,;\ (3, 1)\}$

Exercice21 :

pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$, on pose

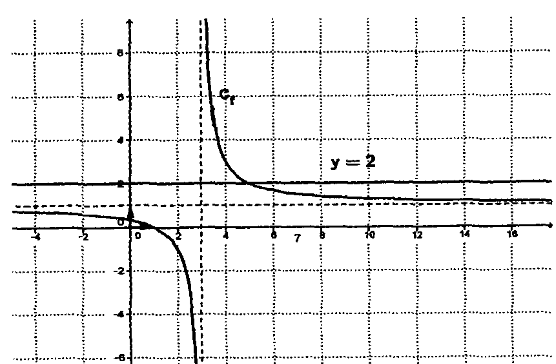
$f(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$

$f(x) = \dfrac{(x-3)+2}{x-3} = \dfrac{x-3}{x-3} + \dfrac{2}{x-3}$

$= 1 + \dfrac{2}{x-3}$

$(\mathcal{C}_f)$ *est l'hyperbole centre* $\omega(3,1)$

d'asymptotes $x = 3$ *et* $y = 1$

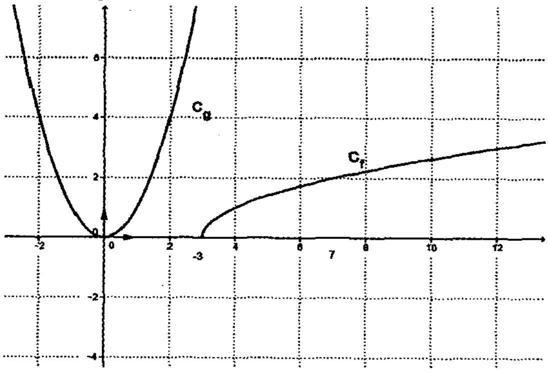


$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 3[\cup [5, +\infty[$

Exercice22 :

$f(x) = \sqrt{x-3}\ ;\ \ g(x) = x^2$

$f(x) \leq g(x)$



$(\mathcal{C}_f)$*est au dessous de* $(\mathcal{C}_g)\ ;\ \ S_{\mathbb{R}} = [3, +\infty[$

QCM:

1) g est discontinue en a ⟶ **(b)**

2) f est continue en 0 ($D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty[$) ⟶ **(a)**

3) f est continue à droite en (-1) ⟶ **(b)**

4) $[-1, 0]$ ⟶ **(b)**

$$f(x) = 4\sqrt{x+1} - x^2 - 3$$

Car on a : f est continue sur $[-1, 0]$

et $f(0) \times f(-1) = -4 < 0$

5) $E(x) = 1 \ pour\ x \in [1,2[$ ⟶ **(a)**

Vrai-Faux :

1) **Vrai.**

Théorème du cours : f continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

2) **Faux.**

Contre exemple Voir (QCM question 3) $a = -1$

3) **Faux**

Même contre exemple que précédemment

4) **Vrai.**

Car si f est continue à droite et à gauche en a alors f sera continue en a.

5) **Faux**

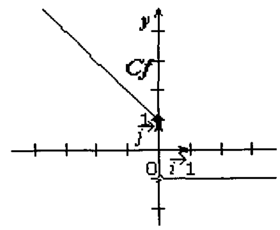
Contre exemple :

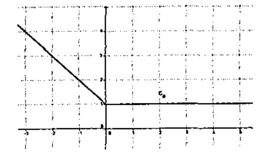
$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x \leq 0 \\ -1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

f n'est pas continue en 0 (voir figure)

On a : $|f(x)| = g(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

$g\ est\ continue\ en\ 0$ (voir figure)

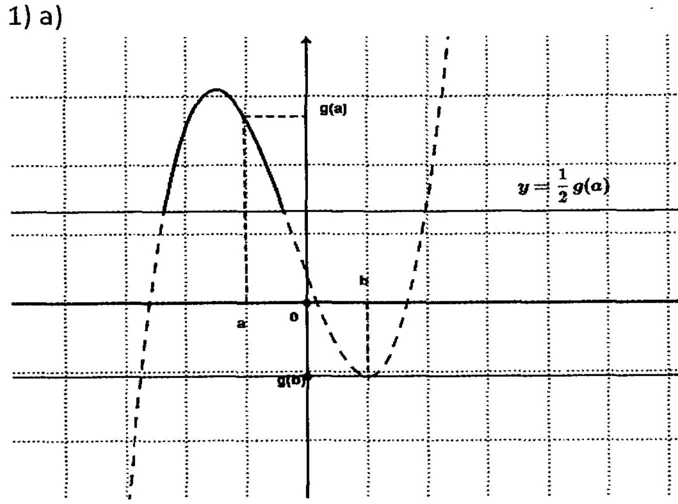




Mobiliser ses compétences :

Situation 1 :

1) a)



b) g est continue en a donc par définition on a :

Pour $\beta = \frac{1}{2} g(a) > 0$

il existe $h > 0$ tel que: pour $|x - a| < h$, on a:

$|g(x) - g(a)| < \frac{1}{2} g(a)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} g(a) < g(x) - g(a) < \frac{1}{2} g(a)$

Par suite pour $x \in]a-h, a+h[$ on a :

$$\frac{1}{2}g(a) < g(x) < \frac{3}{2}g(a)$$

c) pour $x \in]a-h, a+h[: g(x) > 0$ car $g(a) > 0$

2) g est continue en b par définition on a :

Pour $\beta = -\frac{1}{2}g(b) > 0$ il existe $h > 0$ tel que :

Pour $|x-b| < h$, on a :

$$|g(x) - g(b)| < -\frac{1}{2}g(b)$$

Ce qui donne : pour $x \in]b-h, b+h[$ on a :

$$\frac{3}{2}g(b) < g(x) < \frac{1}{2}g(b)$$

Donc : $g(x) < 0$ car $g(b) < 0$

Situation 2 :

$f(x) = 5x^3 - 10\,x^2 - 8x + 10$

1) a) * f est continue sur $[-2,-1]$

(Fonction polynôme)

et $f(-2) \times f(-1) = (-54) \times (3) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-2,-1]$

* f est continue sur $[0,1]$

(Fonction polynôme)

et $f(0) \times f(1) = (10) \times (-3) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0,1]$

* f est continue sur $[2,3]$

(Fonction polynôme)

et $f(2) \times f(3) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[2,3]$

b) d'après a) l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions distinctes et comme l'équation $f(x) = 0$ est du troisième degré elle admet au plus trois solutions dans IR

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans IR

2) a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{8}$, $f(1) = -3$

$f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$ D'où $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Par suite $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$

b) *on a :* $\frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$ et $f(\frac{3}{4}) > 0$ (à calculer)

Comme : $f(\frac{3}{4}) \times f(1) < 0$ on aura $\alpha \in [\frac{3}{4}, 1]$

c) $\frac{\frac{3}{4}+1}{2} = \frac{7}{8}$ *et* $f(\frac{7}{8}) < 0$ (à calculer)

Ainsi : $f(\frac{3}{4}) \times f(\frac{7}{8}) < 0$ *par suite* $\alpha \in [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$

même travail en calculons à chaque fois et pour chaque intervalle $[a,b]$ le réel $f(\frac{a+b}{2})$ puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires cette méthode s'appelle la <u>dichotomie</u>

1) même travail on commençons par l'intervalle $[-2,-1]$ jusqu'à obtenir un intervalle $[n,m]$ tel que : $m - n \cong 0.04$
2) même travail que précédemment

Exercices

Exercce1 :

1) $f(x) = \sqrt{3}\,x^8 - \sqrt{2}\,x^3 + 3x + 1$, $a = -\sqrt{3}$
f est une fonction polynôme elle est donc continue en tout réel, en particulier en $a = -\sqrt{3}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^5 - 2x + 1}{x^3 - x + 1}$; $a = 0{,}2$
$(0{,}2)^3 - (0{,}2) + 1 \neq 0$ donc $0{,}2 \in D_f$
f est une fonction rationnelle et $0{,}2 \in D_f$
Donc f est continue en $a = 0{,}2$

3) $f(x) = \sqrt{6}\,(2x - 5)^3$ $a = -2{,}8$
Comme étant fonction polynôme f est continue en $a = -2{,}8$

4) de même fonction polynôme

5) de même fonction polynôme

6) $f(x) = \dfrac{-10^{-3}.x^4 + 2}{3x + 10}$, $a = -\dfrac{1}{2}$

$D_f = IR \setminus \left\{-\frac{10}{3}\right\}$

f est une fonction rationnelle et . $(-\dfrac{1}{2}) \in D_f$

Donc f est continue en $a = -\dfrac{1}{2}$

7) $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^4 + 10x^2 + 3}$, $a = -0.000251$
f est une fonction rationnelle et
. $\underbrace{(-0.000251)^4 + 10(-0.000251)^2 + 3}_{\textit{somme des trois réels strict positifs}} \neq 0$
$(a = -0.000251) \in D_f$

donc f est continue en a

Exercce2 :

1) $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

Avec $f_1(x) = -|x| + 5$ et $f_2(x) = (x - 10)^4$

* la fonction $x \to x$ est continue en $a = 201$

d'où f_1 est continue en $a = 201$

* f_2 est continue en $a = 201$ (fonction polynôme)

de plus $f_2(201) = 191^4 \neq 0$

Donc $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ est continue en $a = 201$

2) $f(x) = |g(x)|$ avec $g(x) = \dfrac{x^2 - 8}{2x + 1}$

$D_g = IR \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

g est une fonction rationnelle et $2 \in D_g$

d'où g est continue en a=2

par suite $f = |g|$ est continue en $a = 2$

1) $f(x) = \dfrac{|x^2 + x - 2|}{x - 2}$

Posons $f_1(x) = x^2 + x - 2$ et $f_2(x) = x - 2$

On a : $f = \dfrac{|f_1|}{f_2}$

* f_1 est continue en $a = 51$ (fonction polynôme)

Donc $|f_1|$ *est continue en* $a = 51$

* f_2 est continue en $a = 51$ (fonction polynôme)

de plus $f_2(51) = 49 \neq 0$

D'où $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ est continue en $a = 51$

4) $f(x) = \frac{1}{4}|x| - |x^3| - 5|x^5|$

* la fonction $x \to x$ est continue en $a = 11$

d'où $f_1 : x \to \dfrac{1}{4}|x|$ est continue en $a = 11$

* la fonction : $x \to x^3$ est continue en $a = 11$

d'où $f_2 : x \to |x^3|$ est continue en $a = 11$

* de même la fonction $f_3 : x \to |x^5|$ est continue en $a = 11$

donc f est continue en $a = 11$ (somme de fonctions continues)

5) $f = \frac{f_1}{f_2}$

avec : $f_1(x) = |x^3| + 2$ et $f_2(x) = |x| - 2$

f_1 et f_2 sont continues en $a = -5$

de plus $f_2(-5) = 3 \neq 0$ d'où $f = \frac{f_1}{f_2}$ est continue $en\ a = -5$

Exercce3 :

1) $f(x) = \sqrt{g(x)}$ avec $g(x) = 3x + 5$

$D_f = [-\frac{5}{3}, +\infty[$

g est définie et positive sur l'intervalle ouvert $]-\frac{5}{3}, +\infty[$ et $\frac{2}{3} \epsilon\ ]-\frac{5}{3}, +\infty[$

Comme g est une fonction polynôme elle est continue en $\frac{2}{3}$

Alors $f = \sqrt{g}$ est continue en $a = \frac{2}{3}$

2) $f = \sqrt{g}$ $avec$ $g(x) = -2x + 3$

g est définie et positive sur $]-\infty, \frac{2}{3}[$

et $0{,}01\ \epsilon\ ]-\infty, \frac{2}{3}[$

Comme g est fonction polynôme donc elle est continue en 0,01 alors $f = \sqrt{g}$ est continue en $a = 0{,}01$

3) $f = \sqrt{g}$ $avec$ $g(x) = 4x^2 + x + 1$ on a :
$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ donc le trinôme

$$4x^2 + x + 1 > 0$$

$$(signe\ de\ coefficient\ de\ \text{monôme}$$

$$de\ plus\ haut\ degré\ 4 > 0)$$

Donc g est définie et positive sur IR

de plus g est une fonction polynôme donc elle est continue en $a = 1{,}25$

D'où $f = \sqrt{g}$ est continue en $a = 1{,}25$

4) $f(x) = g(x).\sqrt{h(x)}$

$$avec\ :\ \begin{cases} g(x) = x - 4 \\ h(x) = 2x^2 + 3x + 5 \end{cases}$$

* g est continue en $a = 10$ (fonction polynôme)

* $2x^2 + 3x + 5 = 0$ avec $\Delta = -31 < 0$

Le signe de $2x^2 + 3x + 5\ et\ celui\ de\ a = 2$

$donc\ h(x) > 0, pour\ tout\ \ x\ \epsilon\ IR$

h est définie et positive sur IR et $10\ \epsilon\ IR$

h est continue en 10 donc $\sqrt{h}$ est continue en $a = 10$

par suite f est continue en $a = 10$ (produit de deux fonctions continues)

5) $f(x) = \sqrt{g(x)} + h(x)$, avec :

$g(x) = x^2 + 3$ et $h(x) = \frac{-5(x^2+2x+2)}{x^4+5x+3}$

* g (polynôme) est définie et positive sur IR de plus g et continue en $a = -1$ donc $\sqrt{g}$ est continue en $a = -1$

* $(-1)^4+5(-1)+3=-1\neq 0$ h est une fonction rationnelle et $(-1)\in D_h$ d'où h est continue en (-1)

Par suite $f=\sqrt{g}+h$ est continue en $a=-1$.

Exercce4 :

1) $M(x,x)$

$\overrightarrow{AM}\binom{x+2}{x}$; $\overrightarrow{BM}\binom{x}{x-1}$

$f(x)=AM+BM$

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+x^2}+\sqrt{x^2+(x-1)^2}$$

2) * la fonction $f_1: x\to(x+2)^2+x^2$ est positive sur IR et continue en tout réel a (fonction polynôme) d'où $\sqrt{f_1}$ est continue en a.

* la fonction $f_2: x\to x^2+(x-1)^2$ est positive sur IR et continue en tout réel a (fonction polynôme) d'où $\sqrt{f_2}$ est continue en a.

par suite $f=\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}$ est continue en a.

3) soit *le point* $C(1,0)$

la droite d'équation : $y=x$ est la médiatrice du segment $[BC]$, d'où $BM=CM$

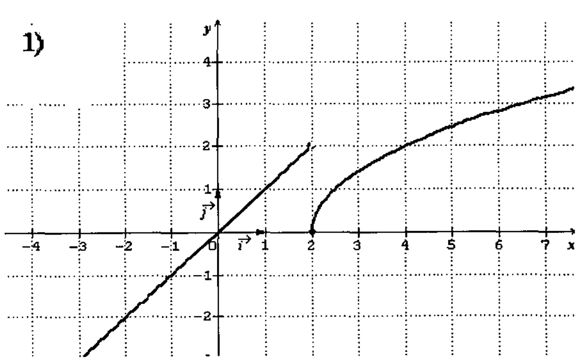
$AM+BM=AM+CM$ est minimale pour $M=O$

c'est 0 dire $x=0$.

Exercce5 :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4} & si\ x\geq 2\\ x & si\ x<2\end{cases}$$

1)



2) La fonction $x\to 2x-4$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$ donc f est continue sur $[2,+\infty[$

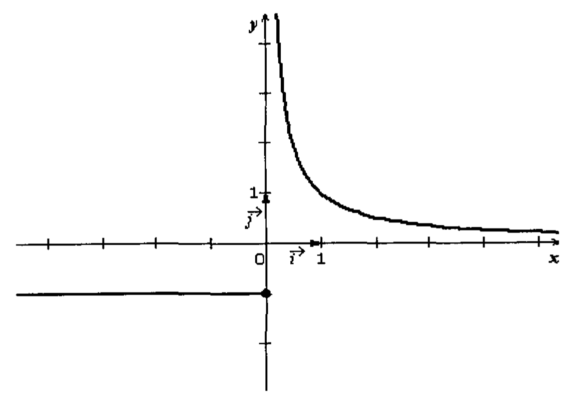
3) La fonction $x\to x$ est continue sur $]-\infty,2[$ donc f est continue sur $]-\infty,2[$

4) La courbe (C_f) présente un saut (rupture) au point $A(2,f(2))$ donc f n'est pas continue en 2.

Exercce6 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & si\ x>0\\ -1 & si\ x\leq 0\end{cases}$$

1)



2) La fonction $x\to\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

(Fonction rationnelle) en particulier sur $]0,+\infty[$ donc f est continue sur $]0,+\infty[$

3) la restriction de f sur $]-\infty,0[$ est constante donc f est continue sur $]-\infty,0[$

4) graphiquement.(Cf) possède un saut au point $O(0,0)$ donc f n'est pas continue en 0.

5) a) l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans IR car la droite d'équation : $y = 1$ coupe (Cf) en un seul point.

b) de même l'équation $f(x) = \frac{2}{5}$ admet une unique solution dans IR .

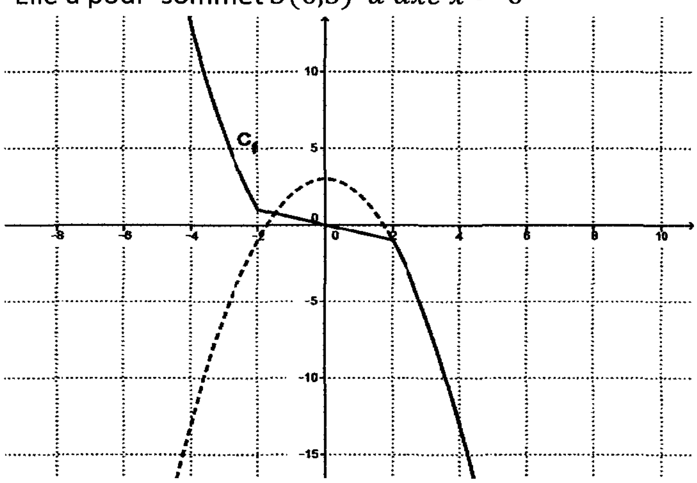
c) la courbe (Cf) et la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ n'ont pas des points d'intersection donc l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solution

d) de même l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans IR

Exercce7 :

1) (P) : La parabole d'équation : $y = -x^2 + 3$

Elle a pour sommet $S(0,3)$ $d'axe\ x = 0$



$* (P)\ passe\ par\ A(2,-1)$

$* A' = S_O(A)$: symétrique de A par rapport au point O $\Rightarrow A'(-2,1)$

$* O: centre\ de\ symétrie\ pour\ (C_f)$

$* f(0) = 0$

$* f(-2) = -f(2) = 1\ (f\ impaire\ )$

$* (C_1)$:la courbe de la restriction de f sur $[2,+\infty[$

$On\ a :\ (C'_1) = S_0(C_1)$

On a ainsi :	$(C_f) = (C_1) \cup [AA'] \cup (C'_1)$

2) pour $x \in]-2,0[\ , f(x) = ax + b$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc $f(x) = -\frac{1}{2}x = -\frac{x}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si\ x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x & si\ -2 < x < 2 \\ -x^2 + 3 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Exercce8 :

$$f(x) = \frac{x}{2x - |x+1|}$$

1) pour $x \in D_f$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x + (x+1)} & si\ x \leq -1 \\ \dfrac{x}{2x - (x+1)} & si\ x > -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3x+1} & si\ x \leq -1 \\ \frac{x}{x-1} & si\ x > -1 \end{cases} \quad \text{et } x \in D_f$$

On a : $3x + 1 \neq 0$ pour tout $x \leq -1$

Donc $D_f = IR \setminus \{1\}$

2) * la fonction $f_1 : x \to x$ est continue sur IR en particulier sur $IR\setminus\{1\}$

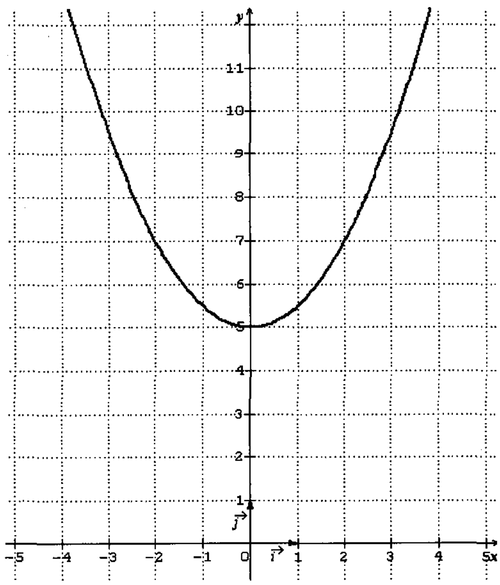
* la fonction $f_2 : x \to 2x - |x+1|$ est continue sur $IR\setminus\{1\}$ et ne s'annule pas donc $f = \frac{f_1}{f_2}$ est continue sur $IR\setminus\{1\}$

Exercce9 :

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+5$

1) (C_f) est une parabole de sommet $S(0,5)$

et d'axe ladroite des abscisses : $(x=0)$



2) $f(2)=7$; $f(-2)=7$; $f(0)=5$; $f(\sqrt{3})=\frac{13}{2}$

et $f(-\sqrt{2})=6$

3) $*\ f(I=\ [1{,}3])=[f(1),f(3)]=\left[\frac{11}{2},\frac{19}{2}\right]$

$*\ f(]-2{,}2[)==[5,7[$

$*\ f(K=]-\infty,0]\ )=[5,+\infty[$

4)

• $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2+5=0\Leftrightarrow x^2=-10<0$

donc 0 n'a pas d'antécèdent par f

• $f(x)=7\Leftrightarrow x=2$ *où* $x=-2$

donc (-2) et 2 sont les antécèdents de 7 par f

• $f(x)=9\Leftrightarrow x^2=8$

$\Leftrightarrow x_1=2\sqrt{2}$ *où* $x_2=-2\sqrt{2}$

les antécèdents par f de 9 sont x_1 et x_2

5)

$7\le f(x)\le 13\Leftrightarrow 2\le\frac{1}{2}x^2\le 8$

$\Leftrightarrow 4\le x^2\le 16\Leftrightarrow 2\le\sqrt{x^2}\le 4$

$\Leftrightarrow 2\le|x|\le 4$

$\Leftrightarrow 2\le x\le 4$ *où* $2\le -x\le 4$

$\Leftrightarrow 2\le x\le 4$ *où* $-2\ge x\ge -4$

donc de réels de l'intevalle $[3,7]$ sont les réels $x\in[-4,-2]\cup[2,4]$

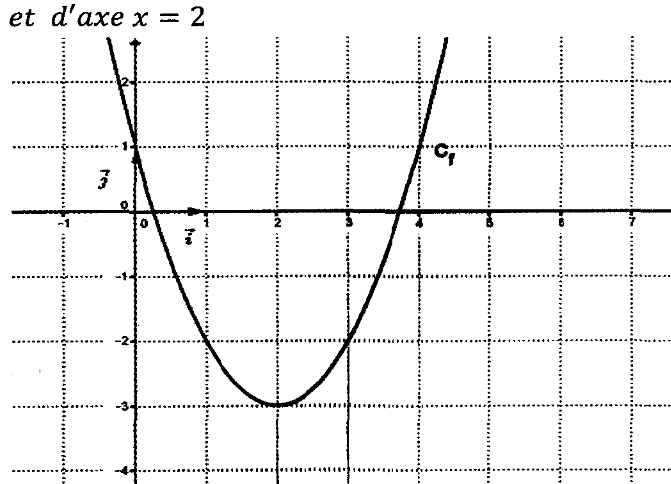
Exercice10 :

$f(x)=x^2-4x+1$

1) $f(x)=(x-2)^2-3$

(C_f) est une parabole de sommet $S(2,-3)$

et d'axe $x=2$



2) * $f([2,3]) = [-3,-2]$

* $f([0,3]) = [-3,1]$

* $f([0,+\infty[) = [-3,+\infty[$

3) $-2 \leq f(x) \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq (x-2)^2 - 3 \leq 6$

$\Leftrightarrow 1 \leq (x-2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq |x-2| \leq 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x-2 \leq 3 \\ ou \\ 1 \leq -(x-2) \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ ou \\ -1 \leq -x \leq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ ou \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ Donc $E = [-1,1]\, U\, [3,5]$

Exercice11 :

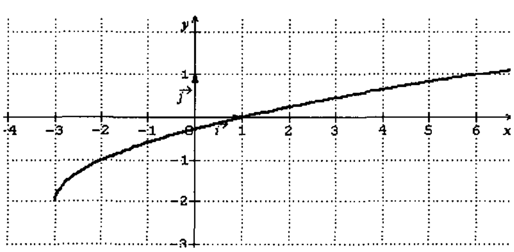
$f(x) = \sqrt{x+3} - 2$

1) $D_f = [-3,+\infty[$

2) $(H): y = \sqrt{x}$

(C_f) est l'image de (H) par la translation de

Vecteur $\vec{u}\binom{-3}{-2}$



3) * $f([2,3]) = [f(2), f(3)]$

((car f est croissante sur [2,3]))

$d'où \quad f([2,3]) = [\sqrt{5}-2, \sqrt{6}-2]$

* $f([0,5]) = [f(0), f(5)] = [\sqrt{3}-2, \sqrt{8}-2]$

* $f(]-1,+\infty[) =]\sqrt{2}-2, +\infty[$

4) $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 2 \geq -1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \geq 1 \Leftrightarrow x+3 \geq 1$ et $x \geq -2$

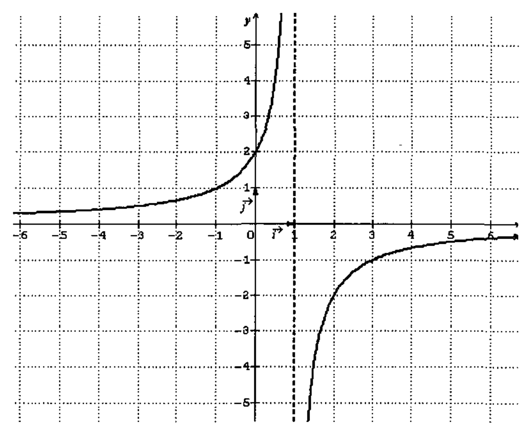
Par suite $E = [-2,+\infty[$

Exercice12 :

$f(x) = \dfrac{-2}{x-1}$

1) $D_f = IR\{1\}$

2) (C_f) est une hyperbole de centre $W(1,0)$ d'asymptotes $x = 1$ et $y = 0$



3) * $f([2,4]) = [f(2), f(4)] = \left[-2, -\frac{2}{3}\right]$

Puisque on a : f est croissante sur [2,4]

* $f([-1,0]) = [1,2]$ (f est croissante sur $[-1,0]$)

* $f(]-\infty,-3]) =]0, \frac{1}{2}]$ (f est croissante)

4) graphiquement on a : (C_f) est au dessous de l'axe des abscisses ($f(x) < 0$) si et seulement si $x > 1$

Donc $E =]1,+\infty[$

Exercice13 :

$f(x) = x^3$

1) pour tout réels $a\ et\ b$:

$$a \leq b \quad \Rightarrow a^3 \leq b^3 \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Donc f est croissante sur IR

2)* $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = [1\ ,\ 27]$

* $f([2\ ,5]) = [8, 125]$

* $f(]-6,-1]) =]-216,-1]$

Car f est croissante sur chacun de ces intervalles.

Exercice14 :

$f(x) = -x^3 - 3x$

1) soit $a\ et\ b$ deux réels

$a \leq b \Rightarrow a^3 \leq b^3 \Rightarrow -b^3 \leq -a^3$ (1)

$a \leq b \Rightarrow -3b \leq -3a$ (2)

On additionne (1) et (2) membre à membre on aura

$-b^3 - 3b \leq -a^3 - 3a \quad \Rightarrow f(b) \leq f(a)$

Par suite f est décroissante sur IR.

2) $f([2,3]) = [f(3), f(2)] = [-36,-14]$

Car f est décroissante sur [2,3]

de même :

* $f([-5,-3]) = [f(-3), f(-5)] = [36,140]$

* $f(]3,4]) = [-76,-36[$

Exercice15 :

$f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2x-1}$

1) $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ce qui donne : $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty[$

2) * la fonction $f_1 : x \to -\frac{1}{2}x$ est continue sur IR en particulier sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

* la fonction $f_2 : x \to 2x - 1$ est continue et positive sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ donc $\sqrt{f_2}$ est continue sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

Par suite $f = f_1 + \sqrt{f_2}$ est continue sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

3) f est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[\frac{1}{2}, 1]$

4) $f(0{,}5) = -0{,}25 < 0$ et $f(0{,}6) = 0{,}14$

$donc\ f(0{,}5) \times f(0{,}6) < 0$ d'où $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

Exercice16 :

$f(x) = x^3 + 4x + 1$

1) Comme étant fonction polynôme, f est continue sur IR

2) f est continue sur $[-1,0]$

$f(-1) \times f(0) = -4 < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[-1,0]$

3) (avec la calculatrice)

$* f(-1) = -4 < 0 \quad , f(0) = 1 > 0$

$et\ \ f(-0{,}5) = -1{,}12 < 0$

Ainsi : $f(-0{,}5) \times f(0) < 0\ donc :\ -0{,}5 < \alpha < 0$

$* f(-0{,}3) = -0{,}22\ et \quad f(-0{,}2) = 0{,}19$

$donne \; : \; f(-0{,}3) \times f(-0{,}2) < 0$

$d'où \quad -0{,}3 < \alpha < -0{,}2$

Exercice17 :

$f(x) = -2x^3 - 7x + 4$

1) Comme étant une fonction polynôme, f est continue sur IR

2) f est continue sur $[0{,}1]$

Et : $f(0) \times f(1) = 4 \times (-5) < 0$

D'où l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution

α dans $[0{,}1]$

3) (on utilisera une calculatrice)

$f(0{,}5) = 0{,}25 \quad et \quad f(0{,}6) = -0{,}63$

$f(0{,}5) \times f(0{,}6) < 0 \quad d'où \; 0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

Exercice18 :

$f(x) = -2x^3 + 2x + 10$

1) Comme étant une fonction polynôme, f est continue sur IR

2) f est continue sur $[1{,}2]$

Et : $f(1) \times f(2) = 10 \times (-2) < 0$

D'où l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution

α dans $[1{,}2]$

3) (on utilisera une calculatrice)

$f(2) = -2 \quad et \quad f(1.9) = 0{,}0082$

$f(2) \times f(1.9) < 0 \quad d'où \; 1.9 < \alpha < 2$

Exercice19 :

$f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 1$

1) Le nombre de solution de l'équation : $f(x) = 0$ est égal à deux. Car l'axe des abscisses coupe (C_f) en deux points distincts.

2) $\alpha \sim 0 \quad et \quad \beta \sim 1{,}5$

3) $\alpha \sim 0{,}2 \quad et \quad \beta \sim 1{,}4$

Exercice20 :

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 10$

1) Comme étant fonction polynôme f est continue

sur IR

2) $f(-3) = 8{,}5$ et $f(-2) = -8$

$f \; est \; continue \; sur \; [-3, -2]$

et $f(-3) \times f(-2) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α_1

$dans \; [-3, -2]$

3) $f(-1{,}5] = -5{,}09$ et $f(-1) = 0{,}5$

$f \; continue \; sur \; [-1{,}5 \, , -1]$

et $f(-1{,}5) \times f(-1) < 0$

Donc l'équation $f(x) = O$ admet une solution α_2

dans $[-1{,}5 \, ; \, -1]$

4) $f \; est \; continue \; sur \; [1{,}2]$

$f(1) \times f(2) = -34 < 0$

Donc l'équation $f(x) = O$ admet une solution α_3

dans $[1 \, , 2]$

5) f *est continue sur* $[4\,,4{,}5]$

$f(4) \times f(4{,}5) = -50 < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α_4

dans $[4\,,4{,}5]$

6) l'équation $f(x) = 0$ est du 4éme degré donc elle

admet au plus quatre solutions

Comme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 et\ \alpha_4$ sont des solutions distinctes de $l'équation\ f(x) = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet exactement quatre solutions.

7) ■ $f(-2{,}8) \times f(-2{,}7) < 0$

$$\Rightarrow -2{,}8 < \alpha_1 < -2{,}7$$

■ $f(-1{,}1) \times f(-1) = (-0{,}69).(0{,}5) < 0$

$$\Rightarrow -1{,}1 < \alpha_2 < -1$$

■ $f(1{,}7) \times f(1{,}8) = (0{,}42).(-1{,}02) < 0$

$$\Rightarrow 1{,}7 < \alpha_3 < 1{,}8$$

■ $f(4) \times f(4{,}1) = (-2).(2{,}007) < 0$

$$\Rightarrow 4 < \alpha_4 < 4{,}1$$

QCM:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(f.g)(x) = 4$ **(a)**

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ **(a)**

3) c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x).(x^{100}+4) = 0$ **(c)**

4) c) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^{2006}+1}{(x+1)^{2005}}\right] = 1$ **(c)**

5) b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 2$ **(b)**

Vrai- Faux :

1) **Faux** : contre exemple :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad , D_f = IR\backslash\{1\}$$

Pour $x \neq 1$ $on\ a$: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$

On pose $g(x) = x+1\ , x \in IR$

Ainsi on a pour $x \neq 1,\ f(x) = g(x)$

g est continue en 1 donc :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = g(1) = 2$$

2) **Vrai** : théorème du cours : f continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

3) **Faux :**

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

4) Faux : contre exemple :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

$|f(x)| = 1\ pour\ tout\ x \in IR$

$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)| = 1$

mais f n'admet pas de limite en 0.

car $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1\right) \neq \left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1\right)$

5) **Vrai** voir définition.

Mobiliser ses compétences :

Situation 1 :

pour $x \in [-2,+\infty[\ \backslash\{-1\}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+2}}$$

pour $x \in [-2,+\infty[$ $, on\ pose$:

$$g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+2}}$$

g est continue en (-1) et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [-2,+\infty[\ \backslash\{-1\}$

donc : $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x) = g(-1) = \dfrac{1}{2}$

$f\ \ est\ continue\ en\ (-1)$ si et seulement si :

$$\lim_{x\to(-1)} f(x) = f(-1) = a = \frac{1}{2}$$

et comme f est continue sur $[-2,+\infty[\ \backslash\{-1\}$

alors f est continue sur $x \in [-2,+\infty[$

$$si\ et\ seulement\ si\ :\ a = \frac{1}{2}$$

Situation 2 :

1) a)

$$h(x)=\begin{cases}-1 & si\ x\le -2\\ x+1 & si-2<x<0\\ x^2+1 & si\ x\ge 0\end{cases}$$

b) * h est continue sur chacun des intervalles

$]-\infty,-2\,[\,,]-2{,}0\,[\;et\;]0,+\infty[$

$*\ Continuité\ en\ (-2)$

- pour $x\,\epsilon\,]-\infty,-2[$: $h(x)=f_1(x)=-1$

$f_1$est continue à gauche en (-2)

donc : $\lim\limits_{x\to(-2)^-} h(x)=f_1(-2)=-1=h(-2)$

- pour $x\,\epsilon\,]-2,0[$: $h(x)=f_2(x)=x+1$

  f_2 est continue à droite en (-2)

donc : $\lim\limits_{x\to(-2)^+} h(x)=f_2(-2)=-1=h(-2)$

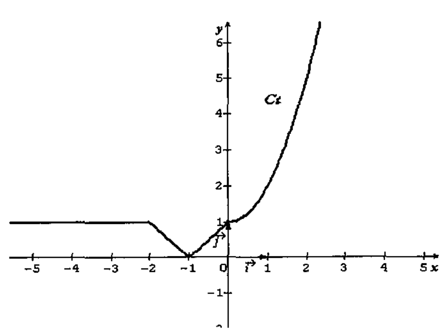
h est continue à droite et à gauche en (-2)

$d'où\ h\ est\ continue\ en\ (-2)$

* de même h est continue en 0.
conclusion : $h\ est\ continue\ sur\ IR$

2) $t(x)=\begin{cases}f(x) & si\ x\ge 0\\ |g(x)| & si\ x<0\end{cases}$

a)



b) graphiquement : t est continue sur IR

car (C_t) ne représente ni un saut ni un trou .

Exercices :

Exercice 1:

1) f est une fonction polynôme elle est donc continue en (-1) donc :

$\lim\limits_{x\to(-1)} f(x) = f(-1) = 2$

2) $f(x) = \dfrac{6x^4+x+1}{x^2-x+1}$

On a : $x^2 - x + 1 = 0$ avec $\Delta = -3 < 0$

Donc $x^2 - x + 1 > 0$ par suite : $D_f = IR$

f est une fonction rationnelle $(0{,}1) \epsilon D_f$ donc f est continue en $(0{,}1)$

$\lim\limits_{x\to(0,1)} f(x) = f(0{,}1) = \dfrac{110{,}06}{91}$

3) $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x) = f(-1) = -12$

car f est une fonction polynôme

4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = -3$ (fonction polynôme)

5) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$ (fonction polynôme)

6) $\lim\limits_{x\to(-3)} f(x) = f(-3) = 90$

f fonction rationnelle et $(-3) \epsilon D_f = IR \setminus \{-2\}$

7) $\lim\limits_{x\to(0,1)} f(x) = f(0{,}1) = -\dfrac{900}{301}$

f fonction rationnelle et $(0{,}1) \epsilon D_f = IR$

Exercice 2:

1) $f(x) = \left|\dfrac{x^2-\sqrt{2}}{2x+1}\right|$

$f = |g|$ avec $g(x) = \dfrac{x^2-\sqrt{2}}{2x+1}$;

$D_g = IR \setminus \{-1/2\}$

g est une fonction rationnelle et $0 \epsilon D_g$ donc g est continue en 0, par suite f est continue en 0.

d'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \sqrt{2}$

2) $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ avec $f_1(x) = -|x| + 50$; $f_2(x) = (x-10)^2$

f_1 *et* f_2 sont continues en 20 et $f_2(20) = 10 \neq 0$ d'où

$\lim\limits_{x\to 20} f(x) = f(20) = \dfrac{3}{10}$

3)f est continue sur IR (quotient de deux fonctions continues sur IR et $|x|^3 + \pi \neq 0$) comme $0 \in IR$

on aura $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$

4) de même : $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x) = f(-2) = \dfrac{-116}{3}$

5) $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x) = f(-1) = 2$ (pour la même raison)

Exercice 3:

1) $f(x) = \sqrt{3x-5}$

$f = \sqrt{g}$ *avec* $g = 3x - 5$

La fonction g est définie et positive sur $\left]\dfrac{5}{3}, +\infty\right[$

et on a : $8 \epsilon \left]\dfrac{5}{3}, +\infty\right[$

Comme g est continue en 8 (fonction polynôme) alors $f = \sqrt{g}$ est continue en 8.

par suite : $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = f(8) = \sqrt{19}$

2) $f(x) = \sqrt{-2x+1}$

f est continue en 0,002 **(même raison que 1))**

d'où: $\lim\limits_{x\to 0,02} f(x) = f(0{,}02) = 0{,}96$

3) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$

$g(x) = 2x^2 - 3x + 4 = 0$ avec $\Delta = -21 < 0$ donc le trinôme g est strictement positif sur IR

$f = \sqrt{g}$ (g est définie et positive sur tout IR)

g *est continue en* $(-1,23)$ (polynôme)

Alors $f = \sqrt{g}$ est continue en $(-1,23)$

Donc : $\lim\limits_{x \to (-1,23)} f(x) = f(-1,23) = \sqrt{3,3358} \simeq 1,84$

4) $f(x) = (-x+5)^2 + \sqrt{2x^2 + 3x + 5}$

$2x^2 - 3x + 4 > 0$ car $\Delta < 0$ *et* $a = 2 > 0$

$*x \to \sqrt{2x^2 + 3x + 5}$ continue sur IR

$*x \to (-x+5)^2$ polynôme donc continue sur IR

donc f *est continue en* $0 \in IR$, par suite :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 25 + \sqrt{5}$

5) * $x \to \sqrt{3x^2 + 2}$ continue sur IR car $3x^2 + 2 \geq 0$

* $(-1)^4 - 8(-1) + 1 = 10 \neq 0$ donc

$x \to \left(-3 \times \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 8x + 1}\right)$ est continue en (-1)

finalement f est la somme de deux fonctions continues en (-1) donc elle est continue en (-1)

d'où $\lim\limits_{x \to (-1)} f(x) = f(-1) = \sqrt{5} - \frac{9}{5}$

Exercice 4:

1) $f(x) = \frac{x(x^2 - 2)}{x - \sqrt{2}}$

po�r $x \neq \sqrt{2}$; $f(x) = \frac{x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = x(x + \sqrt{2})$

On pose $g(x) = x.(x + \sqrt{2})$

pour $x \neq \sqrt{2}$, on a : $f(x) = g(x)$

de plus g est continue en $\sqrt{2}$

d'où : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x) = g(\sqrt{2}) = 4$

2) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

on rappelle que :

$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$

or dans l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$a + b + c = 0 \Rightarrow x' = 1$ *et* $x'' = \frac{c}{a} = 2$

d'où : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2$

on pose $g(x) = x - 2$

pour $x \neq 1$ *, on a :* $f(x) = g(x)$

On sait que g est continue en 1

d'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = g(1) = -1$

3) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

dans l'équation : $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 1 \Rightarrow x' = 2$ *et* $x'' = 3$

d'où : $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$:

$f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x}{x-3}$

On pose $g(x) = \frac{x}{x-3}$

g est continue en 2

(fonction rationnelle et 2 $\in D_g = IR \setminus \{3\}$)

et pour $x \neq 2$, $f(x) = g(x)$

d'où $\lim_{x \to 2} f(x) = g(2) = -2$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$; $D_f = [-3, +\infty[\setminus \{-2\}$

pour $x \neq -2$: $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x+3}-1\right)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 1}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}+1}$$

on pose : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+1}$

pour $x \neq -2$, $f(x) = g(x)$

de plus g est continue en (-2)

d'où : $\lim_{x \to (-2)} f(x) = g(-2) = \dfrac{1}{2}$

5) $f(x) = \left|\dfrac{x^3+27}{x+3}\right|$

On sait que : $(a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Donc pour $x \neq 3$ on a :

$$f(x) = \left|\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)}\right|$$

$f(x) = |x^2 - 3x + 9|$

On pose $g(x) = x^2 - 3x + 9$

pour $x \neq 3$ *on a* $f(x) = |g(x)|$

g est continue en (-3) , par suite :

$\lim_{x \to (-3)} f(x) = |g(-3)| = 27$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{\sqrt{x}}$; $D_f =]0, +\infty[$

pour $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{6}\right)(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}{\sqrt{x}(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}$$

on pose : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6}}$

g est continue à droite en 0.

et $f(x) = g(x)$ *pour* $x > 0$

Donc : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = g(0) = 0$

7) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{1+x} - 1}{x}$

pour $x \in D_f = IR^* \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \frac{1-(1+x)}{x(1+x)} = -\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$$

pour $x \neq 0$, *on a* : $f(x) = g(x)$

de plus g est continue en 0 d'où :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = g(0) = -1$$

8) pour $x \in D_f = [-1, +\infty[\setminus \{0\}$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$f(x)=\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

g *est continue en* 0 *d'où* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=g(0)=\frac{1}{2}$

Exercice 5 :

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & si\ x=-1\ ou\ x=0\\ x & si\ x\in]-2,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\end{cases}$$

1) pour $x\in]-2,-1[$

$f(x)=x$

on sait que la fonction : $x\to x$ est continue sur IR en particulier sur $]-2,-1[$ par suite f est continue sur $]-2,-1[$ de même : f est continue sur chacun des intervalles $]-1,0[$ *et* $]0,1[$.

2) * pour $x\in]-2,-1[$; $f(x)=g(x)=x$

g est continue à droite en (-1) d'où

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=g(-1)=-1$$

de même on a :

* $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=g(-1)=-1$

* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=g(0)=0$

*. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=g(0)=0$

3) * f est continue sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$.

* *continuité en* 0

* $\lim\limits_{0^+} f=\lim\limits_{0^-} f=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ donc :

f est continue en 0 par suite f est continue sur $]-1,1[$

* *continuité en* (-1)

on a : $f(-1)=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{(-1)^+} f=\lim\limits_{(-1)^-} f=-1$

d'où $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)=-1\neq f(-1)$

Donc f *n'est pas continue en* (-1) *par suite* f *n'est pas continue sur* $]-2,0[$.

Exercice 6 :

1)

* $(f+g)(x)=\begin{cases}x-1 & si\ x<1\\ x^2+x & si\ x\geq 1\end{cases}$

* $(f.g)(x)=\begin{cases}0 & si\ x<1\\ (x-1)(x^2+1) & si\ x\geq 1\end{cases}$

* $(f.h)(x)=\begin{cases}0 & si\ x<1\\ 1 & si\ x\geq 1\end{cases}$

2) •soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur IR par:

$f_1(x)=0$ *et* $f_2(x)=x^2+1$

* f_1 est continue sur tout IR en particulier sur $]-\infty,1[$ par suite f est continue sur $]-\infty,1[$

* f_2 est continue sur tout IR en particulier *sur* $]1,+\infty[$ par suite f est continue *sur* $]1,+\infty[$

• soit f_3 et f_4 les fonctions définies sur IR par:

$f_3(x) = x - 1 \quad et \quad f_4(x) = x^2 + x$

* $f_3$est continue sur tout IR en particulier sur $]-\infty, 1[$ par suite $f + g$ est continue sur $]-\infty, 1[$

* $f_4$est continue sur tout IR en particulier $sur\ ]1, +\infty[$ par suite $f + g$ est continue $sur\ ]1, +\infty[$

* de même les fonctions, $f.g \ et \ f.h$ sont continues sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[\ et \ ]1, +\infty[$

3) a) continuité de $f \ en\ 1$

on a : $f(1) = 2$

* pour $x < 1 \ on\ a : \quad f(x) = f_1(x) = 0$

$f_1$est continue en 1 (fonction constante)

d'où : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f_1(1) = 0 \neq f(1)$

f n'est pas continue à gauche en 1 donc f n'est pas continue en 1

b) continuité de $(f + g) \ en\ 1$

on a : $(f + g)(1) = 2$

Pour $x < 1 : (f + g)(x) = g(x) = x - 1$

g est continue en 1 d'où :

$$\lim_{x\to 1^-} (f + g)(x) = g(1) = 0 \neq (f + g)(1)$$

la fonction $(f + g)$ n'est pas continue en 1.

c) continuité de $(f.g) \ en\ 1$

on a : $(f.g)(1) = 0$

pour $x < 1 : (f.g)(x) = f_1(x) = 0$

f_1 est continue en 1 d'où :

$\lim\limits_{x\to 1^-} (f.g)(x) = f_1(1) = 0 = (f.g)(1)$

$(f.g) \ est\ continue$ à $gauche\ en\ 1$

pour $x \geq 1$:

$$(f.g)(x) = f_3(x) = (x-1)(x^2+1)$$

f_3 est continue en 1 , d'où :

$$\lim_{x\to 1^+} (f.g)(x) = f_3(1) = 0 = (f.g)(1)$$

$(f.g)$ est continue en 1 par suite $(f.g)$ est continue en 1.

d) continuité de $(f.h)$ en 1

on a : $(f.h)(1) = 1$

pour $x < 1 : (f.h)(x) = f_1(x) = 0$

f_1 est continue en 1 d'où :

$$\lim_{x\to 1^-} (f.h)(x) = f_1(1) = 0 \neq (f.h)(1)$$

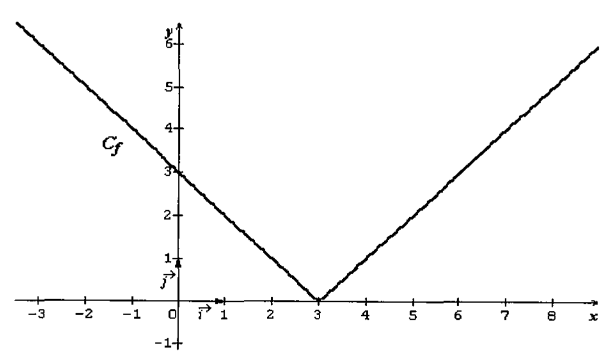
$(f.h)$ n' est pas continue en 1.

Exercice7 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{|x-3|} & si\ x \neq 3 \\ 0 & si\ x = 3 \end{cases}$$

1) pour $x \neq 3$

$$f(x) = \frac{|x-3|^2}{|x-3|} = |x-3| \quad \text{et } f(3) = 0$$



2) pour x > 3 : $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)} = x - 3 = g(x)$

g est continue a droite en 3 (fonction polynôme) d'où : $\lim_{x\to 3^+} f(x) = g(3) = 0 = f(3)$

f est continue a droite en 3 , de même, f est continue à gauche en 3.

3) f est continue a droite et a gauche en 3 , d'ou f est continue en 3.

4) $f(x) = |x-3|$ pour tout $x \in IR$
(voir question (1))

$x \to (x-3)$ est continue sur IR

d'ou f est continue sur tout IR.

Exercice8 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si\ x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} & si\ x > 2 \end{cases}$$

1) $f(2) = 2^3 - 2 = 6$

* pour $x \in]-\infty; 2[$; $f(x) = x^3 - 2 = g(x)$

la fonction g est une fonction polynôme, elle est donc continue a gauche en 2.
donc : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = g(2) = 6 = f(2)$

f est continue a gauche en 2.

- pour x $\in]2; +\infty[$ $f(x) = \sqrt{x+2} = h(x)$

h est continue a droite en 2.

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = h(2) = \sqrt{4} = 2 \neq f(2)$

f n'est pas continue a droite en 2.

2) f n'est pas continue à droite en 2 donc f n'est pas continue en 2.

Exercice9 :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x} & si\ x > 0 \\ -1 - \sqrt{-x} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) $f(0) = 0$

* pour $x \in]0, +\infty[$

$f(x) = 1 + \sqrt{x} = g(x)$

g est continue à droite en 0 d'où :

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = g(0) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$

f n'est pas continue à droite en 0.

* de même f n'est pas continue à gauche en 0 car :

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$

2) f n'est pas continue en 0

Exercice10 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{|x|} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) * pour $x \in]O, +\infty[$

$f(x) = \frac{x}{x} . \sqrt{x} = \sqrt{x} = g(x)$

g est continue à droite en 0 d'où :

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = g(0) = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0

* pour $x \in]-\infty, 0]$

$f(x) = \frac{-x}{x} \sqrt{-x} = -\sqrt{-x} = h(x)$

h est continue à gauche en 0 d'où

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = h(0) = 0 = f(0)$

Par suite $f$est continue à gauche en 0.

2) f est continue à droite et à gauche en 0 il résulte que f est continue en 0.

3)

- Pour x $\in\ ]-\infty,0[$ on a : $f(x)= -\sqrt{-x}$

  f est continue sur $]-\infty,0[$.

- Pour x $\in\ ]0,+\infty[$ on a : $f(x) = \sqrt{x}$

  f est continue sur $]0,+\infty[$.

de plus f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur IR.

Exercice11 :

$$f(x)=\frac{\sqrt{(3x+1)^2}}{3x+1} \quad , \quad Df = IR \setminus \{-\tfrac{1}{3}\}$$

1) Pour x $\neq -\frac{1}{3}$

$$(3x+1)^2=|3x+1|^2 \Rightarrow f(x)=\frac{|3x+1|}{3x+1}$$

Tableau de signe de $(3x+1)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x+1$	$-$	0	$+$

- Pour x $\in\ ]-\frac{1}{3},+\infty[$: $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x+1}=1=g(x)$

g est continue à droite en $(-\frac{1}{3})$ (fonction constante)

d'où : $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^+} f(x)=g(-\frac{1}{3})=1.$

2) pour x $\in\ ]-\infty,-\frac{1}{3}[$

$$f(x)=\frac{-(3x+1)}{3x+1}=-1=h(x)$$

h est continue à gauche en $(-\frac{1}{3})$

d'où : $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^-} f(x)=h(-\frac{1}{3})=-1$

3) $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^+} f(x)$

f n'admet pas de limite en $(-\frac{1}{3})$.

Exercice12 :

$$f(x) = \frac{x^2-4}{|x-2|}$$

- f est continue en (-2)

  Donc : $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)=f(-2)=\frac{0}{4}=0$

Tableau de Signe de$(x-2)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

- Pour x $\in\ ]-\infty,2[$

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)}=-(x+2)=g(x)$$

g est continue à gauche en 2 (fonction polynôme)

d'où : $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=g(2)=-4$

- Pour $x \in]2,+\infty[$

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2=h(x)$$

h est continue à droite en 2 (polynôme)

d'où : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=h(2)=4$

Ainsi on trouve : $\lim\limits_{2^-} f \neq \lim\limits_{2^+} f$

Ce qui prouve que f n'admet pas de limite en 2.

Exercice13 :

$$x \to \begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x<2 \\ f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & si\ x>2 \end{cases}$$

1) pour $x \in]2,+\infty[$

$$f(x)=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{x+2}^2-2^2}$$
$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}$$
$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)}=\sqrt{x+2}+2=g(x)$$

g est continue à droite en 2

d'où : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=g(2)=4$

2) pour $x \in]-\infty,2[$

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2=h(x)$$

h est continue à gauche en 2

d'où $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x)=h(2)=4$

3) $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(2)^+} f(x)=4$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

4) *On a:* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ (nombre fini)

Donc f est prolongeable par continuité en 2

son prolongement par continuité est la fonction F

défini par $F(x)=\begin{cases} f(x) si\ x\neq 2 \\ 4\ si\ x=2 \end{cases}$

Exercice14 :

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-x}$$

1) Pour $x \neq 0$

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-x}=\frac{x(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}=g(x)$$

g est une fonction rationnelle et $0 \in Dg$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=g(0)=-2$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2$ (nombre fini)

Donc f est prolongeable par continuité en 0

Son prolongement est définie par

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & si\ x\neq 0 \\ -2 & si\ x=0 \end{cases}$$

Exercice15 :

pour $x \in [-1,2]$, $f(x)=(x-1).E(x)$

Si $x \in [-1,0[$ *alors* $E(x)=-1$

Si $x \in [0,1[\ alors\ \ E(x) = 0$

Si $x \in [1,2[\ alors\ \ E(x) = 1$

d'où :

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) & si\ x \in [-1,0[\\ 0 & si\ x \in\ [0,1[\\ x-1 & si\ x \in [1,2[\\ 2 & si\ x = 2 \end{cases}$$

*Continuité de f en 0 :

pour $x \in [-1,0[\ \ , f(x) = -x + 1 = g(x)$

g est continue à gauche en 0 d'où :

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = g(0) = 1\quad or\quad f(0) = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$

$$f\ n'est\ pas\ continue\ en\ 0$$

* *Continuité de f en 1*

$f(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f = \lim\limits_{x \to 1^+} \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0 = f(1)$

Par suite f est continue en 1.

* pour $x \in [1,2[\ ,\ f(x) = x - 1 = h(x)$

h est continue à gauche en 2 d'où :

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = h(2) = 1 \neq f(2)$

$$f\ n'est\ pas\ continue\ à\ gauche\ en\ 2.$$

Conclusion : f est continue sur chacun des intervalles $[-1, 0]\ et\ [0, 2[$

Exercice16 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$$

pour $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = g(x)$$

g est continue en 0 d'où :

D'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = g(0) = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$

donc f est continue en 0

et comme f est continue sur $[-1, +\infty[\backslash\{0\}$

Alors : f est continue sur $[-1, +\infty[$

Exercice17 :

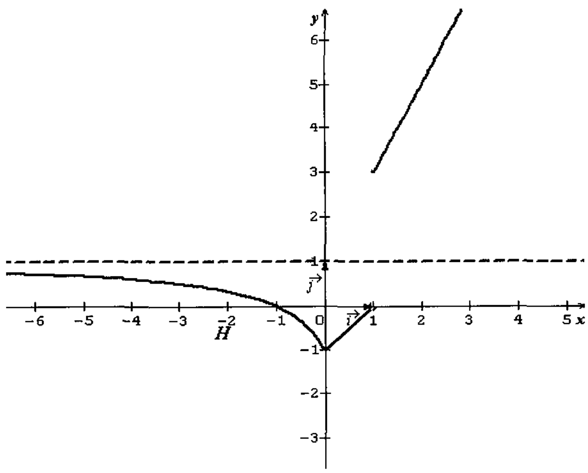
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \geq 1 \\ x-1 & si\ \ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

1) pour $x < 0\ f(x) = \dfrac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

$(H): y = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

(H) : hyperbole de centre $w(1,1)$ d'asymptote

$x = 1\ \ et\ \ y = 1$



2) f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $[0,1[$ et $[1, +\infty[$

$*$ $Continuité$ à $gauche$ en 0 :

pour $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = g(x)$

g est $continue$ en 0 $d'où$:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = g(0) = -1 = f(0)$

f est continue à gauche en 0.

* Continuité en 1 à gauche :

pour $x \in [0,1[$ $\quad f(x) = x - 1 = h(x)$

h est continue en 1 d'où :

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = h(1) = 0$ et $f(1) = 3$

$$\lim_{x \to 1^-} f = 0 \neq f(1)$$

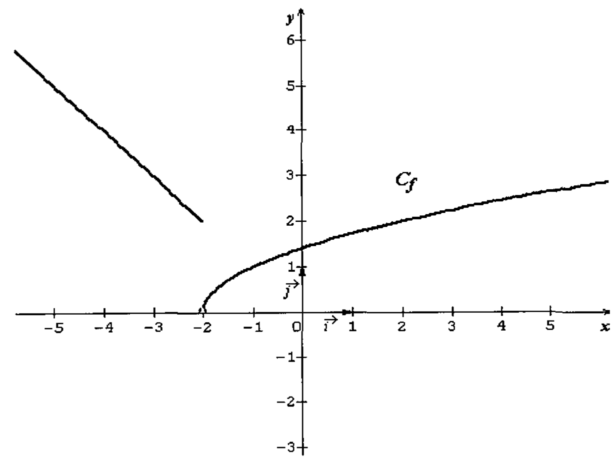
d'où f n'est pas continue à gauche en 1.

conclusion : f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $[1, +\infty[$

(f est continue sur $IR \backslash \{1\}$)

Exercice18 :

1)



2) pour $x \in]-\infty, -2]$ $\quad f(x) = ax + b$

$$a = \frac{f(-4) - f(-3)}{-4-(-3)} = \frac{4-3}{-4+3} \Rightarrow a = -1$$

$f(-3) = 3 \implies -3a + b = 3$

$$\implies 3 + b = 3 \implies b = 0$$

Ce qui donne : $f(x) = -x$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & si\ x > -2 \end{cases}}$$

3) $f(-2) = 2$

pour $x \in]-2, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x+2} = g(x)$

g est continue à droite en (-2) d'où :

$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = g(-2) = 0$$

$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = 0 \neq f(-2)$$

f $n'est$ pas $continue$ à $droite$ en (-2)

par $suite$ f $n'est$ pas $continue$ en (-2)

Exercice19 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & si\ x\neq 2\\ a & si\ x=2\end{cases}$$

Pour $x \in [1,+\infty[\setminus \{2\}$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

pour $x \neq 2$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=g(x)$

g est continue en 2 *d'où*

$$\lim_{x\to 2} f(x)=g(2)=\frac{1}{2}$$

f *est continue en* 2 *si et seulement si* $a=\dfrac{1}{2}$

Exercice20 :

Soit $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

On a : $P(x) = (3x^3 - 3x) - (2x^2 - 2)$

$P(x) = 3x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)$

$P(x) = (x^2 - 1)(3x - 2)$

D'où $P(x) = (x - 1)(x + 1)(3x - 2)$

* pour $x \neq -1$ *et* $x \neq 1$

On a : $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)(3x-2)}{(x-1)(x+1)}$

$f(x) = 3x - 2 = g(x)$

g est continue en (-1) *et en* (1)

d'où : $\lim_{x\to 1} f(x)=g(1)=1$

et $\lim_{x\to(-1)} f(x)=g(-1)=-5$

1) f *est continue en* 1 *pour* $a = 1$

2) f *est continue en* (-1) *pour* $b = -5$

Exercice21 :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

1) $P(0) = a_0$

$$\frac{P(x)-P(0)}{x}=a_n x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_2 x+a_1$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(a_n x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_2x+a_1)=a_1$$

2) a) $P(x) = 3(x + 1)^2 = 3(x^2 + 2x + 1)$

$P(x) = 3x^2 + 6x + 3$

On a : $P(0) = 3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3(x+1)^2-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=a_1=6$$

b) $P(x) = (x^3 + 2)(x - 1)$

$P(x) = x^4 - x^3 + 2x - 2$

On a : $P(0) = -2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^3+2)(x-1)+2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=a_1=2$$

c) $P(x) = (x + 1)^3$

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

On a : $P(0) = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x}=a_1=3$$

Exercice22 :

1) pour $x \in IR^*$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(1+x^2)-1^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

pour $x \neq 0$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=g(x)$$

g est continue en 0 d'où :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=g(0)=0$$

2) pour $x \neq 0$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=h(x)$$

h *est continue en* 0

d'où $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=h(0)=\frac{1}{2}$

QCM :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=+\infty \longrightarrow$ (b)

2) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{7}{(x-2)^2}=+\infty \longrightarrow$ (c)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+5]=0 \longrightarrow$ (a)

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \longrightarrow$ (a)

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{x^2}\right)=0 \longrightarrow$ (b)

Vrai – Faux

1) Vrai (cours)

2) Faux

Contre exemple :

$f(x)=\dfrac{1}{x}$; $x\in[1,+\infty[$

3) Vrai (voir définition)

4) Faux

Contre exemple :

$Soit\ f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$

$\lim\limits_{+\infty}f=0$ mais $\lim\limits_{-\infty}f=+\infty$

5) Faux

Contre exemple :

$Soit:\ f(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$\lim\limits_{+\infty}f=-1$ mais $\lim\limits_{+\infty}|f|=1$

Mobiliser ses Compétences :

Situation 1

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

1) a) $Df=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

b) $Df=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}}_{fonction\ rationnelle}=$

$$=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}}_{limite\ de\ monome\ de\ plus\ haut\ degré}=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

- On a : $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2+x+1)=1$

et $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x+1)=0^-$ donc

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0^+$

2)

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{x^2+x}{x+1}+\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}$$

donc $a=1$ et $b=0$

Deuxième méthode :

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}=ax+b+\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{ax(x+1)+b(x+1)+1}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+1}{x+1}$$

par identification on aura : $\begin{cases} a=1 \\ a+b=1 \\ b+1=1 \to b=0 \end{cases}$

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

Conclusion :

La droite Δ d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

b) $MP=|f(x)-x|=\left|\frac{1}{x+1}\right|=\frac{1}{|x+1|}$

$MP<0.001 \Leftrightarrow=\frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{1000}\Leftrightarrow|x+1|>1000$

$\Leftrightarrow x+1<-1000$ ou bien $x+1>1000$

$\Leftrightarrow x<-1001$ ou bien $x>999$

Lorsque $|x|>1001$ alors $|x+1|>1000$

d'ou $MP<0.001$

c)

Comme : $x=3000>1001$ donc d'aprés b)

$MP=|f(3000)-3000|<0.001$

donc : $-0.001<f(3000)-3000<0.001$

par suite : $2999.999<f(3000)<3000.001$

il resulte : $f(3000)\simeq3000$ à une erreur de 0.001

Situation 2

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$$

1) $Df=\mathbb{R}^*$

2) $Df=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

- $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2}{2}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2}{2}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

3)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{x}^2}{2}+\frac{1}{x}-\frac{\cancel{x}^2}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

4) a) $MN=|f(x)-g(x)|=\frac{1}{|x|}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$

c)Pour $x\in]0,+\infty[$ on a $|x|=x$

donc $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}>0$

D'où la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f est au dessus de ($\mathcal{C}''$) celle de g sur l'intervalle $]0,+\infty[$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} MN = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|} = 0$

Donc ($\mathcal{C}''$) est asymptote à ($\mathcal{C}$) au voisinage de ($-\infty$)

e)Pour

$x \in]-\infty,0[$ on a : $f(x) - g(x) = \frac{1}{x} < 0$

D'où la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f est au dessous de ($\mathcal{C}''$) celle de g sur l'intervalle $]-\infty,0[$

5)

$g(5\times10^{99}) = \frac{(5\times10^{99})^2}{2}$

Donc lorsque on prend $f(5\times10^{99}) = \frac{(5\times10^{99})^2}{2}$

l'erreur commise est $\frac{1}{5\times10^{99}} = 2\times10^{-100}$

Exercices

Exercice 1 :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1000)^3 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5}{(x-1000)^3} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+100)^{100} = +\infty$ et $(-2) < 0$

Donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-2(x+100)^{100}\right] = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2006) = +\infty$

Donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-2006} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2006) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{x-2006}} = 0$

Exercice 2 :

a) $f(x) = x^2 + |x|$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = x^2 + x|x| + 2$

*Pour $x \geq 0$ on a $|x| = x$ par suite $f(x) = 2x^2 + 2$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

*Pour $x \leq 0$ on a $|x| = -x$ par suite $f(x) = 2$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

c) $f(x) = -2(x+100)^{100} - 3x^5$

f est une fonction polynôme, son terme de plus haut degré est : $(-2\cdot x^{100})$

D'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2\cdot x^{100}) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2\cdot x^{100}) = -\infty$

d) $f(x) = (-2x+1)^3 + 8x^3$

Or : $(-2x+1)^3 = -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1$

Donc : $f(x) = 12x^2 - 6x + 1$

f est une fonction polynôme, son terme de plus haut degré est : $(12\cdot x^2)$

D'où

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} (12\cdot x^2) = +\infty$

Remarque: $|x| \to +\infty$ signifie $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

e) $f(x) = (-2x+1)^{10} + |x|^{11}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{|x|\to+\infty} (-2x+1)^{10} = +\infty \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{11} = +\infty \end{cases} \quad donc \ \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 3 :

a)

$$f(x) = \frac{-5x+1}{(x-1000)^3} = \frac{-5x+1}{x^3 - 3000x^2 + 3\times10^6 x + 10^9}$$

(f est une fonction rationnelle)

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{-5x}{x^3}\right) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{-5}{x^2}\right) = 0$$

b)

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{(2x-5)^{17}} \quad (\text{ fonction rationnelle })$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^4}{(2x)^{17}} = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{1}{2^{17}\times x^{13}}\right) = 0$$

c) $f(x) = \left|\dfrac{2x^2 - 3x}{x-2}\right|$

$$* \ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (2x) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$* \ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} (2x) = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

d) $f(x) = \dfrac{|x|(1-x)}{x^2+1}$

$$* \text{ Pour } x > 0 \ , f(x) = \frac{x - x^2}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^2}{x^2}\right) = -1$$

$$* \text{ Pour } x < 0 \ , f(x) = \frac{-x + x^2}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

e) $f(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^4 + x^3 - x^2}{x+1}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4 + x^3 - x^2}{x+1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 + x^3 - x^2}{x+1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$f)$ $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{|x| - 2}$

$$* \text{ Pour } x > 0 \text{ on a : } f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (x) = +\infty$$

$$* \text{ Pour } x < 0 \text{ on a : } f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{-x-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{-x}\right) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$

Exercice 4 :

a)

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} (\frac{-1}{x^2}) = 0$

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^3) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (3x^3) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+g(x)] = -\infty$

•$(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \dfrac{-3x^3-2x+1}{x^2}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$

• $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-1}{x^2(3x^3+2x-1)} = \dfrac{-1}{3x^5+2x^3-x^2}$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} (\frac{-1}{3x^5}) = 0$

b)

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x^2}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{x^2}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{2x}{x^3}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{2}{x^2}) = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{2}{x^2}) = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+g(x)] = -\infty$

•$(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \dfrac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x^3-1)} = \dfrac{2x^3-x^2}{x^4+x^3-x-1}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

• $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2(x^3-1)}{(x+1)(2x-1)} = \dfrac{x^5-x^2}{2x^2+x-1}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x^5}{2x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x^3}{2}) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{x^5}{2x^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{x^3}{2}) = -\infty$

c)

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{-3x^3}{x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{-3x^3}{x^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$

•* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x^4}{-x^5}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{x^4}{-x^5}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty$

•$(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \dfrac{(-3x^3+2)(x^4-6x^3)}{(x^2+x^3)(1-x^5)}$

$= \dfrac{-3x^7+18x^6+2x^4-12x^3}{-x^8-x^7+x^3+x^2}$

* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{-3x^7}{-x^8} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

• $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(-3x^3+2)(1-x^5)}{(x^2+x^3)(x^4-6x^3)}$

$= \dfrac{3x^8-2x^5-3x^3+2}{x^7-5x^6-6x^5}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{3x^8}{x^7}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{3x^8}{x^7}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (3x) = -\infty$

Exercice 5 :

- On a : $\lim_{x\to 3^-}(3x)=9$ et $\lim_{x\to 3^-}(x-3)(2x+5)=0^-$

d'où $\lim_{x\to 3^-}\dfrac{3x}{(x-3)(2x+5)}=-\infty$

- On a : $\lim_{x\to 3^+}(3x)=9$ et $\lim_{x\to 3^+}(x-3)(2x+5)=0^+$

d'où $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{3x}{(x-3)(2x+5)}=+\infty$

- On a : $\lim_{x\to(-2)^-}(-3x^2+1)=-11$

aussi on a :

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ $+\infty$
Signe de $(2x+4)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

ce qui donne : $\lim_{x\to(-2)^-}(2x+4)=0^-$

et $\lim_{x\to(-2)^+}(2x+4)=0^+$

d'où $\lim_{x\to(-2)^-}\dfrac{-3x^2+1}{2x+4}=+\infty$

et $\lim_{x\to(-2)^+}\dfrac{-3x^2+1}{2x+4}=-\infty$

Exercice 6 :

a) Soit $f(x)=\dfrac{-3x+9}{x^2-2x-3}$

Posons $A(x)=x^2-2x-3=0$

On a : $a-b+c=0$ donc $x'=-1$ et $x''=3$

par suite : $A(x)=(x+1)(x-3)$

Pour $x\neq -1$ et $x\neq 3$ on aura :

$$f(x)=\frac{-3\cancel{(x-3)}}{(x+1)\cancel{(x-3)}}=\frac{-3}{x+1}=g(x)$$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=g(3)=\frac{-3}{4}$$

car g est continue en 3.

b) Soit $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3+1}$

On sait que : $x^3+1=(x+1)(\underbrace{x^2-x+1}_{positif})$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$
Signe de (x^3+1)	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

il resulte

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x-1}{x^3+1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty \text{ et } \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x-1}{x^3+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Conclusion : f n'admet pas de limite en (-1)

c) Soit $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

pour $x>1$: $f(x)=(\sqrt{x-1})^2\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

$=\sqrt{x-1}\times\sqrt{x}=g(x)$

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=g(1)=0$ (g est continue à droite en 1)

donc $\lim_{x\to 1^+}f(x)=0$

d) Soit $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$

Pour $x>2$, on a : $f(x)=\dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}=(x+3)$

soit $g(x)=(x+3)$ continue sur $\mathbb{R}$ donc

$\lim_{x\to 2^+}f(x)=g(2)=5$

Exercice 7 :

a) • $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{-4}{(x-2)^3}=+\infty$ *car* $\lim_{x\to 2^-}(x-2)^3=0^-$

• $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{-4}{(x-2)^3}=-\infty$ *car* $\lim_{x\to 2^+}(x-2)^3=0^+$

b) Soit $f(x) = \dfrac{2}{(3-x)^4} + 2\sqrt{x}$

• *Comme* $\lim\limits_{x\to3}(3-x)^4 = 0^+$ *alors* $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2}{(3-x)^4} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to3}\left(2\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{3}$

d'où $\lim\limits_{x\to3} f(x) = +\infty$ par suite $\lim\limits_{3^+} f = \lim\limits_{3^-} f = +\infty$

c) Soit $f(x) = \dfrac{2x-x^3}{\sqrt{x^2+2x}}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de (x^2+2x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

$Df =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

Comme $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(2x-x^3) = 4$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\sqrt{2x+x^2} = 0^+$

d'où $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$

Exercice 8 :

a)

Soit $f(x) = \dfrac{-x-5}{x}$; $Df = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-x}{x} = -1$

• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x-5}{x} = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x-5}{x} = \dfrac{-5}{0^-} = +\infty$

b) Soit $f(x) = \dfrac{3x-1}{2-5x}$; $Df = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{3\cancel{x}}{-5\cancel{x}} = -\dfrac{3}{5}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
Signe de $(2-5x)$		$+$	0	$-$	

• $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^+}(3x-1) = \dfrac{1}{5}$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^+}(2-5x) = 0^-$

donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^+} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^-}(2-5x) = 0^+$ *donc* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^-} f(x) = +\infty$

c) Soit $f(x) = \dfrac{1-x^3}{2x+3}$; $Df = \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-\cancel{x}^3}{2\cancel{x}} = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-x^2}{2} = -\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $(2x+3)$		$-$	0	$+$	

• $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(1-x^3) = \dfrac{35}{8}$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(2x+3) = 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}(2x+3) = 0^-$ *donc* $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$

d) Soit $f(x) = \dfrac{-3x^2+x}{-5x+10}$; $Df = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3\cancel{x}^2}{-5\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{5} = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3\cancel{x}^2}{-5\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{5} = -\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $(-5x+10)$	$+$	0	$-$

- $\lim\limits_{x\to 2^+}(-3x^2+x)=-10$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^+}(-5x+10)=0^-$

  donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{-10}{0^-}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}(-5x+10)=0^+$ *donc* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{-10}{0^+}=-\infty$

Exercice 9 :

a) Soit $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x^2-5}$

$x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ *ou* $x=-\sqrt{5}$

$Df=\left\{x\in\mathbb{R} \text{ telque } x^2-5\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$

- $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-2}{x}=0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
Signe de (x^2-5)	$+$	0	$-$	0	$+$

- $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^-}(-2x+3)=2\sqrt{5}+3>0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^-}(x^2-5)=0^+$

  donc $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^-} f(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^+}(-2x+3)=2\sqrt{5}+3>0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^+}(x^2-5)=0^-$

  donc $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})^-} f(x)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^-}(-2x+3)=-2\sqrt{5}+3<0$ *et* $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^-}(x^2-5)=0^-$

  donc $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^-} f(x)=\dfrac{constante\ negative}{0^-}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^+}(-2x+3)=-2\sqrt{5}+3<0$ *et* $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^+}(x^2-5)=0^+$

  donc $\lim\limits_{x\to(\sqrt{5})^+} f(x)=\dfrac{constante\ negative}{0^+}=-\infty$

b)

Soit $f(x)=\dfrac{-x^4+2x}{x^2+2}$; $x^2+2>0$ *donc* $Df=\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-x^4}{x^2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}(-x^2)=-\infty$

c) Soit $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2+3x}$

$x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=-3$

$Df=\left\{x\in\mathbb{R} \text{ telque } x^2+3x\neq 0\right\}=\mathbb{R}^*\setminus\left\{-3\right\}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$

x	$-\infty$	-3		0	$+\infty$
Signe de (x^2+3x)	$+$	0	$-$	0	$+$

- $\lim\limits_{x\to(-3)^-}(x^3-2x^2+1)=-44<0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-3)^-}(x^2+3x)=0^+$

  donc $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)=-\infty\left(\text{de la forme } \dfrac{-44}{0^+}\right)$

• $\lim\limits_{x\to(-3)^+}(x^3-2x^2+1)=-44<0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-3)^+}(x^2+3x)=0^-$

$$donc\ \lim_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty\left(\text{de la forme } \frac{-44}{0^-}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to0^-}(x^3-2x^2+1)=1>0$ *et* $\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+3x)=0^-$

$$donc\ \lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty\left(\text{de la forme } \frac{1}{0^-}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to0^+}(x^3-2x^2+1)=1>0$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+3x)=0^+$

$$donc\ \lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty\left(\text{de la forme } \frac{1}{0^+}\right)$$

d) Soit $f(x)=\dfrac{-3x^3+x+1}{x^2+x-2}$

$x^2+x-2=0$ *et* $a+b+c=0$

$\Leftrightarrow x'=1$ *ou* $x''=-2$

$Df=\{x\in\mathbb{R} \text{ telque } x^2+x-2\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de (x^2+x-2)		$+$	0	$-$	0	$+$	

• $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(-3x^3+x+1)=23>0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x^2+x-2)=0^+$

$$donc\ \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty\left(\text{de la forme } \frac{23}{0^+}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(-3x^3+x+1)=23>0$ *et* $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x^2+x-2)=0^-$

$$donc\ \lim_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty\left(\text{de la forme } \frac{23}{0^-}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to1^-}(-3x^3+x+1)=-1<0$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+x-2)=0^-$

$$donc\ \lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty\left(\text{de la forme } \frac{-1}{0^-}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-2x^2+1)=-1<0$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x-2)=0^+$

$$donc\ \lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty\left(\text{de la forme } \frac{-1}{0^+}\right)$$

Exercice 10 :

a) Soit $f(x)=\left|\dfrac{x^3-3}{x+2}\right|$

$Df=\{x\in\mathbb{R} \text{ telque } x+2\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f(x)=|g(x)|$ *avec* $g(x)=\dfrac{x^3-3}{x+2}$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}^3}{\cancel{x}}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}(x^2)=+\infty$

$d'où\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty$

• on a : $f(x)=\left|\dfrac{x^3-3}{x+2}\right|=\dfrac{|x^3-3|}{|x+2|}$

* $\lim\limits_{x\to(-2)}|x^3-3|=5$ *et* $\lim\limits_{x\to(-2)}|x+2|=0^+$

$d'où\ \lim\limits_{x\to(-2)} f(x)=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$

par suite $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$

b) Soit $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2-5}\right|$

$x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5} \;\; ou \;\; x=-\sqrt{5}$

$Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } x^2-5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2-5} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}^2} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

d'ou $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$

• on a : $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2-5}\right| = \dfrac{|x+2|}{|x^2-5|}$

* $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} |x^2-5| = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} |x+2| = \sqrt{5}+2 (positif)$

d'où $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} f(x) = \dfrac{\sqrt{5}+2}{0^+} = +\infty$

par suite $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{5}^-} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})} |x^2-5| = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})} |x+2| = \sqrt{5}-2 (positif)$

d'où $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5})} f(x) = \dfrac{\sqrt{5}-2}{0^+} = +\infty$

par suite $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{5}^+)} f(x) = \lim\limits_{x\to(-\sqrt{5}^-)} f(x) = +\infty$

c)

Soit $f(x) = \dfrac{|x|\cdot(2-x)}{1-|x|}$

$1-|x|=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=1 \;\; ou \;\; x=-1$

$Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } 1-|x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

•*Pour* $x>1 : f(x) = \dfrac{x(2-x)}{1-x} = \dfrac{2x-x^2}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\cancel{x}^2}{-\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$

• *Pour* $x<-1 : f(x) = \dfrac{-x(2-x)}{1+x} = \dfrac{-2x+x^2}{1+x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $(1-\lvert x\rvert)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• $\lim\limits_{x\to(-1)^-} |x|\cdot(2-x) = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (1-|x|) = 0^-$

donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty \left(\text{de la forme } \dfrac{3}{0^-}\right)$

• $\lim\limits_{x\to(-1)^+} |x|\cdot(2-x) = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (1-|x|) = 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \left(\text{de la forme } \dfrac{3}{0^+}\right)$

• $\lim\limits_{x\to1^-} |x|\cdot(2-x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-} (1-|x|) = 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty \left(\text{de la forme } \dfrac{1}{0^+}\right)$

• $\lim\limits_{x\to1^+} |x|\cdot(2-x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+} (1-|x|) = 0^-$

donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty \left(\text{de la forme } \dfrac{1}{0^-}\right)$

d)

$f(x) = \dfrac{x^2-|x|-1}{|2x|-3}$

$|2x|-3=0 \Leftrightarrow |2x|=3 \Leftrightarrow 2x=3 \;\; ou \;\; 2x=-3$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2} \;\; ou \;\; x=-\dfrac{3}{2}$

$Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } |2x|-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$

$\bullet$ *Pour* $x > \frac{3}{2} : f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{2x-3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}^2}{2\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x}{2}) = +\infty$

$\bullet$ *Pour* $x < -\frac{3}{2}$:

$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{-2x-3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}^2}{-2\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{x}{2}) = +\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $(\|2x\| - 3)$		+	0	−	0	+	

$\bullet$ $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} x^2 - |x| - 1 = -\frac{1}{4}$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} (|2x| - 3) = 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = -\infty \left(\text{de la forme } \frac{-0.25}{0^+}\right)$

$\bullet$ $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} x^2 - |x| - 1 = -\frac{1}{4}$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} (|2x| - 3) = 0^-$

donc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = +\infty \left(\text{de la forme } \frac{-0.25}{0^-}\right)$

$\bullet$ $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} x^2 - |x| - 1 = -\frac{1}{4}$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} (|2x| - 3) = 0^-$

donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = +\infty \left(\text{de la forme } \frac{-0.25}{0^-}\right)$

$\bullet$ $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} x^2 - |x| - 1 = -\frac{1}{4}$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} (|2x| - 3) = 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = -\infty \left(\text{de la forme } \frac{-0.25}{0^+}\right)$

Exercice 11 :

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + |x| - 1 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + |x| - 1 = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$\bullet$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{1} = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}_{1} = +\infty$

$\bullet$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{1} = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{-\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}_{1} = -\infty$

c) $f(x) = \frac{-1}{x-4} + \sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}}$

$\bullet$* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}} = \sqrt{0} = 0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x-4} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$

•* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}}=\sqrt{0}=0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-4}=\frac{-1}{-\infty}=0$

$d'où\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0+0=0$

d) $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)^6=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(-x+2)^6}=+\infty$ *par suite* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}=0$

il resulte : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\overbrace{x}^{+\infty}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}}_{\searrow 0}\right)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)^6=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{(-x+2)^6}=+\infty$ *par suite* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}=0$

il resulte : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\overbrace{x}^{-\infty}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}}_{\searrow 0}\right)=-\infty$

Exercice 12 :

$f(x)=x+\frac{1}{x^2}$

1) $Df=\{x\in\mathbb{R},x^2\neq 0\}=\mathbb{R}^*$

2) Graphiquement on a :

$\otimes\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ $\otimes\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\otimes\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$ $\otimes\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$

d'où la droite d'équation x = 0 **(la droite des ordonnées)** est une asymptote verticale pour C

Exercice 13 :

1) * $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

$d'où\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+(-x)=+\infty$

2) a) pour tout réel x on a :

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Donc $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x};x\in\mathbb{R}$

b)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

$d'où\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\underbrace{x}_{+\infty}\right)=+\infty$

ce qui donne : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

Ainsi la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à C au voisinage de plus l'infini

Exercice 14 :

$f(x)=\frac{2x^2-4x+6}{x^2-3x+2}$

1)

$Df=\{x\in\mathbb{R},x^2-3x+2\neq 0\}$

Or on a :

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$a + b + c = 0$ donne $x' = 1$ *et* $x'' = 2$

Par suite $Df = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

2) Rappelons que : $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$

Donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

3)

$* \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} = 2$

Ce qui prouve que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

*

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $(x^2 - 3x + 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$* \bullet \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 - 4x + 6) = 4$

donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$\bullet \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0^-$ *et* $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x^2 - 4x + 6) = 4$

donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe C de f

$* \bullet \lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0^-$ *et* $\lim\limits_{x \to 2^-} (2x^2 - 4x + 6) = 6$

donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$

$\bullet \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x \to 2^+} (2x^2 - 4x + 6) = 6$

donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

Donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe C de f

4) Pour tout $x \in Df$ on a :

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 2} - 2$$

$$= \frac{(2x^2 - 4x + 6) - 2(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 6 - 2x^2 + 6x - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= \frac{2x + 2}{x^2 - 3x + 2}$$

Δ D'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

On va tout d'abord étudier le signe de $f(x) - 2$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
Signe de $(x^2 - 3x + 2)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Singe de $(2x + 2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\left(\frac{2x+2}{x^2 - 3x + 2}\right)$		$-$		$+$	||	$-$	||	$+$	

D'où :

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
Signe de $(f(x)-2)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
Position relative	Δ aux dessus de C	Δ aux dessous de C	Δ aux dessus de C	Δ aux dessous de C	

$A(-1,2)$: point d'intersection de C avec Δ

Exercice 15 :

1) $$f(x)=\frac{x^2+x-10}{(x-2)^2}$$

$$*\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2}=1$$

$$*\bullet\lim_{x\to2}\left(x^2+x-10\right)=-4\ et\ \lim_{x\to2}(x-2)^2=0^+$$

$$donc\ \lim_{x\to2} f(x)=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

2) pour $x\neq 2$

$$1+\frac{5x-14}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2+(5x-14)}{(x-2)^2}=\frac{x^2+x-10}{(x-2)^2}=f(x)$$

3) On a

$$\lim_{x\to2} f(x)=-\infty$$

Donc la droite d'équation : $x=2$ est une asymptote verticale à C.

On a $* \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

Donc la droite D d'équation : $y=1$ est une asymptote horizontale à C.

4) $$f(x)-1=\frac{5x-14}{(x-2)^2}\quad ;\quad \Delta: y=1$$

le signe de

$(f(x)-1)$ *est celui de* $(5x-14)$

x	$-\infty$		$14/5$		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	
Position relative		Δ/C	|	C/Δ	

Exercice 16 :

1) $$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

a) $Df=\{x\in\mathbb{R}\text{ telque } x\neq0\}=\mathbb{R}^*$

b) $\bullet$Pour $x\in Df=\mathbb{R}^*$, *on a* : $(-x)\in Df$

$$\bullet f(-x)=\frac{\sqrt{1+(-x)^2}-1}{(-x)}=-\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

donc : $f(-x)=-f(x)$

Conclusion : f est une fonction impaire

2) a) $\bullet$Pour $x\in\mathbb{R}^*$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\times\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{(1+x^2)-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$f(x)=\frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

b)

Pour $x\neq0$ on a : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=g(x)$

g est continue en 0 d'où $\lim_{x\to0} f(x)=g(0)=0$

$\lim_{x\to0} f(x)=0$: nombre fini donc f admet un prolongement par continuité en 0

3) a) Pour $x>0$ *on a* : $\sqrt{x^2}=x$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\frac{1}{x}\ ;\ x>0$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\ \ d'où\ \ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=1$$

$$et\ comme\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\ on\ aura:\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

Donc la droite D d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$

c)

• Pour $x\in\left]0,+\infty\right[$ *on a* : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

*comme: $\sqrt{1+x^2}+1>\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=x>0$

alors $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}<1$ d'où $f(x)<1$

par suite la courbe C est dessous de l'asymptote D: $y=1$ *sur* $\left]0,+\infty\right[$

• Pour $x\in\left]-\infty,0\right[$ *on a* : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}<0<1$

d'où $f(x)<1$ *ce qui prouve que* la courbe C est dessous de l'asymptote D: $y=1$ sur $\left]-\infty,0\right[$

4) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ et comme f est impaire

alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$

Donc la droite D' d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $-\infty$

b) $D'=S_O(D)$ et la courbe C est symétrique

par rapport à O . Comme C est au dessous de D alors C est au dessus de son asymptote D'

Remarque : on pourra montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ que $f(x)\succ -1$

(On distinguera le cas $x>0$ *et* $x<0$)

Exercice 17 :

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$

• $Df=\{x\in\mathbb{R}$ telque $x^2-1>0$ et $x^3\neq 0\}$

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
Signe de (x^2-1)	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$$Df=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$$

•Pour $x\in Df\Rightarrow x\leq -1$ *ou* $x\geq 1$

$\Rightarrow -x\geq 1$ *ou* $-x\leq -1$, *donc* $(-x)\in Df$

$$\bullet f(-x)=\frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{(-x)^3}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x^3}=-\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\right)$$

donc : $f(-x)=-f(x)$

Conclusion : f est une fonction impaire

2) •Pour $x \geq 1$ on a : $x^3 = \sqrt{x^6}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} = f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^6}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^6}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et comme f est impaire

alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Donc la droite D d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe C de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$

4) l'asymptote D d'équation $y = 0$

• pour $x > 1$ on a : $f(x) > 0$

ce qui prouve que la courbe C est dessus de l'asymptote D sur $[1, +\infty[$

Le point d'abscisse 1 est commun à C et D

• pour $x < -1$ on a : $f(x) < 0$

ce qui prouve que la courbe C est dessous de l'asymptote D sur $]-\infty, -1]$

Le point d'abscisse -1 est commun à C et D

Exercice 18 :

$$f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x}$$

1) $D_f = IR^*$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}^2}{2\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x}{2}) = +\infty$

• $\lim_{x\to 0^+} (x^2 - 2x + 2) = 2$ *et* $\lim_{x\to 0^+} (2x) = 0^+$

donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ *(de la forme* $\frac{2}{0^+}$*)*

2) a)

$$f(x) - (\frac{x}{2} - 1) = (\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{x}) - \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{x}$$

$$\oplus \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (\frac{x}{2} - 1) \right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Donc la droite D d'équation : $y = \frac{x}{2} - 1$ est une asymptote oblique à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$

b) $\oplus$ $f(x) - (\frac{x}{2} - 1) = \frac{1}{x} > 0$ *sur* $]0; +\infty[$

Donc C est au dessus de D

Exercice 19 :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

1) $Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } (x-2) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) • $\lim_{x\to+\infty} (-x+1) = -\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x\to-\infty} (-x+1) = +\infty$

et $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)=+\infty$ (*de la forme* $\dfrac{1}{0^+}$) *et* $\lim\limits_{x\to 2}(-x+1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty+(-1)=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$

3) Δ d'équation : $y=-x+1$

a) $M(x,y)\in C\cap\Delta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=-x+1 \end{cases}$$

$$f(x)=-x+1 \Leftrightarrow -x+1+\frac{x-1}{(x-2)^2}=-x+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Or pour $x=1$ on a : $y=0$

Conclusion : $C\cap\Delta=\{A\ (1,0)\}$

b) $\oplus$ $f(x)-(-x+1)=\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
Signe de $f(x)-(-x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Position relative de C par rapport à Δ	C est au Dessous de Δ	C au dessu de Δ	C est au dessus de Δ	C est au dessus de Δ

4) a) $MN=|f(x)-(-x+1)|$

$$MN=\left|\frac{x-1}{(x-2)^2}\right|=\frac{|x-1|}{(x-2)^2}$$

b)

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(-x+1)]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x-1}{(x-2)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

c) la droite Δ d'équation : $y=-x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

Exercice 20 :

$$f(x)=ax+b+\frac{1}{3-x}$$

1) $Df=\{x\in\mathbb{R}$ telque $(3-x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

2) $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(4)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+1=1 \\ 4a+b-1=-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ 4a-2a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

donc $f(x)=-x+2+\dfrac{1}{3-x}$

3) a)

$\bullet \lim\limits_{x\to 3^+}(-x+2)=-1$ *et* $\lim\limits_{x\to 3^+}(\dfrac{1}{\underbrace{3-x}_{\searrow 0^-}})=-\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$

$\bullet \lim\limits_{x\to 3^-}(-x+2)=-1$ *et* $\lim\limits_{x\to 3^-}(\dfrac{1}{\underbrace{3-x}_{\searrow 0^+}})=+\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

d'où la droite D d'équation : $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe C de f

b) D' : $y=-x+2$

$$M(x,y)\in D\cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-x+2=-3+2=-1 \end{cases}$$

Conclusion : $D\cap D'=\{I\ (3,-1)\}$

4) $M(x,y)$ et $N=S_I(M)$

a) I milieu de segment $[MN]$ d'où

$$\begin{cases} \dfrac{x_M+x_N}{2}=x_I \\ \dfrac{y_M+y_N}{2}=y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N=2x_I-x_M \\ y_N=2y_I-y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N=6-x \\ y_N=-2-y \end{cases}$$

Donc $N(6-x,-2-y)$

b)

$N\,(6-x,-2-f(x))$

$N\in C$ si et seulement si

$6-x\neq 3$ et $f(6-x)=-2-f(x)$

c) pour $x\neq 3$ on a : $6-x\neq 3$

$$\begin{aligned} f(6-x)&=-(6-x)+2+\frac{1}{3-(6-x)} \\ &=-6+x+2+\frac{1}{x-3} \\ &=-4+x-\frac{1}{x-3} \\ &=-2-2+x-\frac{1}{x-3} \\ &=-2-\left(2-x+\frac{1}{3-x}\right) \\ &=-2-f(x) \quad d'où \quad N\in C \end{aligned}$$

CONCLUSION :

$(6-x)\in D_f$ et $f(2\times\underbrace{3}_{x_I}-x)=2\times\underbrace{(-1)}_{y_I}-f(x)$

D'où le point $I\,(3,-1)$ est un centre de symétrie pour la courbe C

Exercice 21 :

$$f(x)=ax^2+bx+c-\frac{1}{x+1} \quad ; \quad x\neq -1$$

1) $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=\dfrac{1}{2} \\ f(2)=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-1=0 \\ a+b+c-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ 4a+2b+c-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b=0 \\ 4a+2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-a \\ 4a-2a=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ $\quad d'où\ f(x)=x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}$

2) $(P): y=x^2-x+1$

a) $\oplus\ f(x)-(x^2-x+1)=\dfrac{-1}{x+1}$

x	$-\infty$ $\quad -1$	$+\infty$
Signe de $f(x)-(x^2-x+1)$	$+$	$-$
Position relative de C par rapport à P	C est au dessus de P	C est au dessous de P

b)

$x\neq -1$; $MN=\left|f(x)-(x^2-x+1)\right|=\dfrac{|-1|}{|x+1|}=\dfrac{1}{|x+1|}$

c)

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x^2-x+1)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=0$$

d) $MN\leq 0.01 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x+1|}\leq\dfrac{1}{100} \Leftrightarrow |x+1|\geq 100$

$\Leftrightarrow x+1\leq -100 \ \ ou \ \ x+1\geq 100$

$\Leftrightarrow x\leq -101 \ \ ou \ \ x\geq 99$

QCM :

1) $f'(1)=\frac{1}{2} \longrightarrow$ (b)

2) $y=3(x+1)-1 \longrightarrow$ (b)

3) $f'(o)=-1 \longrightarrow$ (b)

4) $f'(2)=0 \longrightarrow$ (a)

5) $y=-2x+3 \longrightarrow$ (c)

Vrai – Faux

1) Faux le cas où $f_g'(a)\neq f_d'(a)$ (voir l'exemple de la question suivante $f(x)=|x|$ et $a=0$)

2) Faux En effet :

•pour $x>0$, $f(x)=x$ on a :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \ d'où\ f_d'(0)=1$$

•pour $x<0$ $f(x)=-x$ on a :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1 \ d'où\ f_g'(0)=-1$$

on aura : $f_g'(0)\neq f_d'(0)$

Donc f n'est pas dérivable en 0

3) Faux En effet :

$$\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+}\frac{f(x)-f(-\frac{3}{2})}{x-(-\frac{3}{2})}=\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+}\frac{\sqrt{2x+3}}{x+\frac{3}{2}}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+}2\left(\frac{\sqrt{2x+3}}{2x+3}\right)=\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+}\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}}\right)=+\infty$$

car $\lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+}\left(\sqrt{2x+3}\right)=0^+$

4) Faux

Contre exemple : *Soit* $f(x)=|x|$ et $a=0$

5) Faux

Contre exemple : *Soit* $f(x)=x$

f est impaire mais $f'(0)=1$

Mobiliser ses Compétences :

Situation 1

1) $f(x)=0$ *pour* $x\simeq 1.2$

2) f est continue sur $[1,2]$

et $f(1)\times f(2)=-14<0$ *d'où* $\alpha\in[1,2]$

3)a) (T) : la tangente à (C*f*) au point d'abscisse 1

$f(x)=2x^3+x-4$

Pour tout $a\in\mathbb{R}: f'(a)=6a^2+1$

d'où $f'(1)=7$

•$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)=7(x-1)-1$

$(T): y=7x-8$

• Intersection de (T) est la droite *(Ox)*

$$M(x,y)\in(T)\cap(Ox):\begin{cases}y=0\\ y=7x-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=\frac{8}{7}\end{cases}$$

donc $\boxed{x_1=\frac{8}{7}}$

•f *est continue sur* $\left[1,\frac{8}{7}\right]$

$f(1)=-1$ *et* $f(\frac{8}{7})=\frac{44}{343}$

$f(1)\times f(\frac{8}{7})<0$ *d'où* $\alpha\in\left[1,\frac{8}{7}\right]$

b) (T_1) : la tangente à (C*f*) au point d'abscisse $\frac{8}{7}$

$f'(\frac{8}{7})=\frac{433}{49}$ et $f(\frac{8}{7})=\frac{44}{343}$

$\bullet (T_1): y=\frac{433}{49}(x-\frac{7}{8})+\frac{44}{343}$

- Intersection de (T_1) est la droite *(Ox)*

$$M(x,y)\in (T_1)\cap(Ox):\begin{cases} y=0 \\ y=\frac{433}{49}(x-\frac{7}{8})+\frac{44}{343}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{3420}{3031}\end{cases} \quad donc \quad \boxed{x_2=\frac{3420}{3031}}$$

$\bullet f$ *est continue sur* $[1,x_2]$

vérifier(à l'aide d'une calculatrice que :

$f(1)\times f(\frac{3420}{3031})<0$ *d'où* $\alpha\in[1,x_2]$

c) (T_2) : la tangente à (C*f*) au point d'abscisse x_2

coupe (Ox) au point d'abscisse x_3

de même procédure on détermine x_3

d'où $\alpha\in[1,x_3]$

Situation 2

$$f(x)=\frac{1-x^{10}}{1-x};x\neq 1$$

1) $u_n=x^n, n\in\mathbb{N}$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q=x\neq 1$

alors : $u_0+u_1+....+u_n=u_0(\frac{1-q^{n+1}}{1-q})$

ce qui donne : $1+x+x^8+...+x^9=\frac{1-x^{10}}{1-x}$

Ou bien développer et vérifier que :

$(1-x)(1+x+x^8+...+x^9)=1-x^{10}$

2)

$f(x)=1+x+x^2+...+x^9$

$\bullet f'(a)=1+2a+3a^2+4a^3...+9a^8$

D'autre part :

$f=\frac{g}{h}$ *avec* $g(x)=1-x^{10}$ *et* $h(x)=1-x$

$$\bullet f'(a)=\frac{g'(a).h(a)-h'(a).g(a)}{[h(a)]^2}$$
$$=\frac{-10a^9(1-a)+(1-a^{10})}{(1-a)^2}$$
$$=\frac{1+9a^{10}-10a^9}{(1-a)^2}$$

3) on aura donc :

$$1+2a+3a^2+4a^3...+9a^8=\frac{1+9a^{10}-10a^9}{(1-a)^2};a\neq 1$$

Exercices

Exercice 1 :

1) $f(x)=x^4-3x^2+5$

Pour tout réel *a* on a :

$f'(a)=4a^3-6a$ *d'où* $f'(1)=-2$

2) $f(x)=\frac{4}{2x+3}=4\times\left(\frac{1}{2x+3}\right)$

Pour tout réel $a\neq -\frac{3}{2}$ on a :

$f'(a)=4\times\left(\frac{-2}{(2x+3)^2}\right)=\frac{-8}{(2x+3)^2}$

d'où $f'(-1)=\frac{-8}{1}=-8$

3) $f(x)=\frac{3x+5}{-2x+3}$

Pour tout réel $a \neq \frac{3}{2}$ on a :

$$f'(a) = \frac{3\times3-(-2)\times5}{(-2a+3)^2} = \frac{19}{(-2a+3)^2}$$

$$d'où\ \ f'(\frac{1}{3}) = \frac{1539}{49}$$

4) $f(x) = \frac{-3}{x^2+3} = -3\left(\frac{1}{x^2+3}\right)$

Pour tout réel a on a :

$$f'(a) = -3\left(\frac{-2a}{(a^2+3)^2}\right) = \frac{6a}{(a^2+3)^2}$$

$$d'où\ \ f'(2) = \frac{12}{49}$$

5) $f(x) = (2x+3)^3$

Pour tout réel a on a :

$$f'(a) = 3\times2\times(2a+3)^2 = 6(2a+3)^2$$

$$d'où\ \ f'(\frac{1}{2}) = 96$$

6) $f(x) = \sqrt{4x+5}$

Pour tout réel $a \in \left]-\frac{5}{4},+\infty\right[$ on a :

$$f'(a) = \frac{4}{2\sqrt{4a+5}} = \frac{2}{\sqrt{4a+5}}$$

$$d'où\ \ f'(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

7) $f(x) = 2x\sqrt{x}$

pour $\in]0,+\infty[$, $f'(a) = 2\left(\sqrt{a} + x\,\frac{1}{2\sqrt{a}}\right) = 3\sqrt{a}$

d'où $f'(1) = 3$

8) $f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4}$

Or on a : $-x^2+5x-4=0$

$a+b+c=0$ donne $x'=1$ *et* $x''=4$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de $(-x^2+5x-4x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour tout réel $a \in]1,4[$ on a :

$$f'(a) = \frac{-2a+5}{2\sqrt{-a^2+5a-4}}$$

$$d'où\ \ f'(3) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2 :

1) $f(x) = |x|\sqrt{x}$ et $Df = [0,+\infty[$

donc $f(x) = x\sqrt{x}$

a) f est continue à droite en 0 comme étant produit de deux fonctions continues

b)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to0^+}\sqrt{x} = 0$$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$

2) $g(x) = |x-1|$

a) la fonction $h(x) = x-1$ est continue en 1 d'où

$g = |h|$ est continue en 1

b) • *pour* $x > 1$ on a : $g(x) = x-1$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{x-1}\right) = 1$$

d'où g *est dérivable à droite en* 1 et $g_d'(1) = 1$

• *pour* $x < 1$ on a : $g(x) = -(x-1)$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{-(x-1)}{x-1}\right) = -1$$

d'où g *est dérivable à* gauche *en* 1 et $g_g'(1) = -1$

on aura : $g_g'(0) \neq g_d'(0)$

Conclusion *g* n'est pas dérivable en 1

Exercice 3 :

a) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$. On pose $g(x)=x^2$

g est dérivable en tout réel a et $g'(a) = 2a$

$ainsi : f(x)=\dfrac{g(x)-g(-4)}{x-(-4)}$

d'où $\lim\limits_{x\to(-4)} f(x)=g'(-4)=-8$

b) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x+5}-1}{x+4}$. On pose $g(x)=\dfrac{1}{x+5}$

g est dèrivable en tout réel $a\neq-5$

$et\ g'(a)=\dfrac{-1}{(a+5)^2}$

donc g est dérivable en (-4) et $g'(-4) = -1$

$ainsi : f(x)=\dfrac{g(x)-g(-4)}{x-(-4)}$

d'où $\lim\limits_{x\to(-4)} f(x)=g'(-4)=-1$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. On pose $g(x)=\sqrt{x}$

g est dèrivable en tout réel $a\in]0,+\infty[$

$et\ g'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\Rightarrow g'(1)=\dfrac{1}{2}$

$ainsi : f(x)=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

d'où $\lim\limits_{x\to1} f(x)=g'(1)=\dfrac{1}{2}$

d) $f(x)=\dfrac{(x+1)^{2006}-1}{x}$. On pose $g(x)=(x+1)^{2006}$

g est dèrivable en tout réel a

$et\ g'(a)=2006\times(a+1)^{2005}\Rightarrow g'(0)=2006$

$ainsi : f(x)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

d'où $\lim\limits_{x\to0} f(x)=g'(0)=2006$

Exercice 4 :

$f(x)=x^2+4x-7$

1) f est dèrivable en tout réel a

$et\ f'(a)=2a+4\Rightarrow f'(1)=6$

2) a)

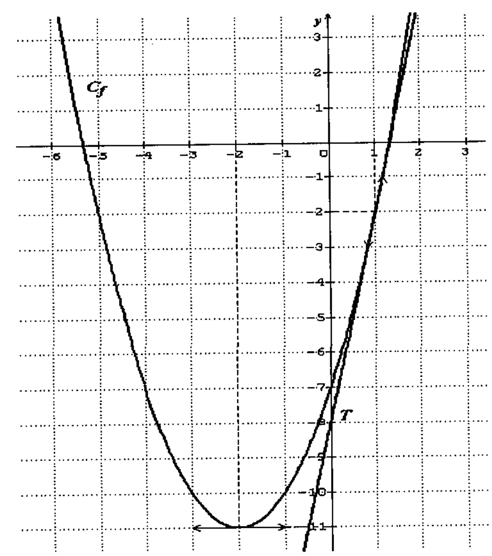
$\bullet(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)-2$

$(T): y=6x-8$

b) (Cf) est une parabole de sommet $S(-2,-11)$ et d'axe symétrie la droite d'équation $x=-2$

Utiliser un tableau des valeurs pour tracer (Cf)

(cours 2eme années)



Exercice 5 : $f(x)=\sqrt{x+4}$

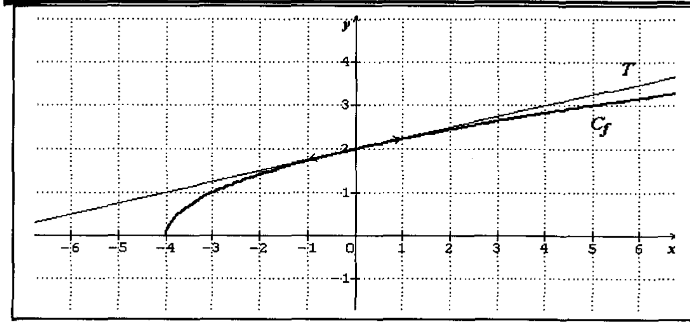
1) Pour tout réel $a\in]-4,+\infty[$ on a :

$f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a+4}}$ $d'où$ $f'(0)=\dfrac{1}{4}$

2) a) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$T: y=\dfrac{1}{4}x+2$

b) traçage de la courbe de f et tangénte T :



Exercice 6 : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$; $x\in\,]1,+\infty[$

1) $3+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{3x+1}{x-1}=f(x)$

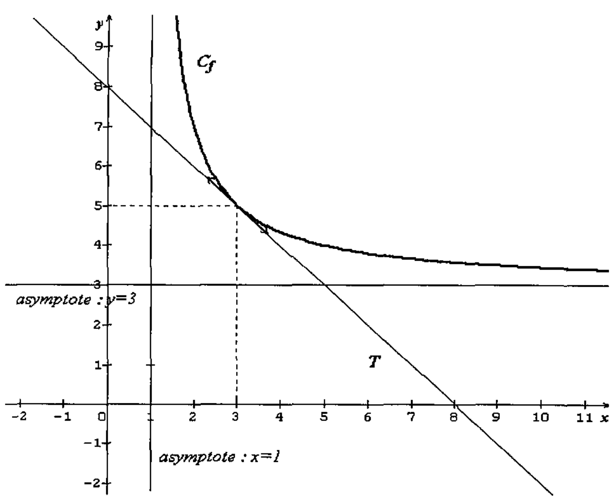
2) f est dèrivable en tout réel $a\in\,]1,+\infty[$

$et\ f'(a)=4.\left(\dfrac{-1}{(a-1)^2}\right)=\dfrac{-4}{(a-1)^2}\Rightarrow f'(3)=-1$

3) a) $T:y=f'(3)(x-3)+f(3)$

$T:y=-x+8$

b) traçage de la courbe de f et tangente T :



Exercice 7

1)

• $A(-1,-8)\in(Cf)\Rightarrow f(-1)=-8$

$\Rightarrow a-b+c=-8$ (1)

• $f'(1)$: le coefficient directeur de la tangente T d'où $f'(1)=1$

Or pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ on a : $f'(x_0)=2ax_0+b$

$\Rightarrow f'(1)=2a+b=1$ (2)

• T passe par le point $B(1,f(1))$

et T à pour équation : $y=x-3$

$\Rightarrow f(1)=-2$ (*pour* $x=1$ *on a* $y=-2$)

$\Rightarrow a+b+c=-2$ (3)

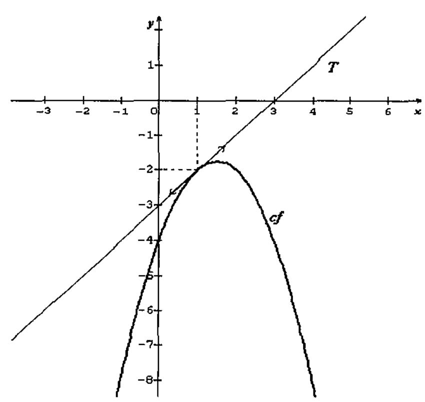
On aura donc le système suivant :

$$\begin{cases}a-b+c=-8\\ 2a+b=1\\ a+b+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-(1-2a)+c=-8\\ b=1-2a\\ a+(1-2a)+c=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-2a\\ 3a+c=-7\\ -a+c=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=3\\ c=-4\end{cases}$$

d'où $\boxed{f(x)=-x^2+3x-4}$

2) (Cf) est une parabole de sommet $S(\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{4})$ et d'axe la droite d'équation $x=\dfrac{3}{2}$



Exercice 8

$$P : y = x^2$$
$$P' : y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$$

1) $M(x,y) \in P \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{3}x^2 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = -\frac{1}{3}x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

par suite $P \cap P' = \left\{ A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}) \ ; \ B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}) \right\}$

2) a) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(a) = 2a \ ; \ a \in \mathbb{R}$

$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow g'(a) = -\frac{2}{3}a \ ; \ a \in \mathbb{R}$

alors on a : $f'(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

$g'(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

• $T : y = f'(-\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + f(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$y = -\sqrt{3}(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4} = -\sqrt{3}x - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$

$T : y = -\sqrt{3}x - \frac{3}{4}$

• $T' : y = g'(-\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + g(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4}$

$T' : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{4}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ *vecteur directeur de* T

$\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ *vecteur directeur de* T'

on a : $\vec{u}\,\vec{u}' = 1 \times 1 + (-\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - 1 = 0$

d'où $\vec{u} \perp \vec{u}'$ par suite $T \perp T'$

3) a)

• $D : y = f'(\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4} \Rightarrow D : y = \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$

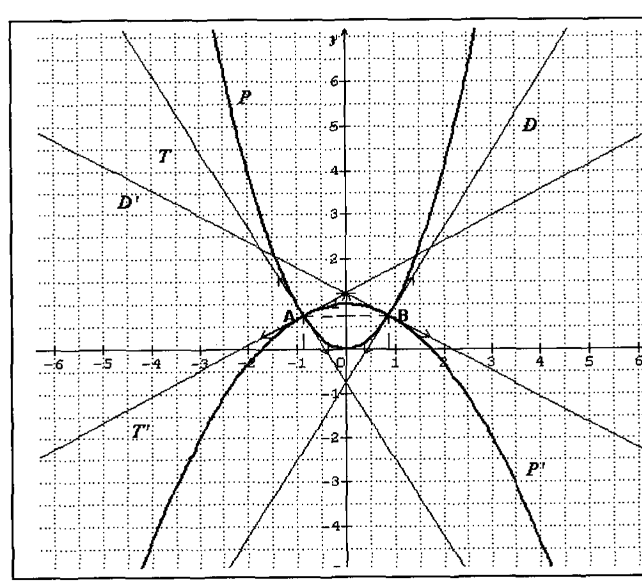
$D' : y = g'(\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4} \Rightarrow D' : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{4}$

b) $m = \sqrt{3}$ *: coefficient directeur de* D

$m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *: coefficient directeur de* D'

On a : $m \times m' = \sqrt{3} \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -1$ d'où $D \perp D'$

4) graphe :



Exercice 9

1) $f(x)=x^3+3x^2-2$; $g(x)=x^3+3x^2+1$

f et g sont deux fonctions polynômes donc elles sont dérivables en tout réel a

2) $f'(a)=g'(a)=3a^2+6a$

3) les tangentes respectives à C et C' au point d'abscisse a ont le même coefficient directeur puisque $f'(a)=g'(a)$ pour tout réel a donc elles sont parallèles.

Exercice 10

$$f(x)=\frac{5}{2x^2+3}$$

1) $2x^2+3\neq 0$; pour tout réel x , f est une fonction rationnelle définie sur tout IR donc elle est dérivable en tout réel a

2) f est dèrivable en tout réel a

$$et\ f'(a)=5.\left(\frac{-4a}{\left(2a^2+3\right)^2}\right)=\frac{-20a}{\left(2a^2+3\right)^2}$$

3) a) $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=0$
la tangente à C au point d'abscisse 0 est paralléle à l'axe $(O,\vec{i})$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où C n'admet pas de tangente paralléle à l'axe $(O,\vec{j})$

c) la droite D d'équation $y=x$ à pour coefficient directeur $m=1$. la tangente à C est paralléle à D si et seulement si :

$$f'(a)=1 \Leftrightarrow \frac{-20a}{\left(2a^2+3\right)^2}=1 \Leftrightarrow \left(2a^2+3\right)^2=-20a$$

$$\Leftrightarrow 4a^4+12a^2+20a+9=0$$

On considére le polynôme : $P(x)=12x^2+20x+9$

$a=12;\ b=20;\ c=9$

$\Delta=b^2-4ac=20^2-36\times12=-32<0$ *et* $a=12>0$

d'où $P(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$

par suite : $4a^4+12a^2+20a+9>0$

ce qui prouve que : $4a^4+\underbrace{12a^2+20a+9}_{>0}=0$

$n'a$ pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Conclusion : C n'admet pas des tangentes parallèles à la droite $D : y = x$

c) la droite D d'équation $y=-x$ à pour coefficient directeur $m=-1$. la tangente à C est paralléle à D si et seulement si :

$$f'(a)=-1 \Leftrightarrow \frac{-20a}{\left(2a^2+3\right)^2}=-1 \Leftrightarrow \left(2a^2+3\right)^2=20a$$

$$\Leftrightarrow 4a^4+12a^2-20a+9=0$$

On considére le polynôme : $P(x)=12x^2-20x+9$

$a=12;\ b=-20;\ c=9$

$\Delta=b^2-4ac=20^2-36\times12=-32<0$ *et* $a=12>0$

d'où $P(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$

par suite : $4a^4+12a^2-20a+9>0$

ce qui prouve que : $4a^4+\underbrace{12a^2-20a+9}_{>0}=0$

$n'a$ pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Conclusion : C n'admet pas des tangentes parallèles à la droite $D : y = -x$

Exercice 11 :

$f(x) = x^3$

1) f est une fonction polynôme donc elle est dérivable en tout réel a c'est-à-dire sur tout $\mathbb{R}$

2) $f'(a) = 3a^2$; $a \in \mathbb{R}$

3)

- $A(-1, f(-1)) \in (Cf) \Rightarrow A(-1,-1)$
- $B(2, f(2)) \in (Cf) \Rightarrow B(2,8)$

a) la droite *(AB)* à pour coefficient directeur

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-(-1)}{2-(-1)} = 3$$

b) $f'(a) = 3 \Leftrightarrow 3a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1$
$\Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

Les tangentes à la courbe C respectivement aux points d'abscisses (– 1) et 1 sont parallèles à la droite *(AB)*

(en particulier la tangente en a est la droite *(AB)*)

Exercice 12 :

$f(x) = x^5 - 3x^3$

1) $Df = \mathbb{R}$

- pour $x \in Df = \mathbb{R}$ on a : $(-x) \in Df$
- $f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 = -x^5 + 3x^3$

$= -(x^5 - 3x^3) = -f(x)$

Donc f est impaire

2) a) f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

b) $f'(a) = 5a^4 - 9a^2$; $a \in \mathbb{R}$

3)

- le coefficient directeur de La tangente à la courbe C au point d'abscisse a est $f'(a) = 5a^4 - 9a^2$
- $f'(-a) = 5(-a)^4 - 9(-a)^2 = 5a^4 - 9a^2 = f'(a)$ Donc La tangente à la courbe C au point d'abscisse

$(-a)$ est parallèle à celle au point d'abscisse a car elles ont le même coefficient directeur.

Exercice 13 :

$f(x) = x^2 + 2x - 1$
$g(x) = -x^2 - 6x - 9$

1) $M(x,y) \in C \cap C' \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = -x^2 - 6x - 9$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
et on a : $f(-2) = g(-2) = -1$

Conclusion : $C \cap C' = \{A(-2,-1)\}$

2) *pour tout réel a*
$f'(a) = 2a + 2$ et $g'(a) = -2a - 6$
$ainsi : \begin{cases} f'(-2) = g'(-2) = -2 \\ f(-2) = g(-2) = -1 \end{cases}$

Donc C et C' ont la même tangente *(T)* en *A* ;

$T : y = f'(-2)(x-(-2) + f(-2)$
$= -2(x+2) - 1$
donc $\boxed{T : y = -2x - 5}$

3) a) $f(x) - (-2x-5) = x^2 + 2x - 1 + 2x + 5$
$= x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$
d'où $f(x) - (-2x-5) \geq 0$
ainsi la courbe C de f est au dessus de la tangente T

b) $g(x)-(-2x-5)=-x^2-6x-9+2x+5$

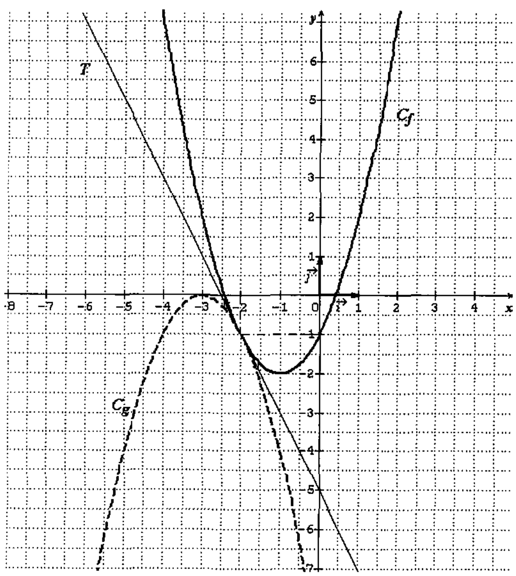
$=-x^2-4x-4=-(x^2+4x+4)$

$=-(x+2)^2\leq 0$

$d'où\ \ g(x)-(-2x-5)\leq 0$

ainsi la courbe C' de g est au dessous de la tangente T

4) graphe



Exercice 14 :

$f(x)=-x^4+4x-5$

1) f est une fonction polynôme donc elle est dérivable

en tout réel a et $f'(a)=-4a^3+4 \Rightarrow f'(1)=0$

2)

- $h_1=0.0001$ et assez petit

$f(1{,}0001)=f(1+0{,}0001)$

$\approx f(1)+0{,}0001\times f'(1)=-2$

- $h_2=0{,}000001$ et assez petit

$f(0{,}999999)=f(1-0{,}000001)$

$\approx f(1)-0{,}000001\times f'(1)=-2$

3) la calculatrice affiche :

$f(1.0001)=-2.00000006$

$f(0.999999)=-2$

Exercice 15 :

$f(x)=\sqrt{2x+5}\ ;\ Df=\left[-\frac{5}{2},+\infty\right[$

1) Pour tout réel $a\in\left]-\frac{5}{2},+\infty\right[$ on a :

$f'(a)=\frac{2}{2\sqrt{2a+5}}=\frac{1}{\sqrt{2a+5}}\ \ d'où\ \ f'(10)=\frac{1}{5}$

2)

$\oplus\sqrt{25{,}0002}\ =f(10{,}0001)=f(10+0.0001)$

$\approx f(10)+(0{,}0001)\times f'(10)$

$=f(10)+\frac{0{,}0001}{5}=5+\frac{0{,}0001}{5}=5+0{,}00002$

d'où $\sqrt{25{,}0002}\approx 5{,}00002$

$\oplus\sqrt{25{,}000002}\ =f(10{,}000001)=f(10+0.000001)$

$\approx f(10)+(0{,}000001)\times f'(10)$

$=f(10)+\frac{0{,}000001}{5}=5+\frac{0{,}000001}{5}=5+0{,}0000002$

d'où $\sqrt{25{,}000002}\approx 5{,}0000002$

3) la calculatrice affiche :

$\sqrt{25{,}0002}\ =5{,}00002$

$\sqrt{25{,}000002}\ =5{,}0000002$

Exercice 16 :

$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0\\ x^3 & \text{si } x<0\end{cases}$$

1) $f(0)=0\sqrt{0}=0$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{x}\right)=0\\ \bullet \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f=\lim_{x\to 0^-} f=0$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

Ce qui prouve que f est continue en 0

2)

$$\bullet \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 = f_g'(0)$$

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f_d'(0)$$

Donc f est dérivable à droite et à gauche en 0

3) $f_g'(0) = f_d'(0) = 0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

Exercice 17 :

$f(x) = |x^2-4|$; $Df = \mathbb{R}$

$f(x) = |g(x)|$ *avec* $g(x) = x^2-4$

Comme étant une fonction polynôme g est continue sur $\mathbb{R}$ par suite $f = |g|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de (x^2-4)		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\bullet$ *Pour* $x \in]-\infty,-2[$ on a : $f(x) = x^2-4$

$$\lim_{x\to(-2)^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^-} \left(\frac{x^2-4}{x+2}\right) = \lim_{x\to(-2)^-} \left[\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}\right] = \lim_{x\to(-2)^-} (x-2) = -4$$

d'où f est dérivable à gauche de (-2) et $\boxed{f_g'(-2) = -4}$

$\bullet$ *Pour* $x \in]-2,2[$ on a : $f(x) = -(x^2-4)$

$$\lim_{x\to(-2)^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^+} \left(\frac{-(x-2)(x+2)}{x+2}\right) = \lim_{x\to(-2)^+} [-(x-2)] = 4$$

d'où f est dérivable à droite de (-2) et $\boxed{f_d'(-2) = 4}$

b) $f_g'(-2) \neq f_d'(-2)$ d'ou f n'est pas dérivable en (

c) $\bullet$ (T_1) : la demi - tangente à (Cf) à gauche au point d'abscisse (-2)

$$(T_1) : \begin{cases} y = f_g'(-2)(x+2) + f(-2) \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x-8 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$\bullet$(T_2) : la demi - tangente à (Cf) à droite au point d'abscisse (-2)

$$(T_2) : \begin{cases} y = f_d'(-2)(x+2) + f(-2) \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x+8 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

3) a)

$\bullet$ *Pour* $x \in]2,+\infty[$ on a : $f(x) = x^2-4$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \left[\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\right] = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4$$

d'où f est dérivable à droite de 2 et $\boxed{f_d'(2) = 4}$

$\bullet$ *Pour* $x \in]-2,-1[$ on a : $f(x) = -(x^2-4)$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)}\right) = \lim_{x\to 2^-} [-(x+2)] = -4$$

d'où f est dérivable à gauche de 2 et $\boxed{f_g'(2) = -4}$

b) $f_g'(2) \neq f_d'(2) \Leftrightarrow f$ n'est pas dérivable en 2

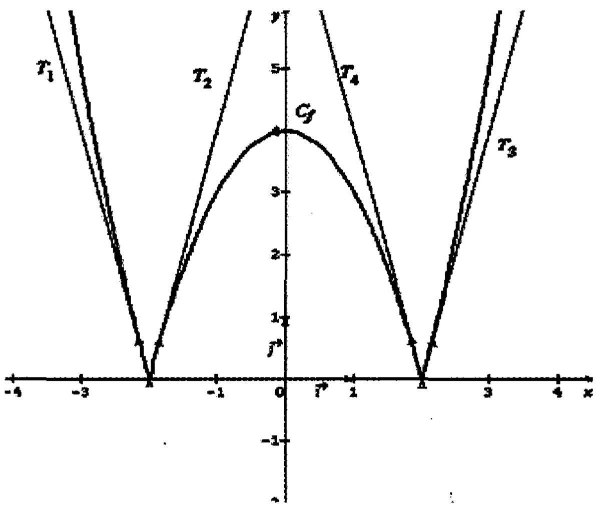
c) $\bullet$ (T_3) : la demi - tangente à (Cf) à droite au point d'abscisse 2

$$(T_3) : \begin{cases} y = f_d'(2)(x-2) + f(2) \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x-8 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$\bullet$ (T_4) : la demi - tangente à (Cf) à gauche au point d'abscisse 2

$$(T_4) : \begin{cases} y = f_g'(2)(x-2) + f(2) \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x+8 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

4) graphe :



Exercice 18 :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-6} & \text{si} \quad x\geq 3\\ x^2-3x & \text{si} \quad x<3\end{cases}$$

1) $f(3)=\sqrt{2\times 3-6}=\sqrt{0}=0$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\sqrt{2x-6}\right)=0\\ \bullet \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2-3x\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f=\lim_{x\to 3^-} f=0$$

D'où $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0=f(3)$

D'où f est continue en 3

2) a)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3x}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{x(x-3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3^-}(x)=3$$

Donc f est dérivable à gauche en 3 et $f_g'(3)=3$

b)

$$(T_1):\begin{cases}y=f_g'(3)(x-3)+f(3)\\ x\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow (T_1):\begin{cases}y=3x-9\\ x\leq 3\end{cases}$$

3) a)

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{2x-6}}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\left(\sqrt{2x-6}\right)^2}{(x-3)\times\sqrt{2x-6}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-6}{(x-3)\times\sqrt{2x-6}}$$
$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{2(x-3)}{(x-3)\times\sqrt{2x-6}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{\sqrt{2x-6}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

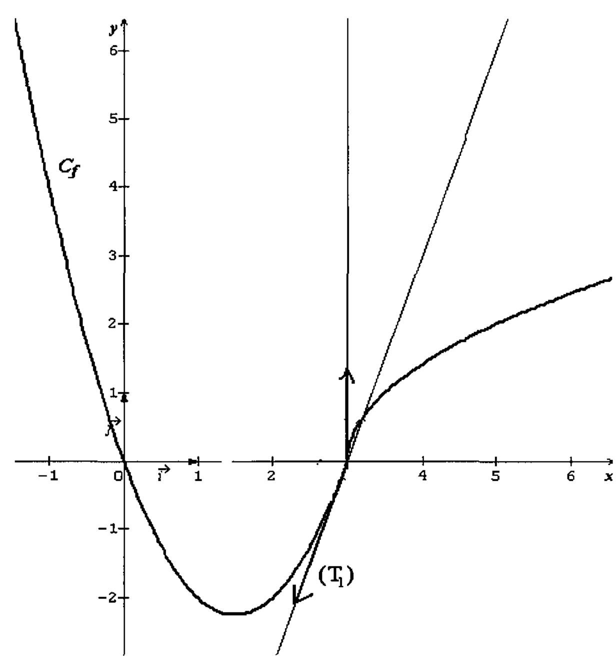
Donc f n'est pas dérivable à droite en 3

b) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

D'où la courbe (Cf) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 3

c) f n'est pas dérivable à droite en 3 donc f n'est pas dérivable en 3

4) graphe



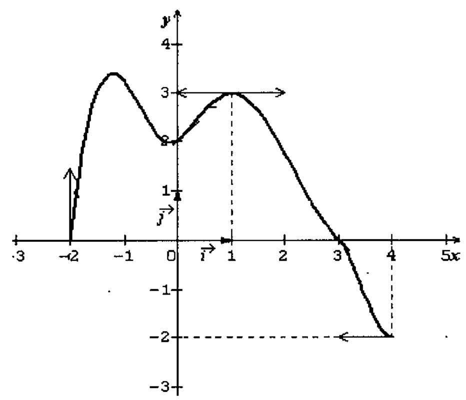
Exercice 19 :

• $Df = [-2,4]$ • $\begin{cases} f(1)=3 \\ f'(1)=0 \end{cases}$

• $\begin{cases} f(4)=-2 \\ f_g'(4)=0 \end{cases}$ • f non dérivable en (-2)

• $\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(3)=0 \end{cases}$ • $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-2,3]$

• f est dècroissante sur $[1,4]$



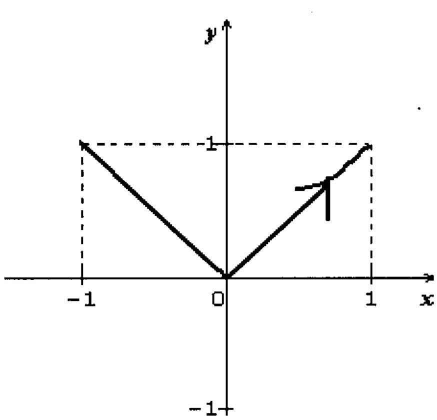
!

• f est paire : (Cf) est symétrique pa rapport à la droite $(O,\vec{j})$

• f est croissante sur $[0,1]$

• $f_d'(0)=1$

1) Exemple : $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$



On peut trouver plusieurs fonctions qui vérifie ces conditions

2) $f(x)=|x| \Leftrightarrow f_g'(0)=-1$ (*pente* de la demi-tangent

3) f non dérivable en 0 car on a : $f_g'(0) \neq f_d'(0)$

Exercice 21 : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $Df=[-1,1]$

1)

• pour $x \in Df = [-1,1]$ on a :
$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \geq -x \geq -1 \Rightarrow (-x) \in Df$

• $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$

Donc f est une fonction paire

2)

$$* \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{(x-1)\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{(x-1)\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(\cancel{x-1})(x+1)}{(\cancel{x-1})\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2}{0^+} = -$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1

(Cf) admet une demi- tangente verticale au point d'abscisse 1, d'équation : $\begin{cases} x=1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$* \lim_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1-x^2}{(x+1)\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-(\cancel{x+1})(x-1)}{(\cancel{x+1})\times\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en (-1)

(Cf) admet une demi- tangente verticale au point d'abscisse (-1), , d'équation : $\begin{cases} x=-1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3)a)

$M(x,y)$ avec $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$

$OM = \sqrt{x^2 + f^2(x)} = \sqrt{x^2 + 1 - x^2} = \sqrt{1} = 1$

$OM = 1$ et $y \geq 0$ d'où $M \in (C)$(demi *cercle*)

$b)$ $(C): x^2 + y^2 = 1$ avec $y \geq 0$

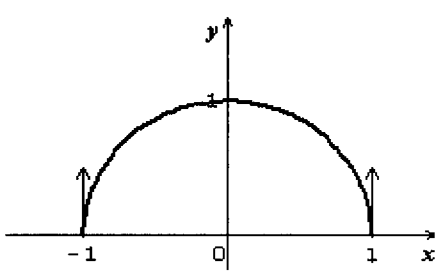
Soit $N(x,y)$ *avec* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow c \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} = f(x)$ d'où $N \in (Cf)$

c) $(C) = (Cf)$

4)



5) $f(\frac{3}{5}) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

a) Pour tout réel $a \in]-1,1[$ on a :

$$f'(a) = \frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$d'où\ f'(\frac{3}{5}) = \frac{-\frac{3}{5}}{\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$T: y = f'(\frac{3}{5})(x - \frac{3}{5}) + f(\frac{3}{5}) = -\frac{3}{4}(x - \frac{3}{5}) + \frac{4}{5}$$

$$T: y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{20} + \frac{4}{5} = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{20}$$

$$\boxed{T: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}}$$

b)

$$P(x_p, y_p) \in T \cap (O,\vec{i}) \Rightarrow \begin{cases} y_P = -\frac{3}{4}x_P + \frac{5}{4} \\ y_P = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x_P + \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}x_P = \frac{5}{4} \Rightarrow x_P = \frac{5}{3}$$

$d'où$ P à pour coordonnées $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

$\bullet OP = \left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$

$$\bullet PA = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(\frac{3}{5} - \frac{5}{3})^2 + (\frac{4}{5})^2}$$

$$= \sqrt{(-\frac{16}{15})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{256}{225} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{400}{225}} = \frac{4}{3}$$

c) On a : $T = (AP)$

$$OA^2 + AP^2 = 1^2 + (\frac{4}{3})^3 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$

$$OP^2 = (\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9}$$

donc : $OA^2 + AP^2 = OP^2$

d'aprés la réciproque du théoréme de Pythagore le triangle OAP est rectangle en A

par suite on aura : $(AP) \perp (OA)$

or on sait que $T = (AP)$

Conclusion : T est perpendculaire à (OA)

Q C M

1) $f'(x) = 20x^3 - 3 \longrightarrow$ b

2) (C_2) est la courbe représentative de $f' \longrightarrow$ b

Tableau de variation de f :

x	-10		-4		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Comparer la position de C_2 par rapport à la droite des abscisses et le signe de f'

3) $f'(x) < 0 \ pour \quad x \in [\, a\,, b\,]$

f est décroissante sur $[\, a\,, b\,]$ donc on a : $a < b \ \Rightarrow f(a) \geq f(b) \longrightarrow$ b

4) $f'(x) = 2x.(2x^2 + 3)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}\ on\ a : f(x) \geq f(0) = 1 \longrightarrow$ b

5) $f\,'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \geq 0 \longrightarrow$ c

VRAI -FAUX

1) Faux

* Pour $x > 0\,,\ f(x) = x$ d'ou $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 = f_d'(0)$

* Pour $x < 0\,,\ f(x) = -x$ d'ou $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 = f_g'(0)$

$f_d'(0) \neq f_g'(0)$ D'où f n'est pas dérivable en 0.

2) Faux

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\sqrt{-2x+1}}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{-2(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})\sqrt{-2x+1}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{-2}{\sqrt{-2x+1}} = -\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$.

3) Faux

Contre exemple : $f(x) = x^3 \quad et \ a = 0$

4) Faux

Contre exemple : $f(x) = x^2 \ , \ g(x) = x^2 + 2014 \quad et \quad I = IR.$

5) Vrai

En effet : si $f'(x) \geq 0 \ pour \ tout \, x \in [\, a\,, b\,] \quad d'où \ f$ est croissante sur $[\, a\,, b\,]$

Ainsi : $a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)\,.\, et \quad f(b) = 0$ alors on aura $f(x) \leq 0$

Mobiliser ses compétences :

*** Situation1** :

1) D_α a pour coefficient directeur α d'où $D_\alpha : y = \alpha.x + b$

$M(1,1) \ \in D_\alpha \quad donne \quad \alpha + b = 1 \ d'ou \ b = 1 - \alpha$

Par suite D_α a pour équation $y = \alpha.x + (1 - \alpha)$

2) a) * $A(x,y) \in D_\alpha \cap (O,\vec{\imath}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \alpha.x + (1-\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = 1 - \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$ d'où $A\left(1 - \dfrac{1}{\alpha}, 0\right)$

* $B(x,y) \in D_\alpha \cap (O,\vec{\jmath}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha.x + (1-\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \alpha \end{cases}$ d'où $B(0\,, 1 - \alpha)$

b) $AB^2 = \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 + (1-\alpha)^2 = 2 + \alpha^2 - 2\alpha - \dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}$

c) On pose : $h(x) = 2 + x^2 - 2x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} \quad ; \quad x \in IR^*\backslash\{1\}$

$$h'(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} = 2(x-1) + \frac{2}{x^3}(x-1)$$

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$h'(x) = \frac{2(x-1)}{x^3}\left(x^3 + 1\right) = \frac{2(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^3}$$

Pour tout $x \in IR^*\backslash\{1\}$ on a : $x^2 - x + 1 > 0 \quad car \quad \Delta = -3 < 0$

Le signe de $h'(x)$ est celui de $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0 || 0	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion : Comme $\alpha \neq 1$, la distance AB n'a pas une valeur minimale

(Sur $]-\infty, 0\,[$ la distance est minimale pour $\alpha = -1$)

<u>* Situation2 :</u>

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$

a) f est dérivable sur $D_f = IR\backslash\{a\}$, comme étant fonction rationnelle.

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-a)^2}$

c) $f''(x) = \dfrac{2}{(x-a)^3}$; $f^{(3)}(x) = \dfrac{-6}{(x-a)^4}$; $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(x-a)^5}$; . . .

Montrons par récurrence <u>(voir chapitre 9)</u> que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k .k\,!}{(x-a)^{k+1}}$

* vérifions pour $k = 2$. $f^{(2)}(x) = f''(x) = \dfrac{2}{(x-a)^3} = \dfrac{(-1)^2 .2!}{(x-a)^{2+1}}$ (vrai)

* soit $k \geq 2$

Supposons que $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k .k\,!}{(x-a)^{k+1}}$ et montrons que $f^{(k+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1} .(k+1)!}{(x-a)^{k+2}}$

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \frac{-(-1)^k .k\,!(k+1)(x-a)^k}{(x-a)^{2k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} .(k+1)!}{(x-a)^{k+2}}$$

Conclusion : $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^k .k\,!}{(x-a)^{k+1}}$; pour tout entier $k\geq 2$.

2) $g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$; $D_g=IR\backslash\{1\}$

a) pour $x\neq 1$, on a : $-1+\dfrac{2}{1-x}=\dfrac{-(1-x)+2}{1-x}=\dfrac{-1+x+2}{1-x}=\dfrac{1+x}{1-x}$ donc $g(x)=-1+\dfrac{2}{1-x}$

b) g est une fonction rationnelle définie sur $IR\backslash\{1\}$, donc elle est dérivable sur $IR\backslash\{1\}$.

et $g'(x)=\dfrac{(1+x)'.(1-x)-(1-x)'.(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1.(1-x)-(-1).(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}$

c) $g(x)=-1+\dfrac{2}{x-1}=-1-\dfrac{2}{x-1}=-1-2\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

D'après 1) c) et prend $a=1$ on aura : $g'(x)=-2\left(\dfrac{(-1)^k .k\,!}{(x-1)^{k+1}}\right)=\dfrac{2(-1)^{k+1}.k\,!}{(x-1)^{k+1}}$

Exercices

Exercice1 :

a) $f(x)=x^2+2$

f est définie et dérivable sur tout IR. (fonction polynôme)

. $f'(x)=2x$

. f^3 *est dérivable sur* IR *et* $(f^3)'(x)=3.f'(x).(f(x))^2=6x(x^2+2)^2$

. f est dérivable et ne s'annule pas sur IR donc $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^2}$ sont dérivables sur IR et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=\frac{-2x}{(x^2+2)^2} \quad ; \quad \left(\frac{1}{f^2}\right)'(x)=\frac{-2f'(x).f(x)}{f^4(x)}=\frac{-2f'(x)}{f^3(x)}=\frac{-4x}{(x^2+2)^3}$$

. f est dérivable et strictement positive sur IR donc $\sqrt{f}$ est dérivable sur IR et :

$$\left(\sqrt{f}\right)'(x)=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

* comme étant fonctions rationnelles f *et* f^3 sont définies et dérivables sur $IR\backslash\{3\}$ et :

$f'(x)=\dfrac{1\times(-3)-1\times1}{(x-3)^2}=\dfrac{-4}{(x-3)^2}$; $\left(f^3\right)'(x)=3f'(x)f^2(x)=\dfrac{-12}{(x-3)^2}\cdot\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^2}=\dfrac{-12(x+1)^2}{(x-3)^4}$

* $pour\ x\neq 3$ on a : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}=0\Rightarrow x=-1$ d'où $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^2}$ sont définies et dérivables sur $IR\backslash\{-1\ ,3\}$ et :

$\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x)=\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{\dfrac{4}{(x-3)^2}}{\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^2}}=\dfrac{4}{(x+1)^2}$; $\left(\dfrac{1}{f^2}\right)'(x)=\dfrac{-2f'(x).f(x)}{f^4(x)}=\dfrac{-2f'(x)}{f^3(x)}=\dfrac{8(x-3)}{(x+1)^3}$

* $\sqrt{f}$ est définie sur $]-\infty,-1]\cup]3,+\infty[$ ⟷ $signe\ de\ f(x)$:

et Dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ et

$\left(\sqrt{f}\right)'(x)=\sqrt{f(x)}\,'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\dfrac{-2}{(x-3)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}}$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-1)}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\dfrac{x+1}{x-3}}{(x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}}=-\infty$$

Par suite : $\sqrt{f}$ n'est pas dérivable à gauche en -1

c) $f(x)=1-x^2$

* f est une fonction polynôme d'où $f\ et\ f^3$ sont définies et dérivables sur IR.

$f'(x)=-2x$ et $\left(f^3\right)'(x)=3f'(x)f^2(x)=-6x(1-x^2)^2$.

* $f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-1\ ou\ x=1$

$\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^2}$ sont définies et dérivables sur $IR\backslash\{-1\ ,1\}$

$\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x)=\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$ et $\left(\dfrac{1}{f^2}\right)'(x)=\dfrac{-2f'(x).\mathrm{f}(x)}{f^4(x)}=\dfrac{-2f'(x)}{f^3(x)}=\dfrac{4x}{(1-x^2)^3}$

* $\sqrt{f}$ est définie sur $[-1,1]$

f est dérivable et strictement positive sur$]-1,1[$ d'ou $\sqrt{f}$ est dérivable sur $]-1,1[$et $\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-1)}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(1-x^2)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$$

donc $\sqrt{f}$ n'est pas dérivable à droite en -1.

de même $\sqrt{f}$ n'est pas dérivable à gauche en 1.

d) $f(x)=\sqrt{x}$

* f est définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f^3(x)-f^3(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

f^3 est dérivable à droite en 0 par suite f^3 est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\left(f^3\right)'(x)=3f'(x).f^2(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

* $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^2}$ sont définies et dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=\frac{-1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{f^2}\right)'(x)=\frac{-2f'(x).\mathrm{f}(x)}{f^4(x)}=\frac{-2f'(x)}{f^3(x)}=\frac{-1}{x^2}$$

* f est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ d'où $\sqrt{f}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x}}}=\frac{1}{4\sqrt{x\sqrt{x}}}.$$

Exercice2 :

a) $f(x)=x^3-2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

* comme étant fonction polynôme, f est définie et dérivable sur IR *et* $f'(x)=3x^2$

*g est définie et dérivable sur $\mathrm{D_g}=IR$, (fonction rationnelle et $x^2+2\neq 0$) et $g'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+2)^2}$

* $f+$g est définie et dérivable sur IR (somme de deux fonctions dérivables) et :

$$(\mathrm{f+g})'(x)=f'(x)+g'(x)=3x^2-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

* f *et* g sont deux fonctions dérivables sur R , donc $(f.\mathrm{g})$ est dérivable sur IR et :

$$(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+g'(x)f(x)=\frac{3x^2}{x^2+2}+(x^3-2)\left[-\frac{2x}{(x^2+2)^2}\right]$$

$$\Rightarrow (f.g)'(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 4x}{(x^2+2)^2}$$

* f *et* g sont deux fonctions dérivables sur IR ,de plus $g(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in IR$ donc $\frac{f}{g}$ est dérivable sur IR et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)} = ...$$

Ou bien : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = (x^3 - 2).(x^2 + 2) = x^5 + 2x^3 - 2x^2 - 4$ donne $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 4x$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$

*f est définie et dérivable sur $IR \setminus \{1\}$, (fonction rationnelle) et $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

*g est définie et dérivable sur $IR \setminus \{1\}$, (fonction rationnelle) et $g'(x) = \frac{-2(x-1)^2 - 2(x-1)(1-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2x}{(x-1)^3}$

* $f + g$ est définie et dérivable sur $IR \setminus \{1\}$ (somme de deux fonctions dérivables) et :

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{x+1}{(x-1)^3}$$

* f *et* g sont deux fonctions dérivables sur $IR \setminus \{1\}$, donc $f.g$ est dérivable sur $IR \setminus \{1\}$ et :

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x) = ...$$

Ou bien : $(f.g)(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^3}$ donc $(f.g)'(x) = \frac{-2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(1-2x)}{(x-1)^6} = \frac{4x-1}{(x-1)^4}$

* $g(x) = 0$ *pour* $x = \frac{1}{2}$

$\frac{f}{g}$ est dérivable sur $IR \setminus \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ et : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)} = \cdots = \frac{-1}{(1-2x)^2}$

Ou bien $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{1-2x}$ donne $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(1-2x) + 2(x-1)}{(1-2x)^2} = \frac{-1}{(1-2x)^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ et $g(x) = x\sqrt{x}$

* f est définie sur $[0, +\infty[$, *dérivable sur* $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

* g est définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$$. g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

$$g'(x)=1.\sqrt{x}+x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$ (*g est dérivable sur* $[0,+\infty[.$)

* $f+g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{3\sqrt{x}}{2}=\dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

* $(f.g)(x)=x^2+x\sqrt{x}$

$f.g$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $(f.g)'(x)=2x+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

* $\dfrac{f}{g}$ est définie , dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\Rightarrow\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}=\frac{-1}{x^2}-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}\ ;\ x\in\,]0,+\infty[$$

Exercice3 :

a) $f(x)=x^5-3x^3+2x-1$; $f'(x)=5x^4-9x^2+2$

b) $f(x)=-x^6+x^4+\sqrt{2}.x$; $f'(x)=-6x^5+4x^3+\sqrt{2}$

c) $f(x)=(-3x^2+1)^3$; $f'(x)=3.(-6x)(-3x^2+1)^2=-18x(-3x^2+1)^2$

d) $f(x)=2x^2(-x^3+1)^3$; $f'(x)=4x(-x^3+1)^3+2x^2.(3).(-3x^2)(-x^3+1)^2$

$f'(x)=4x(-x^3+1)^3-18x^4(-x^3+1)^2=(-x^3+1)^2.(4x-22x^4)$

e) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x+1}$; $f'(x)=\dfrac{(3x^2+1)(x+1)-(x^3+x)}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}$

f) $f(x)=\dfrac{-5}{(2x+2)^5}$; $f'(x)=-5\left(\dfrac{-5.(2).(2x+2)^4}{(2x+2)^{10}}\right)=\dfrac{50}{(2x+2)^6}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}-(3x+2)^3$; $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+3)^2}-9(3x+2)^2$

Exercice4 : $x \in \left]0,+\infty\right[$

a) $f(x)=\sqrt{2x+3}$; $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

b) $f(x)=\sqrt{2x^2+3}$; $f'(x)=\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$

c) $f(x)=3x.\sqrt{2x+1}$; $f'(x)=3\sqrt{2x+1}+3x\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)=\dfrac{3(3x+1)}{\sqrt{2x+1}}$

d) $f(x)=\dfrac{-4}{\left(\sqrt{3x}\right)^3}=\dfrac{-4}{3\sqrt{3}.x\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{-4}{3\sqrt{3}}\left[\frac{-\left(x\sqrt{x}\right)'}{\left(x\sqrt{x}\right)^2}\right]=\frac{4}{3\sqrt{3}}.\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}x^3}=\frac{2}{x^2.\sqrt{3x}}$$

Exercice5 :

1) $f(x)=4x-3+\dfrac{1}{x-5}$; $D_f=D_{f'}=IR\backslash\{5\}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x-3)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)=0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-3)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)=0$

* $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\left(4x-3+\dfrac{1}{x-5}\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to5^-}(4x-3)=17$ et $\lim\limits_{x\to5^-}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to5^+}\left(4x-3+\dfrac{1}{x-5}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to5^+}(4x-3)=17$ et $\lim\limits_{x\to5^+}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)=+\infty$

*$f'(x)=4-\dfrac{1}{(x-5)^2}=\dfrac{4(x-5)^2-1}{(x-5)^2}$

$=\dfrac{[2(x-5)-1][2(x-5)+1]}{(x-5)^2}=\dfrac{(2x-11)(2x-9)}{(x-5)^2}$

x	$-\infty$		$\frac{9}{2}$		5		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	13	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	21	↗	$+\infty$

* f admet 13 comme maximum local en $\frac{9}{2}$

* f admet 21 comme minimum local en $\frac{11}{2}$

2) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{4-x^2}$ * $D_g = D_{g'} = IR\backslash\{-2\,,2\}$ * $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x^2}{-x^2}=-1$

* $\lim\limits_{x\to(-2)^-} g(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{x^2-1}{4-x^2}=-\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(4-x^2)=0^-$ *et* $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x^2-1)=3$

* $\lim\limits_{x\to(-2)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2-1}{4-x^2}=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x^2-1)=3$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+}(4-x^2)=0^+$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

* $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to2^-}(x^2-1)=3$ et $\lim\limits_{x\to2^-}(4-x^2)=0^+$

* $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=-\infty$ $\left(\textit{de la forme } \frac{3}{0^-}\right)$

* $g'(x)=\dfrac{2x(4-x^2)+2x(x^2-1)}{(4-x^2)^2}=\dfrac{6x}{(4-x^2)^2}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{-1}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

g admet $\left(\dfrac{-1}{4}\right)$ comme minimum local en 0.

3) $h(x)=2x^4-x^2+5$

* $D_h = D_{h'} = IR$

* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}(2x^4) = +\infty$

* $h'(x)=8x^3-2x=2x.(4x^2-1)$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{39}{8}$	↗	5	↘	$\frac{39}{8}$	↗	$+\infty$

* h admet $\dfrac{39}{8}$ comme minimum local respectivement en $\dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

* h admet 5 comme maximum local en 0.

4) $S(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$; $D_S = D_{S'} = IR \setminus \left\{\frac{-3}{2}\right\}$

* $\lim\limits_{|x| \to +\infty} S(x) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{4x}{2x} = 2$

* $\lim\limits_{x \to \left(\frac{-3}{2}\right)^-} S(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{-3}{2}\right)^-} \dfrac{4x-1}{2x+3} = +\infty$ (de la forme $-7/0^-$)

* $\lim\limits_{x \to \left(\frac{-3}{2}\right)^+} S(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{-3}{2}\right)^+} \dfrac{4x-1}{2x+3} = -\infty$ (de la forme $-7/0^+$)

* $S'(x) = \dfrac{14}{(2x+3)^2} > 0$ *pour tout* $x \in IR \setminus \left\{\frac{-3}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	‖	$+$	
$S(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

h n'admet pas d'extrémums.

Exercice6 :

$f(x) = ax^3 + 3x$

1) $f'(x) = 3ax^2 + 3$

$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ $\quad d'ou \;\; f(x) = -x^3 + 3x$

2) f est dérivable sur IR *et* $f'x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x-1)(x+1)$

. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$

. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) -\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

* f admet -2 comme minimum local en -1.

* f admet 2 comme maximum local en 1.

Exercice7 :

1) $f(x)=\dfrac{a-x}{x^2-a}$;

$$f'(x)=\frac{-(x^2-a)-2x(a-x)}{(x^2-a)^2}=\frac{x^2-2ax+a}{(x^2-a)^2}$$

$$f'(1)=0\Rightarrow 1^2-2\times1\times a+a=0\Rightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$$

Donc $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-1}=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-1}{x+1}$ ce qui donne :

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

Contradiction avec l'hypothèse : " f admet un extremum en 1 "

REMARQUE :

Pour : $f(x)=\dfrac{a-x}{x^2+a}$ on aura $f'(x)=\dfrac{-(x^2+a)-2x(a-x)}{(x^2+a)^2}=\dfrac{x^2-2a-a}{(x^2-a)^2}$

$f'(1)=0\Rightarrow 1^2-2\times1\times a-a=0\Rightarrow 1-3a=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$ ce qui donne : $f(x)=\dfrac{1-3x}{3x^2+1}$

et $f'(x)=\dfrac{-3(3x^2+1)-6x(1-3x)}{(3x^2+1)^2}=\dfrac{(x-1)(9x+3)}{(3x^2+1)^2}$

Dans ce cas : f admet un minimum global en 1

de plus elle admet un maximum global en -1/3.

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3/2	$\searrow$	-1/2	$\nearrow$	0

Exercice8 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-ax}{x^2+1} & si\quad x>1\\[2mm] \dfrac{1-ax^2}{x-2} & si\quad x\le 1\end{cases}$$

avec f continue en 1.

1) $f(1)=\dfrac{1-a}{1-2}=a-1$ et $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-ax}{x^2+1}=\dfrac{1-a}{2}$

Or on a : f est continue en 1 d'où $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow\dfrac{1-a}{2}=a-1\Rightarrow a=1$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+1} & si \quad x > 1 \\ \dfrac{1-x^2}{x-2} & si \quad x \leq 1 \end{cases}$; $f(1) = 0$

* $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x^2}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-(x+1)}{x-2} = 2$

d'où f est dérivable à gauche en 1 $et \quad f'_g(1) = 2$

* $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$

Par suite f est dérivable à droite en 1 $et \quad f'_d(1) = 1/2$

Conclusion : $f_d'(1) \neq f_g'(1)$ d'où f n'est pas dérivable en 1.

3) a) Soit : $f_1(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+1}$ et $f_2(x) = \dfrac{1-x^2}{x-2}$

$f'_1(x) = \dfrac{(2x-1)(x^2+1)-2x(x^2-x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ et $f'_2(x) = \dfrac{-2x(x-2)-(1-x^2)}{(x-2)^2} = \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

$Donc : \ f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} & si \quad x > 1 \\ \dfrac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2} & si \quad x < 1 \end{cases}$

b) * pour l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$ on a : $\Delta = 8$; $x' = -1-\sqrt{2}$ et $x'' = -1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi

x	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	$+$	
$f_1(x)$	$0 \nearrow$	1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

**aussi pour l'équation: $-x^2 + 4x - 1 = 0$ on a : $\Delta = 12$; $x' = 2-\sqrt{3}$ et $x'' = 2+\sqrt{3}$

d'où le tableau de signe de trinôme $(-x^2 + 4x - 1)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+4x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$d'où\ sur\ l'intervalle\ ]-\infty, 1]\ \ on\ a :$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		1
$f'_2(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}-4$	$\nearrow$	0

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$$

*d'où tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{3}-4$	$\nearrow$		$\nearrow$	1

f admet $(2\sqrt{3}-4)$ comme minimum absolu en $2-\sqrt{3}$

Exercice9 :

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-2} \quad ; \quad D_f = IR\backslash\{2\}$$

1) $A = f(5{,}012013014015016)$ et $B = f(5{,}012013014015017)$

2) $$f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$$

3) * $x^2-4x-3=0$

$\Delta = 28$; $x' = 2-\sqrt{7}$ et $x" = 2+\sqrt{7}$

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

· $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{x^2+3}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{x^2+3}{x-2} = -\infty$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		2		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$4-2\sqrt{7}$	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ +\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{7}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) $2+\sqrt{7} \approx 4{,}6457\ldots\ldots$

$a = 5{,}012013014015016$ $\quad et \quad$ $b = 5{,}0120130140150$

a *et* b *appartiennent* à $[2+\sqrt{7}, +\infty[$; f est strictement croissante sur $[2+\sqrt{7}, +\infty[$

Comme $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ Par suite $A < B$.

Exercice10 :

$q(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$

1) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{q(t_0+h)-q(t_0)}{h} = q'(t_0) = -3t_0{}^2 + 6t_0 + 9$

$r(t) = q'(t) = -3t^2 + 6t + 9$

2) a) $r(t) = 0 \ et \ \ t \in [0,4]$

$-3t^2 + 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \ or \ on \ a : \ a - b + c = 0 \ \ d'ou \ \ t' = -1 \ et \ \ t'' = 3$

Par suite $r(t) = 0 \quad pour \quad t = 3$

b) $r(t) = -3t^2 + 6t + 9$

t	0		3		4
$r(t)$		$+$	0	$-$	

* tableau de variation de q:

t	0		3		4
$q'(t)$		$+$	0	$-$	
$q(t)$	0	$\nearrow$	27	$\searrow$	20

Exercice11 :

Pour tout $x \geq 0$, on pose : $f(x) = 1 + \dfrac{x^3}{2} - \sqrt{1+x^3}$

* f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = \dfrac{3x^2.\left[\sqrt{1+x^3}-1\right]}{2\sqrt{1+x^3}}$

$$f'(x) = \frac{3x^2.\left[(1+x^3)-1\right]}{2\sqrt{1+x^3}.\left(\sqrt{1+x^3}+1\right)} = \frac{3x^5}{2\sqrt{1+x^3}.\left(\sqrt{1+x^3}+1\right)} \geq 0, \ pour \ tout \ x \in [0,+\infty[$$

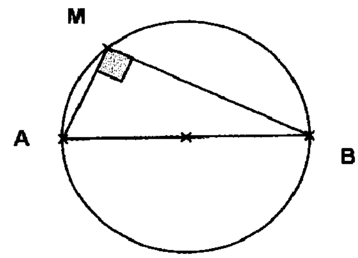
* f est croissante sur $[0,+\infty[$

$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(0) \quad \Rightarrow \quad 1 + \dfrac{x^3}{2} - \sqrt{1+x^3} \geq 0$

Ce qui donne $1 + \dfrac{x^3}{2} \geq \sqrt{1+x^3}, \quad pour \ tout \ x \in [0,+\infty[$

Exercice12 :

*Soit ABM un triangle rectangle en M avec $AB = 4$



On pose $AM = x$ et $BM = y$; $x \in]0,4[, y \in]0,4[$

$AM^2 + BM^2 = AB^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$

On note $p(x)$ le périmètre du triangle ABM

$p(x) = AB + AM + BM = 4 + x + \sqrt{16 - x^2}$

* la fonction p est dérivable sur $]0,4[$ et

$$p'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{\sqrt{16-x^2} - x}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}.\left(\sqrt{16-x^2}+x\right)}$$

$16 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8$ D'où $x = 2\sqrt{2}$ car $x \in]0,4[$

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$p'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$p(x)$	‖	↗	$4(1+\sqrt{2})$	↘	‖

$p(x)$ est maximal pour $x = 2\sqrt{2}$ et dans ce cas $y = 2\sqrt{2}$ alors $AM = BM = 2\sqrt{2}$ ce prouve que le triangle ABM est rectangle et isocèle en M

Exercice13 :

1) pour $x = 10\ cm$, les dimensions de la boite, en $centimètres$, sont :

$$x = 10, y = 30 - 2x = 10 \quad \text{et} \quad z = \frac{300-2x}{2} = 140$$

2) $V(x) = x.y.z = x.(30-2x).\left(\frac{300-2x}{2}\right)$; $\boxed{V(x) = 2x.(15-x).(150-x)}$ cm^3

3) $V(x) = 2x^3 - 330x^2 + 4500x$

$V'(x) = 6x^2 - 660x + 4500 = 6(x^2 - 110x + 750)$

$x^2 - 110x + 750 = 0$; $\Delta = 9100$, $\sqrt{\Delta} = 10\sqrt{91}$

$x' = 5\left(11 - \sqrt{91}\right)$ et $x'' = 5\left(11 + \sqrt{91}\right)$

tableau de variation de V :

x	0		$5(11-\sqrt{91})$		15
$V'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$V(x)$	0	↗	$V(x')$	↘	0

4) le volume V est maximal pour $x = 5(11 - \sqrt{91})$

Dans ce cas $V = V[5(11 - \sqrt{91})] = 500 \times [191\sqrt{91} - 836]$

Exercice14 :

1) $S = 5000 \quad m^2$; $\quad xy = 5000 \quad d'ou \quad y = \dfrac{5000}{x}$

$L(x) = x + 2y = x + \dfrac{10000}{x}$

2) $L'(x) = 1 - \dfrac{10000}{x^2} = \dfrac{x^2 - 10000}{x^2}$

3) $L(x)$ est minimale pour $x = 100$

Dans ce cas $L = 200\,m$

x	0		100		$+\infty$
$L'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$L(x)$	|| $+\infty$	↘	200	↗	$+\infty$

Exercice15 :

$$C(x) = 0,48x + \frac{124000}{x} + 1200$$

1) $C'(x) = 0,48 - \dfrac{124000}{x^2}$

$C'(x) = 0 \iff x^2 = \dfrac{124000}{0,48} \iff x = 508,265$, on pose $x_0 = 508,265$

x	1		x_0		5000
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	$C(1)$	↘	$C(x_0)$	↗	$C(5000)$

2) C admet un minimum en $x_0 = 508,265$ atteint $C(x_0) = 1687,9340$

3) $x_0 = 508,265$ d'où $508 \leq x_0 \leq 509$

* $508 \leq x_0 \Rightarrow C(508) \geq C(x_0)$ car C est décroissante sur $[1, x_0]$

* $509 \geq x_0 \Rightarrow C(509) \geq C(x_0)$ car C est croissante sur $[x_0, 5000]$

* $C(508) \approx 1687,9349$ $\quad et \quad$ $C(509) \approx 1687,9344$

d'ou $\quad C(x_0) \leq C(508) \leq C(509)$

4) le cout total est minimal lorsque chaque commande contient 508 pneus.

Exercice16 :

1) $f(x) = AM + BM$; $x = CM$

$CM + DM = CD \Rightarrow x + DM = 5 \Rightarrow DM = 5 - x$

D'où $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{9 + x^2}$ et $BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{16 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 41}$

Par suite $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}$

2) a) f est dérivable sur $[0,5]$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+41}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+41}}$

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{x^2-10x+41} + (x-5)\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}.\sqrt{x^2-10x+41}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(\sqrt{x^2-10x+41})^2 + (x-5)^2(\sqrt{x^2+9})^2}{\sqrt{x^2+9}.\sqrt{x^2-10x+41}.\left[x\sqrt{x^2-10x+41} - (x-5)\sqrt{x^2+9}\right]}$$

$$f'(x) = \frac{7x^2 + 90x - 225}{\sqrt{x^2+9}.\sqrt{x^2-10x+41}.\left[x\sqrt{x^2-10x+41} - (x-5)\sqrt{x^2+9}\right]}$$

Pour $x \in [0,5]$ on a : $(x-5) \leq 0$ et $x \geq 0$ donc : $(x-5)\sqrt{x^2+9} \neq x\sqrt{x^2-10x+41}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 90x - 225 = 0$

$\Delta = 14400$; $\sqrt{\Delta} = 120$; $x' = \dfrac{-105}{7}$ et $x'' = \dfrac{15}{7} \in [0,5]$

$f\left(\dfrac{15}{7}\right) = \dfrac{1}{7}\left(\sqrt{666} + \sqrt{1184}\right)$

f admet $f\left(\dfrac{15}{7}\right)$ comme minimum en $\dfrac{15}{7}$

x	0		$\frac{15}{7}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3 + \sqrt{41}$	$\searrow$	$f(\frac{15}{7})$	$\nearrow$	$4 + \sqrt{34}$

b) pour $x = \dfrac{15}{7}$, $CM = \dfrac{15}{7}$ et $DM = \dfrac{20}{7}$

* le triangle AMC est rectangle en C donc $tan(\widehat{AMC}) = \dfrac{AC}{AM} \Rightarrow \tan(\alpha) = \dfrac{3}{\frac{15}{7}} = \dfrac{7}{5}$

* le triangle BMD est rectangle en D donc $tan(\widehat{BMD}) = \dfrac{BD}{DM} \Rightarrow \tan(\beta) = \dfrac{4}{\frac{20}{7}} = \dfrac{7}{5}$

Par suite $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$

c) $\tan(\alpha) = \tan(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \left]0 , \frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta \in \left]0 , \frac{\pi}{2}\right[$ d'où $\alpha = \beta$

Conclusion : la distance $(AM + BM)$ est minimale lorsque $\alpha = \beta$

Exercice17 :

$X(t) = t^3 - 12t + 17$; $t \geq 0$

1) a) la vitesse instantanée est : $X'(t) = 3t^2 - 12$

b) $X'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 4$ et $t \geq 0 \Leftrightarrow t = 2$

$\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} t^3 = +\infty$

t	0		2		$+\infty$
$X'(t)$		$-$	0	$+$	
$X(t)$	17	↘	1	↗	$+\infty$

c) * la particule s'arrête lorsque la vitesse s'annule c'est-à-dire $X't) = 0$ donc à l'instant $t_0 = 2$

* la particule se rapproche de l'origine lorsque X(t) diminue jusqu'à elle atteint son minimum donc sur l'intervalle [0,2]

* la particule s'éloigne de l'origine lorsque X(t) augmente à de son valeur minimal donc sur l'intervalle $[2, +\infty[$

2) $X(t) = t^3 - 8$; $t \geq 0$

a) $X'(t) = 3t^2$

b)

t	0	2	$+\infty$
$X'(t)$		$+$	
$X(t)$	-8 ↗	0	↗ $+\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} t^2 = +\infty$

c) * la particule s'arrête lorsque la vitesse s'annule c'est-à-dire $X'(t) = 0$ donc à l'instant $t_0 = 2$

* la particule se rapproche de l'origine sur l'intervalle [0,2] et s'éloigne de l'origine lorsque X(t) augmente à partir de son point de départ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Exercice18 : (énoncée à changer $(-)$ *au lieu de* $(+)$car t doit être positif)

$d(t) = -27t^4 + 252t^3 - 540t^2 + 9400$; $t \in [0, 6]$

1) $d'(t) = -108t^3 + 756t^2 - 1080t = -108t.(t^2 - 7t + 10)$

$t^2 - 7t + 10 = 0$

$\Delta = 9$; $t' = 2$ et $t'' = 5$

t	0		2		5		6
$d'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$d(t)$	9400	↘	8824	↗	10525	↘	9400

2) d atteint son minimum à l'instant $t = 2$ (après 2 heures donc à 14 h)

3) d atteint son maximum à l'instant $t = 5$ $(apprés\ 5\ heures\ donc à\ \ 17\ h\,)$

Exercice19 :

1) $C(x) = 5 \times 8 + 5 \times \sqrt{900^2 + x^2} + 5 \times 8 + 4 \times (3000 - x)$

D'où $C(x) = 80 + 5\sqrt{900^2 + x^2} + 4(3000 - x)$

2) $C'(x) = 5.\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{900^2+x^2}}\right) - 4 = \dfrac{5x - 4\sqrt{900^2+x^2}}{\sqrt{900^2+x^2}}$

$$C'(x) = \frac{25x^2 - 16(900^2+x^2)}{\sqrt{900^2+x^2}\left[5x + 4\sqrt{900^2+x^2}\right]}$$

$$C'(x) = \frac{(3x-3600)(3x+3600)}{\sqrt{900^2+x^2}\left[5x + 4\sqrt{900^2+x^2}\right]}$$

x	0		1 200		3000
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	16580	$\searrow$	$C(1200)$	$\nearrow$	$C(3000)$

$C'(x) = 0 \ \ et \quad x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1200$

$C(1200) = 14780$

$C(3000) = 80 + 1500\sqrt{109}$

3) pour $x = 1200\ m$, le cout d'installation du câble est minimal.

Dans ce cas : $C = 14780 \ \ dinars$

QCM :

1) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2} \longrightarrow$ (a)

2) $\overrightarrow{OH}\bullet\overrightarrow{Ok}=0$ car $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{Ok} \longrightarrow$ (c)

3) On a : $\overrightarrow{AM}\perp\vec{i}$ donc $\overrightarrow{AM}\bullet\vec{i}=0 \longrightarrow$ (b)

4) Les trois réponses sont fausses

Vrai – Faux

1) Faux

Contre exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

2) Faux

Contre exemple :

les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

vérifient : $\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{u}\bullet\vec{w}=0$

3) Vrai

Car dans ce cas on a : $\vec{i}\bullet\vec{i}=\vec{j}\bullet\vec{j}=1$ et $\vec{i}\bullet\vec{j}=0$

4) Faux

Contre exemple :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

5) Vrai

*Si l'un des deux vecteurs est nul le résultat est évident

$\vec{u}=\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$

On sait que : $\vec{u}\bullet\vec{v}=OA\times OB\times\cos(A\widehat{O}B)$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|=-OA\times OB$

$\Rightarrow \cos(A\widehat{O}B)=-1$

$\Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires (et de sens contraires)

Exercices

Exercice 1

1) a)

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2+2\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right) \text{ et } \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-2\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)$$

$$\text{donc : } \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2+2\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2+2\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)$$

$$\text{d'où } \boxed{\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=4\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)}$$

$$\text{b) On a : } \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=4\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right) \text{ et } \left\|\vec{u}+\vec{w}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{w}\right\|^2=4\left(\vec{u}\bullet\vec{w}\right)$$

$$\text{Ainsi : } 8\left(\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}\right)=8\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+8\left(\vec{u}\bullet\vec{w}\right)=2\times4\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+2\times4\left(\vec{u}\bullet\vec{w}\right)$$

$$=2\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)+2\left(\left\|\vec{u}+\vec{w}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{w}\right\|^2\right)$$

$$8\left(\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}\right)=2\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}+\vec{w}\right\|^2\right)-2\left(\left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{w}-\vec{u}\right\|^2\right)$$

2) $$\left\|\vec{v}+\vec{w}+2\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}-\vec{w}\right\|^2=\left\|\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\left(\vec{u}+\vec{w}\right)\right\|^2+\left\|\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-\left(\vec{u}+\vec{w}\right)\right\|^2=$$

$$=\left[\left\|\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\right\|^2+\left\|\left(\vec{u}+\vec{w}\right)\right\|^2+\underbrace{2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}+\vec{w}\right)}_{simplifer}\right]+\left[\left\|\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\right\|^2+\left\|\left(\vec{u}+\vec{w}\right)\right\|^2-\underbrace{2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}+\vec{w}\right)}_{simplifier}\right]$$

$$=2\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}+\vec{w}\right\|^2\right)$$

$$\text{d'où : } \boxed{\left\|\vec{v}+\vec{w}+2\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}-\vec{w}\right\|^2=2\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}+\vec{w}\right\|^2\right)}$$

de même :

$$\left\|\vec{v}+\vec{w}-2\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}-\vec{w}\right\|^2=\left\|\left(\vec{v}-\vec{u}\right)+\left(\vec{w}-\vec{u}\right)\right\|^2+\left\|\left(\vec{v}-\vec{u}\right)-\left(\vec{w}-\vec{u}\right)\right\|^2=$$

$$=\left[\left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{w}-\vec{u}\right\|^2+\underbrace{2\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\bullet\left(\vec{w}-\vec{u}\right)}_{simplifer}\right]+\left[\left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{w}-\vec{u}\right\|^2-\underbrace{2\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\bullet\left(\vec{w}-\vec{u}\right)}_{simplifer}\right]$$

$$=2\left(\left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{w}-\vec{u}\right\|^2\right)$$

$$\text{d'où : } \boxed{\left\|\vec{v}+\vec{w}-2\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}-\vec{w}\right\|^2=2\left(\left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{w}-\vec{u}\right\|^2\right)}$$

On aura donc :

$$\left(\left\|\vec{v}+\vec{w}+2\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}-\vec{w}\right\|^2\right)-\left(\left\|\vec{v}+\vec{w}-2\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}-\vec{w}\right\|^2\right)=2\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}+\vec{w}\right\|^2\right)-2\left(\left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{w}-\vec{u}\right\|^2\right)$$

$$=8\left(\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}\right) \quad \langle \text{d'aprés la question 1) b)}\rangle$$

3) $\left(\left\|\vec{v}+\vec{w}+2\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}-\vec{w}\right\|^2\right)-\left(\left\|\vec{v}+\vec{w}-2\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}-\vec{w}\right\|^2\right)=\left\|\vec{v}+\vec{w}+2\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}+\vec{w}-2\vec{u}\right\|^2$

or d'aprés 1) a) on a : $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2-\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2=4\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)$ pour $\vec{a}=\vec{v}+\vec{w}$ et $\vec{b}=2\vec{u}$, on aura :

$$\left\|\vec{v}+\vec{w}+2\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}+\vec{w}-2\vec{u}\right\|^2=4\left[\left(\vec{v}+\vec{w}\right)\bullet\left(2\vec{u}\right)\right]=8\vec{u}\bullet\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$$

d'aprés la question (2) : $\left\|\vec{v}+\vec{w}+2\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}+\vec{w}-2\vec{u}\right\|^2=8\left(\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}\right)$

il resulte : $\vec{u}\bullet\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}$

Exercice 2 :

1) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} \underbrace{=}_{\text{relation de Chsles}} \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\bullet\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\bullet\overrightarrow{HC}$

or on a : $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{HB}$ d'où

: $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2+0+0+HB\times HC\times\cos(B\widehat{H}C)$

comme $\cos(B\widehat{H}C)=\cos\pi=-1$, on aura : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=AH^2-HB\times HC$

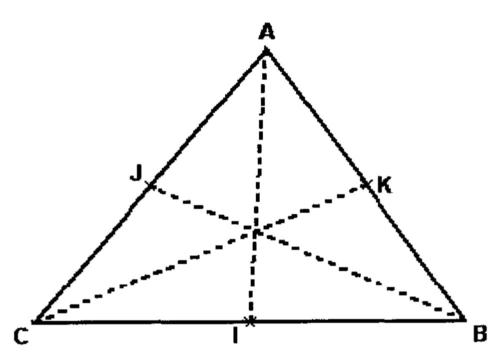
2) On a : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0=AH^2-HB\times HC$ ce qui donne $\boxed{AH^2=HB\times HC}$

Exercice 3 :

Soit ABC un tringle tel que : I milieu de $[BC]$, J milieu de $[AC]$ et K milieu de $[AB]$

Montrons que :

$$AB^2+AC^2+BC^2=\frac{4}{3}(AI^2+BJ^2+CK^2)$$



En effet :

$\oplus\oplus$ $AB^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right\|^2=AI^2+IB^2+2\left(\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{IB}\right)$(1)

$AC^2=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right\|^2=AI^2+IC^2+2\left(\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{IC}\right)$(2)

$(1)+(2)$ donne : $AB^2+AC^2=2AI^2+IB^2+AI^2+IC^2+2\overrightarrow{AI}\bullet\left(\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right)$ $(car\ I=B*C)$

aussi on a : $IB=IC=\dfrac{BC}{2}$

$d'où\ :AB^2+AC^2=2AI^2+2\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}\Rightarrow AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$

$$\Rightarrow 2AI^2=AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}$$

⊕ ⊕ $AB^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JB}\right\|^2=AJ^2+JB^2+2\left(\overrightarrow{AJ}\bullet\overrightarrow{JB}\right)=AJ^2+JB^2+2\left(\overrightarrow{JA}\bullet\overrightarrow{BJ}\right)(3)$

$BC^2=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JC}\right\|^2=BJ^2+JC^2+2\left(\overrightarrow{BJ}\bullet\overrightarrow{JC}\right)(4)$

$(3)+(4)$ donne : $AB^2+BC^2=AJ^2+JB^2+BJ^2+JC^2+2\overrightarrow{BJ}\bullet\left(\underbrace{\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}}\right)$ $(car\ J=A*C)$

comme on a : $JA=JC=\dfrac{AC}{2}$

$d'où\ :AB^2+BC^2=2BJ^2+2\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2\Rightarrow 2BJ^2=AB^2+BC^2-\dfrac{AC^2}{2}$

De même : $2CK^2=CA^2+BC^2-\dfrac{AB^2}{2}$

finalement on aura :

$$2\left(AI^2+BJ^2+CK^2\right)=2\left(AB^2+AC^2+BC^2\right)-\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2+BC^2\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(AI^2+BJ^2+CK^2\right)=\frac{3}{2}\left(AB^2+AC^2+BC^2\right)$$

ce qui donne : $\boxed{AB^2+AC^2+BC^2=\dfrac{4}{3}\left(AI^2+BJ^2+CK^2\right)}$

Exercice 4 :

1)

a) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{AH}=\overline{AH}\times\overline{AH}=AH^2$ (car H est le prejeté orthogonal de B sur (AH))

De même $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AH}=AH^2$ par suite $\boxed{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AH}}$

b) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}=AB\times AH\times\cos(B\widehat{A}H)\\ \overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AH}=AC\times AH\times\cos(C\widehat{A}H)\\ \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AH}\end{array}\right\}\Rightarrow AB\times AH\times\cos(B\widehat{A}H)=AC\times AH\times\cos(C\widehat{A}H)$

$\Rightarrow c.\cancel{h}.\cos(B\widehat{A}H)=b.\cancel{h}.\cos(C\widehat{A}H)\Rightarrow c.\cos(B\widehat{A}H)=b.\cos(C\widehat{A}H)$

Comme le triangle ABH est rectangle en H alors :

$$\cos(B\widehat{A}H) = \cos(\frac{\pi}{2} - A\widehat{B}H) = \sin(A\widehat{B}H) = \sin(\widehat{B}) \quad (angles\ Complementaires)$$

De même : $\cos(C\widehat{A}H) = \sin(A\widehat{C}H) = \sin(\widehat{C})$

par suite : $\boxed{c.\sin(\widehat{B}) = b.\sin(\widehat{C})}$

2) * $c.\sin(\widehat{B}) = b.\sin(\widehat{C})$ donne : $= \boxed{\dfrac{b}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{C})}}$ (1)

*Soit K le prejeté orthogonal de B sur (AC)

Comme précédemment on a: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BK} = BK^2$

$\Rightarrow BA.BK.\cos(A\widehat{B}K) = BC.BK.\cos(C\widehat{B}K)$

$\Rightarrow c.\cos(A\widehat{B}K) = a.\cos(C\widehat{B}K) \Rightarrow c.\sin\widehat{A} = a.\sin\widehat{C} \Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}}$ (2)

finalement les résultats (1) et (2) donnent : $\boxed{\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}}$

Exercice 5 :

1)

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$$

ainsi on a :$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = BC^2$

2) On a :$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = BC^2 \Rightarrow BA \times BC \times \cos(A\widehat{B}C) + CA \times CB \times \cos(A\widehat{C}B) = BC \times BC$

$$\Rightarrow \boxed{BA \times \cos\widehat{B} + CA.\cos\widehat{C} = BC}$$

Exercice 6 :

1) $\oplus$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos A\widehat{O}B = OA^2 \cos\dfrac{2\pi}{5}$

$\oplus$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OE} = OA \times OE \times \cos A\widehat{O}E = OA^2 \cos\dfrac{2\pi}{5}$

$\oplus$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = OA \times OC \times \cos A\widehat{O}C = OA^2 \cos\dfrac{4\pi}{5}$

2) $\oplus$ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AE} = AB\times AE\times\cos B\widehat{A}E = AB^2\cos\dfrac{3\pi}{5}$

$\oplus$ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{ED} = AB\times ED\times\cos A\widehat{F}E = AB^2\cos\dfrac{\pi}{5}$; avec F est l'intersection de (AB) et (ED)

$\oplus$ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\bullet\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\right) = \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{ED} = AB^2\times\left(\cos\dfrac{3\pi}{5}+\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$

$\otimes$ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos B\widehat{A}C = AB\times AC\times\cos\dfrac{\pi}{5} = AB.2AB\cos\dfrac{\pi}{5}.\cos\dfrac{\pi}{5} = 2\left(AB.\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^2$

Exercice 7 :

1) a) $AB^2 - BC^2 = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AC}\bullet\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)$

b) $DC^2 - AD^2 = \left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\right)\bullet\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\bullet\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}\bullet\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right)$

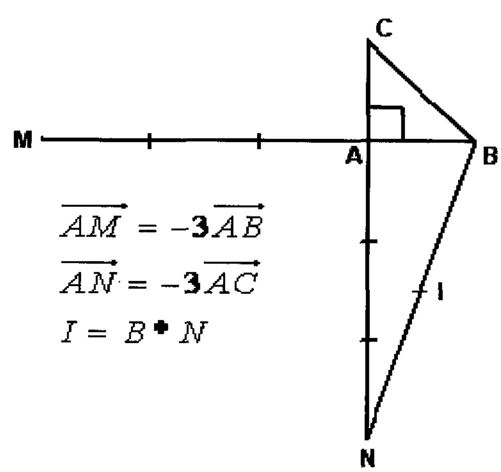
2)
$$\begin{aligned}
AB^2+DC^2-BC^2-AD^2 &= \left(AB^2-BC^2\right)+\left(DC^2-AD^2\right)\\
&= \overrightarrow{AC}\bullet\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AC}\bullet\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \overrightarrow{AC}\bullet\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \overrightarrow{AC}\bullet\left[\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}\right)\right]\\
&= \overrightarrow{AC}\bullet\left[\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)\right]\\
&= \overrightarrow{AC}\bullet\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{AC}\bullet\left(2\overrightarrow{DB}\right) = 2\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{DB}
\end{aligned}$$

Exercice 8 :

1)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN} &= \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IN}\right)\\
&= 2\overrightarrow{AI}+\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IN}}_{\vec{0}}\\
&= 2\overrightarrow{AI}+\vec{0}
\end{aligned}$$

car I est le milieu de $[BN]$

$d'où\ \ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$



2) a) On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}\right)$

Par suite: $\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}\right)\bullet\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)\bullet\left(-\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}-3AB^2+9\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+3AC^2\right)$$

Et comme $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ car $(AB)\perp(AC)$ on aura :

$\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(-3AB^2+3AC^2\right)$ d'où $\boxed{\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{CM}=-\frac{3}{2}\left(AB^2-AC^2\right)}$

b) $AB=AC\Rightarrow\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{CM}=-\frac{3}{2}\left(\underbrace{AB^2-AC^2}_{0}\right)=0$

D'où (AI) et (CM) sont perpendiculaires et par suite (AI) porte la hauteur issue de A dans le triangle AMC

Exercice 9 :

1) $OB=OM=r$

$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OM}=OB.OM.\cos\left(B\widehat{O}M\right)=r^2\times\cos\left(B\widehat{O}M\right)$

$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OM}=\frac{r^2}{2}\Rightarrow\frac{r^2}{2}=r^2\times\cos\left(B\widehat{O}M\right)\Rightarrow\cos\left(B\widehat{O}M\right)=\frac{1}{2}$

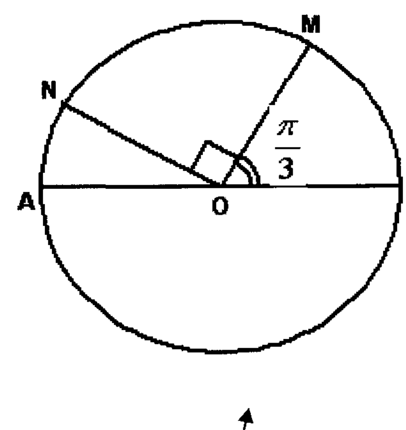
$d'où$ $M\in(\xi)$ et $B\widehat{O}M=\frac{\pi}{3}$ ou $B\widehat{O}M=-\frac{\pi}{3}$

2) $OB=ON=r$

$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{ON}=r^2\times\cos\left(B\widehat{O}N\right)$

$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{ON}=\frac{-r^2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{r^2}{2}\Rightarrow\cos\left(B\widehat{O}N\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$d'où$ $N\in(\xi)$ et $B\widehat{O}N=\frac{5\pi}{6}$ ou $B\widehat{O}N=-\frac{5\pi}{6}$



(cas de figure)

Exercice 10:

1) a) $\overrightarrow{A'K}\bullet\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'K}\right)\bullet\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'K}\bullet\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BA}+0$ $(car\ \overrightarrow{C'K}\perp\overrightarrow{BA})$

$$=\overrightarrow{A'C'}\bullet\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'A}\right)=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{A'A}$$

$$=0+\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+0=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}$$

b) $\overrightarrow{A'K}\bullet\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'K}\right)\bullet\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{B'K}\bullet\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{AC}+0$

$$=\overrightarrow{A'B'}\bullet\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'C}\right)=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{C'C}$$

$$=0+\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}+0=\overrightarrow{A'B'}\bullet\overrightarrow{A'C'}$$

2) $\overrightarrow{A'K}\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'K}\bullet\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{A'K}\bullet\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'K}\bullet\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{AC'}\bullet\overrightarrow{A'B'}$

$=\overrightarrow{A'C'}\bullet\left(\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'B'}\right)=\overrightarrow{A'C'}\bullet\overrightarrow{B'B'}=\overrightarrow{A'C'}\bullet\vec{0}=0$

d'où $(A'K)\perp(BC)$

Exercice 11 :

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\oplus\ \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=6\times1+(-2)\times0=6$

$\oplus\ AB=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ $\oplus\ AC=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1$

b) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(B\widehat{A}C)$ $d'où$ $\cos(B\widehat{A}C)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{6}{2\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

à l'aide de la calculatrice : $B\widehat{A}C\simeq touche(Endf)+touche[\cos]+(\dfrac{3}{\sqrt{10}})=\cos^{-1}(\dfrac{3}{\sqrt{10}})\simeq(18,435)^\circ\approx\dfrac{\pi}{10}$

2)* $\oplus\ \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ $\oplus\ \overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=(-6)\times(-5)+2\times2=34$

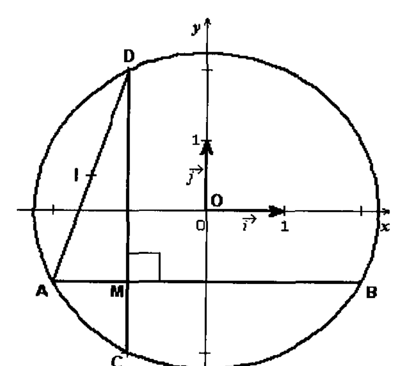
$\oplus\ BA=2\sqrt{10}$ $\oplus\ BC=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$ et $\cos(A\widehat{B}C)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\dfrac{17}{\sqrt{290}}$

à l'aide de la calculatrice : $A\widehat{B}C\simeq\cos^{-1}(\dfrac{17}{\sqrt{290}})\simeq3,37^\circ$

(**) $\oplus\ \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ $\oplus\ \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=-5$ $\oplus\ CA=1$ $\oplus\ CB=\sqrt{29}$

$\Rightarrow\ \cos(A\widehat{C}B)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\dfrac{-5}{\sqrt{29}}$ à l'aide de la calculatrice : $A\widehat{B}C\simeq\cos^{-1}(\dfrac{-5}{\sqrt{29}})\simeq158,2^\circ$

Exercice 12 :



On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AB}$

sont colinéaires et de même sens

$A(a,b)\to B(-a,b)$; $C(c,d)\to D(c,-d)$

I milieu de $[AD]\to I\ (\frac{a+c}{2},\frac{b-d}{2})$ on a $M(c,b)$

1) $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\left((c-a)^2+0^2\right)+\left((c+a)^2+0^2\right)+\left(0^2+(b-d)^2\right)+\left(0^2+(b+d)^2\right)$

$=\left((c-a)^2+(c+a)^2\right)+\left((b+d)^2+(b-d)^2\right)$

$$= c^2 - 2\cancel{a}c + a^2 + c^2 + 2\cancel{a}c + a^2 + b^2 + 2\cancel{b}d + d^2 + b^2 - 2\cancel{b}d + d^2$$
$$= 2\left(a^2 + c^2\right) + 2\left(b^2 + d^2\right) = 2\left[(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)\right] = 2\left(OA^2 + OC^2\right)$$
$$= 2(R^2 + R^2) = 4R^2$$

2) * $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} c - a \\ -d - b \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} c + a \\ d - b \end{pmatrix}$

$$AD^2 + BC^2 = \left((c - a)^2 + (b + d)^2\right) + \left((c + a)^2 + (d - b)^2\right)$$
$$= c^2 - 2\cancel{a}c + a^2 + b^2 + 2\cancel{b}d + d^2 + c^2 + 2\cancel{a}c + a^2 + d^2 - 2\cancel{b}d + b^2$$
$$= 2c^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2d^2 = 2\left[(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)\right] = 2\left(R^2 + R^2\right)$$
$$= 2(R^2 + R^2) = 4R^2$$

* de même : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} c - a \\ d - b \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} c + a \\ -d - b \end{pmatrix}$

$$AC^2 + BD^2 = \left((c - a)^2 + (b + d)^2\right) + \left((c + a)^2 + (d - b)^2\right)$$
$$= 2\left[(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)\right] = 2\left(R^2 + R^2\right) = 4R^2$$

3) $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} \dfrac{c - a}{2} \\ \dfrac{d + b}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} c + a \\ d - b \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{(c - a) \times (c + a)}{2}\right) + \left(\frac{(d + b) \times (d - b)}{2}\right) = \frac{c^2 - a^2}{2} + \frac{d^2 - b^2}{2}$$
$$= \frac{c^2 - a^2 + d^2 - b^2}{2} = \frac{1}{2}\left[(c^2 + d^2) - (a^2 + b^2)\right] = \frac{1}{2}(R^2 - R^2) = 0$$

d'où $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{BC}$ Par suite (IM) et (BC) sont perpendiculaire

Exercice 13 :

On rapporte le plan à un repère orthonormé $(A', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{A'C}$ colinéaires et de même sens

$A'(0,0), A(0,a)$; $B(b,0) et\ C(c,0)$

Déterminons les coordonnées de E, D et H :

*$E(b, y_E)$; de plus $\overrightarrow{A'E}\begin{pmatrix} b \\ y_E \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ donc $b^2 - ay_E = 0$ d'où $\boxed{y_E = \dfrac{b^2}{a}}$ Alors $E(b, \dfrac{b^2}{a})$

De même $D(c, \dfrac{c^2}{a})$

*$H(0, y_H)$; avec $\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix} b \\ \dfrac{b^2}{a} - y_H \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} c \\ \dfrac{c^2}{a} - y_H \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc :

$$b\left(\frac{c^2}{a}-y_H\right)=c\left(\frac{b^2}{a}-y_H\right)\Rightarrow\frac{bc^2}{a}-by_H=\frac{cb^2}{a}-cy_H\Rightarrow(b-c)y_H=\frac{bc}{a}(c-b)\Rightarrow y_H=-\frac{bc}{a}$$

D'où $H(0,\frac{bc}{a})$

⋆ On sait que : (AH)et (BC) sont perpendiculaires donc (AH) est une hauteur du triangle ABC. (1)

⋆ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-b\\-\frac{bc}{a}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{c}{-a}$ donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=-bc+bc=0$ d'où $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow(BH)$ est une hauteur. (2)

(1) et (2) prouve que H est l'orthocentre du triangle ABC

Exercice 14 :

1) a) $\Gamma_0=\left\{M\in P\setminus\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=0\right\}$

$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AB}$ d'où Γ_0 est la droite passant par A et perpendiculaire à (AB)

b) $\Gamma_6=\left\{M\in P\setminus\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=6\right\}$

$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=6\Leftrightarrow\overline{AB}\times\overline{AH}=6\Leftrightarrow 6.\overline{AH}=6\Leftrightarrow\overline{AH}=1\Leftrightarrow x_H-\underbrace{x_A}_{0}=x_H=1$

avec H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

d'où Γ_6 est la droite passant par le point J d'abscisse 1 et perpendiculaire à (AB)

c) $\Gamma_{12}=\left\{M\in P\setminus\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=12\right\}$

$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=12\Leftrightarrow\overline{AB}\times\overline{AH}=12\Leftrightarrow 6.\overline{AH}=12\Leftrightarrow\overline{AH}=2\Leftrightarrow x_H-\underbrace{x_A}_{0}=x_H=2$

avec H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

d'où Γ_{12} est la droite passant par le point d'abscisse 2 et perpendiculaire à (AB)

d) $\Gamma_{-6}=\left\{M\in P\setminus\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=-6\right\}$

de même : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=-6\Leftrightarrow\overline{AH}=-1$ *(voir figure)*

e) $\Gamma_{42}=\left\{M\in P\setminus\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=42\right\}$

$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=42\Leftrightarrow\overline{AH}=7\Leftrightarrow x_H-\underbrace{x_A}_{0}=x_H=7=x_B$

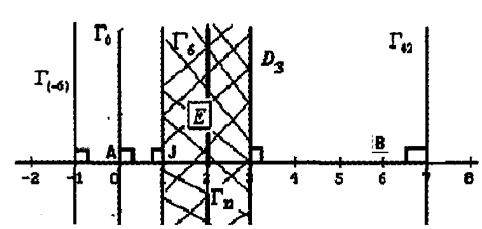
d'où Γ_{42} est la droite passant par le point d'abscisse 7 et perpendiculaire à (AB)

2) *Soit* E l'ensemble des points M tel que : $6<\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}\leq 18$

on a : $M\in E\Leftrightarrow 6<\overline{AB}\times\overline{AH}\leq 18\Leftrightarrow 1<\overline{AH}\leq 3$

E est la partie de plan limitée par les droites Γ_6 et D_3 privée de Γ_6 (partie hachurée sur figure)

D_3 est la droite passant par le point d'abscisse 3 et perpendiculaire à (AB) ($D_3=\Gamma_{18}$)



Exercice 15 :

1) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \bullet \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \bullet \overrightarrow{IB}$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\right) + \overrightarrow{IA} \bullet \overrightarrow{IB}$$

Or on a : I milieu de $[AB]$ donc : $\begin{cases} \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} \Rightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0} \\ \overrightarrow{IA} \bullet \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} \bullet (-\overrightarrow{IA}) = -IA^2 \\ IA = IB = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow IA^2 = \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}$

par suite : $\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$

2) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2 \Leftrightarrow MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = 2 \Leftrightarrow MI^2 = 2 + \dfrac{AB^2}{4}$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow IM = \sqrt{2 + \dfrac{AB^2}{4}}$ d'où (Γ) est le cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{2 + \dfrac{AB^2}{4}}$

Exercice 16 :

$I(1,0)$, $I'(-1,0)$

1) $MI^2 - 4MI'^2 = \|\overrightarrow{MI}\|^2 - 4\|\overrightarrow{MI'}\|^2 = \|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GI}\|^2 - 4\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GI'}\|^2$

$$= MG^2 + GI^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GI} - 4\left(MG^2 + GI'^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GI'}\right)$$

$$= MG^2 - 4MG^2 + GI^2 - 4GI'^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\overrightarrow{GI} - 4\overrightarrow{GI'}\right)$$

$= -3MG^2 + GI^2 - 4GI'^2 + 2\underbrace{\overrightarrow{MG} \cdot \left(\overrightarrow{GI} - 4\overrightarrow{GI'}\right)}_{=0} = -3MG^2 + GI^2 - 4GI'^2$ Car on a : $\overrightarrow{GI} - 4\overrightarrow{GI'} = \vec{0}$

Donc : $MI^2 - 4MI'^2 = -3MG^2 + GI^2 - 4GI'^2$

2) $M \in E \Leftrightarrow MI = 2MI' \Leftrightarrow MI^2 = 4MI'^2 \Leftrightarrow MI^2 - 4MI'^2 = 0 \Leftrightarrow -3MG^2 + GI^2 - 4GI'^2 = 0$

$M \in E \Leftrightarrow 3MG^2 = GI^2 - 4GI'^2 \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{1}{3}(GI^2 - 4GI'^2)$

3) * $\overrightarrow{GI} - 4\overrightarrow{GI'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = 4\overrightarrow{GI'}$, soit $G(x,y)$, $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} 1-x \\ -y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GI'}\begin{pmatrix} -1-x \\ -y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GI} = 4\overrightarrow{GI'} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = -4 - 4x \\ -y = -4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -5 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} \\ y = 0 \end{cases}$ D'où : $G\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$, $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GI'}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

** $M \in E \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{1}{3}(GI^2 - 4GI'^2) = \dfrac{1}{3}(\dfrac{64}{9} - 4\times\dfrac{4}{9}) \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{48}{9} = \dfrac{16}{9} \Leftrightarrow MG = \dfrac{4}{3}$

Alors $M \in E \Leftrightarrow MG = \dfrac{4}{3}$ donc E est le cercle de centre $G\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \dfrac{4}{3}$

Exercice 17 :

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$ car $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (I milieu de $[AB]$)
$M\in E\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|^2=\|\overrightarrow{MC}\|^2\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\|^2=\|\overrightarrow{MC}\|^2\Leftrightarrow 4MI^2=MC^2$
2) $M\in E\Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GI}\|^2=\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\|^2\Leftrightarrow 4(MG^2+GI^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GI})=MG^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}$
$\Leftrightarrow 4MG^2+4GI^2+8\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GI}=MG^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}$
$\Leftrightarrow 3MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot(4\overrightarrow{GI}-\overrightarrow{GC})=GC^2-4GI^2\Leftrightarrow 3MG^2=GC^2-4GI^2$ (car $4\overrightarrow{GI}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

$4\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GC}$ *donne* $4GI=GC$ *donc* : $M\in E\Leftrightarrow 3MG^2=16GI^2-4GI^2=12GI^2\Leftrightarrow MG^2=4GI^2$

Finalement on a $M\in E\Leftrightarrow MG=2GI$
Conclusion : E est le cercle de centre G et de rayon $R=2GI$

Exercice 18 :

1) a) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}=AF.AE.\cos(E\widehat{A}F)=AF.AE.\cos(\pi-B\widehat{A}C)=-AF.AE.\cos(B\widehat{A}C)$
On rappelle que $\cos(\pi-x)=-cosx$
b) $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$
$=0-\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+0$ Car $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$

D'où $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AF.AE.\cos(B\widehat{A}C)-AC.AB.\cos(B\widehat{A}C)$

$\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BE}=[\mathrm{AF}\times\mathrm{AE}-\mathrm{AC}\times\mathrm{AB}].\cos(\widehat{\mathrm{BAC}})$ et on a : $AB=AF$ *et* $AC=AE$

donc $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BE}=0\times\cos(B\widehat{A}C)=0$, ce qui prouve que les droites(FC)*et* (BE) sont perpendiculaires

2) soit r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour direct de centre A)
on a : $r(F)=B$ et $r(C)=E$ d'où $FC=BE$ (rotation conserve les distances)
3) a) ** Dans le triangle CBF on a : $\begin{cases} I \text{ est le milieu de } [BC] \\ O' \text{ est le milieu de } [BF]\end{cases}$ d'où $(IO')//(CF)$ et $IO'=\frac{1}{2}CF$

** Dans le triangle CBE on a : $\begin{cases} I \text{ est le milieu de } [CB] \\ O \text{ est le milieu de } [CE]\end{cases}$ d'où $(IO)//(BE)$ et $IO=\frac{1}{2}BE$

et comme (FC)*et* (BE) sont perpendiculaires (voir question1)b)) et $FC=BE$ (question 2))
Alors : (IO)*et* (IO') sont perpendiculaires et $IO=IO'$ par suite le triangle IOO' est rectangle et isocèle en I

b) Dans le triangle BEF on a : $\begin{cases} J \text{ est le milieu de } [FE] \\ O' \text{ est le milieu de } [FB]\end{cases}$ d'où $(JO')//(BE)$ et $JO'=\frac{1}{2}BE$

Or on sait que $(IO)//(BE)$ et $IO=\frac{1}{2}BE$
Donc $(OI)//(JO')$ et $IO=JO'$ par suite $OIO'J$ est un parallélogramme de plus IOO' est rectangle et isocèle en I

<u>Conclusion</u> : $OIO'J$ est un carré.

Exercice 19 :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(B\widehat{A}C\right)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = AD.AE.\cos\left(D\widehat{A}E\right) = AB.AC.\cos\left(D\widehat{A}E\right) = AB.AC.\cos\left(\pi - B\widehat{A}C\right) = -AB.AC.\cos\left(B\widehat{A}C\right)$

D'où $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2) * $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= (\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= 0 - 0 - 0 = 0$ Car $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

d'où les droites$(CD)et\ (BE)$ sont perpendiculaires

** comparons les deux triangles ADC et ABE , en effet :

On a : $AD = AB\ (1)\ et\ AC = AE(2)$

Aussi : $D\widehat{A}C = D\widehat{A}B + B\widehat{A}C = \frac{\pi}{2} + B\widehat{A}C = B\widehat{A}C + \frac{\pi}{2} = B\widehat{A}C + C\widehat{A}E \Rightarrow D\widehat{A}C = B\widehat{A}E\ (3)$

(1) + (2) + (3) prouve que les deux triangles ADC et ABE sont isométriques par suite $\boxed{BE = DC}$

(ou bien : on pourra considérer le quart de tour direct de centre A, voir exercice 18)

3) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}) = 2\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}) = 2\overrightarrow{AM}+\vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}$

4) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - 0 + 0 - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}) = \left(\frac{1}{2}AD.AC.\cos\left(D\widehat{A}C\right) - AE.AB.\cos\left(B\widehat{A}E\right)\right)$$

Or $\bullet D\widehat{A}C = B\widehat{A}E$ donc $\cos(D\widehat{A}C) = \cos(B\widehat{A}E)$ $\bullet AD = AB\ et\ AC = AE \Rightarrow AD.AC = AB.AE$

Par suite $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \left[\frac{1}{2}AD.AC.\cos\left(D\widehat{A}C\right) - AD.AC.\cos\left(B\widehat{A}E\right)\right] = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$

donc $(AM)et\ (BC)$ sont perpendiculaires

Exercice 20 : $I\ milieu\ de\ [AF]$

1) Montrons que $(OI)et\ (BE)$ sont perpendiculaires

$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB})$

$= \frac{1}{2}\,[\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\,[OA.OE - 0 + 0 - OF.OB\,] = \frac{1}{2}(r.r' - r.r')$

donc $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$ par suite $(OI) \perp (BE)$

2) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH} = OI \times OH$

- ADC est un triangle rectangle en O et $I\ milieu\ de\ [AF]$ $d'où$ $OI = \frac{1}{2}AF$

  Or $AF = \sqrt{OA^2 + OF^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}$ alors $\boxed{OI = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + r'^2}}$

- OBE est un triangle rectangle en O , H est le projeté orthogonal de O sur (BE)

  D'où $OH \times BE = OB \times OE \Longrightarrow OH \times \sqrt{r^2 + r'^2} = r \times r' \Longrightarrow OH = \frac{r\times r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$

  Par suite $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\sqrt{r^2+r'^2} \times \frac{r\times r'}{\sqrt{r^2+r'^2}} = \frac{r\times r'}{2}$

3) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ} = OI \times OJ \times \cos\left(I\widehat{O}J\right) = OI^2 \times \cos\left(I\widehat{O}J\right)$ d'autre part on a : $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OI} \times \overrightarrow{OH} = OI \times OH$

D'où $OI^2 \times \cos\left(I\widehat{O}J\right) = OI \times OH$ et finalement on aura : $\boxed{\cos\left(I\widehat{O}J\right) = \frac{OH}{OI} = \frac{2rr'}{r^2+r'^2}}$

Exercice 21 :

$OA = 1\,, g(M) = M'\ tel\ que\ \ \overrightarrow{OM'} = 2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$

1)
- $g(O) = O'avec\ \overrightarrow{OO'} = 2(\overrightarrow{OO}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO} = 0 \times \overrightarrow{OA} - \vec{0} = \vec{0}$ d'où $\boxed{g(O) = O}$
- Soit $g(A) = A'avec\ \overrightarrow{OA'} = 2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} = (2OA^2) \times \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} = 2\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$

On aura $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA}$ d'où $\boxed{g(A) = A}$ $(\,car\ \ OA^2 = 1\,)$

2) Pour $M \in (OA)$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA}$, on aura :

$$g(M) = M'\ signifie :\ \ \overrightarrow{OM'} = 2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = 2(\alpha\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OA}$$
$$= (2\alpha OA^2)\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OA} = (2\alpha)\overrightarrow{OA} - \alpha\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM}$$

lorsque $M \in (OA)$: $g(M) = M'$ donne $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ d'où $M = M'$ par suite $g(M) = M$

tout point de (OA) est invariant par g

3) $H = M * M' \Longrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OH}$

On a : $\overrightarrow{OM'} = 2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = 2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA}$

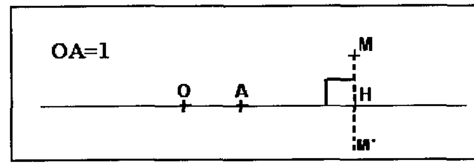
donc : $2\overrightarrow{OH} = 2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OA}$ avec $(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}) = k$

il résulte les deux vecteurs $\overrightarrow{OH}\ et\ \overrightarrow{OA}$ sont colinéaires par suite $H \in (OA)$

4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}) = \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OA}\cdot(2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM})$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}\cdot(2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OM}) = 2[(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}]$$
$$= 2[(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA})(OA^2) - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}] = 2[\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}] = 0 \text{ d'où } \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{MM'}$$

5) $g(M) = M' \Leftrightarrow (OA) \perp (MM')$ et $M * M' \in (OA)$
D'où la droite (OA) est la médiatrice de segment $[MM']$ pour tout point M de plan privé de (OA).
De plus si $M \in (OA)$ $on\ a$ $g(M) = M$
donc g est la symétrie orthogonale d'axe (OA) : $\boxed{g = S_{(OA)}}$



Exercice 22 :

1) a) $r = CD = \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}\right\| = \left\|\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC}\right\| \Rightarrow r^2 = CD^2 = \left\|\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC}\right\|^2 = ED^2 + EC^2 - 2\overrightarrow{ED} \bullet \overrightarrow{EC}$

$\Rightarrow r^2 = ED^2 + EC^2 - 2ED.EC.\cos(C\widehat{E}D) \Rightarrow \boxed{r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{E})}$

de même : $r^2 = CD^2 = \left\|\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{FC}\right\|^2 = FD^2 + FC^2 - 2FD.FC.\cos(D\widehat{F}C) \Rightarrow \boxed{r^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\widehat{F})}$

b) On sait que $C\hat{E}D = \pi - C\hat{F}D \Rightarrow \hat{F} = \pi - \hat{E}$, ainsi on aura :

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{E}) = c^2 + d^2 - 2cd\underbrace{\cos(\pi - \widehat{E})}_{\cos(\pi - x) = -\cos x} = c^2 + d^2 + 2cd\cos(\widehat{E})$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos(\widehat{E}) + 2cd\cos(\widehat{E}) = 2\left(ab + cd\right).\cos(\widehat{E})$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2\left(ab + cd\right).\cos(\widehat{E})$$

(à corriger)

2) On appliquant la loi de sinus dans le triangle CDE on aura :

$$\frac{CD}{\sin\widehat{E}} = \frac{CE}{\sin\widehat{D}} \Rightarrow \frac{r}{\sin\widehat{E}} = \frac{a}{\sin\widehat{D}} \Rightarrow \boxed{\sin\widehat{D} = \frac{a}{r}\sin\widehat{E}}$$

$$On\ a\ :\ \sin\widehat{D} = \frac{\overbrace{cot\grave{e}\ adjascent}^{dans\ \text{le triangle}\ EDH}}{hypth\acute{e}nus} = \frac{EH}{ED} = \frac{EH}{b} \Rightarrow \boxed{EH = b.\sin\widehat{D}}$$

$(H$ $projet\acute{e}$ $orthog$ de E sur $(DC))$

- Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire de triangle EDC :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{EH \times CD}{2} = \frac{r.b.\sin\widehat{D}}{2} = \frac{rb}{2} \times \frac{a}{r}\sin\widehat{E} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_1 = \frac{ab.\sin\widehat{E}}{2}}$$

- De même $\mathcal{A}_2$ est l'aire de triangle FDC on a : $\boxed{\mathcal{A}_2 = \frac{c.d.\sin\widehat{F}}{2}}$

Donc

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{a.b.\sin \widehat{E}}{2} + \frac{c.d.\sin \widehat{F}}{2} = \frac{ab}{2}.\sin \widehat{E} + \frac{c.d}{2}.\sin(\pi - \widehat{E}) = \frac{ab}{2}.\sin \widehat{E} + \frac{c.d}{2}.\sin(\widehat{E})$$

$$\mathcal{A} = (\frac{ab+cd}{2}).\sin(\widehat{E}) \text{ par suite } \boxed{4\mathcal{A} = 2(ab+cd).\sin(\widehat{E})}$$

3)

$$\oplus (p-a)(p-b) = \frac{1}{4}(c+d+b-a)(c+d+a-b) = \frac{1}{4}\left[(c+d)-(a-b)\right]\left[(c+d)+(a-b)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(c+d)^2 - (a-b)^2\right] = \frac{1}{4}\left[(c^2+d^2-a^2-b^2)+2(ab+cd)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2(ab+cd).\cos(\widehat{E}) + 2(ab+cd)\right] \rightarrow d'après\ 1)\ b)$$

$$= \frac{1}{4}\left[2(ab+cd)(1-\cos(\widehat{E}))\right] = \frac{ab+cd}{2}\left(1-\cos\widehat{E}\right)$$

D'où : $\boxed{(p-a)(p-b) = \frac{ab+cd}{2}\left(1-\cos\widehat{E}\right)}$

$$\oplus (p-c)(p-d) = \frac{1}{4}(a+b-c+d)(a+b+c-d) = \frac{1}{4}\left[(a+b)-(c-d)\right]\left[(a+b)+(c-d)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (c-d)^2\right] = \frac{1}{4}\left[(a^2+b^2-c^2-d^2)+2(ab+cd)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2(ab+cd).\cos(\widehat{E}) + 2(ab+cd)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2(ab+cd)(1+\cos(\widehat{E}))\right] = \frac{ab+cd}{2}\left(1+\cos\widehat{E}\right)$$

D'où : $\boxed{(p-c)(p-d) = \frac{ab+cd}{2}\left(1+\cos\widehat{E}\right)}$

On aura donc :

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = \left(\frac{ab+cd}{2}\right)^2.\left(1-\cos\widehat{E}\right).\left(1+\cos\widehat{E}\right)$$

$$= \left(\frac{ab+cd}{2}\right)^2.\left(1-\cos^2\widehat{E}\right) = \left(\frac{ab+cd}{2}\right)^2.\sin^2\widehat{E}$$

$$Donc\ :\ \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{\left(\frac{ab+cd}{2}\right)^2.\sin^2\widehat{E}} = \left(\frac{ab+cd}{2}\right).\underbrace{\sin\widehat{E}}_{\geq 0}$$

D'après la question 2) : on trouve : $\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

4) Pour $d = 0 \longrightarrow C = F$ et $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ $(demi\ périmètre$ de $triangle)$

$\mathcal{A}'$ l'aire de triangle EDF : $\mathcal{A}' = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-0)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Remarque : c'est la formule Héron d'Alexandrie, mathématicien grec.

QCM :

1) la mesure principal de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est 0 $\longrightarrow$ **(b)**

Car $\frac{3024\pi}{4} = 756\pi = 2\times(378)\pi$

2) $[4\pi, 5\pi]$,

$\alpha = \frac{\pi}{21} + 2\times(2\pi)$ est une mesure de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ $\longrightarrow$ **(c)**

3) $[0, \pi]$, on a :

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{w}}) + (\widehat{\vec{w},\vec{v}})\ [2\pi]$

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ D'où $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv -\frac{17\pi}{12}\ (2\pi)$

Par suite : $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) \equiv \frac{7\pi}{12}\ (2\pi)$ $\longrightarrow$ **(c)**

4) $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{5}\ [2\pi]$ $\longrightarrow$ **(a)**

5) $\longrightarrow$ **(c)** M∈ cercle de diamètre [AB]

Car : $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

Vrai – Faux

1) **Faux** en effet :

$(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{w}}) - (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \pi\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{v},\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{w}}) \equiv \pi\ (2\pi)$ $\Leftrightarrow (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) \equiv \pi\ (2\pi)$

Donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de sens contraires.

2) **Vrai**

En effet

$(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{w}}) - (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{v},\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ Donc $\vec{v} \perp \vec{w}$

3) **Faux**

Contre exemple :

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

On aura : $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}})\ (2\pi)$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{5\pi}{4}[2\pi]$$
$$\equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$\frac{3\pi}{4}$ *est la mesure principal de* $(\vec{u},\vec{w})$ *et* $\frac{3\pi}{4} \notin]-\pi, 0]$

4) **Faux**

En effet : *soit α la mesure principal de* $(\vec{u},\vec{v})$

$0 < \alpha \le \pi \Longrightarrow 2k\pi < \alpha + 2k\pi \le (2k+1)\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

5) **Vrai**

En effet : soit λ le rapport de cette homothétie on a :

$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{AC}$ d'où

$(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\widehat{\lambda\overrightarrow{AB},\lambda\overrightarrow{AC}})(2\pi) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})(2\pi)$

Exercices

Exercice1 :

a) $\alpha = \dfrac{185\pi}{7} = \dfrac{(7\times 26+3)\pi}{7} = \dfrac{7\times 26}{7}\pi + \dfrac{3\pi}{7}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{7} + 26\pi = \dfrac{3\pi}{7} + 2\times(13\pi)$

d'où $\dfrac{3\pi}{7}$ es t la mesure de l'arc orienté $\widehat{MN}$ qui appartient à l'intervalle $[0,2\pi[$

b) $\alpha = \dfrac{-228\pi}{3} = \dfrac{-3\times(76\pi)}{3}$

$\Rightarrow \alpha = -(76\pi) = 2\times(-38)\pi$

d'où 0 est la mesure de l'arc orienté $\widehat{MN}$ qui appartient à l'intervalle $[0,2\pi[$

c) $\alpha = \dfrac{2006\pi}{13} = \dfrac{(13\times 154+4)\pi}{13}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{4\pi}{13} + 2\times(77\pi)$

d'où $\dfrac{4\pi}{13}$ est la mesure de l'arc orienté $\widehat{MN}$ qui appartient à l'intervalle $[0,2\pi[$

Exercice2 :

a) $(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) \equiv -(\widehat{\vec{u},\vec{v}})(2\pi)$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{v},\vec{u}}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}(2\pi)$ et $-\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi,\pi]$

D'où $(-\frac{3\pi}{4})$ est la mesure principale de $(\vec{v},\vec{u})$

b) $(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{v},\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{w}})\ (2\pi)$

$\equiv \frac{-3\pi}{4} + \frac{-2\pi}{5}(2\pi) \equiv -\frac{23\pi}{20}(2\pi)$

$\equiv \dfrac{-23\pi}{20} + 2\pi\ [2\pi] \equiv \dfrac{17\pi}{20}(2\pi)$

$(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) \equiv \dfrac{17\pi}{20}(2\pi)\ et\ \dfrac{17\pi}{20} \in]-\pi,\pi]$

Donc la mesure principale de $(\vec{v},\vec{w}) est \dfrac{17\pi}{20}$

c) $(\widehat{2\vec{u},-3\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi\ (2\pi)$

$\equiv \dfrac{3\pi}{4} + \pi\ (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{\pi}{4}(2\pi)$

$(\widehat{2\vec{u},-3\vec{v}}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}(2\pi)\ et\ -\dfrac{\pi}{4} \in]-\pi,\pi]$

donc la mesure principale de $(\overrightarrow{2u},-\overrightarrow{3v})\ est\ -\dfrac{\pi}{4}$

d) $(\widehat{3\vec{v},-\tfrac{1}{3}\vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) + \pi\ (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{23\pi}{20} + \pi\ (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{3\pi}{20}(2\pi)$

$(\widehat{3\vec{v},-\tfrac{1}{3}\vec{w}}) \equiv -\dfrac{3\pi}{20}(2\pi)\ et\ -\dfrac{3\pi}{20} \in]-\pi,\pi]$

donc la mesure principale de $(\overrightarrow{3v},-\tfrac{1}{3}\vec{w})\ est\ -\dfrac{3\pi}{20}$

Exercice3 :

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{-\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})\quad (2\pi)$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) + \pi\quad (2\pi)$

$\equiv \dfrac{\pi}{6} + \pi\quad (2\pi)$

$\equiv \left(\dfrac{\pi}{6} + \pi\right) - 2\pi\quad (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{5\pi}{6}\quad (2\pi)$ et $(-\dfrac{5\pi}{6}) \in]-\pi,\pi]$

$-\dfrac{5\pi}{6}$: la mesure principale de$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AH},-\overrightarrow{AB}}\right) \quad (2\pi)$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}}\right)+\pi \quad (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{3}+\pi \quad (2\pi)$

$\equiv \left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)-2\pi \quad (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{3}-\pi \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$ et $(-\frac{2\pi}{3}) \in]-\pi,\pi]$

$-\frac{2\pi}{3}$: la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}})$

c) $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{HB}}\right) \quad (2\pi)$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}}\right)+\pi \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{\pi}{2}+\pi \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

$\frac{\pi}{2}$: la mesure principale de$(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB})$

Exercice4 :

a) $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{7\pi}{12} \quad (2\pi)$

d'où $(-\frac{7\pi}{12})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}})$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right) \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{12} \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{10\pi}{12} \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$

d'où $(-\frac{5\pi}{6})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}})$

c) $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CD}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}}\right) \quad (2\pi)$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right) \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{12} \quad (2\pi)$

d'où $\frac{\pi}{12}$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CD}})$

d) $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DE}}\right) \quad (2\pi)$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}}\right)+\pi \quad (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\pi \ (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{12}+\pi \quad (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{12}-\pi \quad (2\pi)$

par suite : $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE}}) \equiv -\frac{11\pi}{12} \quad (2\pi)$

d'où $(-\frac{11\pi}{12})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE}})$

Exercice5 :

a) $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \pi \quad (2\pi)$

Car $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires et de sens contraires

d'où π est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}})$

b) $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BD}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)+\pi \quad (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{4}+\pi \quad (2\pi)$

$\equiv (\frac{\pi}{4}+\pi)-2\pi \quad (2\pi)$

$\equiv -\frac{3\pi}{4} \quad (2\pi)$

$-\frac{3\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$ *d'où* $(-\frac{3\pi}{4})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BD}})$

c) $D\widehat{C}B = \dfrac{\pi - B\widehat{D}C}{2} = \dfrac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{3\pi}{8}$

d'où $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) \equiv -\dfrac{3\pi}{8}(2\pi)$

donc $(-\dfrac{3\pi}{8})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$

d) $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}}) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}\right) \quad (2\pi)$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) - \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{7\pi}{8} \quad (2\pi)$

d'où $\left(-\dfrac{7\pi}{8}\right)$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}})$

Exercice6 :

1) • $(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}}) \equiv -\dfrac{2\pi}{8} \quad (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

d'où $(-\dfrac{\pi}{4})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}})$

• $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OG}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

d'où $(-\dfrac{\pi}{2})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OG}})$

• $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}}) \equiv \dfrac{3\pi}{4} \quad (2\pi)$

d'où $\dfrac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}})$

• $(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OB}}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4} \quad (2\pi)$

d'où $(-\dfrac{3\pi}{4})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OB}})$

2) • $(\widehat{2\overrightarrow{OE},3\overrightarrow{OD}}) \underset{car\ 2x3>0}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}}) \quad (2\pi)$

$\equiv -\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

• $(\widehat{\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}, 4\overrightarrow{OF}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}}) \quad (2\pi)$

$\equiv \pi \quad (2\pi)$

• $(\widehat{-\overrightarrow{OB}, \frac{3}{4}\overrightarrow{OF}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}}) + \pi \quad (2\pi)$

$\equiv \pi + \pi \quad (2\pi)$

$\equiv 0 \quad (2\pi)$

3) a) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OH})$ sont deux bases orthonormèes directes

b) $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OH})$ sont deux bases orthonormèes indirectes

4) • $\det(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{OG} \bullet \overrightarrow{OH}$

car: $\begin{cases} \|\overrightarrow{OF}\| = \|\overrightarrow{OH}\| = 1 \\ (\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OH}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$

d'où : $\det(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{OG} \bullet \overrightarrow{OH} = OG \times OH \cos(G\widehat{O}H)$

$= 1 \times 1 \times \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{\det(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

• $\det(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OH}) = \overrightarrow{OH} \bullet \overrightarrow{OH} = 1$

car: $\begin{cases} \|\overrightarrow{OF}\| = \|\overrightarrow{OH}\| = 1 \\ (\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OH}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$

• $\det(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

car: $\begin{cases} \|\overrightarrow{OF}\| = \|\overrightarrow{OH}\| = 1 \\ (\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OH}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\det(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OA}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

- $\det(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{OE}\bullet\overrightarrow{OB}$

$$\text{car:}\begin{cases} \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OH}\| = 1 \\ (\widehat{\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OB}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$$

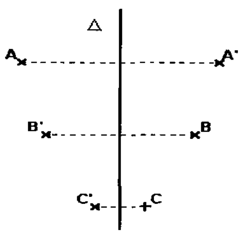
d'où : $\det(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{OE}\bullet\overrightarrow{OB} = OE\times OB\cos(B\hat{O}E)$

$$= 1\times1\times\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OE}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Exercice7 :

1) a) voir figure



b) $(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\ (2\pi)$

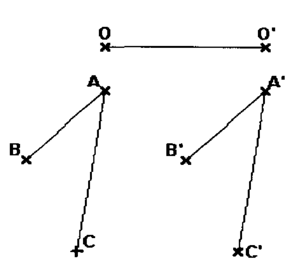
Une symétrie orthogonale change les mesures des angles orientés en leurs opposées

2) lorsque $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est une base orthonormée directe alors $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ est une base orthonormée indirecte

$$\begin{cases} AB = AC = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = A'C' = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

Exercice8 :

1) a) voir figure



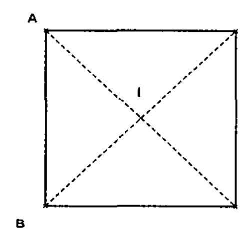
b) $(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\ (2\pi)$
car $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$

Une translation conserve les mesures des angles orientés.

2) lorsque $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est une base orthonormée directe alors $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ est une base orthonormée directe

$$\begin{cases} AB = AC = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = A'C' = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

Exercice9 :



Remarque : dans la figure $ABCD$ est direct.

1) • $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

d'où $\dfrac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$

• $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}) \equiv -\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

d'où $(-\dfrac{\pi}{4})$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}})$

• $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

d'où $\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$

• $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens opposées
D'où $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv \pi \quad (2\pi)$

par suite π *est* la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$

2) • $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD}$

$$\text{car:}\begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = a \\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$$

d'où : $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = AD^2 = a^2$

• $\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC}$

$$\text{car:}\begin{cases} \|\overrightarrow{DC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = a \\ (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$$

d'où : $\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}) = BC^2 = a^2$

• $\det(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{IA} \bullet \overrightarrow{IA}$

$$\text{car:}\begin{cases} \|\overrightarrow{ID}\| = \|\overrightarrow{IA}\| = a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\widehat{\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\det(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}) = IA^2 = \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

d'où : $\det(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}) = \frac{a^2}{2}$

• $\det(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CI}$

$$\text{car:}\begin{cases} \|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IC}\| = a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\det(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BC}) = CB \times CI \times \cos(I\widehat{C}B) = a \times (a\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= a \times (a\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

d'où : $\det(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BC}) = \frac{a^2}{2}$

$$\bullet \begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = a \\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{IC} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CI} \bullet \overrightarrow{CB}$$

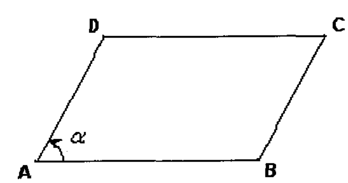
$$= CI \times CB \times \cos(I\widehat{C}B) = (a\frac{\sqrt{2}}{2}) \times a \times \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= (a\frac{\sqrt{2}}{2}) \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

d'où : $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IC}) = \frac{a^2}{2}$

Exercice10 :

1^er cas $\alpha \in [0,\pi]$



a) $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BA}}) \equiv 0 \quad (2\pi)$

Car $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires et de meme sens

b) $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}}) \ (2\pi)$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) + \pi \ (2\pi)$$

$$\equiv \alpha - \pi \quad (2\pi)$$

$\alpha - \pi \in]-\pi;\pi]$ Donc $\alpha - \pi$ *est la mesure principale de* $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$

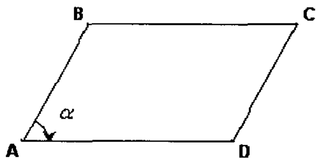
c) $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AB}}) \ (2\pi)$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) + \pi \ (2\pi)$$

$$\equiv \pi - \alpha \quad (2\pi)$$

$\pi - \alpha \in]-\pi;\pi]$ *Donc* $\pi - \alpha$ *est la mesure principale de* $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}})$

2^{er} cas $\alpha \in]-\pi, 0]$



a) $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BA}}) \equiv 0 \quad (2\pi)$

Car $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires et de meme sens

b) $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}})\ (2\pi)$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) + \pi\ (2\pi)$

$\equiv \alpha + \pi \quad (2\pi)$

$\alpha < 0 \Rightarrow \alpha + \pi \in]-\pi;\pi]$ Donc $\alpha+\pi$ *est la mesure principale de* $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$

c) $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AB}})\ (2\pi)$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) + \pi\ (2\pi)$

$\equiv -\alpha - \pi \quad (2\pi)$

$\alpha < 0 \Rightarrow -\alpha - \pi \in]-\pi;\pi]$ *Donc* $-\pi-\alpha$ *est la mesure principale de* $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}})$

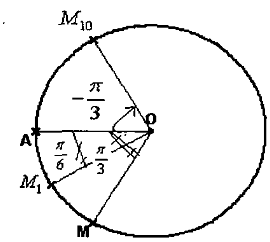
Exercice11 :

1) OAM est un triangle équilatéral direct

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

2)
- $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_n}}) \equiv \dfrac{n\pi}{6} \quad (2\pi)$; $n \in \mathbb{N}$
- $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_0}}) \equiv 0 \quad (2\pi) \quad \rightarrow M_0 = A$
- $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_1}}) \equiv \dfrac{\pi}{6} \quad (2\pi)$
- $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_2}}) \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi) \quad \rightarrow M_2 = M$
- $\left.\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_{10}}}) &\equiv \dfrac{5\pi}{3} \quad (2\pi)\\ &\equiv -\dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)\end{aligned}\right\}$ OAM_{10} est un triangle équilatéral indirect

Figure :



3) $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont colinéaires si et seulement si :

$(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_n}}) \equiv k.\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

on a :

$(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_n}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_n}})\ (2\pi)$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_n}}) - (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}})\ (2\pi)$

$\equiv \dfrac{n\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

Donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = k.\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \dfrac{n}{6} - \dfrac{1}{3} = k \Leftrightarrow \dfrac{n}{6} = \dfrac{1}{3} + k$

$\boxed{n = 2 + 6k \ ;\ k \in \mathbb{Z}}$

Conlusion :

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont colinéaires si et seulement si

$\boxed{\begin{array}{l} n = 2+6k \ ;\ k \in \mathbb{N} \text{ car } n \in \mathbb{N} \\ c'est\ à\ dire\ n \in \{2, 8, 14, 20, 26, ...\} \end{array}}$

4) $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_n}}) = \dfrac{\pi}{2} + \text{p}.\pi \quad p \in \mathbb{Z}$

ainsi : $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM_n}$

$\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_n}}) = \dfrac{\pi}{2} + p\pi$; $p \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + p\pi \Leftrightarrow n\pi - 2\pi = 3\pi + 6p\pi$

$\Leftrightarrow n\pi = 5\pi + 6p\pi \Leftrightarrow \boxed{n = 5 + 6p \ ;\ p \in \mathbb{Z}}$

Conlusion :

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont *orthogonaux* si et seulement si

$\boxed{\begin{array}{l} n = 5+6p \; ; p \in \mathbb{N} \text{ car } n \in \mathbb{N} \\ c'est\ à\ dire\ n \in \{5, 11, 17, 23, 29, ...\} \end{array}}$

Exercice12 :

1) a) le triangle ABM est isocèle en A et $B\hat{A}M = \frac{3\pi}{5}$

$$donc : A\hat{B}M = \frac{\pi - \frac{3\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow (\overrightarrow{BA}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) \equiv -\frac{\pi}{5} \ (2\pi)$$

$$* B\hat{C}N = \frac{\pi}{2} - B\hat{C}A = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) \Rightarrow B\hat{C}N = \frac{2\pi}{5}$$

BCN est isocèle en C et d'où $C\hat{B}N = \dfrac{\pi - \frac{2\pi}{5}}{2} = \dfrac{3\pi}{10}$

Donc : $(\overrightarrow{BC}, \widehat{\overrightarrow{BN}}) \equiv \frac{3\pi}{10} \ (2\pi)$

b)

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BM}\widehat{,}\overrightarrow{BN}) &\equiv (\overrightarrow{BM}\widehat{,}\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BN}) \ (2\pi) \\ &\equiv -(\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BA}\widehat{,}\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}\widehat{,}\overrightarrow{BN}) \ (2\pi) \\ &\equiv \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10} \ (2\pi) \\ &\equiv \frac{7\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} \ (2\pi) \\ &\equiv \pi \ (2\pi)\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires ce qui prouve que les points B, N *et* M sont alignées

2) $(\overrightarrow{AC}, \widehat{\overrightarrow{AB}}) \equiv \alpha \ (2\pi)$

a)

- $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) \equiv \pi - \alpha \ (2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{BA}, \widehat{\overrightarrow{BM}}) \equiv \frac{\alpha}{2} \ (2\pi)$
- $(\overrightarrow{CN}, \widehat{\overrightarrow{CB}}) \equiv \alpha \ (2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \widehat{\overrightarrow{BN}}) \equiv \frac{\pi - \alpha}{2} \ (2\pi)$

b)

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BM}, \widehat{\overrightarrow{BN}}) &\equiv (\overrightarrow{BM}, \widehat{\overrightarrow{BA}}) + (\overrightarrow{BA}, \widehat{\overrightarrow{BC}}) + (\overrightarrow{BC}, \widehat{\overrightarrow{BN}}) \ (2\pi) \\ &\equiv \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi - \alpha}{2} \ (2\pi) \\ &\equiv \frac{\cancel{\alpha} + (\pi + \pi) - \cancel{\alpha}}{2} \ (2\pi) \\ &\equiv \pi \ (2\pi)\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires ce qui prouve que <u>conclusion</u> les points B, N *et* M sont alignés

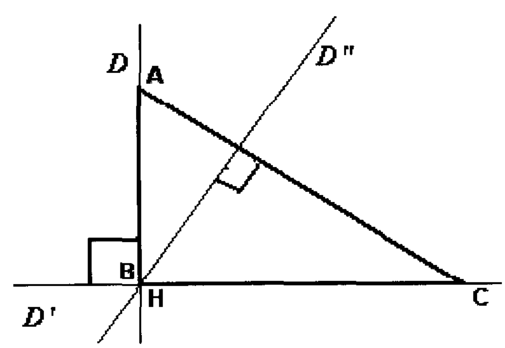
Exercice13

1) * *lorsque un triangle ABC est rectangle en A alors les deux hauteurs issues respectivement de B et C sont perpendiculaires*

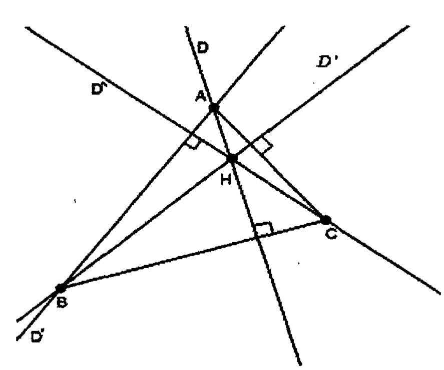
*<u>Réciproquement</u>

Si un triangle ABC a les deux hauteurs issues de respectivement de B et C perpendiculaires alors les cotés sont perpendiculaires par suite ce triangle est rectangle en A

2) B=H



3)

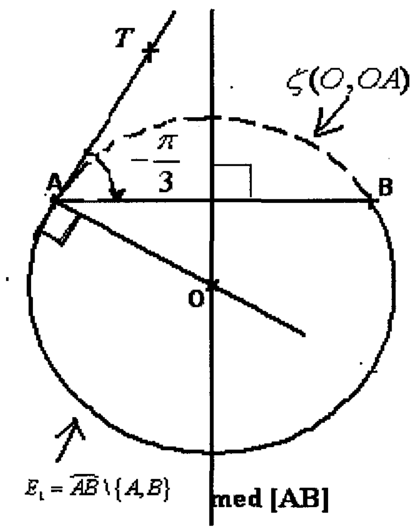


Exercice14 :

a) $E_1 = \left\{ M \in P \setminus (\overrightarrow{MA}, \widehat{\ \overrightarrow{MB}}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}(2\pi) \right\}$

Soit T un point de plan tel que : $(\overrightarrow{AT}, \widehat{\ \overrightarrow{AB}}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$

on a $E_1 = \widehat{AB} \setminus \{A, B\}$



b)

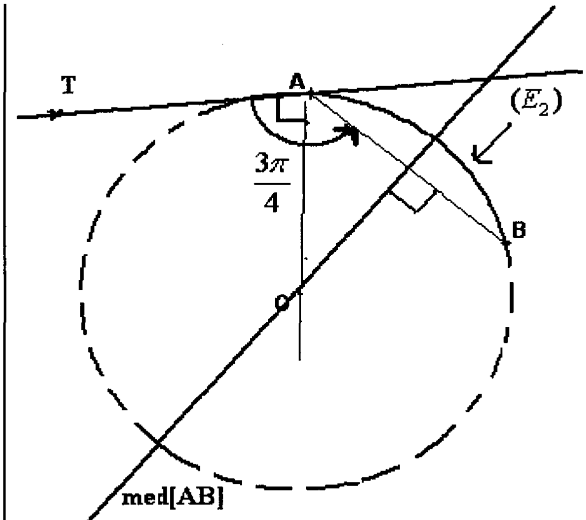
$$\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi + 3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 6\pi = \frac{3\pi}{4} + 3 \times (2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{27\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}(2\pi)$$

$E_2 = \left\{ M \in P \setminus (\overrightarrow{MA}, \widehat{\ \overrightarrow{MB}}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}(2\pi) \right\}$

Soit T un point de plan tel que : $(\overrightarrow{AT}, \widehat{\ \overrightarrow{AB}}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}(2\pi)$

on a $E_2 = \widehat{BA} \setminus \{A, B\}$



Exercice15 :

1)

$(\overrightarrow{ME}, \widehat{\ \overrightarrow{EF}}) \equiv (\overrightarrow{EG}, \widehat{\ \overrightarrow{EF}})\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME}, \widehat{\ \overrightarrow{EF}}) - (\overrightarrow{EG}, \widehat{\ \overrightarrow{EF}}) \equiv 0\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME}, \widehat{\ \overrightarrow{EF}}) + (\overrightarrow{EF}, \widehat{\ \overrightarrow{EG}}) \equiv 0\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME}, \widehat{\ \overrightarrow{EG}}) \equiv 0\ (2\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{EM}, \widehat{\ \overrightarrow{EG}}) + \pi \equiv 0\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{EM}, \widehat{\ \overrightarrow{EG}}) \equiv -\pi\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{EM}, \widehat{\ \overrightarrow{EG}}) \equiv -\pi + 2\pi\ (2\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{EM}, \widehat{\ \overrightarrow{EG}}) \equiv \pi\ (2\pi$

Donc $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires et de sens contraires

Conclusion :

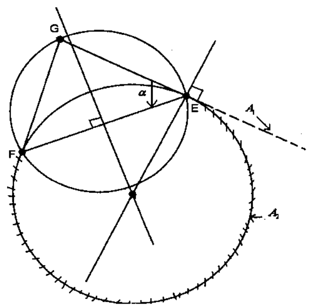
L'ensemble A1 des points M tels que est la droite (EG) Privée de la demi-droite *[EG)*

b) $A_2 = \left\{ M \in P \setminus (\overrightarrow{ME}, \widehat{\ \overrightarrow{MF}}) \equiv (\overrightarrow{EG}, \widehat{\ \overrightarrow{EF}})(2\pi) \right\}$

Soit Cle cercle passant par E et F et tangent à la droite (EG) en E

$$A_2 = \widehat{FE} \setminus \{E, F\}$$

Figure :



Exercice16 :

1) *Le triangle OMB est isocèle en O et* $(ON) \perp (BM)$ car *AMB est rectangle en M et* $(ON)//(AM)$

d'où $[ON)$ est la bissectrice intérieure de $M\widehat{O}B$

$$(\overrightarrow{MN}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) \quad (2\pi)$$

donc $(\overrightarrow{MN}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) \equiv (\overrightarrow{ON}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) \quad (2\pi)$

2) soit Γ le cercle circonscrit au triangle OBN

$$(\overrightarrow{MN}, \widehat{\overrightarrow{MB}}) \equiv (\overrightarrow{ON}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) \quad (2\pi)$$

d'où $M \in \Gamma$

Par suite les points O, B, N *et* M appartiennent au cercle Γ

3) $O\hat{M}N = \frac{\pi}{2}$ donc Γ est de diametre $[ON]$

par suite $(BN) \perp (BO)$

d'où (BN) est la tangente à$(\mathcal{C})$ en B.

Exercice17:

1) Pour montrer que $A' \in (\mathcal{C})$ il suffit de montrer que :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) + \pi \ (2\pi)$$

En effet : *une symétrie orthogonale change les mesures des angles orienté en leurs opposées

L'image de l'angle $\left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right)$ par la symétrie orthogonale d'axe (BC) est $\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right)$ d'où

$$\boxed{(\widehat{\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) \ (2\pi)} \rightarrow (1)$$

$$(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC}}) \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) \equiv \pi - (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \ (2\pi)} \rightarrow (2)$$

(1) et (2) donne : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) + \pi \ (2\pi)$

Ce qui prouve que : $A' \in (\mathcal{C})$

On montre de même que $B' \in (\mathcal{C})$ et $C' \in (\mathcal{C})$

2) a) Soit O *le centre de* $(\mathcal{C})$ (Médiatrice)

On a : $CA' = CH$ car $(BC) = med[HA']$

Et : $CB' = CH$ car $(AC) = med[HB']$

D'où : $CA' = CB'$

Par suite : $OA'C$ et OCB' sont deux triangles isométriques ce que donne :

$$(\widehat{\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA'}}) \ (2\pi)$$

$$Or \ (\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC}}) \ (2\pi)$$

$$et \ (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA'}}) \ (2\pi)$$

Angles aux centre et angles inscrits

Donc $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}}) \ (2\pi)}$

b)

$$(\widehat{\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'C}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}}) \ (2\pi) \qquad \text{((angles inscrits))}$$
$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}}) \ (2\pi) \qquad \text{d'apres a)}$$
$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'A'}}) \ (2\pi) \qquad \text{(angles inscrits)}$$

Ainsi : $(\widehat{\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'C}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'A'}}) \ (2\pi)$

D'où $[C'C)$ est la bissectrice de l'angle $B'\widehat{C'}A'$

3) De même on a :

$[B'B)$ est la bissectrice de l'angle $A'\widehat{B'}C'$

$[A'A)$ est la bissectrice de l'angle $B'\widehat{A'}C'$

4) D'après ce qui précède : le point H est l'intersection des bissectrices intérieurs dans le triangle $A'B'C'$ donc H est le centre du cercle $(\mathcal{C}')$ inscrit dans le triangle $A'B'C'$

- On désigne par h l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$

  $h(A') = A"$; $h(B') = B"$ et $h(C') = C"$

  $\Longrightarrow h(A'B'C') = A"B"C"$

  $\Longrightarrow h((\mathcal{C})) = (\mathcal{C}")$ est le cercle inscrit dans le triangle $A"B"C"$ par suite H est son centre car $h(H) = H$

Exercice18 :

1. a)

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}}) \ (2\pi)$$
$$\equiv -\frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IC}}) + (\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AM}}) \ (2\pi)$$
$$\equiv -\frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IC}}) - \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$
$$\equiv -\pi + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IC}}) \ (2\pi)$$

D'où : $2(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \underbrace{-2\pi}_{angle\ \text{nul}} + 2(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IC}}) \ (2\pi)$ Par suite : $2(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IC}}) \ (2\pi)$

b)

$$2(\widehat{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AM}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{IC}})\ \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow 2\left[(\widehat{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AC}})+(\widehat{\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}})\right] \equiv 2\left[(\widehat{\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{IM}})+(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}})\right]\ \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow 2\left[(\widehat{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AC}})+(\widehat{\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}})\right] \equiv 2\left[(\widehat{\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BM}})+(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}})\right]\ \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow 2\left[(\widehat{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AC}})+\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OM}})\right] \equiv 2\left[\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OM}})+(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}})\right]\ \ (2\pi)\ \ \text{((angles aux centre et angles inscrits))}$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AC}})+\cancel{(\widehat{\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OM}})} \equiv \cancel{(\widehat{\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OM}})}+2(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}})\ \ (2\pi) \Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AC}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}})\ \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}}) \equiv 2\left[(\widehat{\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AC}})+\pi\right]\ \ (2\pi) \Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AC}})+\underbrace{2\pi}_{angle\ 0}\ \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AC}})\ \ (2\pi)$$

2)

$$2(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IC}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AC}})\ \ (2\pi) \Rightarrow 2\left[(\widehat{\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IB}})+(\widehat{\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{IC}})\right] \equiv 2\left[(\widehat{\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AB}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}})\right]\ \ (2\pi)$$

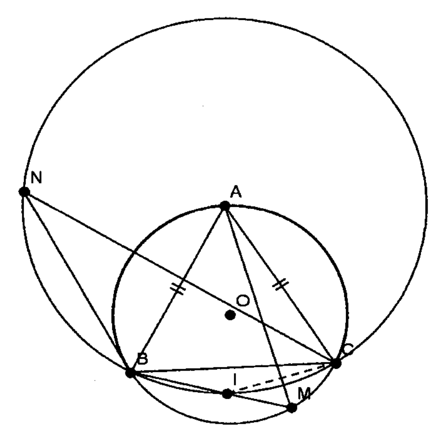
$$\Rightarrow 2\left[\pi+(\widehat{\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{IC}})\right] \equiv 2\left[-\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}})\right]\ \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow\ 2\pi + 2(\widehat{\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{IC}}) \equiv 2\left[\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}})\right]\ \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{2(\widehat{\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{IC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}})\ \ (2\pi)}$$

3. a) Le cercle ζ' de centre A et de rayon AB passe par le point C (car ABC isocèle en A)

$$\left.\begin{array}{l} N \in \zeta' \Rightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]\textit{(angle inscrit et angle au centre associées)} \\ \textit{Or on a montré en 2) que}: 2\left(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi] \end{array}\right\rangle$$



donc

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}}\right)[2\pi]$$

b) b) $2(\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}) \equiv 2(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC})\ (2\pi)$

$\Longrightarrow\ 2(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) \equiv 2(\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}) + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow\ (\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}) + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

$\star\ pour\ k = 2p\ , p \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}) + 2p\pi\ , p \in \mathbb{Z}$; *on aura* : $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC})\ (2\pi)$

Donc $I \in \widehat{CB}\setminus\{B,C\}$: $\widehat{CB}$ arc orienté du cercle ξ' : cercle de centre A et de rayon AB

$\star\ pour\ k = 2p+1\ , p \in \mathbb{Z}$

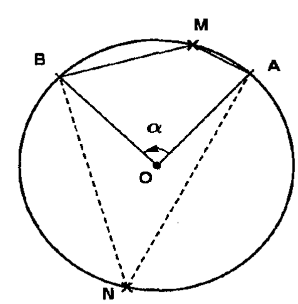
$(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC}) + (2p+1)\pi$; *on aura* : $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) \equiv \pi + (\overrightarrow{NB};\overrightarrow{NC})\ (2\pi)$

Donc $I \in \widehat{BC}\setminus\{B,C\}$: $\widehat{BC}$ arc orienté du cercle ξ'

par suite I appartient au cercle $\zeta' \Rightarrow AI = AB$

Exercice19 :

dans cette figure : $\alpha > 0$



1) a) soit N un point de l'arc $\widehat{BA}$

on a $(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\ [2\pi]$ (angle inscrit et angle au centre associées)

$\equiv \frac{\alpha}{2}\ [2\pi]$

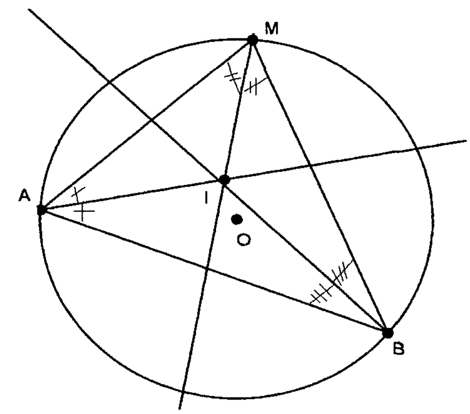
$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}\widehat{,}\overrightarrow{MB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{NA}\widehat{,}\overrightarrow{NB})\ (2\pi)$

d'ou $(\overrightarrow{MA}\widehat{,}\overrightarrow{MB}) \equiv \pi + \frac{\alpha}{2}\ (2\pi)$

b) lorsque $M \in \widehat{BA}$

$(\overrightarrow{MA}\widehat{,}\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}\widehat{,}\overrightarrow{OB})\ (2\pi)$

$\equiv \frac{\alpha}{2}\ (2\pi)$



2) I est le point d'intersection des bissectrices de triangle AMB

$$A\widehat{M}B \equiv \frac{\alpha}{2}$$

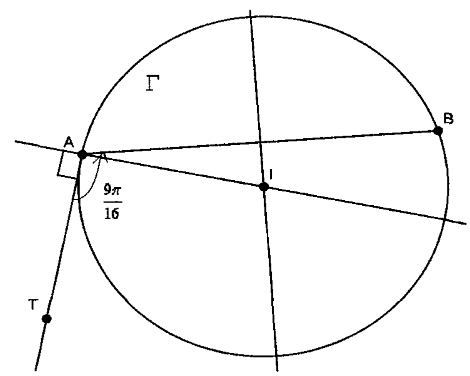
$$M\widehat{A}B + M\widehat{B}A \equiv \pi - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}M\widehat{A}B + \frac{1}{2}M\widehat{B}A = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}$$

$$\Rightarrow I\widehat{A}B + I\widehat{B}A = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}$$

$$\Rightarrow A\hat{I}B = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} \ . \ donc : (\overrightarrow{IA}\ ,\widehat{\ }\ \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} \quad (2\pi)$$

3) $(\overrightarrow{IA}\ ,\widehat{\ }\ \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} \quad (2\pi)$

Soit T le point vérifiant : figure1



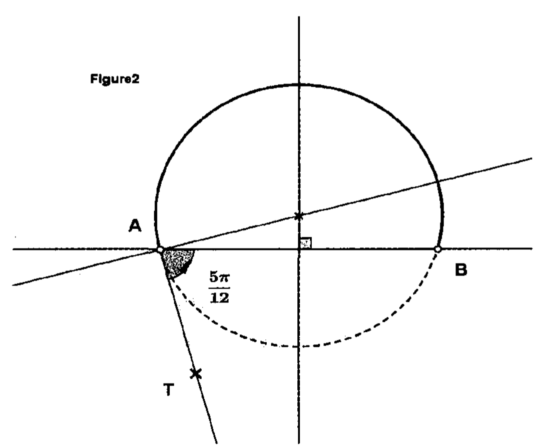
$(\overrightarrow{AT}\ ,\widehat{\ }\ \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} \quad (2\pi)$. $I \in \Gamma$: *cercle tangent à (AT) passant par A et B*

privé de A *et* B.

4) a) voir figure1

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{16} \quad donc : (\overrightarrow{IA}\ ,\widehat{\ }\ \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{9\pi}{16} \quad (2\pi)$$

b) voir figure2



$$\alpha = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow (\overrightarrow{IA}\ ,\widehat{\ }\ \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{5\pi}{12} \quad (2\pi)$$

QCM /

1) $cos\left(-\frac{3\pi}{2}-a\right) = sina$ car :

$cos\left(-\frac{3\pi}{2}-a\right) = cos\left(-\frac{3\pi}{2}-a+2\pi\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = sina \longrightarrow$ **(a)**

2) $\tan\theta=\sqrt{3}$ et $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donne $\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \longrightarrow$ **(b)**

3) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\underbrace{AB\times AC}_{1}\times\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow$ **(a)**

4) Puisque : $\overrightarrow{OM} = \vec{\imath}+\vec{\jmath} = \sqrt{2}.\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath}+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath}\right]$ alors M à pour coordonnées polaires : $\left(\sqrt{2}\ ,\frac{\pi}{4}\right)$

.

$\longrightarrow$ **(b)**

5) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ car on a :

$acosx + bsinx = rcos(x-\varphi)\ avec\ r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{r}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.

Dans ce cas : $r=2\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{r}\\ \sin\varphi=\frac{b}{r}\end{cases}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{6} \longrightarrow$ **(a)**

Vrai/Faux

1) Vrai

- x solution de l'équation : $\cos(x-\frac{\pi}{6})=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ k\in Z$
- x solution de l'équation : $\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi\ ;\ k\in Z$

$donc: (x-\frac{\pi}{6})$ solution de l'équation : $\cos x=1 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=2k\pi;\ k\in Z \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ k\in Z$

Ainsi : $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ est une solution de l'équation $cosx = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

2) FAUX

Contre exemple : pour $a\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$; $\cos a=\frac{1}{2}$ et $\sin a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Vrai

car : $\sqrt{2}.\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\vec{i}+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}\right]=\sqrt{2}.\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right]=\vec{i}+\vec{j}$

4) Faux

contre exemple : pour $x=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$; $x\neq-\frac{\pi}{3}$ mais $tanx=-\sqrt{3}$

5) Vrai

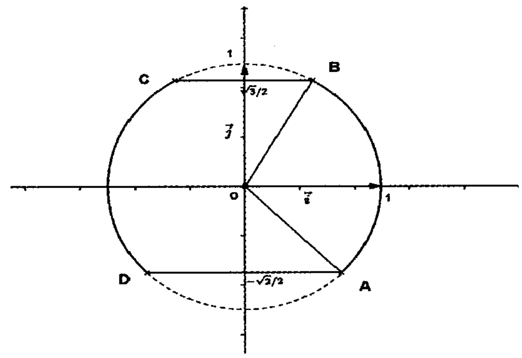
en effet : pour $r = OA$. le point A a pour coordonnées ($r.cos\theta$, $r.sin\theta$)

la droite (OA) a pour équation : $y=\left(\frac{y_A-y_0}{x_A-x_o}\right)x+\underbrace{b}_{0:\ car\ O\in(OA)}=\left(\frac{r.\sin\theta}{r.\cos\theta}\right)x$

Donc (OA) a pour équation : $y = \tan\theta.x$

Exercices

Exercice 1 :



1) $\frac{-\sqrt{2}}{2} \leq \sin\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

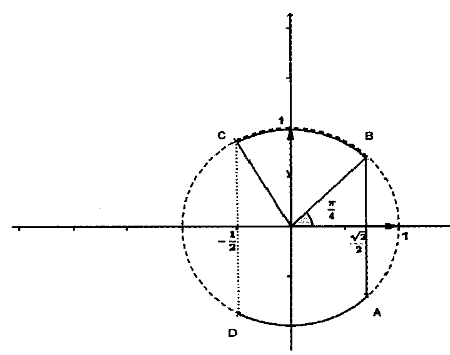
$M \in [\widehat{AB}] \cup [\widehat{CD}]$ avec $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (voi figure)

2) $\frac{-\sqrt{2}}{2} \leq \sin\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, \frac{-3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$; $S_{]0,2\pi]} = \left]0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

Exercice 2 :



1) $\frac{-1}{2} \leq \cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

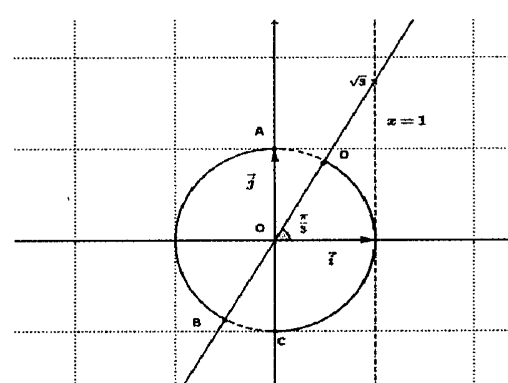
$M \in [\widehat{BC}] \cup [\widehat{AD}]$, (voir figure)

$(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

2) $\frac{-1}{2} \leq \cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{]-\pi,\pi]} = \left[\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$; $S_{]0,2\pi]} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right]$

Exercice 3 :



1) $\tan x \leq \sqrt{3}$ *et* $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ donc :

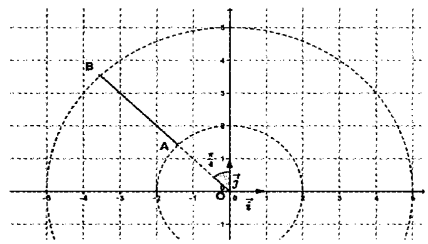
$M \in [\widehat{AB}] \cup [\widehat{CD}]$ *privé de A, B , C et D.* (voir figure)

Avec $A(1, \frac{\pi}{2})$; $B(1, -\frac{2\pi}{3})$; $C(1, -\frac{\pi}{2})$ *et* $D(1, \frac{\pi}{3})$

$$S_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, \frac{-2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$S_{]0,2\pi]} = \left]0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

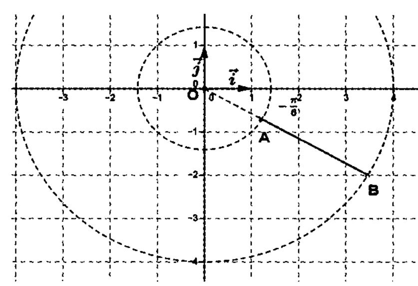
Exercice 4 :



a) $\begin{cases} \theta = \frac{3\pi}{4} \\ r \in [2,5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{3\pi}{4} \ [2\pi] \\ 2 \leq OM \leq 5 \end{cases}$

$M \in [AB]$ **avec** (AB) *d'équation :* $y = -x$

b)



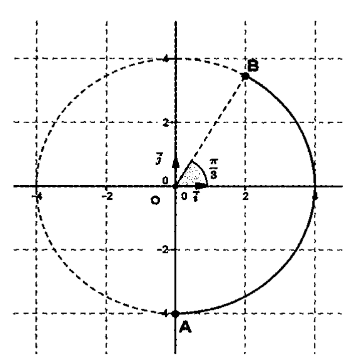
$\begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{6} \\ r \in [\sqrt{2}, 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{-\pi}{6} \ [2\pi] \\ \sqrt{2} \leq OM \leq 4 \end{cases}$

Soient : $A \in \zeta(O, \sqrt{2}) \cap [Ot)$ *tel que* : $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{Ot}}) \equiv \frac{-\pi}{6} \ [2\pi]$

et $B \in \zeta(O, 4) \cap [Ot)$ *tel que* : $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{Ot}}) \equiv \frac{-\pi}{6} \ [2\pi]$

On a : $M \in [AB]$

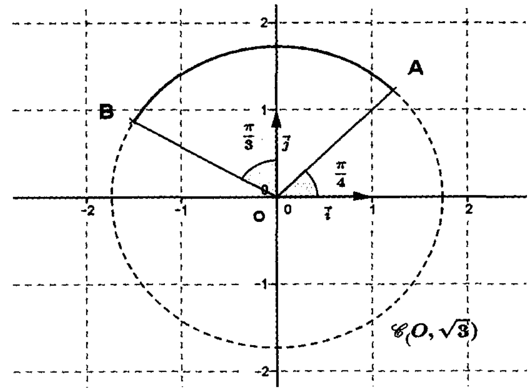
c) $\begin{cases} \theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right] \\ r = 4 \end{cases}$



$OM = 4$ et $\frac{-\pi}{2} < (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}) \leq \frac{\pi}{3}$

$M \in [\widehat{AB}] \setminus \{A\}$ avec : $A(4, -\frac{\pi}{2})$ et $B(4, \frac{\pi}{3})$

d) $\begin{cases} \theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right] \\ r = \sqrt{3} \end{cases}$

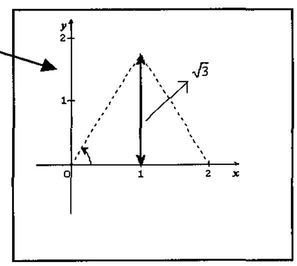


$OM = \sqrt{3}$ et $\frac{\pi}{4} < \left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}\right) \leq \frac{5\pi}{6}$

$M \in [\widehat{AB}] \setminus \{A\}$ avec $A(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4})$ et $B(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$

Remarque : Pour obtenir la distance $\sqrt{3}$

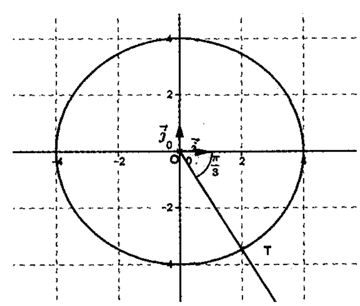
On prend la hauteur triangle équilatéral de coté 2



Exercice 5 :

1) $\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}\ [2\pi]$ et $OM = r > 0$

$M \in [\,OT\,) \setminus \{\,O\,\}$ avec $\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OT}}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}\ [2\pi]$



2) M appartient au cercle de centre O de rayon 4.

Exercice 6 :

a) $M(\,1\,, -\sqrt{3})$

$r = OM = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$; $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

M est de coordonnées polaires : $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$.

b) $M(4,-4)$

$r = OM = \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta \equiv \dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$

$\boxed{M \text{ est de coordonnées polaires } \left(4\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

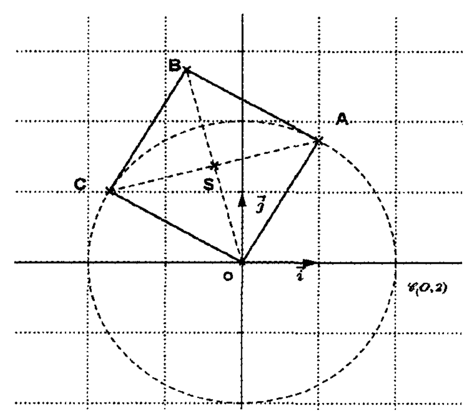
c) $M(3,0)$; $\boxed{M \text{ est de coordonnées polaires } (3,0)}$.

d) $M(0,\sqrt{2})$; $\boxed{M \text{ est de coordonnées polaires } \left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

e) $M(\sqrt{3},1)$

$r = OM = \sqrt{4} = 2$; $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \theta \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$; $\boxed{\text{donc } M \text{ est de coordonnées polaires } \left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)}$.

Exercice 7 :



1) $OA = OC = 2$

2) * $A(1,\sqrt{3})$

$r = OA = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$; $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta_A \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Rightarrow A$ est de coordonnées polaires $\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

* $C(-\sqrt{3},1)$

$r = OC = \sqrt{4} = 2$; $\begin{cases} cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \theta_C \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi] \Rightarrow C$ est de coordonnées polaires $\left(2, \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

$* \ OB = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$$\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi]$$

$\Rightarrow B$ est de coordonnées polaires $\left(2\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right)$.

$*$ $S = O * B$ d'où S est de coordonnées polaires $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 8 :

1) $* \ OA = 2 \ et \ \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$

$* \ OB = 2\sqrt{2} \ et \ \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

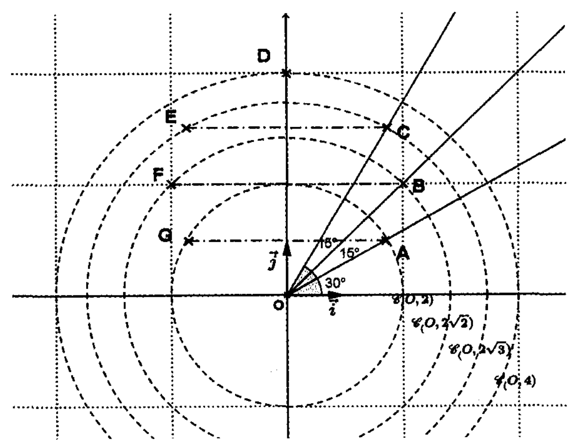
$* \ OC = 2\sqrt{3} \ et \ \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

$* \ OD = 4 \ et \ \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

$* \ OE = 2\sqrt{3} \ et \ \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OE}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$

$* \ OF = 2\sqrt{2} \ et \ \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OF}}\right) \equiv \frac{3\pi}{4} \ [2\pi]$

$* \ OG = 2 \ et \ \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OG}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6} \ [2\pi]$



2) $\oplus A\left(2\cos\frac{\pi}{6},2\sin\frac{\pi}{6}\right)$ donc $A(\sqrt{3}\ ,1\ )$

$\oplus B\left(2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow B(\ 2\ ,2\ )$

$\oplus \ C\left(2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3},2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow C(\ \sqrt{3}\ ,3\ )$

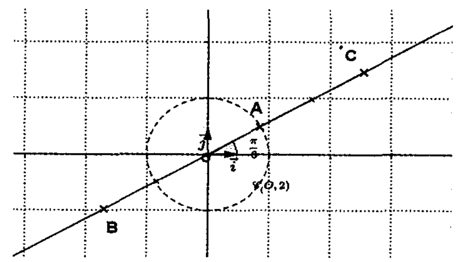
$\oplus D\left(4\cos\frac{\pi}{2},4\sin\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow D(\ 0\ ,4\ ),$

$\oplus E\left(2\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{3}, 2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow E(-\sqrt{3}, 3)$ $\oplus F\left(2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}, 2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow F(-2, 2)$

et $G\left(2\cos\frac{5\pi}{6}, 2\sin\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow G(-\sqrt{3}, 1)$

3) il est clair que les points $A, B, C, D, E,\ F\ et\ G$ appartiennent tous au cercle de centre $I(0, 2)$ et de rayon 2. ($IA = IB = IC = ID = IE = IF = IG = 2$)

Exercice 9 :



1) $OA = 2\ et\ (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OA}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

2)* $\|\overrightarrow{OB}\| = \|-2\overrightarrow{OA}\| \Rightarrow OB = 2 \times OA = 4$

$(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}}) \equiv (\widehat{\vec{\imath}, -2\overrightarrow{OA}})\ [2\pi] \Rightarrow (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}}) \equiv (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OA}}) + \pi\ [2\pi]$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{6} + \pi\ [2\pi]$

$\equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$ d'où $\boxed{B \text{ est de coordonnées polaires } \left(4, \frac{7\pi}{6}\right)}$.

** $\|\overrightarrow{OC}\| = \|3\overrightarrow{OA}\| \Rightarrow OC = 3 \times OA = 6$

$(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OC}}) \equiv (\widehat{\vec{\imath}, 3\overrightarrow{OA}})\ [2\pi] \Rightarrow (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}}) \equiv (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OA}})\ [2\pi] \Rightarrow (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{Oc}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\boxed{\text{Donc } C \text{ est de coordonnées polaires } \left(6, \frac{\pi}{6}\right)}$.

Exercice 10 :

M est de coordonnées polaires $\left(4, \frac{-\pi}{5}\right)$.

a) $E = S_{(Ox)}(M)\ d'ou\ \ OE = OM = 4$ et $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OE}}) \equiv -(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{5}\ [2\pi]$

Par suite : E est de coordonnées polaires $\left(4, \frac{\pi}{5}\right)$.

b) $F = S_{(Oy)}(M)$ $d'ou$ $OF = OM = 4$ et $\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OF}}\right) \equiv \pi - \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OM}}\right)$ $[2\pi]$

$$\equiv \pi + \frac{\pi}{5} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{6\pi}{5} \quad [2\pi]$$

Donc F est de coordonnées polaires $\left(4,\frac{6\pi}{5}\right)$.

C) $G = S_O(M)$ $d'ou$ $OG = OM = 4$ et $\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OG}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OM}}\right)$ $[2\pi]$

$$\equiv \pi - \frac{\pi}{5} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{4\pi}{5} \quad [2\pi]$$

D'où G est de coordonnées polaires $\left(4,\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 11 :

1) $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT}$

$\overrightarrow{OE} = 3[(cos0).\vec{\imath} + (sin0).\vec{\jmath}] + 3\left[(\cos\frac{4\pi}{7}).\vec{\imath} + (\sin\frac{4\pi}{7}).\vec{\jmath}\right] = 3\left[(1+\cos\frac{4\pi}{7}).\vec{\imath} + (\sin\frac{4\pi}{7}).\vec{\jmath}\right]$

$\overrightarrow{OE} = 3\left[(2\cos^2\frac{2\pi}{7}).\vec{\imath} + (2\sin\frac{2\pi}{7}.cos\frac{2\pi}{7}).\vec{\jmath}\right]$

$\overrightarrow{OE} = 6cos\frac{2\pi}{7}.\left[(\cos\frac{2\pi}{7}).\vec{\imath} + (\sin\frac{2\pi}{7}).\vec{\jmath}\right]$ avec $cos\frac{2\pi}{7} > 0.$

D'où E est de coordonnées polaire $\left(6\cos\frac{2\pi}{7},\frac{2\pi}{7}\right)$.

$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$
$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

2) soit a l'aire de losange $OSET$

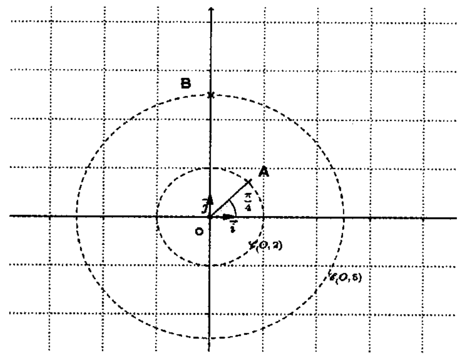
$a = \frac{OE \times ST}{2}$; $OE = 6cos\frac{2\pi}{7}$; $S(3,0)$ et $T\left(3\cos\frac{4\pi}{7}, 3\sin\frac{4\pi}{7}\right)$

$$ST = \sqrt{9\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)^2 + 9\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)^2} = 3\sqrt{1-2\cos\frac{4\pi}{7} + (\cos\frac{4\pi}{7})^2 + (\sin\frac{4\pi}{7})^2}$$

$$ST = 3\sqrt{2(1-\cos\frac{4\pi}{7})} = 3\sqrt{4\left[1-(1-2\sin^2\frac{2\pi}{7})\right]} = 3\sqrt{4(\sin\frac{2\pi}{7})^2} = 6\left|\sin\frac{2\pi}{7}\right| = 6\sin\frac{2\pi}{7}$$

D'où $a = \dfrac{36\times\cos\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{2\pi}{7}}{2} = \dfrac{18\times\left(2\cos\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{2\pi}{7}\right)}{2} = 9\sin\dfrac{4\pi}{7}$

Exercice 12 :



1) $OA = 2$ et $\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$OB = 2$ et $\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \dfrac{-3\pi}{2}\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

2) $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\vec{\imath}}\right) + \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OB}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OB}}\right) - \left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OA}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

3) * $x_A = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ et $y_A = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ d'où $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$

* $x_B = 5\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $y_A = 5\sin\dfrac{\pi}{2} = 5$ d'où $B(0,5)$

4) $AB = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (5-\sqrt{2})^2} = \sqrt{29+10\sqrt{2}}$

Exercice 13 :

1) a) $\begin{cases} x_A = 2\cos(-\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \\ y_A = 2\sin(-\frac{\pi}{6}) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_B = 5\cos(\frac{3\pi}{4}) = \frac{-5\sqrt{2}}{2} \\ y_B = 5\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x_C = 1\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y_C = 1\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

Donc $A(\sqrt{3},-1)$; $B\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ et $C(0,1)$

b) soit θ la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{-5\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\\ \frac{5\sqrt{2}}{2}+1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\right)+2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+1\right)=5+5\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$cos\theta = cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{5+5\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{29+5\sqrt{6}+5\sqrt{2}}}$$

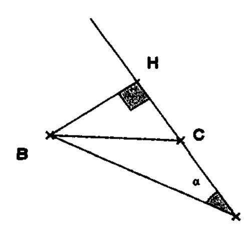
$$sin\theta = sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{AB\times AC}=\frac{\frac{5\sqrt{6}}{2}-5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{29+5\sqrt{6}+5\sqrt{2}}}<0$$

Donc : $\cos\theta=\dfrac{5+5\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{29+5\sqrt{6}+5\sqrt{2}}}\simeq\dfrac{18,19}{18,39}\simeq 0,98$ et $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2},0\right[$

Calculatrice : $\cos^{-1}(0,99)\simeq 8°,11(\deg ré)\simeq 0.14(rad)\to\theta\approx\dfrac{\pi}{22}$

2) 1[er] méthode :

soit H le projeté orthogonal de B sur (AC)



$$aire(ABC) = \frac{1}{2}AC\times BH \quad on\ sait\ que :\ AC = \sqrt{7}$$

$$sin(\widehat{BAC}) = \frac{BH}{AB} \quad\Rightarrow\quad BH = AB.sin(\widehat{BAC}).$$

$$BH = AB\times\frac{\left|\frac{5\sqrt{6}}{2}-5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{AB\times AC}=\frac{\left|\frac{5\sqrt{6}}{2}-5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{AC}$$

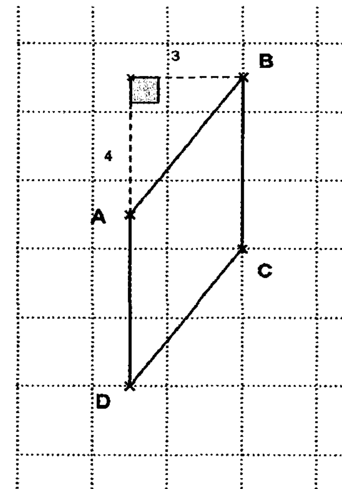
par suite : $Aire(ABC)=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{5\sqrt{6}}{2}-5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\dfrac{1}{2}\left(5\sqrt{2}+\sqrt{3}-\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\right)$

$$Aire(ABC)=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin B\widehat{A}C$$

2[eme] méthode : (utiliser la formule d'El-Kashi)

Exercice 14 :

1) * $sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{-3}{5}$ car la mesure principale α de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ appartient à $]-\pi,0[$



* $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha \Rightarrow cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha}$ car $\widehat{BAD}$ est obtus

$$\Rightarrow cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{-3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

2) $\widehat{BAD} + \widehat{ABC} = \pi$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \pi\ [2\pi] \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \pi - \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$$

D'où $cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = cos\left(\pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\right) = -cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{4}{5}$

et $sin\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = sin\left(\pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\right) = -sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{3}{5}$

Exercice 15 :

a) $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi\ [2\pi]$

$$cos(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = cos[(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi] = -cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$sin(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = sin[(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi] = -sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -sin\frac{\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$

b) $(\widehat{\vec{u},3\vec{u}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\vec{u}})\ [2\pi]$

$\equiv 0\ [2\pi]$

$cos(\widehat{\vec{u},3\vec{u}}) = cos0 = 1$ et $sin(\widehat{\vec{u},3\vec{u}}) = sin0 = 0$

c) $(\widehat{\vec{v},w}) \equiv (\widehat{\vec{v},\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{w}})\ [2\pi]$

$\equiv (\widehat{\vec{u},\vec{w}}) - (\widehat{\vec{u},\vec{v}})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \qquad \equiv \frac{-\pi}{12}\ [2\pi]$

Donc: $cos(\widehat{\vec{u},w}) = cos(-\frac{\pi}{12}) = cos\frac{\pi}{12}$ et $sin(\widehat{\vec{u},w}) = sin(-\frac{\pi}{12}) = -sin\frac{\pi}{12}$

$$* \begin{cases} \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2} \\ \sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \\ \sin^2 \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Par suite : $cos(\widehat{\vec{u},w}) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ $\quad et \quad$ $sin(\widehat{\vec{u},w}) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

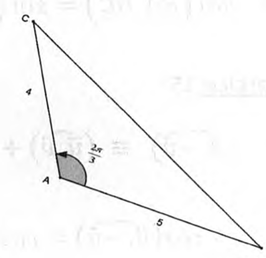
d) $(\widehat{-2\vec{w},-5\vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{w},\vec{v}})\ [2\pi]$ car : $(-2) \times (-5) > 0$

d'où $cos(\widehat{-2\vec{w},-5\vec{v}}) = cos(\widehat{\vec{w},\vec{v}}) = cos(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$$sin(\widehat{-2\vec{w},-5\vec{v}}) = sin(\widehat{\vec{w},\vec{v}}) = -sin(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Exercice 16 :

$$sin\widehat{BAC} = \frac{\left|Det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|}{AB \times AC} \Rightarrow \left|Det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = AB \times AC \times sin\widehat{BAC}$$

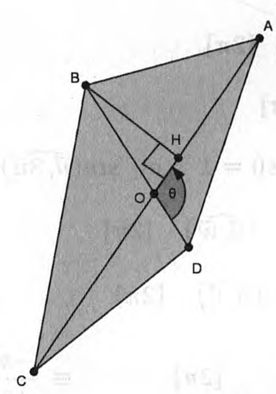


Par suite : $\left|Det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = 5 \times 4 \times \sin\dfrac{2\pi}{3} = 10\sqrt{3}$

Exercice 17 :

1) on désigne par a_1 : l'aire du triangle OAB et H: le projeté orthogonal de B sur (OA).

$$a_1 = \frac{OA \times BH}{2}$$



Dans la figure donnée, $\widehat{BOA} = \pi - \theta$

$$sin\widehat{AOB} = \frac{BH}{OB} \Rightarrow BH = OB \times sin\widehat{AOB}$$

$$\Rightarrow BH = OB \times sin(\pi - \theta) = OB \times sin\theta$$

D'où $a_1 = \dfrac{OA \times BH}{2} = \dfrac{OA \times OB}{2} \sin\theta$

De même : $a_2 = aire\ (\ OBC\ ) = \dfrac{OC \times OB}{2} \sin\theta$

$$a_3 = aire\ (OCD) = \frac{OC \times OD}{2}\sin\theta$$

et $$a_4 = aire\ (OAD) = \frac{OA \times OD}{2}\sin\theta$$

Par suite : $S = aire\ (ABCD) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

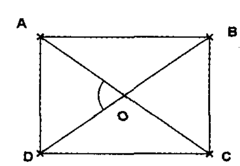
$$S = \frac{1}{2}[OA \times OB + OB \times OC + OC \times OD + OA \times OD].sin\theta$$

$$S = \frac{1}{2}[OA \times (OB + OD) + OC \times (OB + OD)].sin\theta$$

$$S = \frac{1}{2}[OA \times BD + OC \times BD].sin\theta = \frac{1}{2}BD \times [OA + OC].sin\theta$$

Ce qui donne : $\boxed{\boldsymbol{S = \frac{1}{2}AC \times BD \times sin\theta.}}$

2) $ABCD$ un rectangle de centre O avec $AB = 8$ et $AD = 6$



$S = aire(ABCD) = 8 \times 6 = 48$

$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$; $\theta = \widehat{AOD} = \widehat{BOC}$

$$S = \frac{1}{2}AC \times BD \times sin\theta$$

On aura donc $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times sin\theta = 48$ ce qui donne $\boxed{sin\theta = 0{,}96}$

Calculatrice → $\theta \approx 73{,}7° \simeq 1.3(rad)$

Par suite : $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = \pi - \theta \approx 1{,}8$

<u>Exercice 18</u> :

1) $2.cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2.\left[\cos\frac{\pi}{6}.cosx - \sin\frac{\pi}{6}.sinx\right] = 2.\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ cosx - \frac{1}{2}\ sinx\right]$

d'où $2.cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}cosx - sinx$

2) $\sqrt{3}cosx - sinx = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2.cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ x+\frac{\pi}{6}=\frac{-\pi}{4}+2k\pi, k\in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ x=\frac{-5\pi}{12}+2k\pi, k\in Z \end{cases}$$

$$S_{IR} = \left\{\frac{-5\pi}{12}+2k\pi, k\in Z\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi, k\in Z\right\}$$

Exercice 19 :

1) $(cosx - sinx)^2 = cos^2x + sin^2x - 2sinx.cosx = 1 - 2sinx.cosx = 1 - sin2x$

2) a) $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 1-\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

b) $\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ 2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z \end{cases}$

$\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in Z \\ ou \\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in Z \end{cases}$ et comme $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors $x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$

Exercice 20 :

1) $\sin x = \sin\frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pi}{7}+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ x=\pi-\frac{2\pi}{7}+2k\pi, k\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pi}{7}+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ x=\frac{5\pi}{7}+2k\pi, k\in Z \end{cases}$

Comme $x \in]-\pi,\pi]$ alors $x=\frac{2\pi}{7}$ ou $x=\frac{5\pi}{7}$

De plus $cosx < 0$ donc $\boxed{x=\frac{5\pi}{7}}$

2) $\cos x = \cos\frac{4\pi}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4\pi}{9}+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ x=-\frac{4\pi}{9}+2k\pi, k\in Z \end{cases}$

Comme $x \in]-\pi,\pi]$ alors $x=\frac{-4\pi}{9}$ ou $x=\frac{4\pi}{9}$

de plus $sinx > 0$ donc $\boxed{x=\frac{4\pi}{9}}$

Exercice 21 :

a) $\begin{cases} \cos x = \frac{-1}{2} \\ x\in[0,2\pi[\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{4\pi}{3}$

b) dans ℝ l'équation $\cos x = -\cos(2x+\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \cos x = \cos[\pi-(2x+\frac{\pi}{3})]$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos(\frac{2\pi}{3}-2x)$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pi}{3}-2x+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ x=-(\frac{2\pi}{3}-2x)+2k\pi, k\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ -x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, k\in Z \\ ou \\ x=\frac{2\pi}{3}-2k\pi, k\in Z \end{cases}$

* $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, k\in Z$ et $x \in [0,2\pi[$

$$0 \leq \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{9} \leq \frac{2k\pi}{3} < \frac{16\pi}{9} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq k < \frac{8}{3} \quad ; \quad k \in \{0,1,2\}$$

Pour $k = 0$, $x = \frac{2\pi}{9}$; pour $k = 1$, $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}$ et pour $k = 2$, $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}$

Conclusion : $\begin{cases} \cos x = \frac{-1}{2} \\ x \in [0, 2\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \left\{\frac{2\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right\}$

c) $\cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 2k\pi, k \in Z \\ ou \\ 3x = -x + 2k\pi, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in Z \\ ou \\ x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$

$$0 \leq \frac{k\pi}{2} < 2\pi \rightarrow 0 \leq k < 4 \quad \text{d'où} \ : \ S_{[0,2\pi[} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

d) $2cos^2x + 3cosx - 2 = 0$

On pose $t = cosx$ L'équation devient : $2t^2 + 3t - 2 = 0$

$\Delta = 25$; $t' = -2$ et $t'' = \frac{1}{2}$

Ce qui donne : $2t^2 + 3t - 2 = 2(t + 2)(t - \frac{1}{2})$

$$2cos^2x + 3cosx - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(cosx + 2)\left(cosx - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow cosx = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \underbrace{cosx = -2}_{impossible} \qquad \text{car : } -1 \leq cosx \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad cosx = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$ Par suite $S_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Exercice 22 :

a) $\begin{cases} \sin x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ x \in]-\pi,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{-\pi}{4}$

b) dans $\mathbb{R}$: $sin2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

$$S_{]-\pi,\pi]} = \left\{\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

c) dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 2x = -\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x - \dfrac{\pi}{3})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \\ ou \\ 2x = \pi + x + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \\ ou \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in Z \\ ou \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$$

* $x = \dfrac{-\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in Z$ et $x \in]-\pi, \pi]$

$$-\pi < \frac{-\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{8\pi}{9} < \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{10\pi}{9} \Leftrightarrow \frac{-4}{3} < k \leq \frac{5}{3} \quad ; \quad k \in \{-1, 0, 1\}$$

pour $k = -1$, $x = \dfrac{-7\pi}{9}$; pour $k = 0$, $x = \dfrac{-\pi}{9}$ et pour $k = 1$, $x = \dfrac{-\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{9}$

Conclusion : $\begin{cases} \sin 2x = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ x \in]-\pi,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \left\{\dfrac{-7\pi}{9}, \dfrac{-\pi}{9}, \dfrac{5\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

d) dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin 3x = \cos(2x - \dfrac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left[\dfrac{\pi}{2} - \left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(-2x + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -2x + \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \\ ou \\ 3x = \pi - (-2x + \dfrac{2\pi}{3}) + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \\ ou \\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}, k\in Z \\ ou \\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \end{cases}$$

* $x=\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}, k\in Z$ et $x \in \left]-\pi, \pi\right]$

$-\pi<\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\leq\pi \Leftrightarrow -\frac{17\pi}{15}<\frac{2k\pi}{5}\leq\frac{13\pi}{15} \Leftrightarrow \frac{-17}{6}<k\leq\frac{13}{6}$; $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$

$$S_{]-\pi,\pi]}=\left\{\frac{-2\pi}{3},\frac{-4\pi}{15},\frac{2\pi}{15},\frac{\pi}{3},\frac{8\pi}{15},\frac{14\pi}{15}\right\}$$

Exercice 23 :

a) $tanx = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

$$\begin{cases} \tan x = -\sqrt{3} \\ x \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{-\pi}{3}$$

* dans IR, $tanx = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-\pi}{3}+k\pi, k\in Z$. $S_{IR}=\left\{\frac{-\pi}{3}+k\pi, k\in Z\right\}$

b) $\tan(x+\frac{\pi}{2})=1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(x+\frac{\pi}{2})=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in Z$$

$$S_{\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}=\left\{\frac{-\pi}{4}\right\} \quad \text{et} \quad S_{IR}=\left\{\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in Z\right\}$$

c) $tanx = -\tan(x+\pi)-2 \quad \Leftrightarrow \quad tanx = -\tan x - 2$

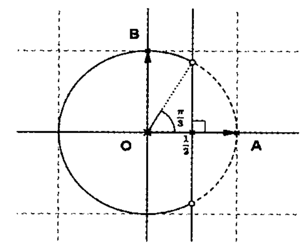
$$\Leftrightarrow \quad 2tanx = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad tanx = -1 = \tan(\frac{-\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

$$S_{\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} = \left\{\frac{-\pi}{4}\right\} \quad \text{et} \quad S_{IR} = \left\{\frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$$

Exercice 24 :

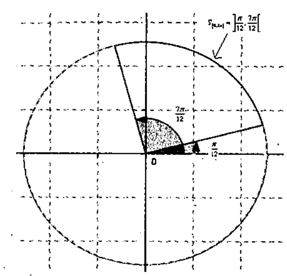


a) $\cos x < \frac{1}{2}$; $S_{[0,2\pi[} = \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$

$$S_{IR} = \bigcup_{k \in Z} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right[$$

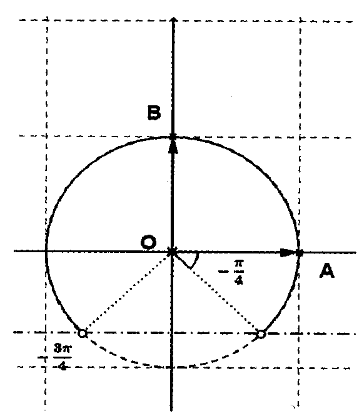
b) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (x - \frac{\pi}{3}) \in \left]\frac{-\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[, \quad k \in Z$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right[, \quad k \in Z$$



$$S_{IR} = \bigcup_{k \in Z} \left]\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right[\; ; \; S_{[0,2\pi[} = \left]\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right[$$

Exercice 25 :

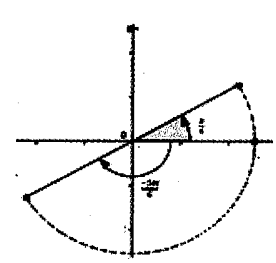


a) $sinx > \frac{-\sqrt{2}}{2}$; $S_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, \frac{-3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{4}, \pi\right]$

$$S_{IR} = \bigcup_{k \in Z} \left]\frac{-\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right[$$

b) dans IR, $\sin(x - \frac{\pi}{6}) < 0 \Leftrightarrow (x - \frac{\pi}{6}) \in \left]-\pi + 2k\pi, 2k\pi\right[, \; k \in Z$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{-5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[, \; k \in Z$$

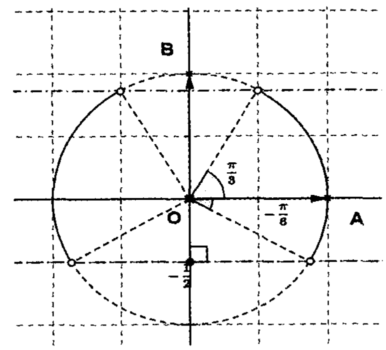


$$S_{IR} = \bigcup_{k\in Z} \left]\frac{-5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\ ; \quad S_{]-\pi,\pi]} = \left]\frac{-5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$$

c) $\frac{-1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi, \frac{-5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

$$S_{IR} = \bigcup_{k\in Z} \left]\frac{-\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right[$$



Exercice 26 :

1) $* \ A(x) + B(x) = [\cos^2 x + \sin^2 x] + \left[\cos^2(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(x + \frac{2\pi}{3})\right] + \left[\cos^2(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(x - \frac{2\pi}{3})\right]$

$$A(x) + B(x) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$*A(x) - B(x) = [\cos^2 x - \sin^2 x] + \left[\cos^2(x + \frac{2\pi}{3}) - \sin^2(x + \frac{2\pi}{3})\right] + \left[\cos^2(x - \frac{2\pi}{3}) - \sin^2(x - \frac{2\pi}{3})\right]$$

$$A(x) - B(x) = \cos 2x + \cos\left[2(x + \frac{2\pi}{3})\right] + \cos\left[2(x - \frac{2\pi}{3})\right]$$

$$A(x) - B(x) = \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$A(x) - B(x) = \cos 2x + \left(\cos\frac{4\pi}{3}.\cos 2x - \sin\frac{4\pi}{3}.\sin 2x\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{3}.\cos 2x + \sin\frac{4\pi}{3}.\sin 2x\right)$$

$$A(x) - B(x) = \cos 2x + \left(\frac{-1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + \left(\frac{-1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$$

$$A(x) - B(x) = \cos 2x - \cos 2x = 0$$

2)

$$\begin{cases} A(x) + B(x) = 3 \\ A(x) - B(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(x) = B(x) = \frac{3}{2}$$

Exercice 27 :

1) on a : $BA = BC$, $DA = DC$ et $D'A = D'C$ donc le plan (BDD') est le plan médiateur de $[AC]$.

comme $M \in (BDD')$ alors $MA = MC$. Par suite le triangle AMC est isocèle en M.

* soit I le milieu de $[AC]$

Le triangle AIM est rectangle en I d'où $\sin(\widehat{AMI}) = \dfrac{AI}{AM}$

$\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{AI}{AM}$ or $AI = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2AM}}$

2) $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est minimale lorsque AM est minimale.

or AM est minimale lorsque M est le projeté orthogonal de A sur (BD').

3) soit M est le projeté orthogonal de A sur (BD')

Les triangles AMB et AMD' sont rectangle en M.

$$\begin{cases} AM^2 + MD'^2 = AD'^2 \\ AM^2 + MB^2 = AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 + MD'^2 = 2 \\ AM^2 + MB^2 = 1 \end{cases}$$

$BDD'B'$ est un rectangle d'où $BD'^2 = BD^2 + BB'^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{BD' = \sqrt{3}}$

$M \in [BD')$ d'où $\boxed{MD' = \sqrt{3} - MB}$

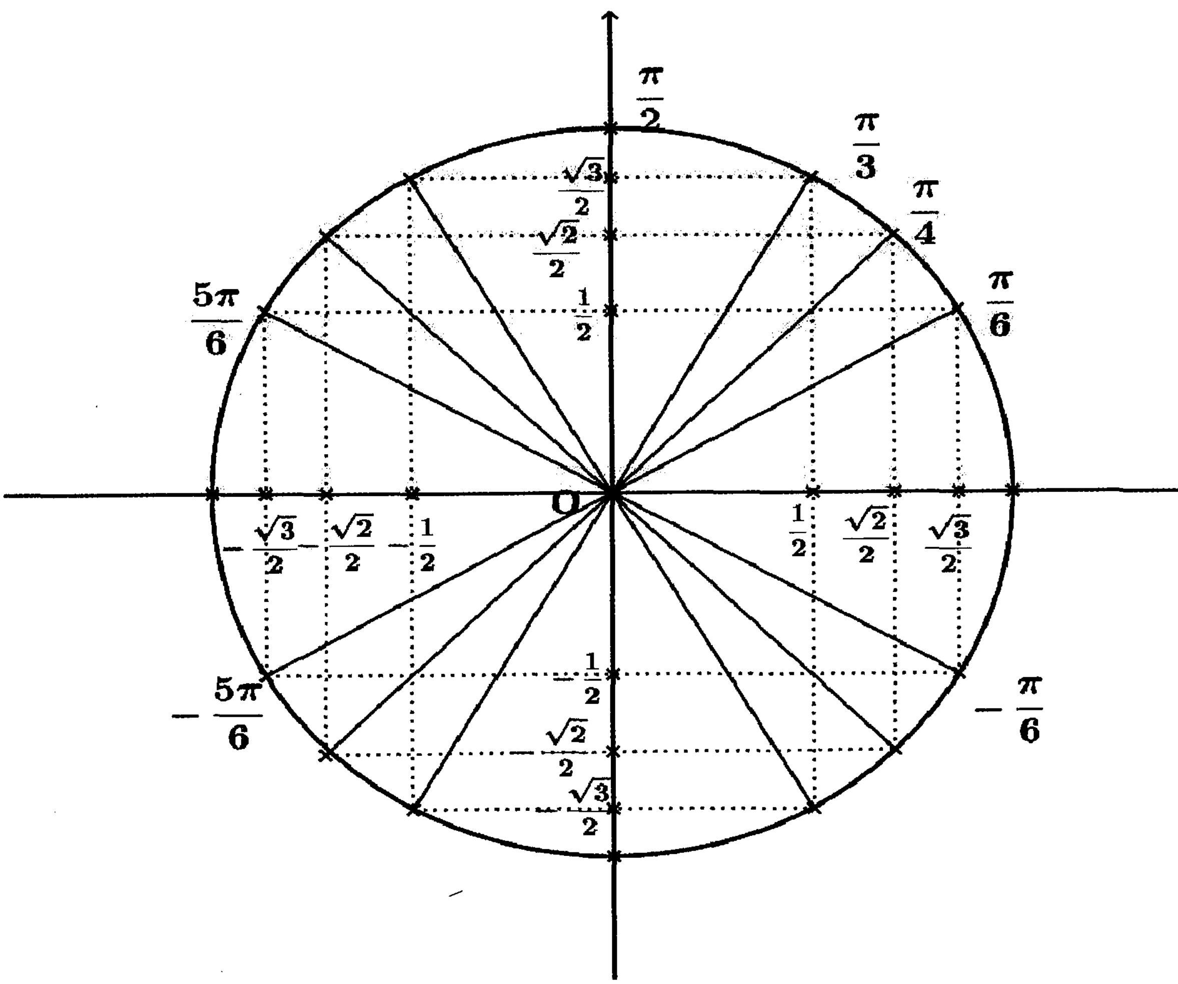
On aura donc $\begin{cases} AM^2 + (\sqrt{3} - MB)^2 = 2 \\ AM^2 + MB^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = 1 - MB^2 \\ 1 - MB^2 + 3 - 2\sqrt{3}.MB + MB^2 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = 1 - MB^2 \\ 4 - 2\sqrt{3}.MB = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MB = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ AM^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MB = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ MA = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ce qui donne : $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ par suite : $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

Cercle trigonométrique



Q C M

1) la rotation de centre I et d'angle $2\pi/3$

Car : $r_{\left(I,\frac{2\pi}{3}\right)}(A)=B$; $r_{\left(I,\frac{2\pi}{3}\right)}(B)=C$ et $r_{\left(I,\frac{2\pi}{3}\right)}(C)=A$. **réponse (b)**

2) $r_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)} O r_{\left(O,\frac{3\pi}{4}\right)} = r_{(O,\pi)} = S_O$. car $\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4} \equiv \pi[2\pi]$. **réponse (b)**

3) r est d'angle π. (r est d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}}) \equiv \pi\ [2\pi]$; $r = S_I$ avec $I = A*B$) . **réponse (a)**

4) $(AB)\perp(CD)$ car:

$r(A) = C$ et $r(B) = D$ d'ou $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. **réponse (b)**

5) a) (AB) et (CD) parallèles car $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv \pi\ [2\pi]$. **réponse (a)**

Remarque : lorsque le centre I de r appartient à (AB) alors (AB) et (CD) sont confondues.

VRAI - FAUX

1) Vrai

En effet : si A et B sont deux points distincts, de la droite D , d'images respectives A' et B' de D' par r

alors $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) \equiv \theta\ [2\pi]$; θ angle de r

Comme D et D' sont perpendiculaires alors $\theta \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ ou $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

2) Faux

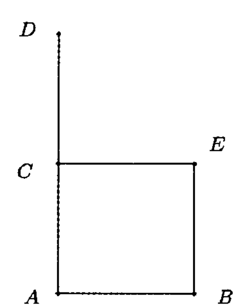
Par exemple : dans la figure ci-joindre

ABEC est un carré direct et D le symétrique de A par rapport à C.

r : la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$

L'image de la droite (AB) par r est la droite (CD)

mais on a : $r(A) \neq C$



3) Faux

Une homothétie h de rapport $k \neq 1$, conserve les mesures des angles orientés mais

h ne conserve pas les distances.

4) Faux

Une symétrie orthogonale ne conserve pas les mesures des angles orientés mais elle

conserve les distances .

5) Vrai

Car une isométrie conserve les mesures des angles géométriques

En effet : soit A , B et C trois points du plan, avec $A \neq B$ et $A \neq C$, d'images respectives A',

B' et C' par une isométrie g.

$\overrightarrow{BC}^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

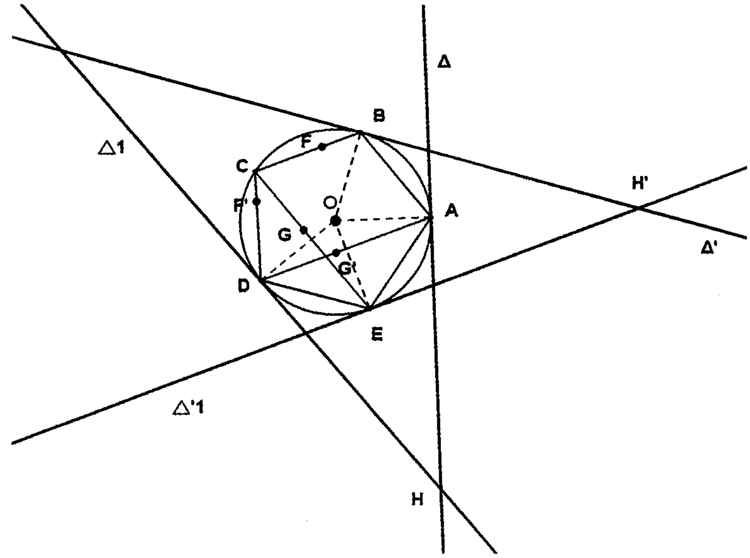
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$

de même $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2 \times A'B' \times A'C' \times cos(\widehat{B'A'C'})$

comme $B'C' = BC$; $A'C' = AC$ et $A'B' = AB$ alors $cos(\widehat{BAC}) = cos(\widehat{B'A'C'})$

par suite $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. car $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ appartiennent à $[0 , \pi]$.

Exercices



Exercice1 :

R est d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$

$R(B) = C$, $R(C) = D$,

$R(D) = E$ et $R(E) = A$

a) $F \in [BC]$ et $F' = R(F)$

$R([BC]) = [CD]$ d'ou

$F' \in [CD]$ et $CF' = BF$

b) $G \in [CE]$ et $G' = R(G)$

$R([CE]) = [DA]$ d'ou

$G' \in [DA]$ et $DG' = CG$

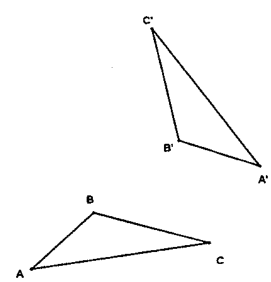
c) soit Δ la tangente à $\mathcal{C}$ en A et Δ_1 la tangente à $\mathcal{C}$ en D.

L'image de Δ *par* R est la droite Δ' tangente à $\mathcal{C}$ *en* B.

L'image de Δ_1 *par* R est la droite Δ'_1 tangente à $\mathcal{C}$ *en* E.

Soit $H' = R(H)$ on a $\{H'\} = \Delta' \cap \Delta'_1$

Exercice2 :

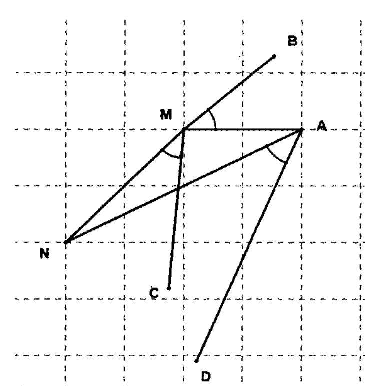


Les triangles $A'B'C'$ et ABC sont isométriques

et de même sens.

le points C' vérifie : $\begin{cases} B'C' = BC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \quad [2\pi] \end{cases}$

Exercice3 :



$\begin{cases} r_{(M,\alpha)}(A) = B \\ r_{(M,\alpha)}(N) = C \end{cases}$ D'où $\begin{cases} AN = BC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}$

$* \; r_{(A,\alpha)}(N) = D$ d'ou $\begin{cases} AN = AD \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases}$

Ce qui donne $AD = BC \quad et \quad \left(\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv [2\pi]$

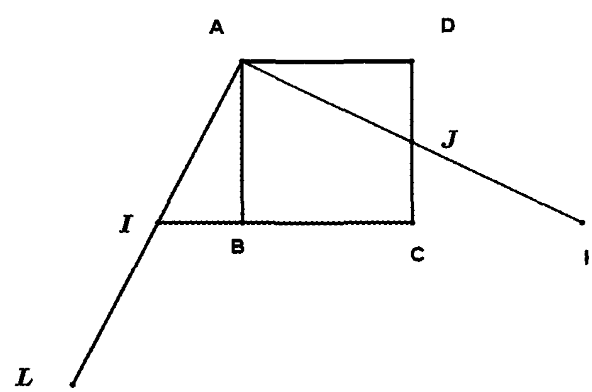
$$\Rightarrow \quad AD = BC \quad et - \left(\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv 0 \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AN}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv 0 \quad [2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad AD = BC \quad et \quad \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv 0 \quad [2\pi]$$

Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Exercice4 :



1) $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{DJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{DJ}}\right) \quad [2\pi]$

$$\equiv 0 + \left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{JC}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}}\right) + \pi \quad [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi \quad [2\pi]$$

D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{DJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

2) $R(B) = D$. Soit $I' = R(I)$

On aura donc : $BI = DI' \quad et \quad \left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{DI'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad (*)$

or $2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad BI = \frac{1}{2}BC = DJ$

Donc $BI = DJ \quad et \quad \left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{DJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad (**)$

ce qui donne $I' = J$ par suite $R(I) = J$.

3) $I = A * L \quad \Rightarrow \quad R(I) = R(A) * R(L)$

$$\Rightarrow J = A * R(L)$$

$$\Rightarrow R(L) = S_J(A) = K$$

4) $\begin{cases} R(B) = D \\ R(L) = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DK = BL \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BL},\overrightarrow{DK}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$

Donc $(BL) \perp (DK)$ et $BL = DK$

Exercice5 :

1) La droite (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$, *car ABCD est un carré*

et comme EBD est équilatéral alors $EB = ED$ donc E est un point de la médiatrice de $[BD]$

Donc $E \in (AC)$

Par suite les points E, A *et* C sont alignés.

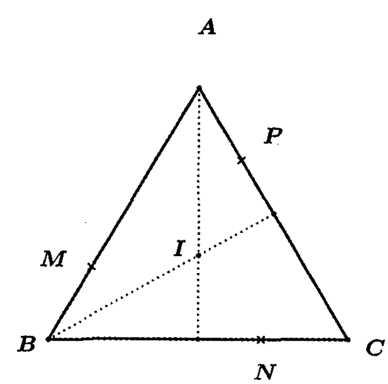
2) a) $R(B) = B$ *et* $R(C) = G$

Comme $\begin{cases} BG = BC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BG}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$ alors R est d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b) les triangles BED *et* BAF sont équilatéraux et de sens indirect d'où $R(E) = D$ *et* $R(A) = F$

Comme E, A *et* C sont alignés alors $R(E), R(A)$ *et* $R(C)$ sont alignés

Par suite D, F *et* G sont alignés.



Exercice6 :

$AM = BN = CP$

On désigne par R la rotation de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

on a : $R(A) = B$, $R(B) = C$ *et* $R(C) = A$

* Soit $M' = R(M)$, comme $R(A) = B$ alors $BM' = AM$ (une rotation conserve les distances)

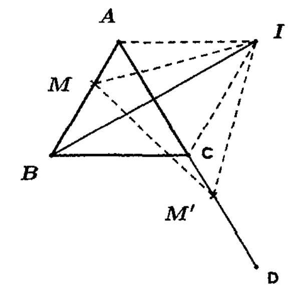
$M \in [AB]$ d'où $\begin{cases} R(M) = M' \in R([AB]) \\ BM' = AM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M' \in [BC] \\ BM' = AM \end{cases}$ ce qui donne $M' = N$ par suite $R(M) = N$

de même $R(N) = P$ et $R(P) = M$

Donc $MN = NP = PM$ *et* $IM = IN = IP$

conclusion : le triangle MNP est équilatéral de centre I.

Exercice7 :



1) a) la symétrie orthogonale d'axe (AC) transforme :
$B \text{ en } I$, A en A et C en C.

Comme $\begin{cases} BA = BC \\ (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$

alors $\begin{cases} IA = IC \\ (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$

(*le triangle IAC est équilatéral direct*)

D'où R est de centre I car $R(A) = C$.

b) $D = R(B)$ et $C = R(A)$ $d'ou$ $CD = AB$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD = AB = AC \\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD = CA \\ \frac{\pi}{3} + (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}) + \pi \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD = CA \\ (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}) \equiv -\pi \ [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CD}$$

Par suite C *est le milieu de* $[AD]$

2) soit $M_1 = R(M)$

$M \in [AB]$ *et* $R([AB]) = [CD]$ d'ou $\begin{cases} M_1 \in [CD] \\ CM_1 = AM \end{cases}$ ce qui donne $M' = M_1$ par suite $R(M) = M'$

par suite : $IM = IM'$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

Donc le triangle IMM' est équilatéral.

Exercice8 :

1) * $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$; $AM = 2$ *et* $A \in [OM]$

* $\overrightarrow{NC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CO}$; $CN = 2$ *et* $N \in [OC]$

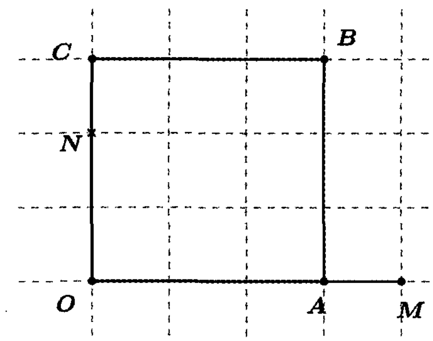
2) $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \lambda\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{NC} = \lambda\overrightarrow{OC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = |\lambda|OA \\ CN = |\lambda|OC \end{cases}$ et $OA = OC$ d'où $AM = CN$ $de\ plus$ $\overrightarrow{AM} \neq \overrightarrow{CN}$

Il existe donc une unique rotation R $tel\ que$ $R(A) = C$ et $R(M) = N$

3) $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CN}}\right) \equiv \left(\widehat{-\lambda\,\overrightarrow{OA},\lambda\,\overrightarrow{OC}}\right)$ $[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\lambda\,\overrightarrow{OA},\lambda\,\overrightarrow{OC}}\right) + \pi$ $[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) + \pi$ $[2\pi]$



$\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CN}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi$ $[2\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CN}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

D'où R est d'angle $-\frac{\pi}{2}$

* on a $R(A) = C$ et $\begin{cases} BC = BA \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$ donc R est $de\ centre\ B.$

Finalement on a : $\boxed{R = r_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)} : rotation\ de\ centre\ B\ et\ d'angle\ (-\frac{\pi}{2})}$

Exercice9 :

1) $S_C(B) = D$ d'où $CD = BC$ or $BC = AB$

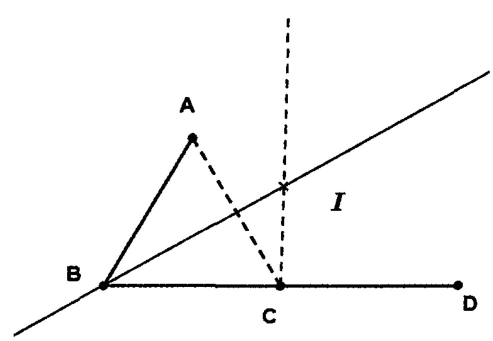
On aura : $AB = CD$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ par suite il existe une unique rotation R $tel\ que$ $R(A) = C\ et\ R(B) = D$

2) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}\right)$ $[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) + \pi$ $[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi$ $[2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$. D'où R est d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



* soit I le centre de R.

$R(A) = C$ et $R(B) = D$ d'où $IA = IC \Longrightarrow I \in med[AC]$ et $IB = IDI \in med[BB]$

Conclusion : I est l'Intersection des médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$. $(voir\ figure)$

Exercice10 :

$P \in [BA)$, $Q \in [CA)$ et $BP = CQ$

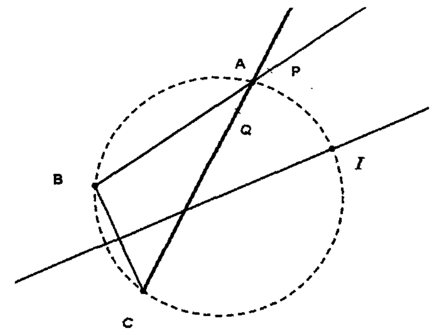
1^er^ cas On suppose que $P \neq B$

On a : $BP = CQ$ et $\overrightarrow{BP} \neq \overrightarrow{CQ}$ par suite il existe une unique rotation R $tel\ que$ $R(B) = C$ et $R(P) = Q$

R est d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CQ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}}\right)$ $[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ $[2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$



Soit I le centre de R. Comme $R(B) = C$ alors $\begin{cases} IB = IC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases}$

I appartient à l'arc $[\widehat{BC}]$ du cercle C circonscrit au triangle ABC , contenant A

et I appartient à la médiatrice de $[BC]$. *(voir figure)*

Comme $R(P) = Q$ alors I appartient à la médiatrice de $[PQ]$.

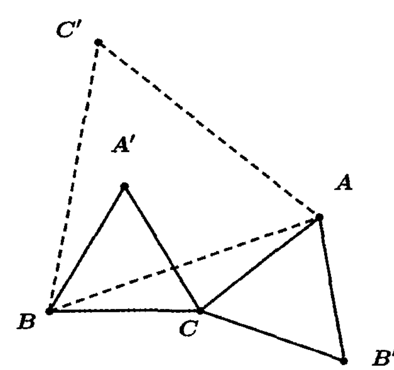
2^éme^ cas lorsque $P = B$ alors $Q = C$

Aussi I appartient à la médiatrice de $[PQ]$.

Exercice11 :

1) voir figure

2) on considère R la rotation de centre C d'angle $\dfrac{\pi}{3}$



On a : $R(B') = A$ et $R(A') = B$ $d'ou$ $\left(\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

$r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}(A) = C'$ $d'ou$ $AC'B$ $est\ \text{équilatéral}\ direct$

$par\ suite :$ $\left(\widehat{\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

3) $R(B') = A$ et $R(A') = B$ $d'ou$ $B'A' = AB$

Or $AB = AC'$ $donc$ $B'A' = AC'$

4) $B'A' = AC'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AB}}\right)$ $[2\pi]$

D'ou $B'A' = AC'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}}\right) \equiv 0$ $[2\pi]$

par suite $B'A' = AC'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{AC'}}\right) \equiv 0 \quad [2\pi]$

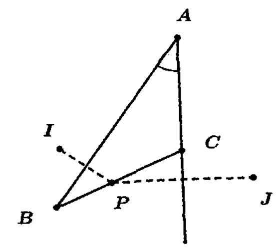
ce qui donne $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AC'}$

il existe donc une unique translation t $tels\ que$ $t(A) = C'$ et $t(B') = A'$

Exercice12 :

1) $AI = AP$ car $S_{(AB)}(P) = I$ et $AJ = AP$ car $S_{(AC)}(P) = J$ d'où $AI = AJ$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AP}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AJ}}\right) \quad [2\pi]$



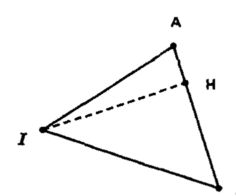
$\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right) \equiv 2[\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}}\right)] \quad [2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right) \equiv \frac{2\pi}{5} \ [2\pi]$

Par suite $r_{\left(A,\frac{2\pi}{5}\right)}(I) = J$ car $AI = AJ$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right) \equiv \frac{2\pi}{5} \ [2\pi]$

2) $AP = AI = AJ$ et $\widehat{IAJ} = \frac{2\pi}{5}$



Soit H le projeté orthogonal de I sur (AJ)

$sin\hat{A} = \frac{IH}{IA} \quad \Rightarrow \quad IH = IA.\,sin\hat{A}$

Soit a l'aire du triangle AIJ ;

$a = \frac{AJ \times IH}{2} = \frac{AJ \times AI}{2} sin\hat{A}$ d'ou $a = \frac{AP^2}{2} sin\frac{2\pi}{5}$

a est minimale lorsque AP est minimale.

1ercas : $AB > AC$

a est minimale lorsque $P = C$

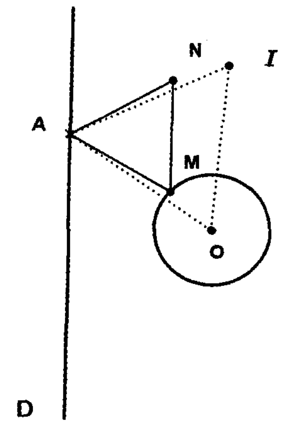
2ercas : $AB = AC$

a est minimale lorsque $P = B * C$

3eme cas : $AC > AB$

a est minimale lorsque $P = B$

Exercice13 :



1) $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(M)=N$

Lorsque M décrit (C) , le point N décrit le cercle (C')

Image de (C) par r.

Soit $O'=r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(O)$

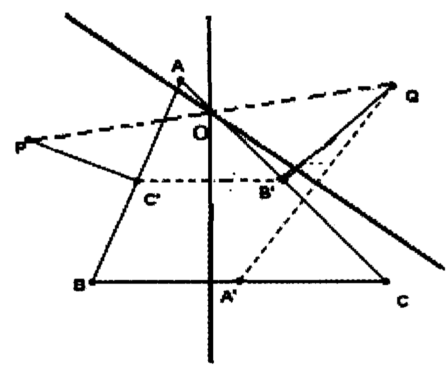
(C') :le cercle de centre O' de même rayon que (C)

2) $O'=I$, $r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(O)=I$

Le triangle AOI est équilatéral direct d'ou $r_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)}(A)=I$

Lorsque A décrit la droite D , le point I décrit la droite D' image de D par $r_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)}$.

Exercice14 :



1) a) * dans le triangle ABC on a : $\begin{cases} A' = B * C \\ C' = B * A \end{cases}$ d'où $C'A' = \dfrac{1}{2}AC =$

$C'A' = B'Q$ et $\overrightarrow{C'A'} \neq \overrightarrow{B'Q}$, il existe donc une unique rotation

R tels que $R(C') = B'$ et $R(A') = Q$

* R est d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{B'Q}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{B'Q}}\right) \quad [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

O est le point d'intersection des médiatrices respectives de $[C'B']$ et $[A'Q]$

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{C'P},\overrightarrow{B'A'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{C'P},\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}\right) \quad [2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{C'P},\overrightarrow{B'A'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{C'P},\overrightarrow{C'B}}\right) \quad [2\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{C'P},\overrightarrow{B'A'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

* soit $P' = R(P)$

$\begin{cases} R(P) = P' \\ R(C') = B' \end{cases}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{C'P},\overrightarrow{B'P'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $C'P = B'P'$

Or on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{C'P},\overrightarrow{B'A'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $C'P = AC' = B'A'$

Ce qui donne $P' = A'$ par suite $R(P) = A'$.

2) a) $\begin{cases} R(P) = A' \\ R(A') = Q \end{cases}$ alors $OP = OA' = OQ$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OA'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OQ}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

Donc $OP = OQ$ *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}}\right) \equiv \pi \; [2\pi]$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ}$

par suite O est le milieu du segment $[PQ]$.

b) $\begin{cases} R(P) = A' \\ R(A') = Q \end{cases}$ donne $A'P = A'Q$ et $(A'P) \perp (A'Q)$ puisque R *est* d'angle $\frac{\pi}{2}$

par suite le triangle $A'PQ$ est donc rectangle et isocèle en A'.

Exercice15 :

a) * lorsque une rotation R laisse le cercle (C) de centre O globalement invariant alors $R(O) = O$

on aura alors la rotation R est de centre O.

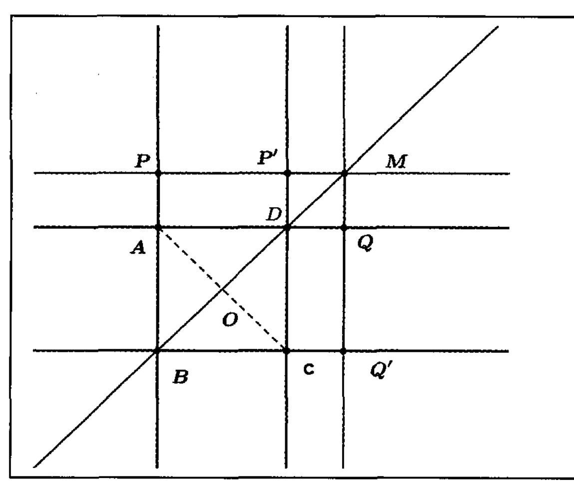
Il est clair que toute rotation de centre O laisse le cercle (C) globalement invariant.

* toute symétrie orthogonale d'axe passant par O laisse le cercle C globalement invariant.

b) * $R =$ *l'identité du plan* ou $R = S_A$: symétrie centrale de centre A (*rotation d'angle* π)

* S_D ou S_Δ avec Δ la perpendiculaire à D *passant par* A.

Exercice16 :



1) a) $h(B) = B$ *et* $h(D) = M$

Soit $A' = h(A)$

L'image de la droite (AD) par h est la droite passant

Par le point $[h(D) = M]$ et qui lui est parallèle

D'où $h[(AD)] = (PM)$

Puisque $A \in (AD)$ alors $A' \in (PM)$ **(1)**

De plus $h(A) = A'$ *et B le centre de h*

D'où B , A *et* A' sont alignés : $A' \in (AB)$ **(2)**

(1) + (2) donne $A' \in (AB) \cap (PM)$ alors $A' = P$ et par suite $h(A) = P$

De même $h(C) = Q'$ $\rightarrow$ *on considère l'image de* (BC) *et* (CD)

* $\left(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{MQ'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ'}}\right) + \pi \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{2} + \pi \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{3\pi}{2} \quad [2\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{MQ'}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$

b) dans le quadrilatère $BPMQ'$ on a : $A\hat{B}C = B\hat{P}M = M\hat{Q'}B = 90°$ donc c'est un rectangle

De plus soit k le rapport de $h.$ on a :

$\overrightarrow{BP} = k\ \overrightarrow{BA}\ et\ \overrightarrow{BQ'} = k\ \overrightarrow{BC}\ \ donc\ \ BP = BQ'$ (deux cotés consécutifs isométriques)

Ce qui prouve que $BPMQ'$ est un carré et par suite on $obtient$: $PM = MQ'\ et\ \overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{MQ'}$

Alors il existe donc une unique rotation r $tels\ que$ $r(P) = M\ \ et\ \ r(M) = Q'$

* r est d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{MQ'}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$

le centre J de r est le point d'intersection des médiatrices respectives de $[PM]\ et\ [MQ']$

J est le centre du carré $BPMQ'$; $J = B * M$

2) a) soit $Q_1 = r(Q)$

$r(M) = Q'\ et\ r(Q) = Q_1 \quad d'ou\ MQ = Q'Q_1$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{Q'Q_1}}\right) \equiv \equiv -\dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$

Ce qui donne $Q_1 = C$ donc $r(Q) = C.$

b) $r(P) = M\ et\ r(Q) = C$ d'ou $\left(\widehat{\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$

par suite les droites $(PQ)\ et\ (MC)$ sont perpendiculaires.

3) a) $BA = AD\ et\ \overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AD}$, il existe donc une unique rotation r_1 $tels\ que$ $r_1(B) = A\ et\ r_1(A) = D$

* r_1 est d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) + \pi \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{2} + \pi[2\pi]$

$\equiv -\dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$

* r_1 est de centre $O.$ car $med[BA] \cap med[AD] = \{O\}$

b) $h(A) = P \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BP} = k.\overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{r_1(B)r_1(P)} = k.\overrightarrow{r_1(B)r_1(A)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Ar_1(P)} = k.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AQ} \qquad \Rightarrow \quad r_1(P) = Q$$

c) $r_1(P) = Q$ d'où $OP = OQ$ par suite D_M $passe\ par\ O.$

Exercice17 :

$I)$ 1)

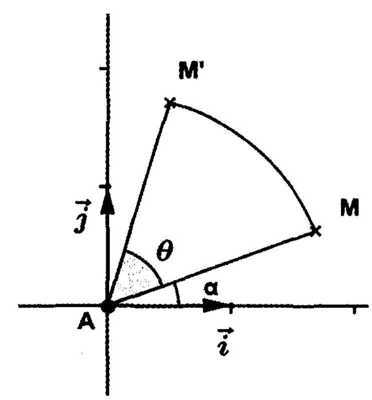
On a $AM = \rho\ \ et\ \ (\vec{\imath}, \overrightarrow{AM}) \equiv \alpha\,[2\pi]$

$R(M) = M' \Rightarrow AM' = AM\ \ et\ \ (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) \equiv \theta\ [2\pi]$

$\Rightarrow AM' = AM = \rho\ \ et\ \ (\widehat{\overrightarrow{AM}, \vec{\imath}}) + (\vec{\imath}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta\ [2\pi]$

$\Rightarrow AM' = \rho\ \ et\ \ -\alpha + (\vec{\imath}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta\ [2\pi]$

$\Rightarrow AM' = \rho\ \ et\ \ (\vec{\imath}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \alpha + \theta\ [2\pi]$



Les coordonnées polaires de $M'\ sont\ (\rho, \alpha + \theta)$

2) a) $M(X,Y)$ avec $\begin{cases} X = \rho.cos\alpha \\ Y = \rho.sin\alpha \end{cases}$

b) $M'(X',Y')$ avec $\begin{cases} X' = \rho.cos(\alpha+\theta) \\ Y' = \rho.sin(\alpha+\theta) \end{cases}$

c) $\begin{cases} X' = \rho.[cos\alpha.cos\theta - sin\alpha.sin\theta] \\ Y' = \rho.[sin\alpha.cos\theta + cos\alpha.sin\theta] \end{cases}$

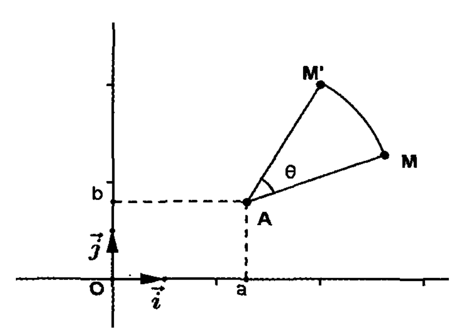
$\Leftrightarrow \begin{cases} X' = (\rho.cos\alpha).cos\theta - (\rho.sin\alpha).sin\theta \\ Y' = (\rho.sin\alpha).cos\theta + (\rho.cos\alpha).sin\theta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X' = X.cos\theta - Y.sin\theta \\ Y' = Y.cos\theta + X.sin\theta \end{cases}$

$II)$ 1)

$M(x,y)\ ;\ \overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$

$A(a,b)\ ;\ \overrightarrow{OA} = a.\vec{\imath} + b.\vec{\jmath}$



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad \Rightarrow \quad x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} = a.\vec{\imath} + b.\vec{\jmath} + X.\vec{\imath} + Y.\vec{\jmath}$

$\Rightarrow x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} = (X+a).\vec{\imath} + (Y+b).\vec{\jmath}$

d'où $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$

2) de même $\begin{cases} x' = X' + a \\ y' = Y' + b \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = X' + a = X.cos\theta - Y.sin\theta + a \\ y' = Y' + b = Y.cos\theta + X.sin\theta + b \end{cases}$

Par suite $\begin{cases} x' = (x - a).cos\theta - (y - b).sin\theta + a \\ y' = (x - a).sin\theta + (y - b).cos\theta + b \end{cases}$

QCM

1) on a : $a = bq + r$ $avec\ 0 \leq r < b$ $d'où$ $la\ réponse\ est\ 19 \longleftrightarrow$ **(c)**

2) 1 divise n donc $n \wedge 1 = 1 \longleftrightarrow$ **(a)**

3) b est un multiple de a donc $a \vee b = b \longleftrightarrow$ **(b)**

4) a) on a : $2n + n^2 = n(n+2)$: multiple de $n+2$ de même pour $2n+4$ donc$(n+2)\wedge(n+3)=1 \longleftrightarrow$ **(b)**

5) a non divisible par 3 , soit r' le reste de la division euclidienne de a par 3 et r le reste de la division euclidienne de a^2 par 3 on a $r = 1$

r'	1	2
r	1	1

$\longleftrightarrow$ **(b)**

VRAI – FAUX

1) Vrai

En effet : soit $a = 2n + 1$ et $b = 2n + 3$; $n \in IN^*$

Si un entier d divise a et b alors d divise $(b - a)$ $\Rightarrow$ d divise 2

$\Rightarrow$ $d = 1$ ou $d = 2$ et comme a est impair alors $d = 1$. Par suite $a \wedge b = 1$

2) Faux

Contre exemple : $a = 6$ et $b = 5$

3) Vrai

En effet : soit a et b deux entiers naturels non nuls et distincts. On suppose que $a < b$

D'une part $a \wedge b$ divise a d'où $a \wedge b \leq a$

D'autre part $a \vee b$ est un multiple de b d'où $a \vee b \geq b$

On aura donc $a \wedge b \leq a < b \leq a \vee b$ ce qui donne $a \wedge b < a \vee b$

4) Faux

Contre exemple : $a = 4$ et $b = 6$; $a \vee b = 12$ et $a.b = 24$

5) Vrai

Montrons par récurrence que : 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in IN$.

- vérifions pour $n = 0$

  $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0\,;$ $\quad 3\ divise\ \ 4^0 - 1$ (vrai)

- soit $n \in IN,$ supposons que 3 divise $(4^n - 1)$ montrons que 3 divise $(4^{n+1} - 1)$

$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = (3+1) \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + (4^n - 1)$

Comme 3 divise 3×4^n et $(4^n - 1)$ à la fois alors 3 divise $(4^{n+1} - 1)$

Conclusion : 3 divise $(4^n - 1)$ pour tout $n \in IN$.

Ce qui donne : le reste de la division euclidienne de 4^n par 3 est égal à 1.

Exercices

Exercice1 :

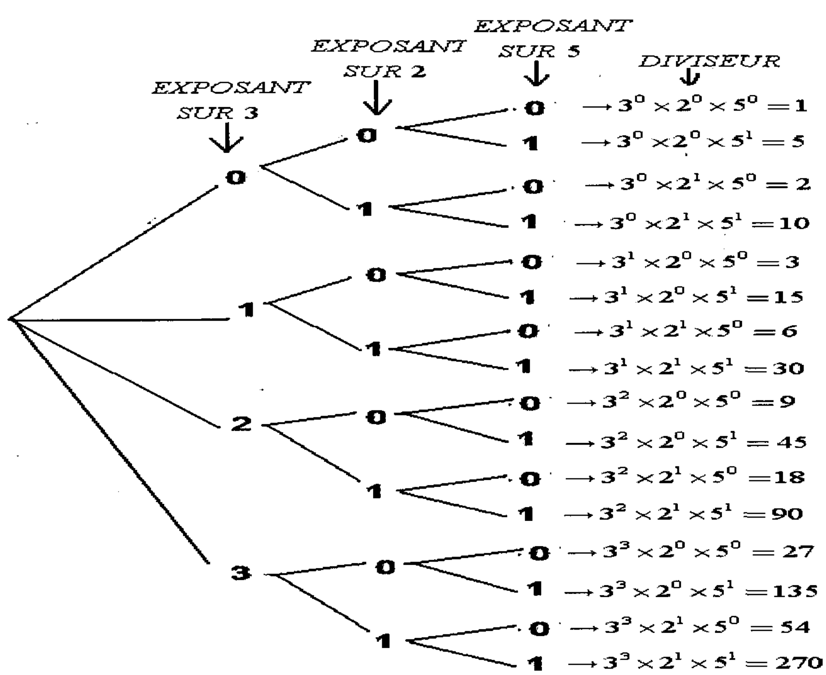
Arbre de choix :

$270 = 3^3 \times 2^1 \times 5^1$.

Les exposants sur 5 sont

O ou 1 , de 2 sont 0 ou 1

sur 3 sont 0,1,2 ou 3



1) $270 = 2 \times 3^3 \times 5$ d'où

$D_{270} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135, 270\}$

2) $540 = 2 \times 270$ d'où $D_{540} = D_{270} \cup \{4, 12, 20, 36, 60, 108, 180, 540\}$

3) les couples (a, b) $tel\ que$ $a.b = 270$ sont :$(1,270); (270,1); (2,135); (135,2); (3,90);$

$(90,3); (5,54); (54,5); (6,45); (45,6); (9,30); (30,9); (10,27); (27,10); (15,18)$ et $(18,15)$

* les couples (a, b) $tel\ que$ $a.b = 540$

(1,540) ; (540,1) ; (2,270) ; (270,2) ; (3,180) ; (180,3) ; (4,135) ; (135,4) ; (5,108) ; (108,5) ;

(6,90) ; (90,6) ; (9,60) ; (60,9) ; (10,54) ; (54,10) ; (12,45) ; (45,12) ; (15,36) ; (36,15) ; (18,30) ;

(30,18) ; 20,27) et (27,20).

4) $(a - 3).(b + 5) = 270$

(4,265) ; (5,130) ; (6,85) ; (8,49) ; (9,40) ; (48,1) ; (12,25) ; (33,4) ; (13,22) ; (30,5) ;

(18,13) et (21,10).

5) $(a - 5).(b - 9) = 540$

(6,549) ; (545,10) ; (7,279) ; (275,11) ; (8,189) ; (185,12) ; (9,144) ; (140,13) ; (10,117) ;

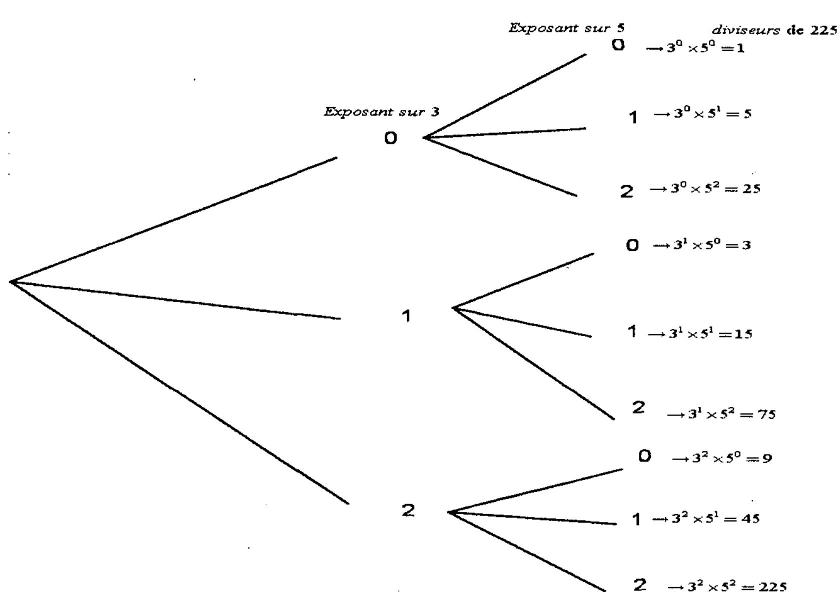
(113,14) ; (11,99) ; (95,15) ; (14,69) ; (65,18) ; (15,63) ; (59,19) ; (17,54) ; (50,21) ; (20,45) ;

(41,24) ; (23,39) ; (35,27) ; (25,36) et (32,29).

Exercice2 :

1) $225 = 3^2 \times 5^2$

On pourra utiliser un arbre de choix :



d'où $D_{225} = \{ 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225 \}$

L'ensemble des couples (m, n) d'entiers naturels tels que $m.n = 225$ est :

$\{ (1{,}225); (225{,}1); (3{,}75); (75{,}3); (5{,}45); (45{,}5); (9{,}25); (25{,}9); (15{,}15) \}$

2) $450 = 2 \times 225$

Les couples (a, b) tel que $a.b = 450$ sont : (1,450) ; (450,1) ; (2,225) ; (225,2) ; (3,150) ;

(150,3) ; (6,75) ; (75,6) ; (5,90) ; (90,5) ; (10,45) ; (45,10) ; (9,50) ; (50,9) ; (18,25) ; (25,18) ;

(15,30) et (30,15).

3) $(x - 5).(y - 9) = 450$

(6,459) ; (455,10) ; (7,234) ; (230,11) ; (8,159) ; (155,12) ; (11,84) ; 80,15) ; (10,99) ; (95,14) ;

(50,19) ; (15,54) ; (14,59) ; (55,18) ; (30,27) ; (23,34) ; (20,39) et (35,24).

Exercice3 :

1) $n = 6p + 5 \quad ; \qquad p \in IN$

a) $3n = 18p + 15 = 6 \times (3p) + 15 = 6 \times (3p) + 6 \times 2 + 3 = 6 \times (3p + 2) + 3$

d'où le reste de la division euclidienne de $3n$ $par\ 6 \quad est\ \ r = 3$

b) $n = 6p + 5 \quad ; \qquad p \in IN$

$n^2 = 36p^2 + 60p + 25 = \ 6 \times (6p^2 + 10p) + 6 \times 4 + 1$

$n^2 = 6 \times (6p^2 + 10p + 4) + 1$

d'où le reste de la division euclidienne de n^2 $par\ 6 \quad est\ \ r = 1$

c) $2\,n^2 = 6 \times (12p^2 + 20p + 8) + 2$

$2\,n^2 + 6 = 6.(12p^2 + 20p + 9) + 2$

d'où le reste de la division euclidienne de $2n^2 + 6$ $par\ 6 \quad est\ \ r = 2$

2) $n = 5q + 4 \quad ; \ q \in IN$

$n^2 - n = n.(n - 1) = (5q + 4).(5q + 3) = \ 25q^2 + 35q + 12$

$n^2 - n = 5.(5q^2 + 7q + 2) + 2$

d'où le reste de la division euclidienne de $n^2 - n$ $par\ 5 \quad est\ \ r = 2$

Exercice4 :

1) $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

2) $a = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

* Si $r = 0$ alors $5\ divise\ n$ par suite $5\ divise\ a.$

* Si $r = 1$ alors $5\ divise\ (n+4)$ par suite $5\ divise\ a.$

* Si $r = 2$ alors $5\ divise\ (n+3)$ par suite $5\ divise\ a.$

* Si $r = 3$ alors $5\ divise\ (n+2)$ par suite $5\ divise\ a.$

* Si $r = 4$ alors $5\ divise\ (n+1)$ par suite $5\ divise\ a.$

Conclusion : $5\ divise\ a\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n.$

Exercice5 :

1) a) * premier cas : $n\ pair$; $n = 2p$, $p \in IN$

$3n(n+1) = 3 \times 2p.(2p+1) = 6(2p^2 + p)$

d'où $6\ divise\ 3n(n+1)$

* deuxième cas : $n\ impair$; $n = 2p + 1$, $p \in IN$

$3n(n+1) = 3(2p+1)(2p+2) = 6(p+1)(2p+1)$

d'où $6\ divise\ 3n(n+1)$

Conclusion : $3n(n+1)$ est divisible par 6 pour tout entier naturel n.

b) * vérifions pour $n = 0$

$0^3 - 0 = 0$ divisible par 6. (vrai)

* soit $n \in IN$

Supposons que 6 divise $(n^3 - n)$, montrons que 6 divise $[(n+1)^3 - (n+1)]$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$
$$= (n^3 - n) + 3n(n+1)$$

Comme 6 divise $(n^3 - n)$ et 6 divise $3n(n+1)$ alors 6 divise $[(n+1)^3 - (n+1)]$

Conclusion : $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout entier naturel n.

2) a) 1[er] cas : n *pair*

$n = 2p$, $p \in IN$

$5n = 10p$ donc 10 divise $5n$ par suite 10 *divise* $5n(n^3+1)$

2[er]cas : n *impair*

n^3 est aussi impair et n^3+1 est pair

Donc $n^3+1 = 2p$, $p \in IN$ ce qui donne $5(n^3+1) = 10.p$

Par suite 10 divise $5n(n^3+1)$

$n=2p+1$; $n\in\mathbb{N}$

$n^3=(2p+1)^3=8p^3+12p^2+6p+1$

$=2(4p^3+6p^2+3p)+1$

$=2k+1$; $k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n^3$ est impair

Conclusion : $5n(n^3+1)$ est divisible par 10 pour tout entier naturel n.

b) $(n+1)^5=\sum_{p=0}^{5} c_5^p n^p = 1+5n+10n^2+10n^3+5n^4+n^5$

$C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$n! = n\times(n-1)\times(n-2).....2\times 1$

c) * vérifions pour $n = 0$

10 divise $0^5 - 0 = 0$ (vrai)

* soit n un entier naturel

Supposons que 10 divise $n^5 - n$

Montrons que 10 divise $(n+1)^5 - (n+1)$

$(n+1)^5-(n+1) = (n^5-n)+(5n+10n^2+10n^3+5n^4)$

$= (n^5-n)+5n(n^3+1)+10(n^2+n^3)$

Comme 10 divise (n^5-n) , $5n(n^3+1)$ *et* $10(n^2+n^3)$ alors 10 divise $(n+1)^5-(n+1)$

Conclusion : $n^5 - n$ *est divisible par* 10 , *pour tout entier naturel* n.

Exercice6 :

1) $n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$; $n \in \mathbb{N}$

2) ($n+1$) divise (n^2+3n+2) donc l'ensemble de leurs diviseurs communs est l'ensemble des diviseurs de ($n+1$)

Exercice7 :

* $27693 = n.q + 5508 \quad \Rightarrow \quad n.q = 22185$

d'où n *divise* 22185 *et* $n > 5508$

$* \ 100000 = n.q' + 13 \quad \Rightarrow \quad n.q' = 99987$

d'où $n \ divise \ 99987 \quad et \quad n > 13$

par suite n vérifie : $\begin{cases} n \ divise \ 22185 = 3^2 \times 5 \times 17 \times 29 \\ n \ divise \ 99987 \\ n > 5508 \end{cases}$

$D_{22185} = \{ 1, 3, 5, 9, 15, 17, 29, , 51, 85, 87, \dots \dots, 1305, 2465, 4437, 7395, 22185 \}$

le s diviseurs de 22185 , supérieurs strictement à 5508 sont 7395 et 22185

$99987 = 7395 \times 13 + 3852$

Comme 7395 ne divise pas 99987 alors le problème n'admet pas de solutions.

Remarque : 99987 et 22185 n'ont pas des diviseurs en commun supérieur à 5508

Exercice8 :

1) * vérification pour $n = 1$

$(2 \times 1)! = 2! = 2 \quad multiple \ de \ 2^1$ (vrai)

* soit $n \in IN^*$

Supposons que $(2n)!$ est divisible par 2^n

Montrons que $[2(n+1)]!$ est divisible par 2^{n+1}

$[2(n+1)]! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$

$= 2(n+1)(2n+1)(2n)!$

Comme 2^n divise $(2n)!$ alors 2×2^n divise $[2(n+1)]!$

Par suite $[2(n+1)]!$ est divisible par 2^{n+1}

Conclusion : $(2n)!$ est divisible par 2^n , pour tout $n \in IN^*$

2) démonstration par récurrence :

$* \ (1+1) = 2 \ divisible \ par \ 2^1$ la proposition est vraie pour $n = 1$

* supposons que $(n+1) \times (n+2) \times \dots \times (2n)$ est divisible par 2^n

Montrons que $(n+2) \times (n+3) \times \dots \times (2n+2)$ est divisible par 2^{n+1}

$$(n+2) \times (n+3) \times \dots \times (2n+2) = (n+2) \times (n+3) \times \dots \times (2n) \times (2n+1) \times 2(n+1)$$

$$= [(n+1) \times (n+2) \times \dots \times (2n)] \times 2 \times (2n+1)$$

Comme 2^n divise $[(n+1)\times(n+2)\times\ldots\times(2n)]$ alors

$(n+2)\times(n+3)\times\ \ldots.\ \times(2n+2)$ est divisible par 2^{n+1}

Conclusion : $(n+1)\times(n+2)\times\ \ldots.\ \times(2n)$ est divisible par 2^n pour tout $n\in IN^*$

Exercice9 :

1) * vérification pour $n=0$

$2^{3\times 0}-1=2^0-1=1-1=0$ divisible par 7 (vrai)

* soit $n\ \in IN.$

Supposons que $2^{3n}-1$ *est divisible par* 7

Montrons que $2^{3(n+1)}-1$ *est divisible par* 7

$2^{3(n+1)}-1\ =2^{3n+3}-1\ =2^3\times 2^{3n}-1=8\times 2^{3n}-8+7$

$2^{3(n+1)}-1\ =8\times(2^{3n}-1)+7$

Comme 7 divise $2^{3n}-1$ alors 7 divise $2^{3(n+1)}-1$

Conclusion : $2^{3n}-1$ *est divisible par* 7 pour tout $n\ \in IN.$

2) $2^{3n+1}-2=2\times 2^{3n}-2=2\times(2^{3n}-1)$

et $2^{3n+2}-4=2^2\times 2^{3n}-4=4\times(2^{3n}-1)$

comme $2^{3n}-1$ *est divisible par* 7 alors chacun des entiers $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$

est divisible par 7.

3) * d'après 1) pour $n=1000$

$2^{3\times 1000}-1=7q\ ,\ \ q\in IN$ ce qui donne $2^{3000}=7q+1$

Donc le reste de la division euclidienne de 2^{3000} par 7 est égal à 1.

* $4015=3\times 1338+1$

d'après 2) pour $n=1338$

$2^{3\times 1338+1}-2=7q_1\ ,\ \ q_1\in IN$ ce qui donne $2^{4015}=7q_1+2$

Donc le reste de la division euclidienne de 2^{4015} par 7 est égal à 2.

* $10250 = 3 \times 3416 + 2$

d'après la question **(2)** pour $n = 3416$

$2^{3\times3416+2} - 4 = 7q_2$, $q_2 \in IN$ ce qui donne $2^{10250} = 7q_2 + 4$

Donc le reste de la division euclidienne de 2^{10250} par 7 est égal à 4.

Exercice10 :

$p(x) = x^3 - 2x - 21$

1) $p(n) = n^3 - 2n - 21$

$$\begin{aligned} p(n) = 0 \quad &\Rightarrow \quad n^3 - 2n = 21 \\ &\Rightarrow \quad n(n^2 - 2) = 21 \\ &\Rightarrow \quad n \ divise \ 21 \end{aligned}$$

2) $D_{21} = \{1\ ,\ 3\ ,\ 7\ ,\ 21\}$. 3 *est une racine de p.*

3)* $p(x) = (x-3)(x^2 + bx + c)$ avec $b\ et\ c\ des\ réels$

$p(x) = x^3 + (b-3)x^2 + (c-3b)x - 3c$

Par identification : $\begin{cases} b - 3 = 0 \\ c - 3b = -2 \\ -3c = -21 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} b = 3 \\ c = 7 \end{cases}$

D'où $p(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 7)$

* dans IR, $p(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \ ou \ x^2 + 3x + 7 = 0$

. $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

. $x^2 + 3x + 7 = 0$

$\Delta = -19 < 0$

Conclusion : $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Exercice11:

1) $148 = 37 \times 4$; $481 = 37 \times 13$ *et* $814 = 37 \times 22$

2) $259 = 37 \times 7$; $592 = 37 \times 16$ *et* $925 = 37 \times 25$

3) a) $37 \ divise \ (100a + 10b + c) \Rightarrow 37 \ divise \ 10 \times (100a + 10b + c)$

$\Rightarrow 37 \ divise \ (1000a + 100b + 10c)$

$\Rightarrow 37 \ divise \ [999a + (100b + 10c + a)]$

$\Rightarrow 37 \ divise \ (100b + 10c + a)$ Car $37 \ divise \ 999a$

b) $x = 100a + 10b + c$; $y = 100b + 10c + a \ \ et \ \ z = 100c + 10a + b$

* $si \ 37 \ divise \ x \ \ alors \ 37 \ \ divise \ y$ d'après a)

* 37 divise y $\Rightarrow$ 37 divise $100b + 10c + a$

$\Rightarrow 37 \ divise \ 100c + 10a + b$ d'apès a)

$\Rightarrow$ $37 \ divise \ z.$

Exercice12:

1) a) soit $a'un \ diviseur \ de \ a \, ,distinct \ de \ 1.$

Tout diviseur de a' est un diviseur de a.

Si d est un diviseur commun de $a' \ et \ c$ alors d est un diviseur commun de $a \ et \ c$

Comme $a \wedge c = 1$ alors $d = 1$

Par suite $a' \ et \ c$ sont premiers entre eux.

b) $a \wedge b$ divise $a \ et \ b$ $\Rightarrow$ $a \wedge b$ divise $a \ et \ bc$

$\Rightarrow$ $a \wedge b$ divise $a \wedge (bc)$

c) * soit d un diviseur commun de $a \ \ et \ bc$ avec $d \neq 1$

$d \ divise \ a \ \ et \ d \neq 1$ donc $\mathrm{d} \wedge \mathrm{c} = 1$ d'après a)

et comme $d \ divise \ bc \ \ alors \ \ d \ divise \ b$ d'après Gauss

par suite d est un diviseur commun de $a \ et \ b.$

* lorsque $d = 1$ alors $d \ divise \ a \ et \ b.$

<u>Conclusion</u> : $a \wedge (bc)$ divise $a \wedge b$

d) $\begin{cases} a \wedge b \ \text{divise} \ \ a \wedge (bc) \\ et \\ a \wedge (bc) \ \text{divise} \ a \wedge b \end{cases}$ d'où $a \wedge b = a \wedge (bc)$

2) a) $a = 2n + 1$, $b = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $et \ c = 2$

$a \wedge c = 1$ d'où $a \wedge b = a \wedge (bc)$

Ce qui donne $(2n+1) \wedge \frac{n(n+1)}{2} = (2n+1) \wedge n(n+1)$

b) soit x un nombre premier

On a nécessairement : $x \wedge n = 1$ ou $x \wedge (n+1) = 1$

* si $x \wedge n = 1$ et x *divise* $n(n+1)$ alors x *divise* $n+1$ d'après Gauss

* si $x \wedge (n+1) = 1$ et x *divise* $n(n+1)$ alors x *divise* n d'après Gauss

Conclusion : x *divise soit* n *soit* $n+1$

c) supposons qu'il existe un entier premier p qui divise à la fois $2n+1$ *et* $n(n+1)$.

p divise $n(n+1)$ $\Rightarrow$ p *divise* n *ou* p *divise* $n+1$

on aura donc $\left\{ \begin{array}{l} p \text{ divise } n \text{ et } 2n+1 \\ ou \\ p \text{ divise } n+1 \text{ et } 2n+1 \end{array} \right.$

Comme $n \wedge (2n+1) = (n+1) \wedge (2n+1) = 1$

Alors $p = 1$ non premier (absurde)

Par suite $(2n+1) \wedge n(n+1) = 1$

n *et* $(n+1)$ sont consécuif c'est à dir l'un deux et divisible par 2 *Donc* $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d) les entiers $2n+1$ et $\frac{n(n+1)}{2}$ sont premiers entre eux, pour tout $n \in IN^*$.

Exercice13:

1) a) Les restes possibles de la division euclidienne d'un entier naturel par 7 sont : 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 et 6

b) il ya 7 restes possibles dans la division euclidienne par 7 .Alors les 8 nombres a_1 ;a_2 ;a_3 ; ... ;a_8 ne peuvent pas avoir 8 restes différents deux à deux. il ya donc au moins deux qui ont la même reste dans la division euclidienne par 7.

Notons a_k et $a_{k'}$ deux de ces nombres.

c) a_k et $a_{k'}$ ont le même reste dans la division euclidienne par 7 → $a_k = 7q_k+r$; $a_{k'}=7q_{k'}+r$

posons $a_k > a_{k'}$ → $a_k - a_{k'} = 7.(q_k - q_{k'})$ donc $a_k - a_{k'}$ est divisible par 7

$a_k - a_{k'}$ est divisible par 7 et l'écriture décimale de $a_k - a_{k'}$ ne contient que des 0 ou des 1 .

Donc il existe un entier naturel non nul divisible par 7 et dont l'écriture décimale ne contient que des 0 ou des 1 .

2) Les restes possibles de la division euclidienne d'un entier naturel par n sont : 0 ;1 ;2 ;..... et n-1

il ya n restes possibles dans la division euclidienne par n .Alors les n+1 nombres a_1 ;a_2 ;a_3 ; ... ;a_{n+1} ne peuvent pas avoir n+1 restes différents deux à deux. il ya donc au moins deux qui ont la même reste dans la division euclidienne par n.

Notons a_k et $a_{k'}$ deux de ces nombres.

a_k et $a_{k'}$ ont le même reste dans la division euclidienne par n → $a_k = n.q_k+r$; $a_{k'}=n.q_{k'}+r$

posons $a_k > a_{k'}$ → $a_k - a_{k'} =n.(q_k - q_{k'})$ donc $a_k - a_{k'}$ est divisible par n

$a_k - a_{k'}$ est divisible par n et l'écriture décimale de $a_k - a_{k'}$ ne contient que des 0 ou des 1 .

Donc il existe un entier naturel non nul divisible par n et dont l'écriture décimale ne contient que des 0 ou des 1.

QCM /

1) $1091 \rightarrow (\boldsymbol{b})$

2) $24 \times 36 \times 42 = 2^6 \times 3^4 \times 7 \rightarrow (\boldsymbol{c})$

3) $2^5 \times 3^2 \times 5^4$ est divisible par 60. $\rightarrow (\boldsymbol{c})$

4) $9^3 = 3^6$ divise $2^5 \times 3^7 \times 5^2 \times 11^2 \rightarrow (\boldsymbol{c})$

5) $11\ divise\ (2^{10} - 1) \rightarrow (\boldsymbol{b})$

VRAI – FAUX /

1) Vrai

En effet : soit $a\ et\ b$ deux nombres premiers avec $a \neq b$

$$\begin{cases} d\ divise\ a \\ et \\ d\ divise\ b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \quad ou \quad d = a \\ et \\ d = 1\ ou\ d = b \end{cases}$$

Comme $a \neq b \quad alors \quad d = 1$

Par suite $a \wedge b = 1$

2) Vrai

Démonstration : soit $a\ et\ b$ deux entiers naturels non nuls avec $p = a + b$ est premier

Si d divise $a\ et\ b \quad alors \quad d\ divise\ (a + b)$

$$\Rightarrow d\ divise\ p$$

$$\Rightarrow d = 1 \quad ou \quad d = p$$

$$\Rightarrow d = 1 \quad \text{car} \quad d \leq a < p$$

Par suite $a \wedge b = 1$

3) Faux

Car pour tout entier $n > 2$ on a : $n\ ou\ n + 1\ est\ pair.$

4) Faux

Car leurs somme est un nombre pair strictement supérieur à 2.

5) Faux

Contre exemple : $1 + 2 + 3 = 6\ \ non\ premier.$

Exercices

Exercice1 :

1) $\{101, 131, 151, 181, 191\}$ il y a donc cinq nombres

2) $\{103, 113, 143, 163, 173, 193\}$ il y a donc six nombres

3) $\{107, 127, 137, 157, 167, 187, 197\}$ il y a donc sept nombres.

Exercice2 :

1) $n\ divise\ n^2 \quad pour\ n \neq 0$

Pour que n^2 soit premier il faux que $n = 1 \quad ou \quad n = n^2$

Ce qui donne $n = 1$

Or $1^2 = 1\ \ n'est\, pas\ premier.$

Conclusion: n^2 n'est pas premier pour tout entier naturel n.

2) $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$(n+1)\ \ divise\ \ (n^2 + 2n + 1)$

Pour que $n^2 + 2n + 1$ soit premier il faut que $n + 1 = 1\ \ ou\ \ n + 1 = n^2 + 2n + 1$

Ce qui donne $n = 0$

Or $0^2 + 2 \times 0 + 1 = 1\ \ n'estpas\, premier$

Conclusion: $n^2 + 2n + 1$ n'est pas premier pour tout entier naturel n.

3) $a = n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

* pour $n = 0$, $a = 2\ \ premier$

* pour $n \geq 1$, $n+1 \quad et \quad n+2 \quad divisent\ a$ avec $n + 2 > n + 1 > 1$

a n'est pas premier.

4) $b = n^2 + 4n + 3 = (n+1)(n+3)$

* pour $n = 0$, $b = 3\ \ premier$

* pour $n \geq 1$, $b\ \ n'est\ \ pas\ \ premier$

Exercice3 :

1) $468 = 2^2 \times 3^2 \times 13$

Pour $n = 2$ ou $n = 3$ ou $n = 6$, n^2 $divise$ 468

2) $n^2.(2n+1) = 468 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ et \\ 2n+1 = 3^2 \times 13 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n = 3 \\ et \\ 2n+1 = 2^2 \times 13 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n = 6 \\ et \\ 2n+1 = 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \; n = 6$

Car les systèmes $\begin{cases} n = 2 \\ 2n+1 = 3^2 \times 13 \end{cases}$ et $\begin{cases} n = 3 \\ 2n+1 = 2^2 \times 13 \end{cases}$ n'ont pas de solutions

Exercice4 : $n \geq 2$

1) 2 $divise$ $(n!+2)$, 3 $divise$ $(n!+3)$, ……. et n $divise$ $(n!+n)$

2) pour $n = 9$; $9! = 362880$

$\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$

$9!+2$; $9!+3$; $9!+4$; … ; $9!+9$ *ne sont pas premiers* d'après 1)

donc 362882 ; 362883 ; 362884 ; ….. et 362889 ne sont pas premier.

Exercice5 :

1) soit r le reste de la division euclidienne de n par 5 ; $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

* si $r = 0$ $alors$ $n = 5q$, $q \in IN$ $\Rightarrow$ $n + 15 = 5.(q+3)$

* si $r = 1$ $alors$ $n = 5q + 1$, $q \in IN$ $\Rightarrow$ $n + 9 = 5.(q+2)$

* si $r = 2$ $alors$ $n = 5q + 2$, $q \in IN$ $\Rightarrow$ $n + 3 = 5.(q+1)$

* si $r = 3$ $alors$ $n = 5q + 3$, $q \in IN$ $\Rightarrow$ $n + 7 = 5.(q+2)$

* si $r = 4$ $alors$ $n = 5q + 4$, $q \in IN$ $\Rightarrow$ $n + 1 = 5.(q+1)$

Conclusion : au moins un des entiers $n+1$; $n+3$; $n+7$; $n+9$; $n+13$ et $n+15$ est divisible par 5.

2) d'après 1) pour que les entiers $n+1$; $n+3$; $n+7$; $n+9$; $n+13$ et $n+15$ soient tous premiers il faux qu'au moins l'un d'eux soit égal à 5.

Donc il faux que : $n+1 = 5$ ou $n+3 = 5$ $puisque$: $n+7 > 5$, $n+9 > 5$, $n+13 > 5$ et $n+15 > 5$.

* $n+1 = 5 \Leftrightarrow n = 4$

pour $n = 4$, $on\, a$: $n+1 = 5$, $n+3 = 7$, $n+7 = 11$, $n+9 = 13$, $n+13 = 17$

$et\ n + 15 = 19\ sont\ tous\ premiers$.

* $n + 3 = 5 \Leftrightarrow n = 2$

pour $n = 2$, $on\ a$: $n + 7 = 9$ $non\ premier$

conclusion : les entiers $n + 1 ; n + 3 ; n + 7 ; n + 9 ; n + 13$ $et\ n + 15$ sont tous premiers pour $\boxed{n = 4}$

Exercice6 :

1) * $496 = 2^4 \times 31$

$D_{496} = \{ 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496 \}$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$

* $8128 = 2^6 \times 127$ d'où

$D_{8128} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, 8128\}$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064 = 8128$

2) $7242 = 2 \times 3 \times 17 \times 71$

$D_{7242} = \{1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 71, 102, 142, 213, 426, 1207, 3621, 7242\}$

$1 + 2 + 3 + 6 + 17 + \ldots + 3621 = 5896 \neq 7242$

3) a) pour $k = 3$, $2^k = 8$; $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$

$1 + 2 + 4 \neq 8$ donc généralement 2^k n'est pas parfait.

ou bien : les diviseurs de 2^k $sont$: $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{k-1} et\ 2^k$.

$(1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{k-1})$ est impair donc $(1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{k-1}) \neq 2^k$.

remarque : $1+2+2^2+\ldots+2^{k-1} = 1\times\left(\frac{1-2^k}{1-2}\right) = 2^k - 1$ (somme de n termes d'une S.G)

b) pour $k = 2$, $3 \times 2^k = 12$; $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$1 + 2 + 3 + 4 + 6 \neq 12$ donc généralement 3×2^k n'est pas parfait.

Exercice7 :

1) * $1\wedge 8=1$; $2\wedge 8=2$; $3\wedge 8=1$; $4\wedge 8=4$; $5\wedge 8=1$; $6\wedge 8=2$;

$7\wedge 8=1$ et $8\wedge 8=8$

Les entiers naturels inférieurs ou égaux à 8 et premiers avec 8 sont : 1 , 3 , 5 et 7

D'où $\varphi(8)=4$

* Les entiers naturels inférieurs ou égaux à 11 et premiers avec 11 sont : 1 ,2, 3 ,4, 5,6 , 7 ,8 ,9 et 10

D'où $\varphi(11)=10$

* Les entiers naturels inférieurs ou égaux à 24 et premiers avec 24 sont : 1 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 et 23 d'ou $\varphi(24)=8$

2) * lorsque p est un nombre premier alors il est premier avec tout entier naturel ,non nul, strictement Inférieur à lui-même d'où $\varphi(p)=p-1$

* exemple : pour $p=5$, $p^2=25$

Les entiers naturels inférieurs ou égaux à 25 et premiers avec 25 sont :

1,2 ,3, 4, 6,7 ,8,9, 11, 12, 13 ,14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24

D'où $\varphi(25)=20=5^2-5$

En général : lorsque p est premier $\varphi(p^2)=p^2-p$

Exercice8 :

1) n un entier naturel ,

soit r le reste de la division euclidienne de n par 8 ; $r \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

donc n s'écrit sous forme $8k$, $8k+1$, $8k+2$, $8k+3$, $8k+4$, $8k+5$, $8k+6$, ou $8k+7$ avec $k \in IN$

2) les nombres $8k$, $8k+2$, $8k+4$ et $8k+6$, $k \in IN$, sont tous pairs. lorsque n est un entier premier (impair) alors il s'écrit sous forme $8k+1, 8k+3, 8k+5$ ou $8k+7$, $k \in IN$

3)

$$\begin{array}{lll} 9 = 8\times 1+1 & ; \ 25 = 8\times 3+1 & ; \ 33 = 8\times 4+1 \\ 27 = 8\times 3+3 & ; \ 99 = 8\times 12+3 & ; \ 51 = 8\times 6+3 \\ 45 = 8\times 5+5 & ; \ 21 = 8\times 2+5 & ; \ 85 = 8\times 10+5 \\ 15 = 8\times 1+7 & ; \ 39 = 8\times 4+7 & ; \ 111 = 8\times 13+7 \end{array}$$

Exercice9 :

1) $x \neq 1$, $x \neq 0$ et $n \neq 0$

$1+x+x^2+......+x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ (somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique)

ce qui donne : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ ... + x + 1)$

d'où $x - 1$ $divise$ $x^n - 1$

2) d'après 1) pour $x = 2^a$ et $n = b$

* $2^a - 1$ $divise$ $(2^a)^b - 1 \Rightarrow 2^a - 1$ $divise$ $2^{ab} - 1$

* $2^b - 1$ $divise$ $(2^b)^a - 1 \Rightarrow 2^b - 1$ $divise$ $2^{ab} - 1$

3) supposons que n n'est pas premier et $n \neq 1$, donc $n = ab$ $avec$ $a > 1$ et $b > 1$

D'après (2) : $2^a - 1$ $divise$ $2^{ab} - 1 \Rightarrow 2^a - 1$ $divise$ $2^n - 1$

D'où $2^n - 1$ $n'est\ pas\ premier$

. pour $n = 1$, $2^n - 1 = 2 - 1 = 1 \Longrightarrow n'est\ pas\ premier$

Conclusion : si $2^n - 1$ $est\ premier$ alors n $est\ premier.$

4) $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ d'où $2^{11} - 1$ $n'est\ pas\ premier$

Exercice10 :

1) $f(n) = n^2 + n + 41$

a) $f(3) = 53$, $f(5) = 71$ et $f(39) = 1601$. tous ces nombres sont premiers

Remarque : Pour montre par exemple que 1601 est premier il suffit de vérifier que 1601 n'est pas divisible par aucun nombre premier inférieur ou égale à $\sqrt{1601}$

b) $f(40) = 1681 = 41^2$ et $f(41) = 1763 = 41 \times 43$

d'où $f(40)$ et $f(41)$ ne sont pas premiers.

2) $f(n) = a.n^2 + b.n + c$

a) $f(n+k) = a.(n+k)^2 + b.(n+k) + c = a(n^2 + 2nk + k^2) + bn + bk + c$

$f(n+k) = (an^2 + bn + c) + k(2an + ak + b)$

$f(n+k) = f(n) + k(2an + ak + b)$

Comme $f(n) = k \quad alors \qquad f(n+k) = k[1 + 2an + ak + b]$

Par suite k divise $f(n+k)$.

b) par exemple $f(1) = a + b + c$ d'près 2) a)

$a + b + c \quad divise \quad f(1 + a + b + c)$

$a + b + c \quad divise \quad f(m) \quad avec \ m = 1 + a + b + c$

D'où $f(m)$ est un entier composé.

Exercice11 :

1) le seul nombre premier pair est 2 .

pour $p = 2 , q = 2 + 2 = 4$: non premier. d'où $p \ et \ q$ sont impairs

2) $q = p + 2$

$p.q + 1 = p(p+2) + 1 = (p+1)^2$ d'où $p.q + 1$ est un carré parfait.

3) $p \ est \ impair \quad \Rightarrow \quad p + 1 \ est \ pair$

$\Rightarrow \ p + 1 = 2k \, , \ k \in IN$

D'où $pq + 1 = (p+1)^2 = (2k)^2 = 4k^2$ par suite $pq + 1$ est divisible par 4.

4) $p \geq 5$

a) soit r le reste de la division euclidienne de $p \ par \ 3$; $r \in \{0, 1, 2\}$

* supposons que $r = 0$

p s'écrit sous forme $p = 3k \, , \ k \in IN \qquad et \quad k \geq 2$

Absurde car $p \ est \ premier.$

* supposons que $r = 1$

p s'écrit sous forme $p = 3k + 1 \, , \ k \in IN \qquad et \quad k \geq 2$

D'où $q = p + 2 = 3(k+1)$. Absurde car $q \ est \ premier.$

Par suite le reste de la division euclidienne de $p \ par \ 3$ est $r = 2$

b) $p = 3k + 2 \, , \qquad k \in IN^*$

$pq + 1 = p(p+2) + 1 = (3k+2)(3k+4) + 1 = 9k^2 + 18k + 9$

$pq+1=9(k+1)^2$ donc 3 $divise$ $pq+1$

c) $12=3\times 4$ et $3\wedge 4=1$

un nombre a est divisible par 12 si et seulement si a est divisible à la fois par 3 et 4.

d) comme $pq+1$ est divisible par 3 et 4 alors $pq+1$ est divisible par 12.

5) a) $pq-2=(pq+1)-3$

Comme 3 divise $pq+1$ alors 3 divise $pq-2$

b) $pq-2$ est premier et $pq-2$ divisible par 3 , d'où $pq-2=3$

$$pq-2=3 \iff p(p+2)=5$$
$$\iff p^2+2p+1=6$$
$$\iff (p+1)^2=6 \quad \text{Impossible}$$

Exercice12 :

1) $u_n=2^n+3^n$

a) 3^n est un entier impair donc les diviseurs de 3^n sont tous impairs.

Comme le seul entier impair qui divise 2^n est 1 alors $2^n\wedge 3^n=1$

b) * d $divise$ x et y $\Rightarrow$ d $divise$ $x+y$ et d $divise$ $2x+3y$

* réciproquement:

$$d \ divise \ x+y \ et \ d \ divise \ 2x+3y \Rightarrow d \ divise \ 3(x+y)-(2x+3y) \ et \ (2x+3y)-2(x+y)$$
$$\Rightarrow d \ divise \ x \ et \ y$$

Conclusion : $x\wedge y=(2x+3y)\wedge(x+y)$

c) pour $x=2^n$ et $y=3^n$

$$x\wedge y=(2x+3y)\wedge(x+y) \Rightarrow (2^n+3^n)\wedge(2^{n+1}+3^{n+1})=2^n\wedge 3^n=1$$

Ce qui donne $u_n\wedge u_{n+1}=1$ ⟵ (à corriger)

2) a) * d $divise$ u_n et u_{n+2} $\Rightarrow d \ divise \ (2^n+3^n) \ et \ (2^{n+2}+3^{n+2})$

$$\Rightarrow d \ divise \ (2^n+3^n) \ et \ (4\times 2^n+9\times 3^n)$$
$$\Rightarrow d \ divise \ (4\times 2^n+9\times 3^n)-4(2^n+3^n) \ et \ 9(2^n+3^n)-(4\times 2^n+9\times 3^n)$$

$\Rightarrow \ d \ divise \ 5 \times 3^n \ \ et \ \ 5 \times 2^n$

d'ou $u_n \wedge u_{n+2}$ divise $(5\times 2^n)\wedge(5\times 3^n)$

b) $(5\times 2^n)\wedge(5\times 3^n) = 5\times(2^n \wedge 3^n) = 5$ car $2^n \wedge 3^n = 1$

$u_n \wedge u_{n+2}$ divise $(5\times 2^n)\wedge(5\times 3^n) \Rightarrow u_n \wedge u_{n+2}$ divise 5.

D'ou $u_n \wedge u_{n+2} = 1$ ou $u_n \wedge u_{n+2} = 5$

3) a) $u_{2k+1} = 2^{2k+1} + 3^{2k+1}$, $k \in IN$

* vérification pour $k = 0$

$u_{2\times 0+1} = u_1 = 2^1 + 3^1 = 5$ divisible par 5. (vrai)

* soit $k \in IN$

Supposons que 5 divise u_{2k+1} et montrons que 5 divise u_{2k+3}

$u_{2k+3} = 2^{2k+3} + 3^{2k+3} = 4 \times 2^{2k+1} + 9 \times 3^{2k+1}$

$u_{2k+3} = 4 \times [2^{2k+1} + 3^{2k+1}] + 5 \times 3^{2k+1}$

Comme 5 divise $u_{2k+1} = 2^{2k+1} + 3^{2k+1}$ alors 5 divise u_{2k+3}

Conclusion : u_{2k+1} est divisible par 5 pour tout entier naturel k.

b) d'après 2) b) et pour $n = 2k + 1$, $k \in IN$

$u_{2k+1} \wedge u_{2k+3} = 1$ ou $u_{2k+1} \wedge u_{2k+3} = 5$

Comme 5 divise u_{2k+1} et u_{2k+3} alors $u_{2k+1} \wedge u_{2k+3} = 5$

4) a) * pour $k = 0$, $u_{2\times 0} = 2^0 + 3^0 = 2$

u_0 non divisible par 5 (vrai)

* supposons que u_{2k} n'est pas divisible par 5 et montrons que u_{2k+2} n'est pas divisible par 5

$u_{2k+2} = 2^{2k+2} + 3^{2k+2} = 4 \times 2^{2k} + 9 \times 3^{2k} = 4 \times (2^{2k} + 3^{2k}) + 5 \times 3^{2k}$

$u_{2k+2} = 4 \times u_{2k} + 5 \times 3^{2k} = 5 \times [u_{2k} + 3^{2k}] - u_{2k}$

Comme **5 ne** divise pas u_{2k} alors 5 ne divise pas u_{2k+2}

Conclusion : u_{2k} $n'est\ pas\ divisible\ par\ 5\ \ pour\ k \in IN$

b) d'apr**ès 2) b)** et pour $n = 2k$

$u_{2k} \wedge u_{2k+2} = 1$ ou $u_{2k} \wedge u_{2k+2} = 5$ et Comme 5 ne divise pas u_{2k} alors $u_{2k} \wedge u_{2k+2} = 1$

Exercice13 :

$p(x) = x^2 + x + 11$

1) $p(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 11 = x^2 + 2x + 1 + x + 1 + 11$

$p(x+1) = (x^2 + x + 11) + (2x + 2) = p(x) + 2(x+1)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	11	13	17	23	31	41	53	67	83	101

2) $p_a(x) = x^2 + x + a$, $a \geq 2$

a) * $p_a(a) = a^2 + a + a = a.(a+2)$ d'où a *divise* $p_a(a)$

* $p_a(a-1) = (a-1)^2 + (a-1) + a = a^2$ d'où a *divise* $p_a(a-1)$

b) a est chanceux $\Rightarrow$ $p_a(0)$ est premier

$\Rightarrow$ a *est premier*

c) * $p_2(x) = x^2 + x + 2$, $a = 2$

$p_2(0) = 2$ premier donc 2 est un entier chanceux.

* $p_3(x) = x^2 + x + 3$, $a = 3$

$p_3(0) = 3$ *premier* et $p_3(1) = 5$ *premier*

donc 3 est un entier chanceux .

* $p_5(x) = x^2 + x + 5$, $a = 5$

$p_5(0) = 5$ *premier* ; $p_5(1) = 7$ *premier* ; $p_5(2) = 11$ *premier* et $p_5(3) = 17$ *premier*

donc 5 est un entier chanceux .

* $p_7(x) = x^2 + x + 7$, $a = 7$

$p_7(1) = 9$ n'est pas premier

7 n'est pas un entier chanceux.

Conclusion : les entier chanceux et inférieurs ou égal à10 sont : 2 , 3 et 5.

Exercice14 :

1) a) soit r le reste de la division euclidienne de p par 3 ; $r \in \{0,1,2\}$

Or p est un entier premier d'où $r \neq 0$, par suite $r = 1$ ou $r = 2$

b)* **1^er^cas** : $r = 1$; $p = 3q + 1$, $q \in IN$

$n = p^4 - 1 = (3q+1)^4 - 1 = [(3q+1)^2 - 1][(3q+1)^2 + 1]$

$n = 3 \times (3q^2 + 2q)(9q^2 + 6q + 2)$

d'où n est divisible par 3.

* **2^er^cas** : $r = 2$; $p = 3q + 2$, $q \in IN$

$n = p^4 - 1 = (3q+2)^4 - 1 = [(3q+2)^2 - 1][(3q+2)^2 + 1]$

$n = 3 \times (3q^2 + 4q + 1)(9q^2 + 12q + 5)$

d'où n est divisible par 3.

2) a) p impair $\Rightarrow$ $p = 2k + 1$, $k \in IN$

$p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k(k+1)$

b) $p = 2k + 1$

$n = p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 4k(k+1)(4k^2 + 4k + 2)$

$n = 8k(k+1)(2k^2 + 2k + 1)$

n est divisible par 16 car $k(k+1)$ est $pair.$

3) a) $r \in \{1,2,3,4\}$

b) * $r = 1$ $\Rightarrow$ $p = 5q + 1$ $\Rightarrow$ $n = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 5 \times (5q^2 + 2q)(25q^2 + 10q + 2)$

* $r = 2$ $\Rightarrow$ $p = 5q + 2$ $\Rightarrow$ $n = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 5 \times (25q^2 + 20q + 3)(5q^2 + 4q + 1)$

* $r = 3$ $\Rightarrow$ $p = 5q + 3$ $\Rightarrow$ $n = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 5 \times (25q^2 + 30q + 8)(5q^2 + 6q + 2)$

* $r = 4$ $\Rightarrow$ $p = 5q + 4$ $\Rightarrow$ $n = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 5 \times (5q^2 + 8q + 3)(25q^2 + 40q + 17)$

Donc n est divisible par 5.

4) a) a $divise$ c, b $divise$ c et $a \wedge b = 1$ $montrons$ que $a \times b$ $divise$ c

a divise $c \quad \Rightarrow \quad c = aq \,, \quad q \in IN$

Comme b divise aq et $a \wedge b = 1$ alors b divise q d'après Gauss

D'où $q = b \times d \,, \quad d \in IN$ par suite $c = a \times b \times d$

Concl : $a \times b$ *divise* c

b) * 3 divise n , 5 *divise* n *et* $3 \wedge 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 \times 5 = 15$ *divise* n.

* 15 divise n , 16 *divise* n *et* $15 \wedge 16 = 1 \quad \Rightarrow \quad 15 \times 16 = 240$ *divise* n.

5) s'il existent quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots$ *et* p_{15} supérieurs ou égaux à 7 alors

240 divise $p_1^4 - 1, \; p_2^4 - 1, \; p_3^4 - 1, \; \ldots$ *et* $p_{15}^4 - 1$

$\Rightarrow$ 240 divise $[(p_1^4 + p_2^4 + \; . \; . \; . + p_{15}^4) - 15]$

Comme 15 divise 240 alors 15 divise $(p_1^4 + p_2^4 + \; . \; . \; . + p_{15}^4)$

Conclusion : ils n'existent pas quinze nombre premiers $p_1, p_2, \ldots$ *et* p_{15} supérieurs ou égaux à 7

tel que $(p_1^4 + p_2^4 + \; . \; . \; . + p_{15}^4)$ soit un nombre premier.

Exercice15 :

1)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	3	7	43	1807	3263443

2) $j > i$

$a_j = a_1 \times a_2 \times \; \ldots \; \times a_i \times a_{i+1} \times \; \ldots \; \times a_{j-1} + 1$

Soit $d \in IN$ *avec* $d \geq 2$

Si d divise a_i alors d divise $(a_j - 1)$

d'où d ne divise pas a_j

3) $a_5 = 1807 = 13 \times 139$

Le plus petit diviseur de a_5 , distinct de 1, est 13

4) . si a_n est premier alors $p_n = a_n$ divise a_n

. si a_n n'est pas premier alors a_n admet un diviseur premier p_n

. $p_1, p_2, \ldots$ *et* p_n sont deux à deux distincts d'après 2) .

5) chaque entier a_n , $n \in IN^*$, admet un diviseur premier p_n

Donc il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice16 :

1) $F_n = 2^{2^n} + 1$; $n \in IN$

n	0	1	2	3	4
F_n	3	5	17	257	65536

2) $F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2\times 2^n} + 1$

$$F_{n+1} = (2^{2^n})^2 + 1 = (2^{2^n})^2 + 2\times\left(2^{2^n}\right) + 1 - 2\times\left(2^{2^n}\right)$$

$$F_{n+1} = \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2\times\left(2^{2^n}\right)$$

$$F_{n+1} = F_n^2 - 2\times\left[\left(2^{2^n} + 1\right) - 1\right] = F_n^2 - 2\times[F_n - 1]$$

$$F_{n+1} = F_n^2 - 2\times F_n + 2$$

3) Démonstration par récurrence :

* vérifions pour $n = 0$

$5 = 3 + 2$ d'où $F_1 = F_0 + 2$ (vrai)

* supposons que $F_{n+1} = F_0 F_1 \ldots\ldots F_n + 2$

Montrons $F_{n+2} = F_0 F_1 \ldots\ldots F_n . F_{n+1} + 2$

D'après 2) $F_{n+2} - 2 = F_{n+1}(F_{n+1} - 2) = F_{n+1}(F_0 F_1 \ldots\ldots F_n)$

D'où $F_{n+2} = F_0 F_1 \ldots\ldots F_n . F_{n+1} + 2$

Conclusion : $F_{n+1} = F_0 F_1 \ldots\ldots F_n . +2$, $pour\ tout\ n \in IN$

4) supposons que $m > n$

$F_m = F_0 F_1 \ldots\ldots F_n . F_{n+1} \ldots . F_{m-1} + 2$ d'où : si d divise $F_n\ et\ F_m$ alors d divise 2

$\Rightarrow$ $d = 1$ ou $d = 2$ $\Rightarrow$ $d = 1$ car F_n est impair

Par suite $F_n \wedge F_m = 1$

5) F_0 , F_1 , ….et F_n sont premiers entre eux deux à deux ,pour tout entier naturel n .

Soit P_0 , P_1 , ….et P_n des diviseurs premiers respectifs de F_0 , F_1 , ….et F_n

Les P_i sont tous distincts deux à deux par suite il existe une infinité d'entiers premiers.

Exercice17 :

1) a) $a_{n+1} = \underbrace{11\ldots.1}_{(n+1)fois}$

$$a_{n+1} = \underbrace{11\ldots.1}_{n\,fois} + 1\underbrace{00\ldots.0}_{n\,fois} = a_n + 10^n$$

b) soit p un nombre premier.

p $divise$ a_n et a_{n+1} $\Rightarrow$ p $divise$ $(a_{n+1} - a_n)$

$\Rightarrow$ p $divise$ 10^n ; $n \geq 1$

$\Rightarrow p$ $divise$ 10 ; car p est $premier$

$\Rightarrow$ p $divise$ 2×5

$\Rightarrow$ $p = 2$ ou $p = 5$; car p est $premier$

c) $a_n = 11\ldots..1$ (n fois)

a_n est impair , de plus son chiffre des unités est différent de 0 et de 5

donc a_n n'est pas divisible ni par 2 ni par 5 par suite $a_n \wedge a_{n+1} = 1$

car ils n'ont pas un diviseur commun premier.

2) a) $a_{n+1} = a_n + 10^n$

$a_{n+2} = a_{n+1} + 10^{n+1}$ d'ou $a_{n+2} = a_n + 10^n + 10^{n+1}$

b) $k \geq 1$, $a_{2k} = 1111\ldots\ldots\ldots11$, $(2k\,fois)$

$a_2 = 11 = 11 \times 1$; $a_4 = 1111 = 11 \times 101$; $a_{66} = 111111 = 11 \times 10101$

D'après a) $a_{2k+2} = a_{2k} + 10^{2k} + 10^{2k+1} = a_{2k} + 10^{2k} \times [1 + 10]$

$a_{2k+2} = a_{2k} + 11 \times 10^{2k}$ pour $k \geq 1$

Montrons par récurrence que: 11 divise a_{2k} , $k \geq 1$

* vérification pour $k = 1$

$a_{2\times 1} = a_2 = 11$ divisible par 11 (vrai)

* supposons que 11 divise a_{2k} . $montrons\ que\ 11\ divise\ a_{2k+2}$

$a_{2k+2} = a_{2k} + 11 \times 10^{2k}$

Comme 11 divise a_{2k} alors $11\ divise\ a_{2k+2}$.

Concl : $11\ divise\ a_{2k}\ pour\ k \geq 1$.

c) d'après 1) a) et pour $n = 2k$, on a : $a_{2k+1} = a_{2k} + 10^{2k}$

11 divise a_{2k} mais 11 ne divise pas 10^{2k} d'où 11 ne divise pas a_{2k+1}.

d) **1^er^ cas** : $n\,pair.$

$a_{n+2} = a_n + 11 \times 10^n$

Soit p un nombre premier

p divise $a_n\ et\ a_{n+2} \Rightarrow p$ divise 11×10^n

$\Rightarrow p$ divise 11 ou p divise 10

$\Rightarrow p = 11\ ou\ p = 2\ ou\ p = 5$

$\Rightarrow p = 11$ car 2 et 5 ne divisent pas a_n

Donc $a_n \wedge a_{n+2} = 11$

2^er^ cas : $n\ impair$

$a_{n+2} = a_n + 11 \times 10^n$

Soit p un nombre premier

p divise $a_n\ et\ a_{n+2} \Rightarrow p$ divise 11×10^n

$\Rightarrow p$ divise 11 ou p divise 10

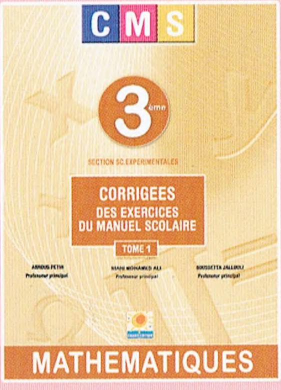
$\Rightarrow p = 11\ ou\ p = 2\ ou\ p = 5$

Or 11 ne divise pas a_{2k+1} de plus ni 2 , ni 5 divise a_n donc $a_n \wedge a_{n+2} = 1$.

Collection

CMS

1 ère - 2 ème - 3 ème - 4 ème



Prix : 9000

I.S.B.N : 978-9938-824-68-1

9 789938 824681

CHAMS EDITION