CMS

3ème

SECTION MATH

CORRIGEES
DES EXERCICES DU MANUEL SCOLAIRE

TOME 2

ABROUG FETHI
Professeur principale

RIAHI MOHAMED ALI
Professeur principale

BOUSSETTA JALLOULI
Professeur principale

CHAMS EDITION

MATHEMATIQUES

SOMMAIRE

Q C M

1) **(a)** $O(0,0)$ est un centre de symétrie pour C_f. (f est impaire)

2) **(b)** la droite d'équation $x = f(x) = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour C_f .

3) **(c)** C_3 est la courbe représentative de f. ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$)

4) **(a)** $a = 3$ ($f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x-1}$)

5) **(a)** C_f est au dessus de D. ($4 + x^2 > x^2 \rightarrow \sqrt{4+x^2} > |x| \geq x \rightarrow f(x) \geq x$)

VRAI - Faux

1) **Faux**

Aussi, il faux que : si $x \in D$ $alors$ $(2a - x) \in D$

Contre exemple : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $D = [2,+\infty[$

$f(2 \times 1 - x) = f(x)$, mais la droite d'équation $x = 1$ n'est pas un axe de symétrie pour C_f .

2) **Vrai**

En effet : soit $g(x) = f(1 + x)$; $C_g = t_{-\vec{\imath}}(C_f)$

Comme $O(0,0)$ est un centre de symétrie pour C_f alors $I(-1,0) = t_{-\vec{\imath}}(O)$ est un centre de symétrie pour C_g .

3) **Vrai**

En effet : soit $h(x) = f(1 + x)$; $C_h = t_{-\vec{\imath}}(C_f)$

Comme $\Delta : x = 0$ est un axe de symétrie pour C_f alors $t_{-\vec{\imath}}(\Delta) = \Delta' : x = -1$ est un axe de symétrie pour C_g .

4) **Faux**

Par exemple si f est positive alors $C_{|f|} = C_f$

5) **Faux**

En effet : $soit \;\; g(x) = f(|x|)$

$D_f = D_1 \cup D_2 \quad avec \quad D_1 \subset \mathbb{R}_+$

Pour $x \in D_1$, $\quad g(x) = f(x)$

Remarque : si $D_1 = \emptyset \; alors \;\; g \; n'est \; pas \; définie$

Contre exemple f(x)= x

Mobiliser ses compétences :

Situation1 :

1) a) (C) est de centre $I(0,2)$ de rayon $R = 2$ d'où $(C): x^2 + (y-2)^2 = 4$

b) $x_N = t \quad et \quad M(x,y) \quad d'ou \quad N(t,y) \; et \; P(x,4) \; ce \; qui \; donne \quad \overrightarrow{ON}\binom{t}{y} \; et \; \overrightarrow{OP}\binom{x}{4}$

$O, N \; et \; P$ sont alignés donc $\begin{vmatrix} t & x \\ y & 4 \end{vmatrix} = 4t - xy = 0$

Par suite $xy = 4t$

c) $N\left(\frac{xy}{4}, y\right) \in (C) \setminus \{O\} \Rightarrow \left(\frac{xy}{4}\right)^2 + (y-2)^2 = 4$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2y^2}{16} + y^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad y\left[\frac{x^2}{16}y + y - 4\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{16}y + y - 4 \qquad car \;\; y \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{x^2}{16}\right)y = 4$$

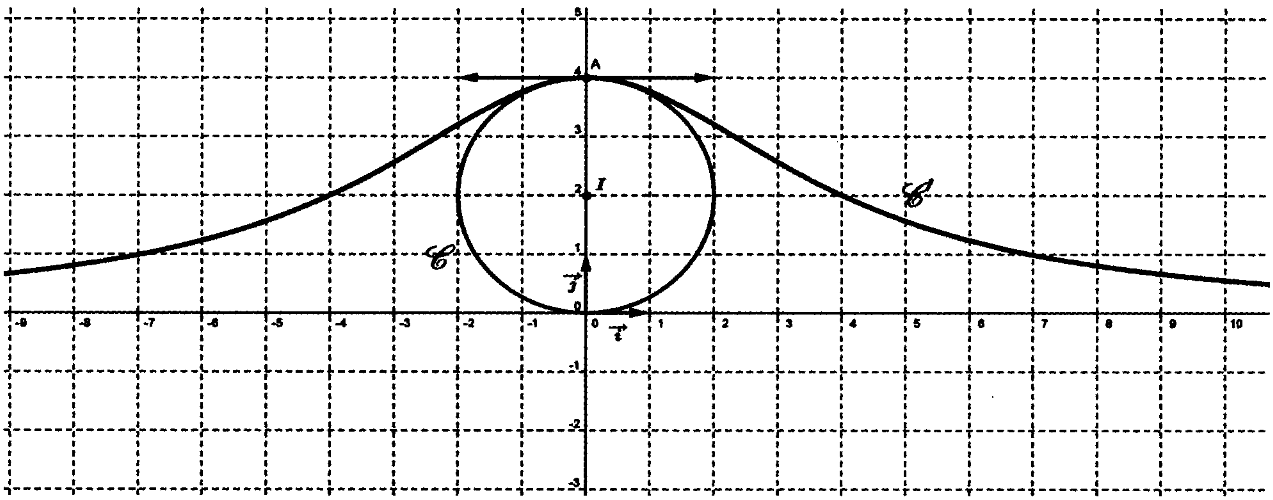
D'où $\qquad y = \frac{64}{x^2+16}$

2) $\quad f(x) = \frac{64}{x^2+16}$; $D_f = IR \qquad$ (f est paire)

a) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \dfrac{-128x}{(x^2+16)^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

b)



Situation2 :

$f(x) = \sqrt{x^2+3}$; $g(x) = \dfrac{4x+2}{6x-3}$

1) a) $D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 + 3 > 0$ por tout $x \in \mathbb{R}$

b) pour tout $x \in D_f = \mathbb{R}$ on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 3} = \sqrt{x^2 + 3} = f(x)$

D'où f est une fonction paire.

c) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} \geq 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+3) = +\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+3)-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}\quad=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$

d'où la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) a) $D_g=IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

b) * $g(x)=a+\dfrac{b}{6x-3}\quad\Rightarrow\quad(6x-3).g(x)=a.(6x-3)+b$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(6x-3).g(x)=b$ or $(6x-3).g(x)=4x+2$

D'ou $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(6x-3).g(x)=4\times\dfrac{1}{2}+2=4$ par suite $\boxed{b=4}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\dfrac{b}{6x-3}\right)=a$ d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+2}{6x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{6x}=\dfrac{2}{3}$

Par suite $\boxed{a=\dfrac{2}{3}}$

c) $g(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{6x-3}$

g est dérivable sur $IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et :

$$g'(x)=\frac{-24}{(6x-3)^2}<0$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	
$g(x)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

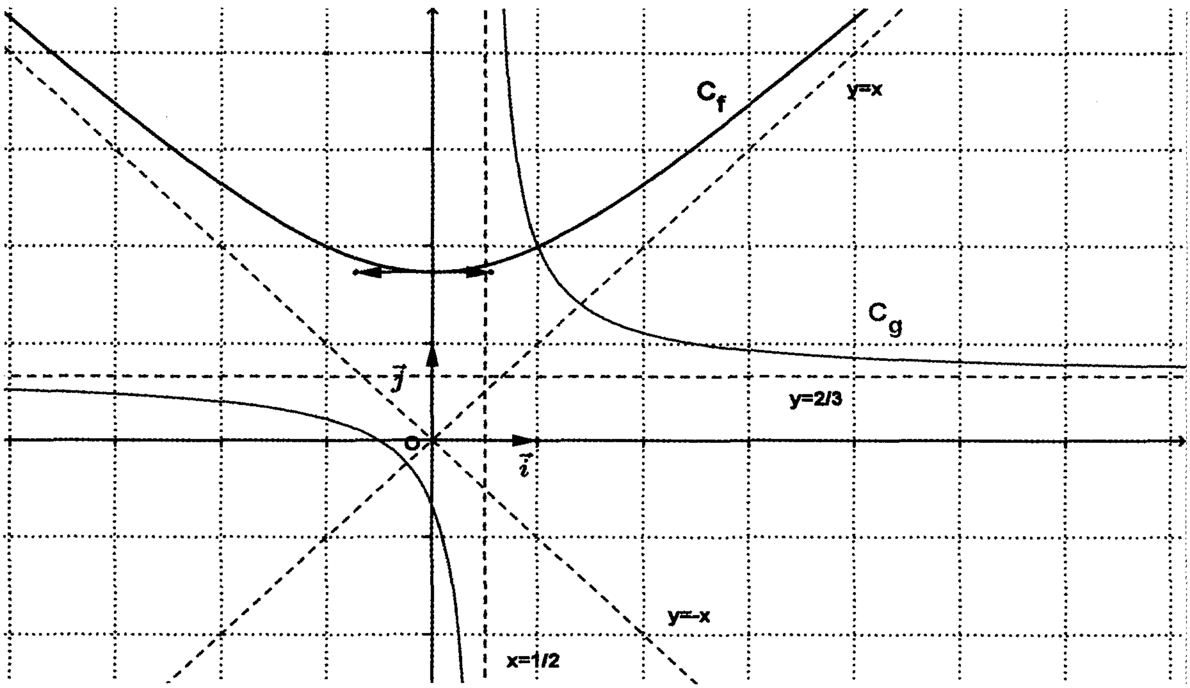
$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+2}{6x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{6x}=\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+2}{6x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{6x}=\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}g(x)=\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}g(x)=-\infty$

* les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{2}{3}$ sont des asymptotes è (C_g).

3)

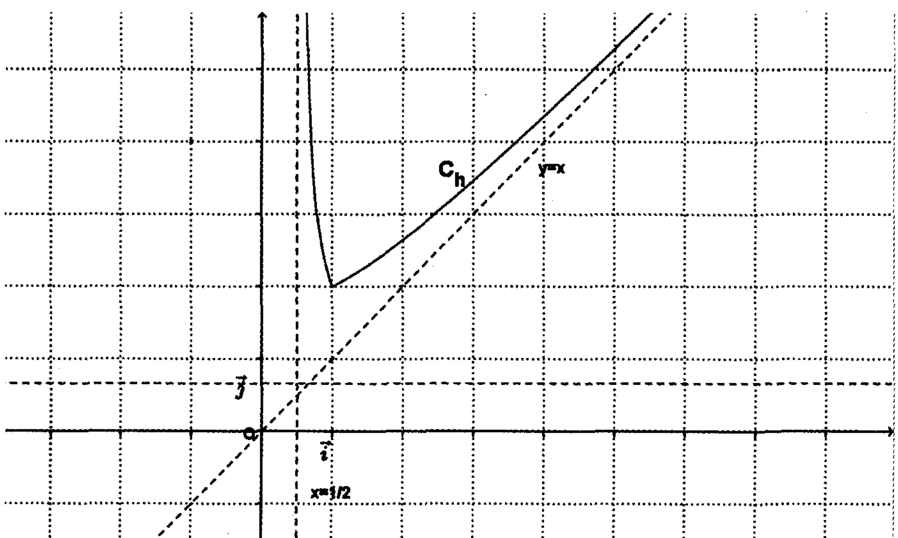


4) a) (C_f) *et* (C_g) se coupe en un unique point , d'où l'équation : $f(x) = g(x)$

admet une unique solution α

b) graphiquement : $\alpha \cong 1$ (on pourra aussi vérifier que $f(1) = g(1) = 2$ donc $\alpha = 1$)

c) $h(x) = \begin{cases} g(x) & si\ \ x \in \left]\frac{1}{2},\ \alpha\right] \\ f(x) & si\ \ x \in \left]\alpha, +\infty\right[\end{cases}$



Exercices

Exercice1 :

$f(x) - g(x) = 2x^2 + 3x - 2$

$\Delta = 25$; $x' = -2$ et $x'' = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$
Position relative	C_f est au dessus de C_g	C_f est au dessous de C_g		C_f est au dessus de C_g

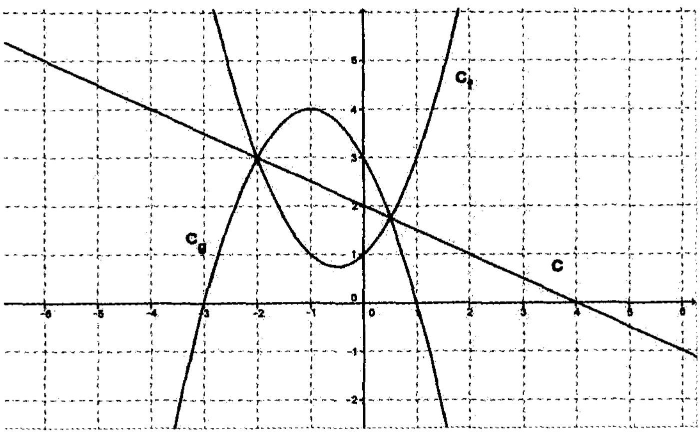
2) $M(m, f(m))$ et $N(m, g(m))$

I le milieu de $[MN]$ d'où $I\left(m, \frac{f(m)+g(m)}{2}\right)$ c'est-à-dire $I\left(m, -\frac{1}{2}m+2\right)$

Posons $I(x, y)$ avec $\begin{cases} x = m \\ y = -\frac{1}{2}m + 2 \end{cases}$ $m \in IR$

Ce qui donne $y = -\frac{1}{2}x + 2$ d'où (C) est la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}x + 2$

3)



Exercice 2 :

1) $f(x) = |x^2 - 4| - |x - 2|$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x - 2$			$-$		0	$+$	

* f est définie et continue sur IR

► pour $x \in]-\infty\,, -2]$

$f(x) = (x^2 - 4) + (x - 2) = x^2 + x - 6$

► pour $x \in]-2\,, 2]$, $f(x) = -(x^2 - 4) + (x - 2) = -x^2 + x + 2$

► pour $x \in]2\,, +\infty]$, $f(x) = (x^2 - 4) - (x - 2) = x^2 - x - 2$

Par suite : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & si\ x \leq -2 \\ -x^2 + x + 2 & si\ -2 < x \leq 2 \\ x^2 - x - 2 & si\ x > 2 \end{cases}$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x - 6) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x - 6) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

2) ► dérivabilité en (-2)

- $$\lim_{x \to (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{(x^2 + x - 6) - (-4)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$$
$$= \lim_{x \to (-2)^-} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^-} (x - 1) = -3$$

Ainsi : f est dérivable à gauche en (-2) et $f'_g(-2) = -3$

- $$\lim_{x \to (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{(-x^2 + x + 2) - (-4)}{x + 2} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{-x^2 + x + 6}{x + 2}$$
$$= \lim_{x \to (-2)^-} \frac{-(x+2)(x-3)}{x+2} = \lim_{x \to (-2)^-} (-x + 3) = 5$$

Ainsi : f est dérivable à droite en (-2) et $f'_d(-2) = 5$

Conclusion $f'_d(-2) \neq f'_g(-2)$ $\boxed{\text{d'où } f \text{ n'est pas dérivable en } (-2)}$

► dérivabilité en 2 :

- $$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(-x^2+x+2)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+x+2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(-x-1)=-3$$

f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2)=-3$

- $$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-x-2)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x-2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+1)=3$$

D'où f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2)=3$

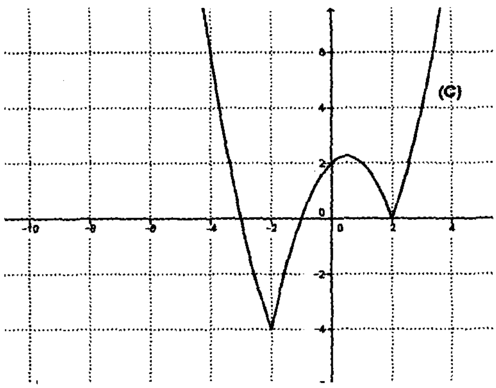
<u>Conclusion</u> $f'_d(2)\neq f'_g(2)$ d'où f n'est pas dérivable en 2.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ et $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x<-2\\ -2x+1 & si\ -2<x<2\\ 2x-1 & si\ x>2\end{cases}$

x	$-\infty$	-2		$1/2$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-4	↗	$9/4$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-6}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=+\infty$$



(C) admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$ *et* $-\infty$.

4) * si $m \in]-\infty, -4[$, $l'équation\ f(x) = m$ n'admet pas de solutions.

* si $m = -4$, $l'équation\ f(x) = m$ admet unique solution.

* si $m \in]-4, 0[\cup]\frac{9}{4}, +\infty[$, $l'équation\ f(x) = m$ admet deux solutions .

* si $m = 0\ ou\ m = 9/4$, $l'équation\ f(x) = m$ admet trois solutions.

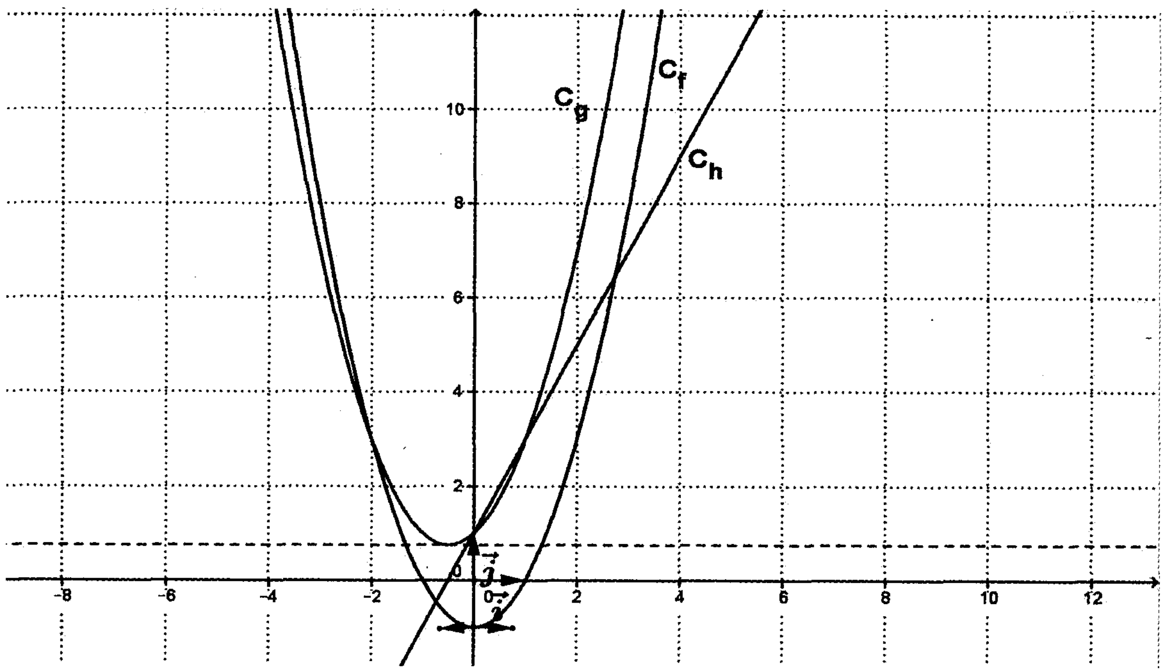
* si $m \in]0, 9/4[$, $l'équation\ f(x) = m$ admet quatre solutions .

Exercice 3 :

1) $-$ (C_f) est une parabole de sommet $S(0,-1)$ d'axe la droite d'équation : $x = 0$

$-$ (C_g) est une parabole de sommet $S(-1/2, 3/4)$ d'axe la droite d'équation : $x = -1/2$

$-$ (C_h) est une droite.



2) * $f(x) + g(x) = 2x^2 + x = x(2x+1)$

Comme $x > 1\ alors\ x(2x+1) > 2x+1$ d'où $\boxed{f(x) + g(x) > h(x)}$

* $f(x) + h(x) = x^2 + 2x$

$x > 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x > x^2 + x + 1$

d'où $\boxed{f(x) + h(x) > g(x)}$

* pour $x > 1$, *on a* : $x^2 + 3x + 2 > x^2 - 1$

d'où $\boxed{g(x) + h(x) > f(x)}$

ABC est un triangle $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases}$$

* de plus $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ *et* $h(x) > 0$ *pour* $x > 1$

Donc on peut construire un triangle ABC tels que : $BC = f(x),\ AC = g(x)$ *et* $AB = h(x)$

3) $AC^2 = [g(x)]^2 = (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$BA^2 + BC^2 = [h(x)]^2 + [f(x)]^2 = (2x + 1)^2 + (x^2 - 1)^2$

Ce qui donne $BA^2 + BC^2 = x^4 + 2x^2 + 4x + 2$

On a d'après la formule d'El –Kashi : $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2.BA \times BC \times cos(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = x^4 + 2x^2 + 4x + 2 - 2.(2x + 1)(x^2 - 1).cos(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = -2(2x + 1)(x^2 - 1).cos(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow (2x + 1)(x^2 - 1) = -2(2x + 1)(x^2 - 1).cos(\widehat{ABC})$

$\Rightarrow cos(\widehat{ABC}) = -\frac{1}{2}$ d'où $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$ (angle constant indépendant de x)

4) ABC est isocèle pour $BA = BC$

$BA = BC \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = h(x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 3$

$\Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{3}$ *ou* $x - 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}$ *ou* $x = 1 + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}$ *car* $x > 1$

<u>Finalement</u> ABC *est isocèle pour* $x = 1 + \sqrt{3}$

<u>Exercice 4</u> :

1) $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

* f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$$

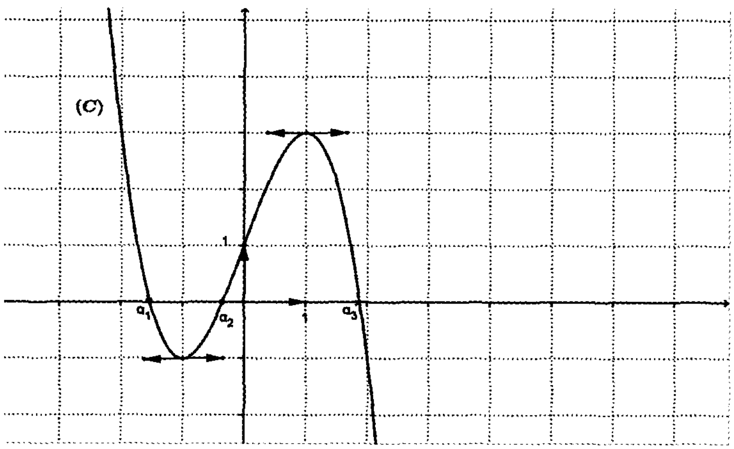
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$$

d' ou (C) admet deux branches paraboliques de direction $(O, \vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



2) a) l'axe des abscisses coupe (C) en trois points distincts d'où l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

b) * f est continue sur $[-2, -1]$ et $f(-2) \times f(-1) = -3 < 0$

d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha_1 \in [-2, -1]$

Avec la calculatrice $\rightarrow$ $f(-1{,}6) \times f(-1{,}5) \cong (0{,}296) \times (-0{,}125) < 0$

$d'ou$ $\boxed{-1{,}6 \leq \alpha_1 \leq -1{,}5}$

* f est continue sur $[-0{,}4\ ;\ -0{,}3]$ et $f(-0{,}4) \times f(-0{,}3) = (-0{,}136)(0{,}127) < 0$

d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha_2 \in [-0{,}4\ ;\ -0{,}3]$ d'où $\boxed{-0{,}4 \leq \alpha_2 \leq -0{,}3}$

* f est continue sur $[1{,}8\ ;\ 1{,}9]$ et $f(1{,}8) \times f(1{,}9) = (0{,}568)(-0{,}159) < 0$

d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha_3 \in [1{,}8\ ;\ 1{,}9]$ d'où $\boxed{1{,}8 \leq \alpha_3 \leq 1{,}9}$

Exercice5 :

1) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$

* f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -x^2 + 2x = -x(x-2)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$5/3$	$\searrow$	$-\infty$

* $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{3x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right) = -\infty$$

d' ou (C) admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) a) ▶ pour tout $x \in D_f = \mathbb{R},$ $on\ a$ $(2-x) \in D_f$

▶ $f(2-x) + f(x) = -\frac{1}{3}(2-x)^3 + (2-x)^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$

$$= -\frac{1}{3}(8 - 12x + 6x^2 - x^3) + (4 - 4x + x^2) - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{2}{3} = 2$$

D'où $f(2-x) = 2 - f(x)$

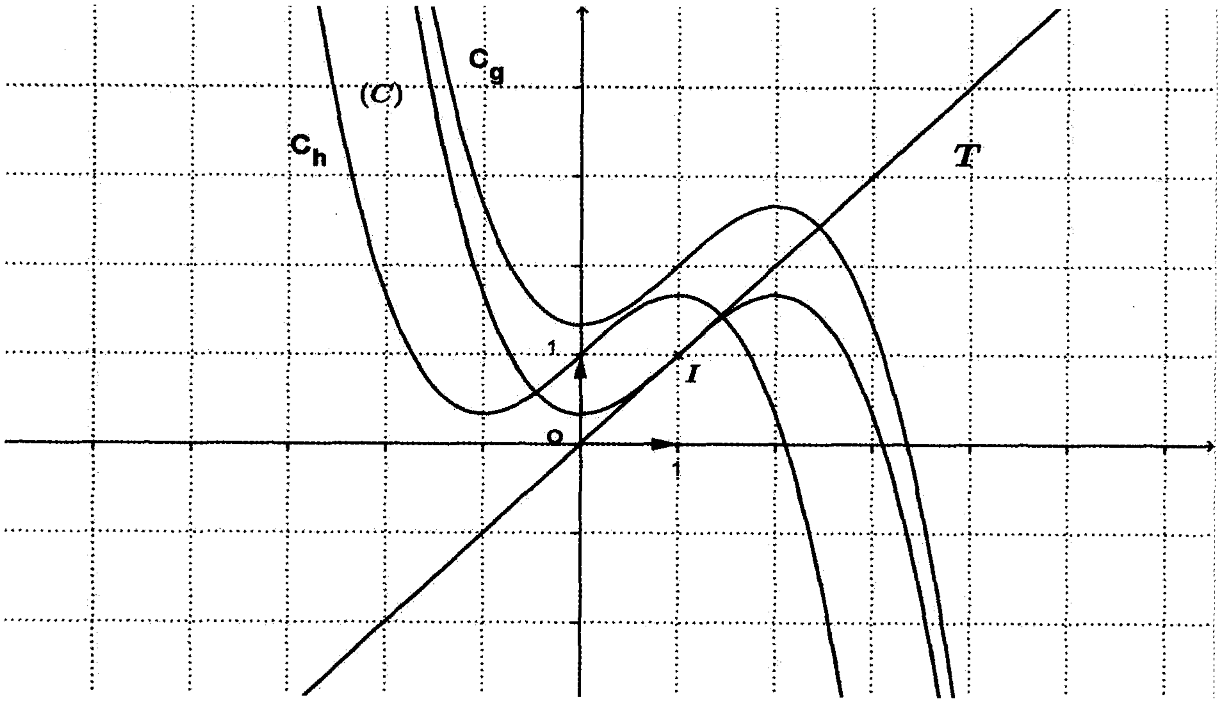
Conclusion : $I(1,1)$ est un centre de symétrie pour (C).

b) T: $y = f'(1).(x-1) + f(1)$, Par suite T: $y = x$

c) $f(x) - x = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -\frac{1}{3}(x-1)^3$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
Position relative		(C) au dessus de T	$(1,1)$	T au dessus de (C)	

3)



4) • $g(x) = f(x) + 1$

(C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{j}$.

• $h(x) = f(x + 1)$

(C_h) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $-\vec{\imath}$.

<u>Exercice 6</u> :

1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 15$

* f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 8x - 2$

$\Delta = 88 = 4 \times 22$; $x' = \dfrac{4-\sqrt{22}}{3}$ et $x'' = \dfrac{4+\sqrt{22}}{3}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^3\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3\right) = +\infty$$

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{22}}{3}$		$\frac{4+\sqrt{22}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x')$	$\searrow$	$f(x'')$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)=+\infty$$

d' ou (C_f) admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) a) $(x-2)(x^2-x-6) = x^3-x^2-6x-2x^2+2x+12 = x^3-3x^2-4x+12$

b) $f(x)-g(x) = x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x^2-x-6)$

$x^2-x-6=0$

$\Delta=25$; $x'=-2$ et $x''=3$

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

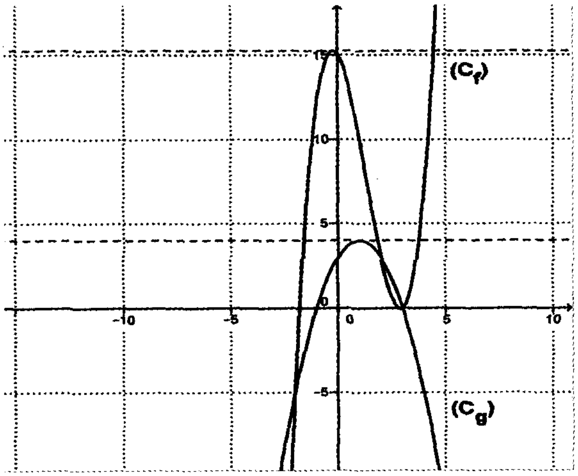
Par suite:

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P.R$		C_g/C_f		C_f/C_g		C_g/C_f		C_f/C_g	

3) (C_g) est une parabole de sommet $S(1,4)$ $d'axe$: $x=1$

$x'\cong-0{,}23$; $x''\cong 2{,}9$

$f(x')\cong 15{,}23$; $f(x'')\cong-0{,}05$



Exercice7 :

1) $f(x)=x^4+2x^2-3$

- f est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.
- il est clair que f est une fonction paire, il suffit donc de l'étudier sur $D_E=[0,+\infty[$
- f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)\geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^4\right) = +\infty$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	-3 ↗	$+\infty$

* $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3\right) = +\infty$$

d'ou (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$.

2) * $g(x) = x^3 - x$

- g est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.
- il est clair que g est une fonction impaire, il suffit donc de l'étudier sur $D_E = [0,+\infty[$
- g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $g'(x) = 3x^2 - 1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3\right) = +\infty$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	↗	$+\infty$

* $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right) = +\infty$$

d'ou (C_g) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ aux voisinage de $+\infty$.

3) a) $(x^2 - 1)(x^2 - x + 3) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$

b) $f(x) - g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 3)$

* $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ ou \ x = -1$

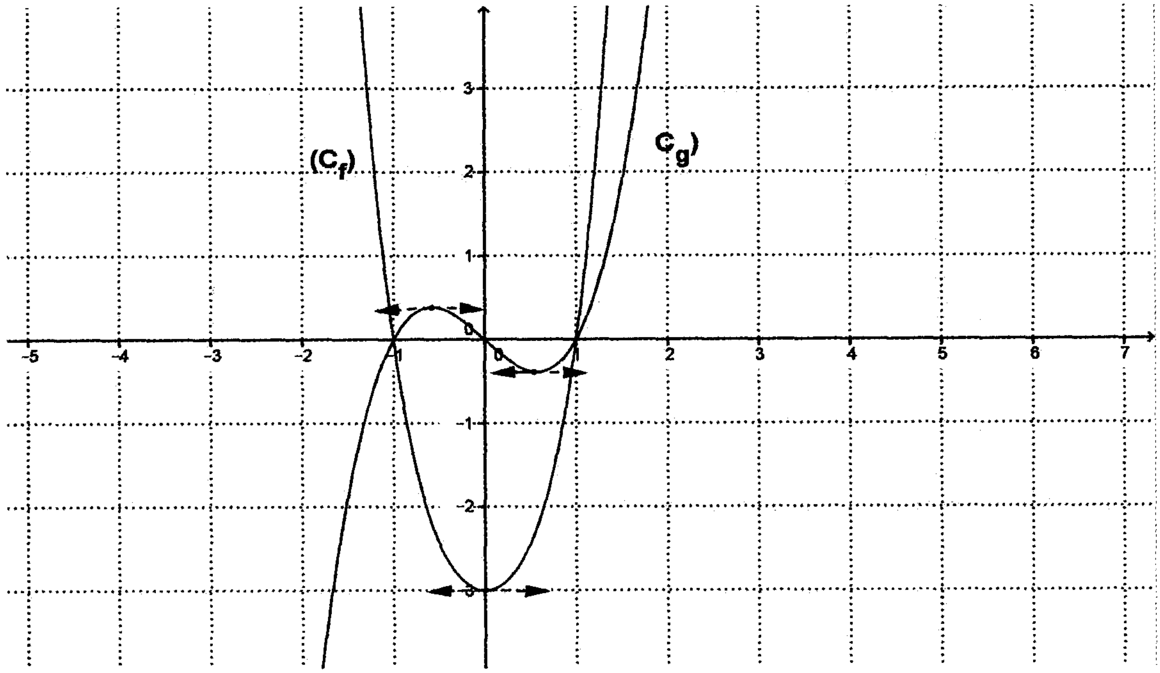
* $x^2 - x + 3 = 0$, $\Delta = -11 < 0 \ (a = 1 > 0)$ $d'ou \ x^2 - x + 3 > 0 \ pour \ tout \ x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - x + 3$		$+$		$+$		$+$	
$(x^2 - 1)(x^2 - x + 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)-g(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$
$P.Relative$	$(C_f)/C_g$	$(C_g)/C_f$		$(C_f)/C_g$

4)



Exercice 8 :

1) a) $f(0) = 0^4 + a \times 0 = 0$

On a : $f(x+2) = f(x)$, $x \in [0,2[$

$pour\ x = 0\ ,\ on\ aura\quad f(2) = f(0) = 0$

b) f est continue à gauche en 2 d'où $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^4 + ax^2\right) = 0$

$$\Rightarrow\ 16 + 4a = 0 \quad \Rightarrow\ a = -4$$

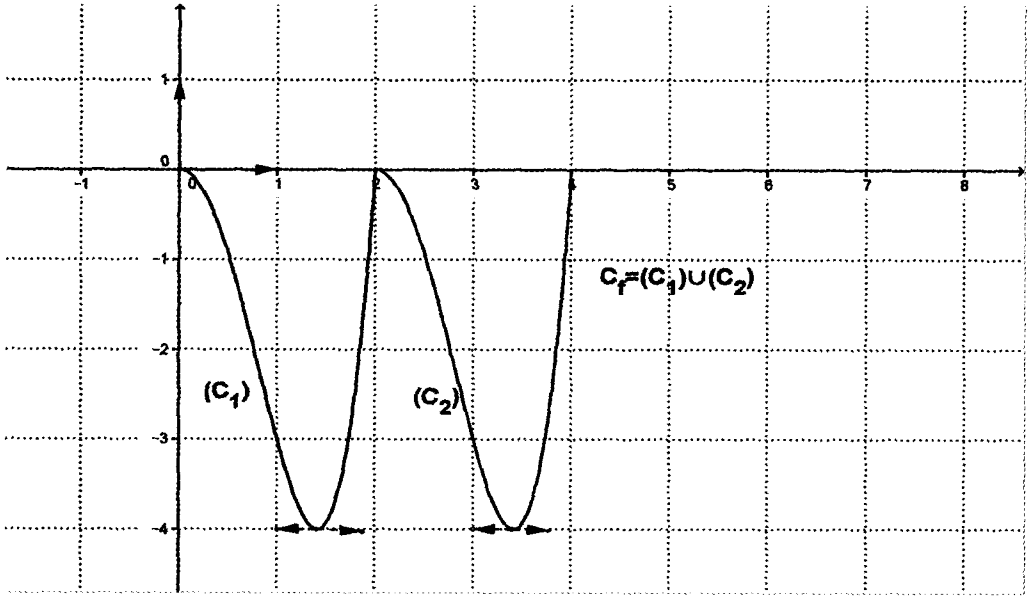
Par suite pour $x \in [0,2]$, $f(x) = x^4 - 4x^2$

2) $f_1(x) = x^4 - 4x^2$, $x \in [0,2]$

f_1 est dérivable sur $[0,2]$ et $f'_1(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2) = 4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'_1(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

(C_2) est l'image de (C_1) par la translation de vecteur $2\vec{\imath}$.



3) a) soit $M(X\,,Y)$ un point de (C_2)

$$M(X\,,Y)\ avec\ \begin{cases} Y = f(X) \\ X \in [2\,,4] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = f(X-2) \\ (X-2) \in [0\,,2] \end{cases} \Rightarrow N(X-2\,,Y) \in (C_2)$$

$\overrightarrow{MN}\binom{2}{0} = 2\vec{\imath}$ d'où $(C_2) = t_{2\vec{\imath}}(C_1)$

b) voir figure.

Exercice9 :

1) $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x+3}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$

a) $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}$

D'une part : $(x+3)f(x) = -2x+5$, d'autre part : $(x+3)f(x) = a.(x+3) + b$

$\lim\limits_{x\to(-3)}(x+3)f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)}(-2x+5)=11$ et $\lim\limits_{x\to(-3)}(x+3)f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)}[a(x+3)+b]=b$

D'où $\boxed{b=11}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x+5}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x}{x}\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\dfrac{b}{x+3}\right)=a$

d'où $\boxed{a=-2}$

<u>conclusion :</u> $f(x)=-2+\dfrac{11}{x+3}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ et $f'(x)=-\dfrac{11}{(x+3)^2}<0$

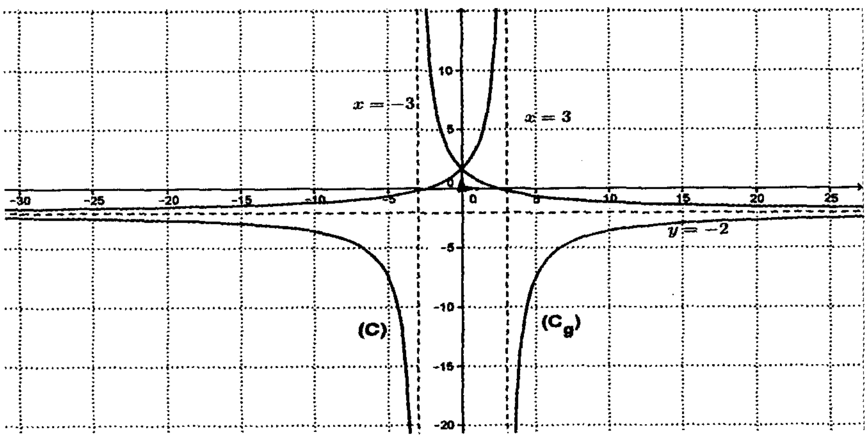
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$

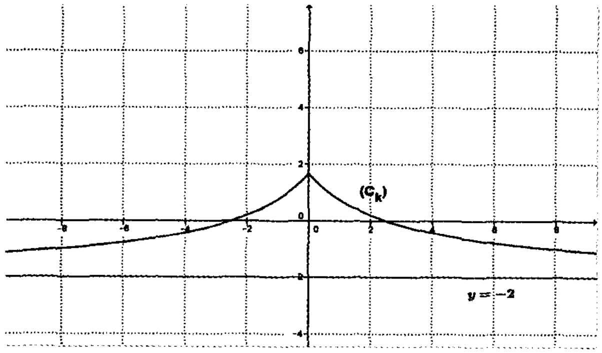
$\lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^-}\left(-2+\dfrac{11}{x+3}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\left(-2+\dfrac{11}{x+3}\right)=+\infty$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$-2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -2$

* les droites d'équations respectives $x=-3$ et $y=-2$ sont des asymptotes à (C)





3)

$g(x) = f(-x)$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

$\begin{cases} x \in D_g \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-x) \in D_f \\ y = f(-x) \end{cases}$

ce qui donne : $M(x,y) \in (C_g) \Leftrightarrow$

$M'(-x,y) \in (C_f)$ Donc (C_g) se déduit de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{\jmath})$

4) $k(x) = f(|x|)$; $D_k = \mathbb{R}$

Il est clair que k est une fonction paire de plus $k(x) = f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$

$$k(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \geq 0 \\ g(x) & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k(x)$	-2 ↗	$5/3$	↘ -2

Exercice 10 :

1) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 2}{x - 1} = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$; $x \neq 1$

a) d'une part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 + x + 2}{x^2 - x} = -2$ d'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x(x-1)} \right) = a$

d'où $\boxed{a = -2}$

b) d'une part : $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(-2x^2 + x + 2 \right) = 1$

d'autre part : $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [(x-1)(ax + b) + c] = c$

d'où $\boxed{c = 1}$

c) $f(0) = -2 \Rightarrow b - c = -2 \Rightarrow b = c - 2 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

par suite $f(x) = -2x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $f'(x) = -2 - \dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-2x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-2x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(-2x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(-2x - 1 + \frac{1}{x-1}\right) = +\infty$ Donc la droite d'équation : $x = 1$ est une asymptote à (C)

.

4) a)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-2x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (-2x-1)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$

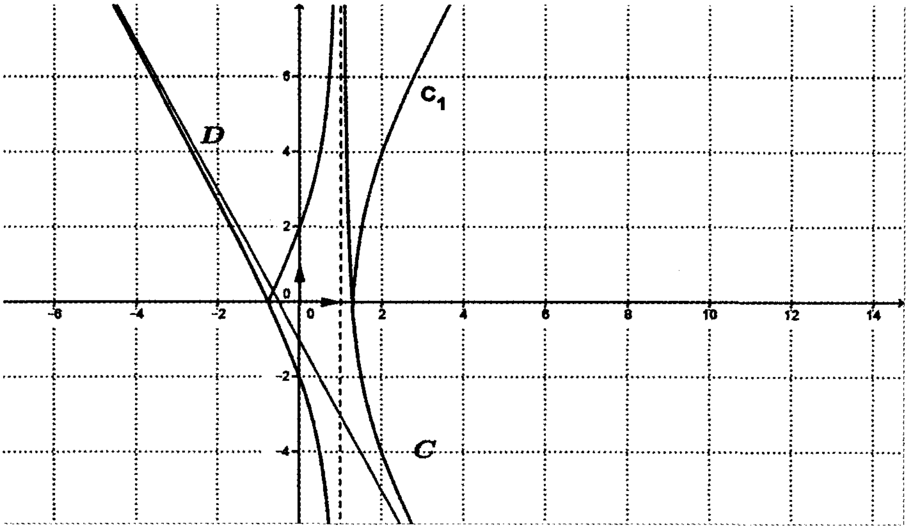
La droite Δ d'équation : $y = -2x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b) $f(x) - (-2x-1) = \dfrac{1}{x-1}$

Signe de $f(x) - (-2x - 1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - (-2x-1)$	$-$	‖	$+$
Position relative	D/C	‖	C/D

4)



5) a) (C_1) est la courbe représentative de $|f|$.

b)

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$		1		$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	$+\infty$
$\|f(x)\|$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = 17 \quad ; \quad x' = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{-4} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x' = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{-4} = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$

<u>**Exercice11**</u> :

1) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2} \quad ; \quad x \neq 1$

a) d'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x-2}{x^2+2x} = 1$ d'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x(x+2)}\right) = a$

d'où $\boxed{a = 1}$

b) d'une part : $\lim\limits_{x\to(-2)}(x+2)f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)}\left(x^2-2x-2\right)=6$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to(-2)}(x+2)f(x)=\lim\limits_{x\to1}[(x+2)(ax+b)+c]=c$

d'où $\boxed{c=6}$

c) $f(0)=-1 \Rightarrow b-\dfrac{c}{2}=-1 \Rightarrow b=-1-\dfrac{c}{2} \Rightarrow \boxed{b=-4}$

par suite $f(x)=x-4+\dfrac{6}{x+2}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et $f'(x)=1-\dfrac{6}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2)^2-6}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2-\sqrt{6})(x+2+\sqrt{6})}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{6}$		-2		$-2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-6-2\sqrt{6}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-6+2\sqrt{6}$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\left(x-4+\frac{6}{x+2}\right)=+\infty$$

3) a)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-4)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x+2}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-4)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x+2}=0$$

La droite D d'équation : $y=x-4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b) $f(x)-(x-4)=\dfrac{6}{x+2}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-(x-4)$	$-$	||	$+$
Position relative	D/C	||	C/D

4) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$

La droite d'équation : $x=-2$ est une asymptote à (C)

5) $\begin{cases} x=-2 \\ y=x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ d'où $D\cap D'=\{I(-2,-6)\}$

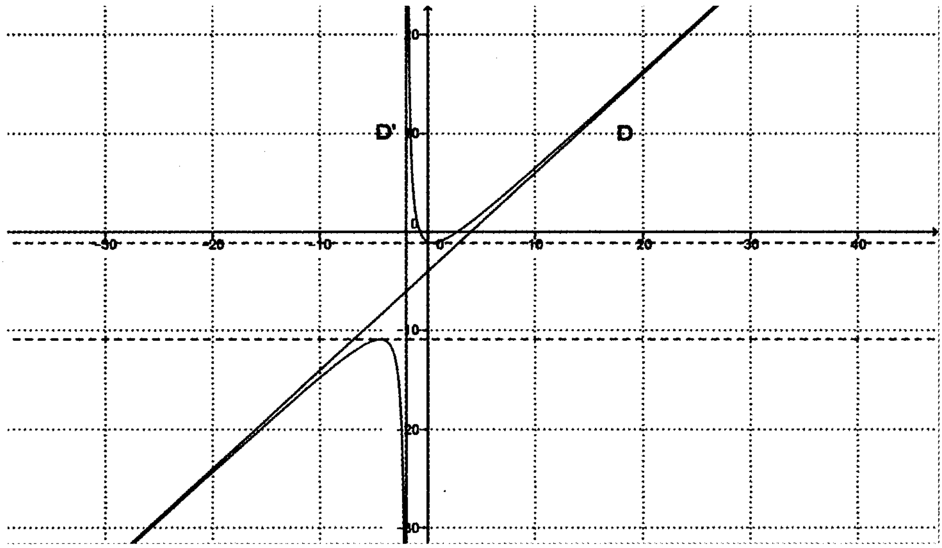
* $x\in D_f \Rightarrow x\neq -2 \Rightarrow -x\neq 2 \Rightarrow -4-x\neq -2 \Rightarrow (-4-x)\in D_f$

* $f(-4-x)+f(x)=[(-4-x)-4+\dfrac{6}{-4-x+2}]+x-4+\dfrac{6}{x+2} = -x-8-\dfrac{6}{x+2}-4+\dfrac{6}{x+2}=-12$

d'où $f(-4-x)=-12-f(x)$

par suite le point $I(-2,-6)$ est un centre de symétrie pour (C).

6)



<u>Exercice12</u> :

1) $f(x)=\dfrac{-x^2-3x+2}{x^2+4x}$; $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-4,0\}$

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+4}$$

a) $\lim\limits_{x\to(-4)} (x+4)f(x) = \lim\limits_{x\to(-4)} \left(\frac{-x^2-3x+2}{x} \right) = \frac{1}{2}$,

d'autre part : $\lim\limits_{x\to(-4)} (x+4)f(x) = \lim\limits_{x\to(-4)} \left\lfloor (a+\frac{b}{x})(x+4) + \mathrm{c} \right\rfloor = c$

ce qui donne $c = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} [xf(x)] = \lim\limits_{x\to(-4)} \left(\frac{-x^2-3x+2}{x+4} \right) = \frac{1}{2}$, d'autre part : $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left\lfloor \mathrm{b} + (a+\frac{c}{x+4})x + \mathrm{c} \right\rfloor = b$

ce qui donne $b = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^2}{x^2} \right) = -1$ d'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+4} \right) = a$

ce qui donne $a = -1$

Par suite $f(x) = -1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)}$

2) * f est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{-4, 0\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{-4, 0\}$ et $f'(x) = \frac{-1}{2x^2} - \frac{1}{2(x+4)^2} < 0$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

$$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = -1$$

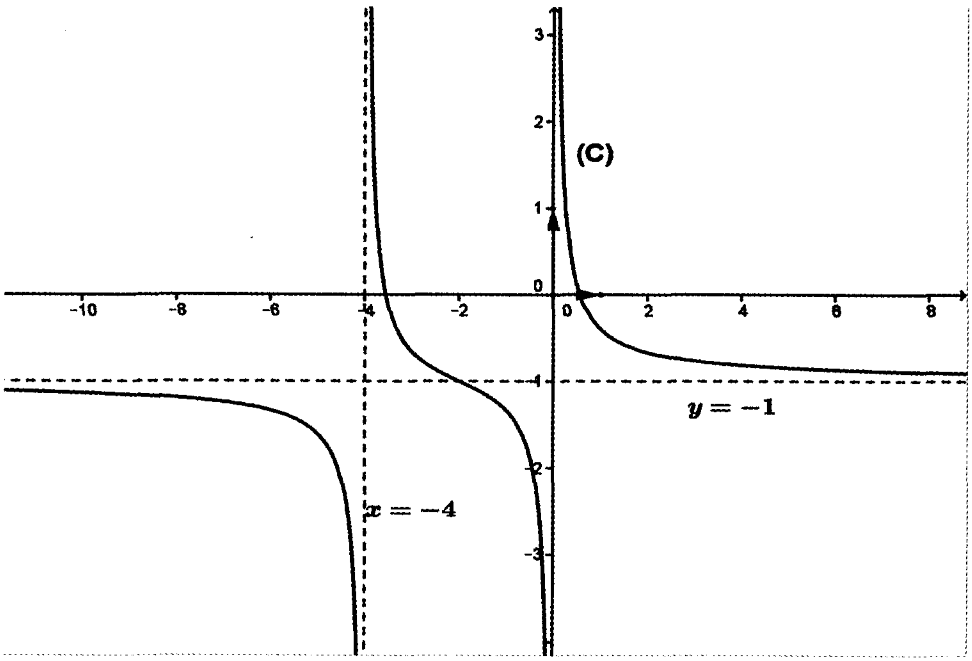
$$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = -1$$

$\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-4)^-} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-4)^+} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+4)} \right) = +\infty$

3) Les droites d'équations respectives : $x = -4$,

$x = 0$ et $y = -1$ sont des asymptotes à (C) .



4) * $m = -1$ $\longrightarrow$ un seul point d'intersection

* $m \neq -1$ $\longrightarrow$ deux points d'intersection

5) a) $g(x) = f(-|x|)$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-4\,,0\,,4\,\}$

* pour $x \in \,]-\infty\,,\,0\,[\backslash\{-4\}$, $g(x) = f(x)$

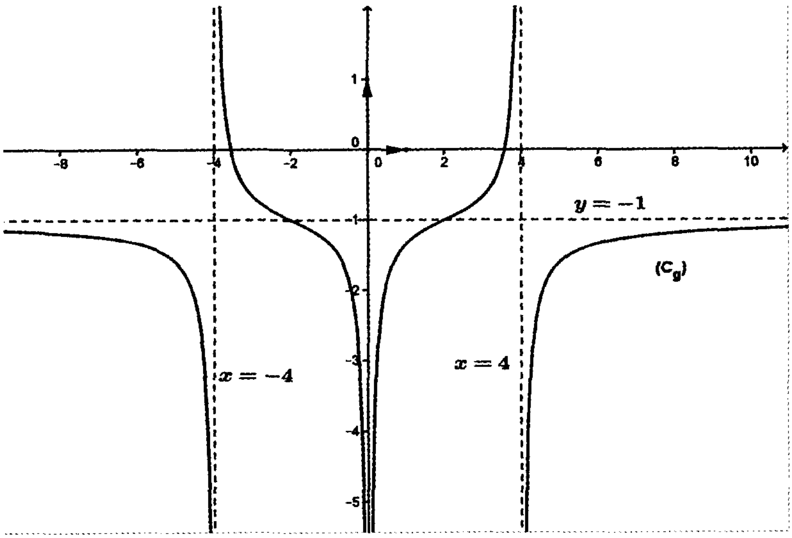
* pour $x \in \,]0\,,+\infty\,[\backslash\{4\}$, $g(x) = f(-x)$

* g est une fonction paire

C_1 : la courbe de la restriction de f sur $]-\infty\,,\,0\,[\backslash\{-4\}$

$C_g = C_1 \cup C_2$

C_2 : le symétrique de C_1 par rapport à l'axe des ordonnées



b) tableau de variations de g:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	-1

Exercice 13 :

1) $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x^2-x+1}$; $\Delta = -3 < 0$ $d'ou$ $D_f = \mathbb{R}$.

2) * f est continue sur $\mathbb{R}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{-2(x^2-x+1)-(2x-1)(-2x+1)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-1}{(x^2-x+1)^2}$

$2x^2 - 2x - 1 = 0$; $\Delta = 12$;

$x'=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x'=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2/\sqrt{3}$	$\searrow$	$-2/\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x} = 0$

3) $f(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

a) * pour $x \in D_f = \mathbb{R}$, $on\ a$ $(1-x) \in D_f$

* $f(1-x) = \dfrac{-2(1-x)+1}{(1-x)^2-(1-x)+1} = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ donc $f(1-x) = -f(x)$

Par suite le point $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie pour (C).

b) $T : y = f'(\frac{1}{2}).(x-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$ d'où $T : y = \dfrac{-8}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

c)

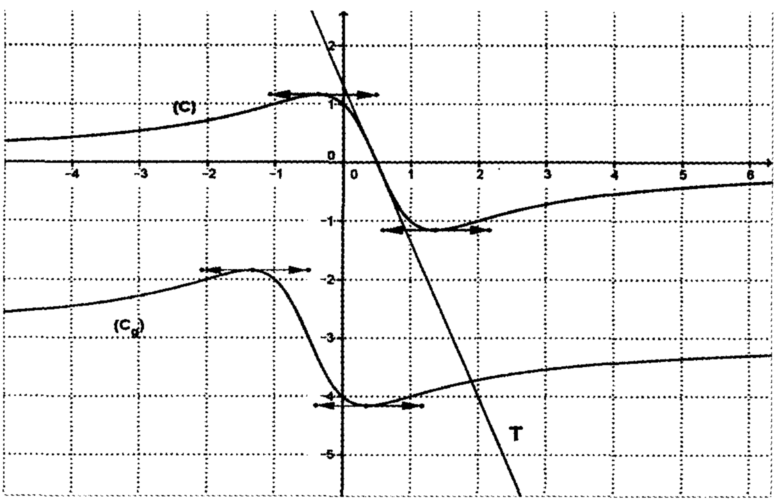
$$f(x) + \frac{8}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = f(x) + \frac{4}{3}(2x-1) = \frac{-2x+1}{x^2-x+1} + \frac{4}{3}(2x-1)$$
$$= (2x-1)\left[\frac{-1}{x^2-x+1} + \frac{4}{3}\right] = \frac{(2x-1)(4x^2-4x+1)}{3(x^2-x+1)}$$

$$f(x) + \frac{8}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2x-1)^3}{3(x^2-x+1)}$$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f(x) + 8/3(2x-1)$	$-$	0	$+$
P. relative	$T/(C)$		$(C)/T$

Le signe de $f(x) + \dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ est celui de $(2x-1)$

4) La droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



5)

$g(x) = f(x+1) - 3$

$(C_g) = t_{\vec{u}}(C_f)$ avec $\vec{u}\binom{-1}{-3}$ <u>voir figure</u>

Exercice 14 :

1) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

* f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

* f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(x-2)-(x-3)^2}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-3)(x-1)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\frac{(x-3)^2}{x-2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\frac{(x-3)^2}{x-2} = +\infty$$

* la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à (C).

*

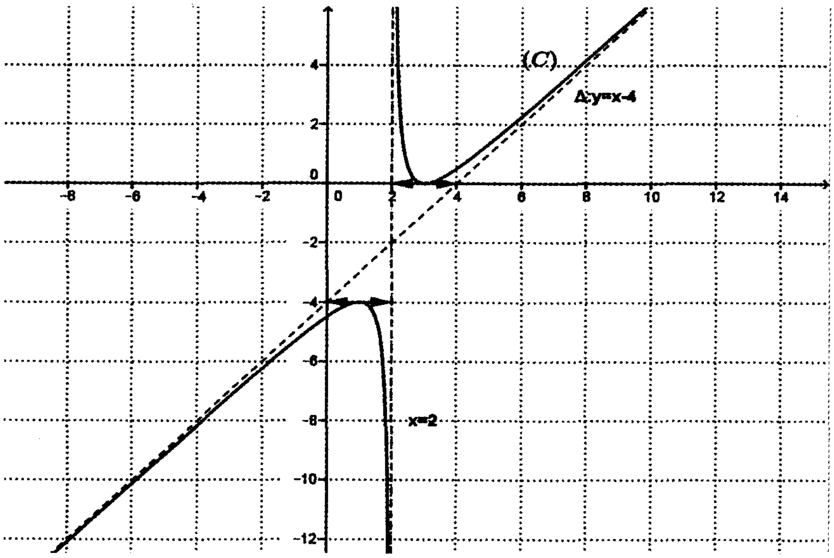
$$f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x-2} = \frac{(x^2-6x+8)+1}{x-2} = \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-4)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-4)] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

La droite Δ d'équation : $y = x - 4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



2) $D_m : y = m.x$

a) dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(x) = m.x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6x+9}{x-2} = m\,x \Leftrightarrow m\,x(x-2) = x^2-6x+9$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m-3)x - 9 = 0$$

* $\boldsymbol{m = 1}$, l'équation : $f(x) = m.x$ admet une unique solution

* ***pour*** $\boldsymbol{m \neq 1}$

$\Delta = 4[(m-3)^2 + 9(m-1)] = 4m(m+3)$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$m(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>1er cas</u> : $m \in]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[\backslash\{1\}$

l'équation : $f(x) = m.x$ admet deux solutions.

<u>2er cas</u> : $m = -3 \;\; ou \;\; m = 0$

l'équation : $f(x) = m.x$ admet une unique solution.

<u>3er cas</u> : $m \in]-3, 0[$

l'équation : $f(x) = m.x$ n' admet pas de solutions.

b) $D_m : y = m.x$; $\vec{u}_m \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ *est vecteur directeur de* D_m

* pour $m \in]-3, 0[$; $(C) \cap D_m = \emptyset$

* pour $m \in \{-3 \;,\; 0 \;,\; 1\}$; $(C) \cap D_m$ est un point.

* pour $m \in]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[\backslash\{1\}$; $(C) \cap D_m$: deux points.

3) a) x_M *et* x_N sont solutions de l'équation : $(m-1)x^2 - 2(m-3)x - 9 = 0$,

$m \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]0, +\infty\right[\setminus \{1\}$, d'où $x_M + x_N = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-3)}{m-1}$

$K = M * N \Rightarrow X_K = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{m-3}{m-1}$

b) $K \in D_m$ *donc* $y_K = m.x_K$ ce qui donne $y_K = \frac{m(m-3)}{m-1}$

$$K\left(\frac{m-3}{m-1} , \frac{m(m-3)}{m-1}\right)$$

$x_K = \frac{m-3}{m-1} = 1 - \frac{2}{m-1} \Rightarrow \frac{2}{m-1} = 1 - x_K$ d'où $m - 1 = \frac{2}{1-x_K} \Rightarrow m = 1 + \frac{2}{1-x_K}$

$$y_K = \frac{m^2 - 3m}{m-1} = \frac{(m-2)(m-1)-2}{m-1} = m - 2 - \frac{2}{m-1}$$

par suite : $y_K = \frac{2}{1-x_K} - 1 - (1 - x_K)$

Ce qui donne : $y_K = x_K - 2 + \frac{2}{1-x_K}$

c) on pose $g(x) = x - 2 + \frac{2}{1-x}$; ainsi le point K *décrit* C_g lorsque m *varie.*

<u>Exercice15</u> :

1) $f(x) = \sqrt{-x+3}$

$(-x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$; $D_f = \left]-\infty, 3\right]$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$	0	$-$	

2) f est continue sur $\left]-\infty, 3\right]$, dérivable sur $\left]-\infty, 3\right[$ et $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+3}} < 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x+3) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x+3} = +\infty$

x	$-\infty$		3
$f'(x)$		$-$	||
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

2) a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{-x+3}}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{-1}{\sqrt{-x+3}} = -\infty$

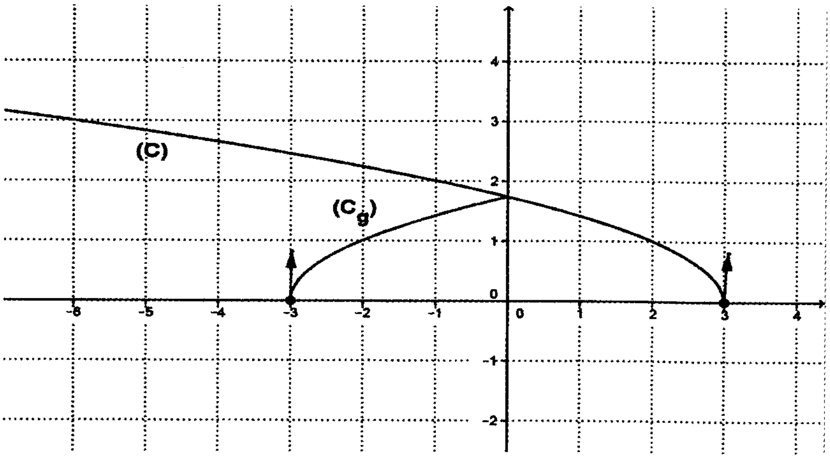
f n'est pas dérivable àgauche en 3.

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = -\infty$

d'où (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 3.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+3}{x\sqrt{-x+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1+3/x}{\sqrt{-x+3}}=0$

(C) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{\imath})$ *au voisinage de* $-\infty$.



5) a) $g(x)=f(|x|)$

$|x|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$; $D_g=[-3,3]$

g est une fonction paire ; pour $x\in[0,3]$, $g(x)=f(x)$

de plus (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b)

x	-3		0		3
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Exercice16 :

1) $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$

$-x^2+5x-4=0$; $a+b+c=0$, $x'=1$ *et* $x''=4$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$-x^2+5x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_f=[1,4]$

2) f est continue sur $[1,4]$, dérivable sur $]1,4[$ et $f'(x)=\dfrac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}$

$f(1) = f(4) = 0$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$

x	1		$5/2$		4
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	0

3) a)

* $$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{-x^2+5x-4}}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{-x^2+5x-4}{(x-1)\sqrt{-x^2+5x-4}}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{-(x-1)(x-4)}{(x-1)\sqrt{-x^2+5x-4}} = \lim_{x\to1^+}\frac{-(x-4)}{\sqrt{-x^2+5x-4}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 1.

* $$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to1^+}\frac{-(x-1)}{\sqrt{-x^2+5x-4}} = -\infty$$

f n'est pas dérivable à gauche en 4.

b) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$ d'où (C) admet deux demi tangentes verticales l'une au point d'abscisse 1 et l'autre au point d'abscisse 4.

4) * $x \in D_f = [1,4] \Rightarrow 1 \le x \le 4 \Rightarrow -4 \le -x \le -1$

$$\Rightarrow 1 \le 5-x \le 4 \Rightarrow (5-x) \in D_f$$

** $$f\left(2\times\frac{5}{2}-x\right) = f(5-x) = \sqrt{-(5-x)^2+5(5-x)-4}$$

$$= \sqrt{-(25-10x+x^2)+25-5x-4} = \sqrt{-x^2+5x-4} = f(x)$$

<u>Conclusion</u> : la droite $\Delta: x = 5/2$ est axe de symétrie de (C).

5)

Exercice 17 :

1) $f(x) = \sqrt{4+x^2}$

pour tout réel x on a $4 + x^2 \geq 0$ $d'ou$ $D_f = IR$

2) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

(f est paire)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4+x^2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{4+x^2}+x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4+x^2} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{4+x^2}-x} = 0$$

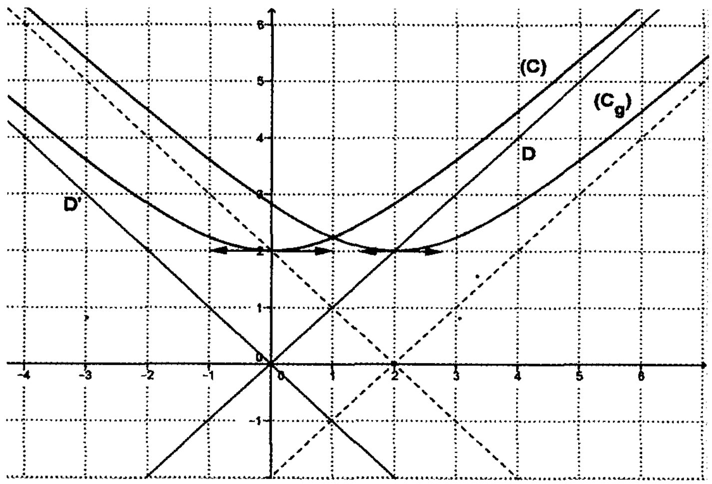
b) la droite $D: y = x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

la droite $D': y = -x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

c) comme f est paire alors D et D' sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(ou bien : $M(x\,,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \in IR \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \in IR \\ y = -(-x) \end{cases} \Leftrightarrow M'(-x\,,y) \in D'$)

4)



5) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} = \sqrt{4 + (x-2)^2}$

Donc $g(x) = f(x-2)$

(C_g) est l'image de (C) par la translation de vecteur $2.\vec{i}$

Exercice 18 : :

1) a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 4}$

$-x^2 + 4x + 4 = 0$; $\Delta = 32$, $x' = 2 - 2\sqrt{2}$ *et* $x'' = 2 + 2\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+4x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

la fonction : $x \to -x^2 + 4x + 4$ est dérivable et strictement positive sur $[0,2]$ d'où f est dérivable sur $[0,2]$

et $f'(x) = \dfrac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x+4}} = \dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+4}} \geq 0$; pour $x \in [0,2]$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$

b) $g(x) = 2 + x - \dfrac{1}{2}x^2$

g est continue et dérivable sur $[0,2]$

$g'(x) = 1 - x$

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2

c) $h(x) = 2 + x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}x^3$

h est continue et dérivable sur $[0,2]$

$h'(x) = 1 - x + \dfrac{3}{4}x^2$

($h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = -2 < 0$)

x	0		2
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	2	$\nearrow$	4

2) * $f(x)-g(x)=\sqrt{-x^2+4x+4}-(2+x-\frac{1}{2}x^2)=\dfrac{(-x^2+4x+4)-\left(2+x-\frac{1}{2}x^2\right)^2}{f(x)+g(x)}$

$$f(x)-g(x)=\frac{x^3-\frac{1}{4}x^4}{f(x)+g(x)}=\frac{x^3(4-x)}{4(f(x)+g(x))}\geq 0 \quad ; \; pour\; x\in[0,2]$$

car pour $x\in[0,2]$, $f(x)>0$ et $g(x)>0$ et $h(x)>0$ d'après 1)

par suite $\boxed{f(x)\geq g(x)}$, $pour\; x\in[0,2]$

* $$h(x)-f(x)=\frac{[h(x)]^2-[f(x)]^2}{h(x)+f(x)}=\frac{\left(2+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)^2-(-x^2+4x+4)}{f(x)+g(x)}$$

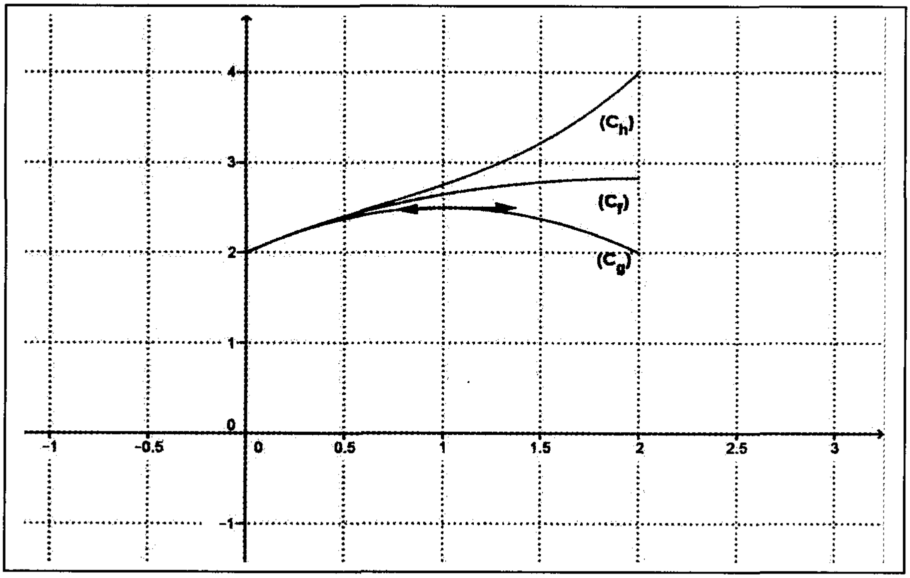
$$h(x)-f(x)=\frac{x^4(x^2-4x+12)}{16(h(x)+f(x))}\geq 0 \quad pour\; x\in[0,2]$$

Car : $x^2-4x+12>0$ $puisque$ $\Delta=-32<0$

par suite $\boxed{h(x)\geq f(x)}$, $pour\; x\in[0,2]$

Conclusion : $h(x)\geq f(x)\geq g(x)$, $pour\; x\in[0,2]$

3)



4) $f(0{,}0001)=\sqrt{4{,}00039999}$

$g(0{,}0001)\leq f(0{,}0001)\leq h(0{,}0001)$

$$\Rightarrow \quad 2{,}000099995 \leq \sqrt{4{,}00039999} \leq 2{,}00009999500025$$

$$\sqrt{\mathbf{4,00039999}} \approx \mathbf{2,000099995000}$$

Exercice19 :

1) $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 + x}$

$x^2 + x = x(x + 1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[0, +\infty\right[$

2) f est continue sur $D_f = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[0, +\infty\right[$, dérivable sur $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

et $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{-(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$		$\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1		1	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x) = +\infty$

d'ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3) a) * $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\cancel{x}(x+1)}{x\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+x}} = -\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0.

* $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-\sqrt{x^2+x}}{x+1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+x}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en (-1).

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$

d'où (C) admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses respectives -1 *et* 0.

4) * $x \in D_f \quad \Rightarrow \quad x \leq -1 \ ou \ x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \geq 1 \ ou -x \leq 0$

$\Rightarrow -1 - x \geq 0 \ ou \ -1 - x \leq -1 \quad \Rightarrow (-1 - x) \in D_f$

* $f(-1 - x) = 1 - \sqrt{(-1 - x)^2 + (-1 - x)} = \sqrt{1 + 2x + x^2 - 1 - x} = 1 - \sqrt{x^2 + x} = f(x)$

Conclusion : la droite $\Delta: x = -\dfrac{1}{2}$ est axe de symétrie de (C).

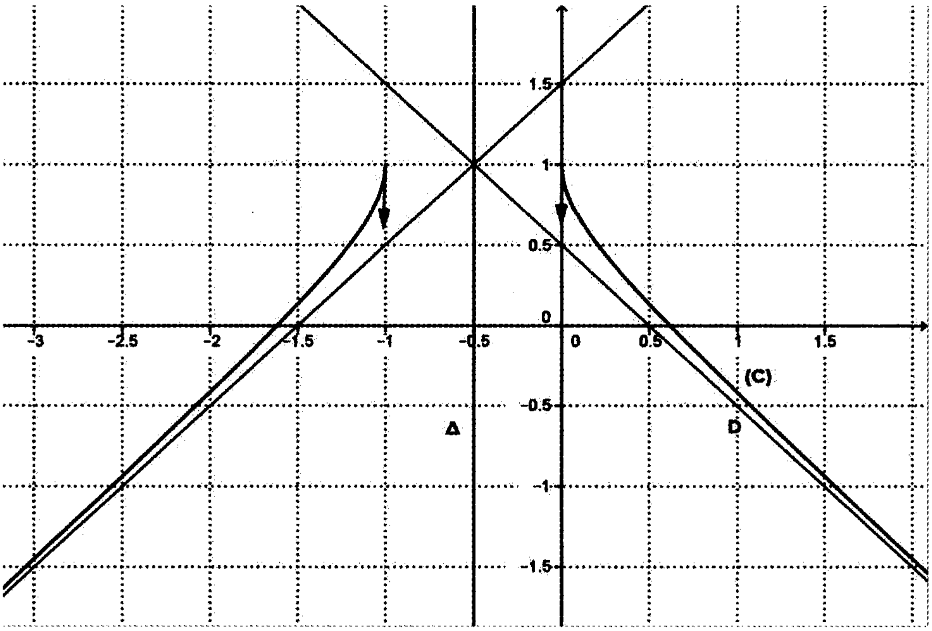
5)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{x^2+x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-(x^2+x)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x}}=0$$

la droite D: $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

6)

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$		$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$



<u>Exercice20</u> :

1) $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$

$x^2-3x-4=0$; $a-b+c=0$, $x'=-1$ *et* $x''=4$

$D_f=\ ]-\infty,-1]\cup[4,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
x^2-3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

* f est continue sur $D_f =]-\infty,-1] \cup [4,+\infty[$, dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$ *et*

$$f'(x) = -\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x-4) = \lim_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) a)

$$* \lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^-}\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)\sqrt{x^2-3x-4}} = \lim_{x\to(-1)^-}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-3x-4}} = -\infty$$

f n'est pas dérivable à gauche en (-1).

$$* \lim_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to4^+}\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x-4} = \lim_{x\to4^+}\frac{(x+1)(x-4)}{(x-4)\sqrt{x^2-3x-4}} = \lim_{x\to4^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x-4}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 4.

b) $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$

d'où (C) admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses respectives -1 *et* 4.

3) a) forme canonique : $x^2-3x-4 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

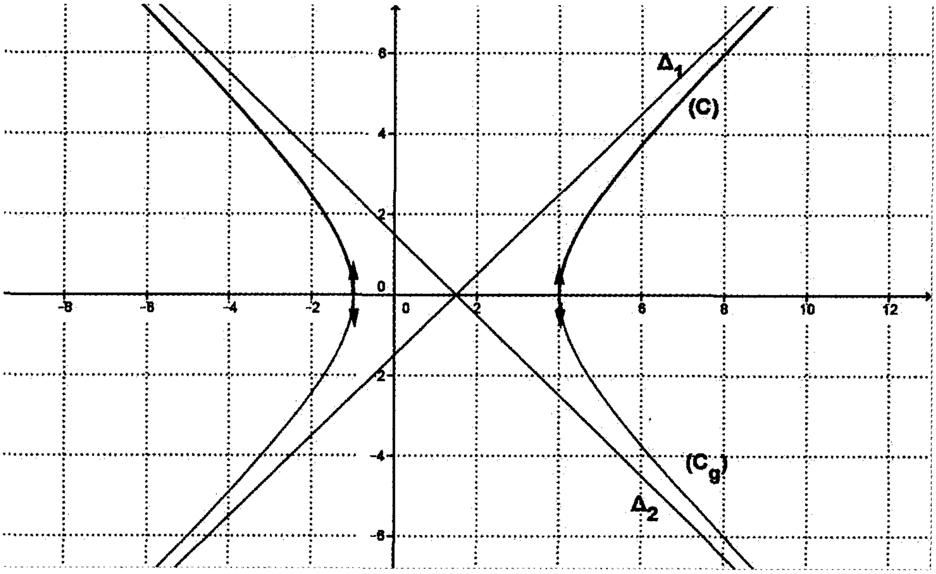
b) * $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x+\frac{3}{2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} - \left(x-\frac{3}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-25/4}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}+\left(x-\frac{3}{2}\right)} = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-\frac{3}{2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} + \left(x-\frac{3}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-25/4}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}-\left(x-\frac{3}{2}\right)} = 0$

c) la droite Δ_1: $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

la droite Δ_2: $y = -x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

4) a) $g=-f$, d'ou $\left(C_g\right)=S_{(ox)}(C)$



b)

$$M\left(x\,,y\in\left(C_f\right)\cup\left(C_g\right)\right)\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}y=f(x)\\ \quad ou\\ y=\;-f(x)\end{cases}\;\Leftrightarrow\;y^2=\;[f(x)]^2$$

$$\Leftrightarrow\;y^2=x^2-3x-4\;\Leftrightarrow\;x^2-y^2-3x-4=0$$

5) a) $M\left(x,y\right)_{(o,\vec{i},\vec{j})}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

$$M\left(\mathrm{X},\mathrm{Y}\right)_{(o',\vec{u},\vec{v})}\Leftrightarrow\overrightarrow{O'M}=X.\vec{u}+Y.\vec{v}$$

D'une part: $\overrightarrow{O'M}=X.(\vec{i}-\vec{j})+Y.(\vec{i}+\vec{j})=\left(X+Y\right).\vec{i}+\left(Y-X\right).\vec{j}$

D'autre part: $\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OO'}=x.\vec{i}+y.\vec{j}-\dfrac{3}{2}\vec{i}=\left(x-\dfrac{3}{2}\right).\vec{i}+y.\vec{j}$

Donc $\begin{cases}x-\dfrac{3}{2}=X+Y\\ y=-X+Y\end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases}x=X+Y+\dfrac{3}{2}\\ y=-X+Y\end{cases}$

b) $M\left(x\,,y \in (C_f) \cup (C_g)\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 - 3x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(X + Y + \frac{3}{2}\right)^2 - (Y - X)^2 - 3\left(X + Y + \frac{3}{2}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X + Y)^2 + \frac{9}{4} + 3(X + Y) - (Y - X)^2 - 3\left(X + Y + \frac{3}{2}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ 4.XY + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Y} = \frac{25}{16\boldsymbol{X}}$$

c) soit $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}) = \dfrac{25}{16\boldsymbol{X}}$

$(C_f) \cup (C_g) =$ (C_h) <u>l'hyperbole</u> tracée dans le repère $(O', \vec{u}\,, \vec{v})$.

QCM :

1) $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow f'(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

D'où : $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\longrightarrow$ **(a)**

2) soit $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 = 1$$

$\rightarrow$ **(b)**

3) la période est $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ $\longrightarrow$ **(c)**

4) La fonction $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ est périodique de période : $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\rightarrow$ **(b)**

5) $tanx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \,; k \in \mathbb{Z}$

Donc la courbe de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives 0 et π

$\longrightarrow$ **(a)**

Vrai – Faux

1) **Vrai**

On a : $x \in \mathbb{R}$; $(-x) \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = sin(-x - 3\pi) = \sin(-x - 3\pi + 6\pi) = \sin(-x + 3\pi)$$
$$= sin[-(x - 3\pi)] = -\sin(x - 3\pi) = -f(x)$$

> $sin(-a) = -sina$
>
> $sin(a + 2k\pi) = sina$
>
> $cos(-a) = cosa$
>
> $cos(a + 2k\pi) = cosa$

2) **Vrai**

On a : $x \in \mathbb{R}$; $(-x) \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = cos(-x - 3\pi) = \cos(-x - 3\pi + 6\pi) = \cos(-x + 3\pi)$$
$$= cos[-(x - 3\pi)] = \cos(x - 3\pi) = f(x)$$

3) **Faux**

Contre exemple : $f(x) = \cos\,(x - \frac{\pi}{4})$ est périodique de période 2π et elle n'est ni paire ni impaire

4) **Vrai**

f est π -périodique donc $f(X+k\pi)=f(X)\,;X\in\mathbb{R}\ et\ k\in\mathbb{Z}$

$f(x-\pi)=f[(x-\pi)+2\pi]=f(x+\pi)$ il résulte : $f(x-\pi)>0\Leftrightarrow f(x+\pi)>0$

5) **Vrai**

f est 2π -périodique donc $f(x_0+2\pi)=f(x_0)\,;x_0\in\mathbb{R}$

f admet un minimum en x_0 si et seulement si pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\geq f(x_0)\Leftrightarrow$ $f(x)\geq f(x_0+2\pi)$

Par suite f admet un minimum en $(x_0+2\pi)$

Mobiliser ses compétences

Situation 1

1) La fonction : $x \longrightarrow f(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ est dérivable sur $\left[0, \frac{2}{\pi}\right] \subset \mathbb{R}$

$f'(x) = -sinx \leq 0$; $x \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$

x	0	x_0	$\frac{2}{\pi}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$1-\frac{2}{\pi}$	0	$f(\frac{2}{\pi})$

Soit x_0 tel que $f(x_0) = 0$ on a : $\begin{cases} f(x) \geq 0 & si \quad x \in [0, x_0] \\ f(x) \leq 0 & si \; x \in \left[x_0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\frac{\pi}{4} < x_0 < \frac{\pi}{2}$

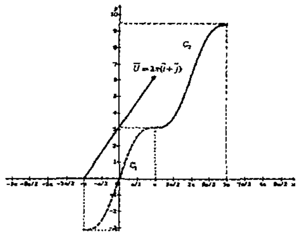
2) $\sin 0 = 0 < \frac{2}{\pi}$

Situation 2

1) a) $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + x + 2\pi = sinx + x + 2\pi = f(x) + 2\pi$

b) On a : $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$

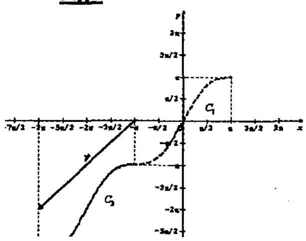
Fig1



Soit C_1 la représentation graphique de la restriction de f sur $[-\pi, \pi]$

- la C_2courbe de la restriction de f sur $[\pi, 3\pi]$ est limage de C_1 par la translation de vecteur : $\vec{u} = 2\pi(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$(voir fig1)

Fig2



- la C_3courbe de la restriction de f sur $[-3\pi, -\pi]$ est limage de C_1 par la translation de vecteur : $\vec{v} = 2\pi(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ (voir fig2)

2) • $sinx \leq -x \Leftrightarrow sinx + x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ donc
la Ccourbe de f est au dessous de l'axe
des abscisses donc : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 0]$

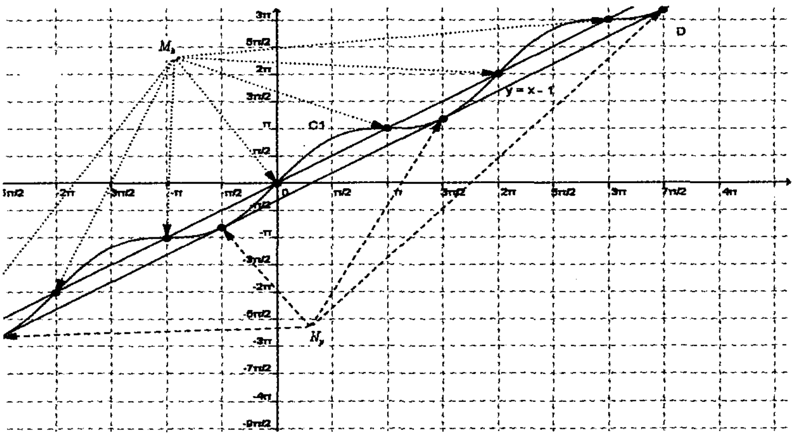
• $sinx \geq -x \Leftrightarrow sinx + x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ donc la Ccourbe de f est au dessus de l'axe
des abscisses donc : $S_{\mathbb{R}} = [0, +\infty[$

3) a) on note M_0 , M_1 , M_2 .... $et\ M_k$; $k \in \mathbb{Z}$; les points d'intersection de la Ccourbe de f avec $D : y = x$
graphiquement on a : $M_0 = O\ et\ \ M_k(k\pi, k\pi); k \in \mathbb{Z}^*$

b) on note N_0 , N_1 , N_2 .... $et\ N_p$; $p \in \mathbb{Z}$; les points d'intersection de la Ccourbe de f avec $D : y = x - 1$

graphiquement on a : $M_0\ et\ \ M_p\left((2p+1)\frac{\pi}{2}, (2p+1)\frac{\pi}{2} - 1\right)\ avec\ p \in \{2n+1; n \in \mathbb{Z}^*\}$

voir fig3



Situation 3

1) $M(2cost, sin2t)$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

a) $t_0 = 0 \Longrightarrow E(2\cos(0), \sin(2 \times 0)) \Longrightarrow E_{t_0}(2,0)$

$t_1 = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow E(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)) \Longrightarrow E_{t_1}(\sqrt{2}, 1)$

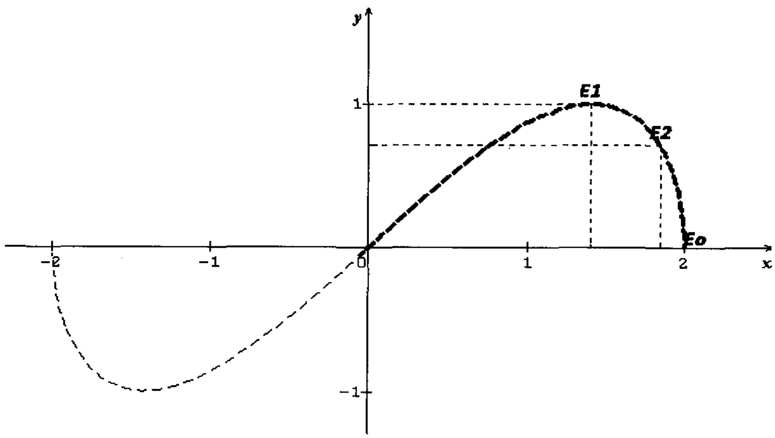
$t_2 = \frac{\pi}{8} \Longrightarrow E(2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)) \Longrightarrow E_{t_2}(2 \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, sin\frac{\pi}{4})$

$\Longrightarrow E_{t_2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$avec :\ \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2cos^2(\frac{\pi}{8}) - 1 \Longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2cos^2(\frac{\pi}{8})$

$$\Longrightarrow cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad et\ cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$$

$$\Longrightarrow cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$$



b) $M(2cost, sin2t)$, $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$sin2t = 2sint \times cost = (2cost)\times\sqrt{1-cos^2t} = (2cost)\times\sqrt{1-\frac{1}{4}(2\cos\ t)^2}$$

D'où $\begin{cases} M(x_M, \frac{x_M}{2}\times\sqrt{4-(x_M)^2} \\ 0 \le x_M \le 2 \\ 0 \le y_M \le 1 \end{cases}$

Par suite M est un point de la courbe de la fonction: $x \longrightarrow \frac{x}{2}\times\sqrt{4-x^2}$
est définie sur [0,2]

2) a) $sin2t = 2sint \times cost = (2cost)\times\sqrt{1-cos^2t}$; $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) $(2cost, sin2t) \in E$, $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $on\ pose\ \ y = sin2t\ \ et\ \ x = 2cost \Longrightarrow cost = \frac{x}{2}$

or $sin2t = (2cost)\times\sqrt{1-cos^2t} = x\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2} = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = f(x) = y$

c) le point M décrit la courbe d'équation : $y = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, $x \in [0,2]$ (voir figure avec la question1)

EXERCICES

Exercie1

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq sinx \leq 1$ donc $-5 \leq 5sinx \leq 5$ par suite :
$$\boxed{-5 \leq f(x) \leq 5}$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\begin{cases} -1 \leq sinx \leq 1 \\ -1 \leq -cosx \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq sinx - cosx \leq 2$ par suite :
$\boxed{-2 \leq f(x) \leq 2}$

3) On a : $cosx\ sinx = \frac{1}{2}\ sin2x\ ; x \in \mathbb{R}$ d'où $f(x) = \frac{1}{2}\ sin2x - 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 \leq sin2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\ sin2x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$
$-\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}\ sin2x - 1 \leq -\frac{1}{2}$ par suite : $\boxed{-\frac{3}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{2}}$

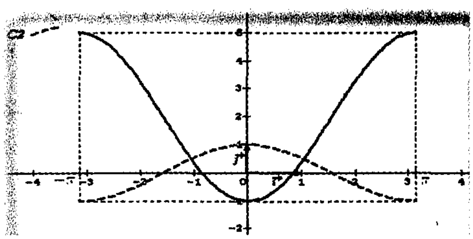
Exercie2

1) $*x \in [-\pi, \pi]$, $-x \in [-\pi, \pi]$ et $f(-x) = -3\cos(-x) + 2 = -3cosx + 2 = f(x)$
donc f est paire , la courbe C_1 est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$
alors on étudie f sur l'intervalle $[0, \pi]$
f est dérivable sur $[0, \pi]$ et $f'(x) = 3sinx \geq 0$

x	0		π
$f(x)$	0	$+$	0
$f'(x)$	-1	$\nearrow$	5

$* \ x \in [-\pi, \pi]$, $-x \in [-\pi, \pi]$
et $g(-x) = \cos(-x) = cosx = g(x)$
donc g est paire , la courbe C_2 est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$
alors on étudie g sur l'intervalle $[0, \pi]$
$g'(x) = -sinx \leq 0$

x	0		π
$g(x)$	0	$-$	0
$g'(x)$	1	$\searrow$	-1



2) a) * Pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ on a : $cosx \leq 1$ donc : $|cosx - 1| = 1 - cosx$

* aussi on a : $2cosx - 1 = 0 \Leftrightarrow cosx = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

Or $x \in [-\pi,\pi]$ d'où :

$$\begin{cases} -\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{1}{3} \Rightarrow k = 0 \text{ donc } x = \frac{\pi}{3} \\ -\pi \leq +2k\pi \leq \pi \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} \Rightarrow k = 0 \text{ donc } x = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Par suite :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$	π
Signe de $(2cosx - 1)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\|2cosx - 1\|$	$1 - 2cosx$	0	$2cosx - 1$	0	$1 - 2cosx$
$\|cosx - 1\|$			$1 - cosx$		

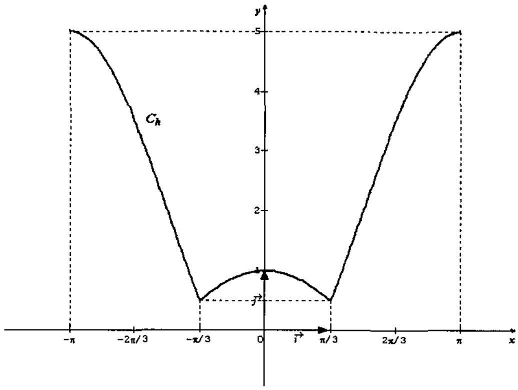
Finalement : $h(x) = \begin{cases} -3cosx + 2 = f(x) & si\ \ x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \\ cosx = g(x) & si\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \end{cases}$

b) • $si\ \ x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$alors\ C\ se$ coïncide $avec\ C_1$

• $si\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

$alors\ C\ se$ coïncide $avec\ C_2$



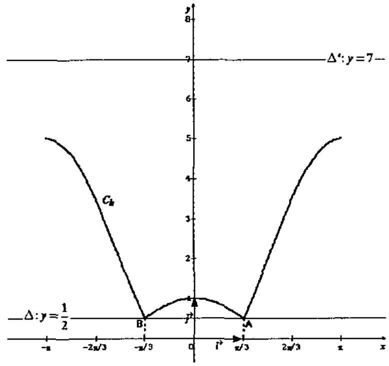
c) * Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

C coupe Δ aux points $A\ et\ B$ d'abscisses respectifs

$x_A = \frac{\pi}{3}$ et $x_B = -\frac{\pi}{3}$

donc $S_{[-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

* Soit Δ' la droite d'équation $x = 7$



C est au dessous de Δ' et C et Δ' ne se coupent pas. Donc

$S_{[-\pi,\pi]} = \emptyset$ (ensemble vide)

Exercie3

$\oplus \quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = \dfrac{1}{\cos 0} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\oplus \quad \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\oplus \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos(x+\frac{3\pi}{4})}{\sin x} = \dfrac{\cos\frac{3\pi}{4}}{0^-} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-} = +\infty$

$\oplus \quad \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sin^3 x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin^3 x}\left(FI\dfrac{0}{0}\right)$

pour $x \neq 0$, $\dfrac{x^3}{\sin^3 x} = \dfrac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{\sin^3 x}{x^3}} = \dfrac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^3 x} = 1$

$\oplus \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-5x)}{x} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(h)}{\left(\frac{h}{-5}\right)} = \lim\limits_{X\to 0}(-5)(\underbrace{\dfrac{\sin h}{h}}_{\searrow 1}) = -5$; on pose : $\begin{cases} h = -5x \to x = \dfrac{h}{-5} \\ h \text{ tend vers } 0 \end{cases}$

$\oplus \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 3\times\dfrac{\tan(3x)}{(3x)} \underset{h=3x}{=} \lim\limits_{h\to 0} 3\times\dfrac{\tan h}{h} = 3$

$\oplus \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(-4x)} = \left(FI\dfrac{0}{0}\right)$

$*$***pour*** $x \neq 0$; $\sin(5x) = (5x)\times\dfrac{\sin(5x)}{5x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{5x} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h} = 1$(***on pose*** $h = 5x$)

$*\sin(-4x) = (-4x)\times\dfrac{\sin(-4x)}{-4x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-4x)}{(-4x)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h} = 1$(***on pose*** $h = -4x$)

finalement: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(-4x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5\cancel{x}}{-4\cancel{x}}\right)\times\left(\dfrac{\frac{\sin(5x)}{5x}}{\frac{\sin(-4x)}{-4x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{-4}\right)\times\left(\dfrac{\frac{\sin(5x)}{5x}}{\frac{\sin(-4x)}{-4x}}\right) = -\dfrac{5}{4}$

$$\oplus \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(-3x)}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-3}{2}\right)\times\left(\frac{\overbrace{\frac{\tan(-3x)}{-3x}}^{\to 1}}{\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\searrow 1}}\right)=-\frac{3}{2}$$

Exercie4

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(2\sin x)'=2(\sin x)'=2\cos x$

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\dfrac{(3\cos x+5)'}{2}=\dfrac{3(\cos x)'}{2}=-\dfrac{3}{2}\sin x$

- h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=(\sin x)'+(\cos x)'=\cos x-\sin x$

- s est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $s'(x)=\left(\dfrac{1}{\cos x+2}\right)'=-\dfrac{(\cos x+2)'}{(\cos x+2)^2}=-\dfrac{(-\sin x)}{(\cos x+2)^2}\Rightarrow s'(x)=\dfrac{\sin x}{(\cos x+2)^2}$

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x)=(x\cos x)'=(x)'\cos x+x(\cos x)'=\cos x-x\sin x$

- t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $t'(x)=(\sin x\cos x)'=(\sin x)'.\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

- w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $w'(x)=(\sin^2 x)'=2(\sin x)'.\sin x=2\cos x\sin x=\sin 2x$

- r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $r'(x)=\left(-3\sin(-2x+\frac{\pi}{4})\right)'=-3\times(-2)\times\left(\sin(-2x+\frac{\pi}{4})\right)=6\cos(-2x+\frac{\pi}{4})$

- j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $j'(x)=\left(\cos(-3x-\frac{\pi}{3})\right)'=3\sin(-3x-\frac{\pi}{3})=-3\sin(3x+\frac{\pi}{3})$

Exercice 5

$f(x)=cos^3x-sin^3x$

1) $Df=\mathbb{R}$

2) f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x)&=(\cos^3 x)'-(\sin^3 x)'=3(\cos x)'.\cos^2 x-3(\sin x)'.\sin^2 x\\ &=3(-\sin x).\cos^2 x-3\cos x\sin^2 x=-3\cos x\sin x(\cos x+\sin x)\end{aligned}$$

3) on a : $\frac{\pi}{3} \simeq 1,05$

L'approximation de f *en* a est : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$

Ainsi on a : $f(1{,}05) = f(1 + 0.05) \approx f(1) + 0{,}05 \times f'(1) \approx -0{,}54$

D'où $f(\frac{\pi}{3}) \simeq -0,54$ (approximation affine de $\frac{\pi}{3}$)

Exercice 6

$f(x) = cosx - \frac{1}{x}$

1) $Df = \mathbb{R}^*$

2) f est la somme de deux fonctions dérivables ($cosx +$ fonction rationnelle) sur $\mathbb{R}^*$

Donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $f'(x) = (\cos x)' - (\frac{1}{x})' = -\sin x + \frac{1}{x^2}$

3) (approximation affine de1,00001)

On a : $f(1{,}00001) = f(1 + 0{,}00001) \approx f(1) + (0{,}00001) \times f'(1) \approx -0{,}46$

Exercice 7

$f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 1}$

1) $Df = \mathbb{R}$ car : $\sin^2 x + 1$, est toujours positif

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout réel x on a : $\sin^2 x + 1 > 0$

Et $f'(x) = \frac{(\sin^2 x)'}{2\sqrt{\sin^2 x + 1}} = \frac{2\cos x \sin x}{2\sqrt{\sin^2 x + 1}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x + 1}}$

3) on a : $\frac{\pi}{6} \simeq 0,5235$

Ainsi on a : $f(0{,}5235) = f(1 - 0.4764) \approx f(1) - 0{,}4764 \times f'(1) \approx 1.3$

D'où $f(\frac{\pi}{6}) \simeq 1,3$ (approximation affine de $\frac{\pi}{6}$)

* $f(10^{-4}) = f(0{,}0001) \approx f(0) + 0{,}0001 \times f'(0) \approx 1$

Exercice 8

$f(x) = \dfrac{1}{\tan x}$

1) $Df = J = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) f est dérivable sur J et on a : $f'(x) = -\dfrac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\dfrac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$

Exercice 9

1) $f(x) = sinx \;\; et \;\; f'(x) = cosx \;\;, x \in [0,2\pi]$

Equation de la tangent T à C au point d'abscisse $\boldsymbol{a} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$

$$T : y = f'(a)(x-a) + f(a) \Longrightarrow T:\; y = (x-a).cosa + sina$$

$\Longrightarrow T$: $\boxed{y = x.cosa + sina - acosa}$

2) On a f(2π –x) = -f(x) donc le point I(π ;0) est un centre de symétrie il suffit donc d'étudier sur $[0;\pi]$

On a $f(2.\frac{\pi}{2} - x)$= sin(π-x) =f(x) donc la droite d'éq : x=$\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie il suffit donc d'étudier sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

On va étudier le signe $g(x) = f(x) - y$

$g(x) = sinx - x.cosa - sina + acosa$

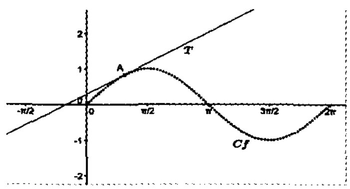
$$g'(x) = cosx - cosa = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} ;k \in \mathbb{Z} \text{ et } \boldsymbol{a} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$$

►Signe de $g(x)$ *pour* $\boldsymbol{a} \in \left[\mathbf{0}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

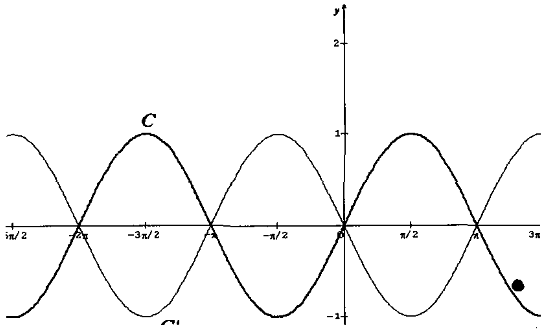
x	0		a		$2\pi - a$		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-sina + acosa$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\underbrace{-2sina + 2(a-\pi)cosa}_{négatif}$	$\nearrow$	$\overbrace{-sina + (a-2\pi)cosa}^{négatif}$

On a pour tout $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, 2\pi]$, $g(x) \leq 0$

d'où la courbe de f est au dessous de sa tangente au point d'abscisse a



Exercice 10



1) Posons $f(x) = sinx$ et $g(x) = -sinx$

$E = \{M(x,y)\,, tel\ que\ \ y = f(x) = g(x)\}$

On a : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow sinx = -sinx \Leftrightarrow 2sinx = 0 \Leftrightarrow sinx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $E = \{M_k(k\pi, 0)\ , k \in \mathbb{Z}\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta : y = ax + b \\ \Delta' : y = a'x + b' \\ \Delta \perp \Delta' \Leftrightarrow aa' = -1 \end{array}}$$

2) $M(x,y) \in E \Leftrightarrow y = 0\ \ et\ x = k\pi\ \ , k \in \mathbb{Z}$

* d'une part on a : $f'(x) = cosx$ et $g'(x) = -cosx$

* d'autre part on a : $\begin{cases} cosk\pi = 1 & si\ k\ est\ pair \\ cok\pi = -1 & si\ k\ est\ impair \end{cases}$ donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $cos(k\pi) = (-1)^k$

Par suite on aura : $f'(k\,\pi) = (-1)^k$ et $g'(k\,\pi) = -(-1)^k$

Ainsi : $g'(k\,\pi) \times f'(k\,\pi) - (-1)^k \times (-1)^k = -(-1)^{2k} = -1$

ce qui prouve que les tangentes en M respectivement à $C\ \ et\ C'$

Exercice 11

$f(x) = -3\sin\,(2x + \frac{2\pi}{3})$

1) on sait que la fonction: $x \longrightarrow \sin\,(ax + b)\ \ , a \neq 0$, est périodique

de période $= \dfrac{2\pi}{|a|}$. Donc f est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

2) * f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = -3\left[\sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right]' = -6\cos\,(2x + \dfrac{2\pi}{3})$

$$* \begin{cases} f'(x)=0 \\ x\in[0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x+\frac{2\pi}{3})=0 \\ x\in[0,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in Z \\ x\in[0,\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};k\in Z \\ 0\le -\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\le\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};k\in Z \\ 0\le -\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\le\pi \Rightarrow \frac{1}{6}\le k\le\frac{13}{6} \Rightarrow\ k=1\ ou\ k=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}\ \text{ou}\ \ x=\frac{11\pi}{12} \qquad \text{d'où : } S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\}$$

3) Etude de signe de $f'(x)$

On a : $x\in[0,\pi]\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}\le(2x+\frac{2\pi}{3})\le\frac{8\pi}{3}$

$$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow -3\cos(2x+\frac{2\pi}{3})\ge 0 \Leftrightarrow \cos(2x+\frac{2\pi}{3})\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}\le(2x+\frac{2\pi}{3})\le\frac{3\pi}{2}\ \text{ ou }\ \frac{5\pi}{2}\le(2x+\frac{2\pi}{3})\le\frac{8\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{5\pi}{12}\ \text{ ou }\ \frac{11\pi}{12}\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le\pi$$

de même : $f'(x)\le 0 \Leftrightarrow \ \frac{5\pi}{12}\le x\le\frac{11\pi}{12}$

Tableau de variation de f :

$$f(\frac{5\pi}{12})=-3\sin(\frac{3\pi}{2})=3$$
$$f(\frac{11\pi}{12})=-3\sin(\frac{\pi}{2})=-3$$
$$f(0)=-3\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$f(\pi)=-3\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

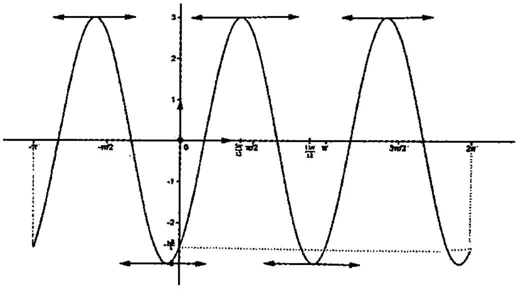
x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4) f est de période π : tracer C_0 la courbe de la restriction de f sur $[0,\pi]$

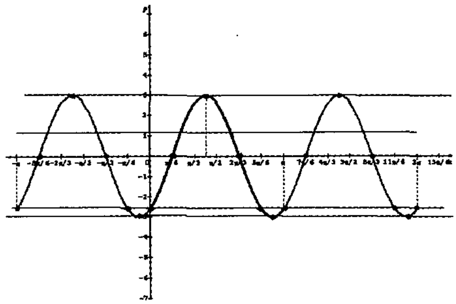
construire C_1 et C_2 les images de C_0 respectivement par les translations

de vecteur $(-\pi\vec{i})et\ (\pi\vec{i})$

Ainsi : $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2$



5)



$\bullet$ ***si*** $k > 3$ ou $k < -3$ $\rightarrow$ ***pas des solutions***

$\bullet$ ***si*** $k = 3$ ou $k = -3$ $\rightarrow 3$ ***solutions***

$\bullet$ ***si*** $k \in]-3,3[\setminus \left\{ \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} \right\}$ $\rightarrow 6$ ***solutions***

$\bullet$ ***si*** $k = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$ $\rightarrow 7$ ***solutions***

Exercice 12

$f(x) = cos^2 x - 1$

1) si $x \in \mathbb{R}$ alors $(x+\pi) \in \mathbb{R}$ et

$f(x+\pi) = [\cos(x+\pi)]^2 - 1 = (-cosx)^2 - 1 = cso^2 x - 1$

D'où $f(x+\pi) = f(x)$ ce qui prouve que f est périodique de période : $T = \pi$

2) * si $x \in \mathbb{R}$ alors $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = [\cos(-x)]^2 - 1 = cso^2 x - 1 = f(x)$.
D'où f est paire

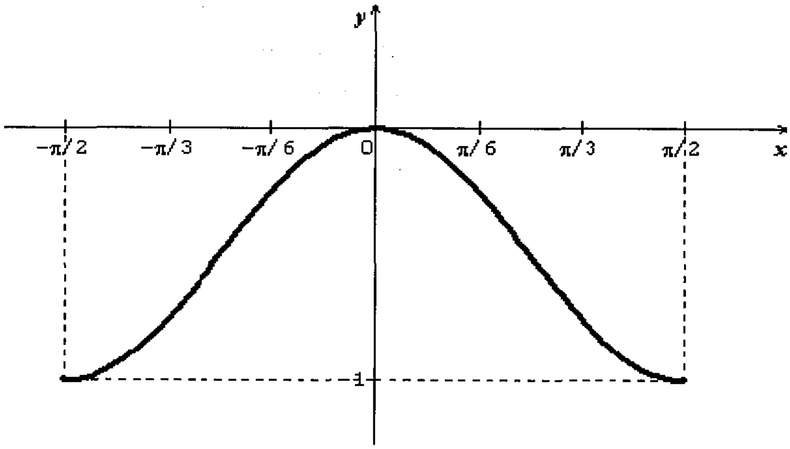
*f est π périodique donc il suffit d'étudier f sur I_0 intervalle d'amplitude π et comme de plus f est paire alors on choisit $I_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et le domaine d'étude se réduit à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

* f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2.(cosx)'.cosx = -2sinx.cosx \leq 0$

D'où le tableau de variation de f

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	-1

* tracer C_0 la courbe de la restriction de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis construire C_1 le symétrique de C_0 par rapport à la droite des ordonnées, qui est un axe de symétrie pour la courbe de f (fonction paire)



Exercice 13 $f(x) = -\frac{3}{2}sin2x$

1) $x \longrightarrow \sin(ax+b)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$ $, a \neq 0$

Donc f est périodique de période $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

2) * si $x \in \mathbb{R}$ alors $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -\frac{3}{2}\sin(-2x) = \frac{3}{2}sin2x = -f(x)$.

D'où f est impaire

* f est périodique de période π donc on peut restreindre son étude à un intervalle de longueur π comme

[0 ; π] ou $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de plus f est une fonction impaire donc on peut l'étudier

sur [0 ; +∞ [, sa courbe admet pour centre de symétrie, l'origine O du repère.

Finalement on peut étudier f sur I = $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

* f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{-3}{2} \times 2cos2x. = -3cos2x$

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3cos2x = 0 \Leftrightarrow cos2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -3\cos 2x \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$$

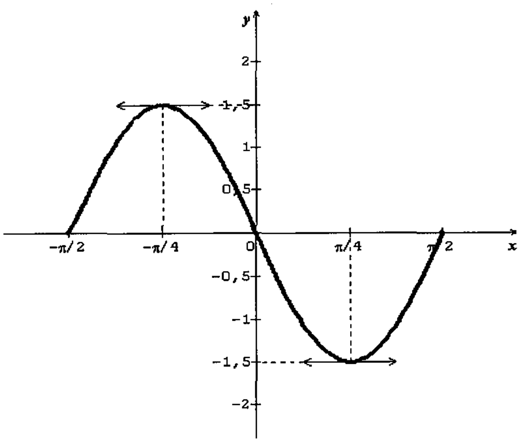
$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \pi \Leftrightarrow \cos(2x) \leq 0 \Leftrightarrow -3\cos 2x = f'(x) \geq 0$$

D'où le tableau de variation de f

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0

* tracer C_0 la courbe de la restriction de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis construire C_1 le symétrique de C_0 par rapport à O , qui est un centre de symétrie pour la courbe de f

(fonction impaire)



Exercice 14

$f(x) = 2\cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$

1) la fonction : $x \longrightarrow \cos(ax+b)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$, $a \neq 0$

Donc f est périodique de période $T = \frac{2\pi}{3}$

2) *f est . $\frac{2\pi}{3}$ périodique donc il suffit d'étudier f sur I_0 intervalle d'amplitude . $\frac{2\pi}{3}$

On choisit $I_0 = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

* f est dérivable sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$

et $f'(x) = 2 \times (-3)(-\sin\left(-3x + \dfrac{\pi}{2}\right)) = 6\sin\left(-3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Remarquons que : $0 \le x \le \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -2\pi \le -3x \le 0 \Leftrightarrow \boxed{-\dfrac{3\pi}{2} \le (-3x+\dfrac{\pi}{2}) \le \dfrac{\pi}{2}}$

On a : $f'(x) = 0 \iff \sin\left(-3x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\iff -3x + \frac{\pi}{2} = 0 \quad ou \quad -3x + \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\iff x = \frac{\pi}{6} \quad ou \quad x = \frac{\pi}{2}$$. *Ainsi on aura :*

- $f'(x) = 6\sin(-3x+\dfrac{\pi}{2}) \ge 0 \Leftrightarrow (-3x+\dfrac{\pi}{2}) \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}, -\pi\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$

car :

$\oplus -\dfrac{3\pi}{2} \le -3x+\dfrac{\pi}{2} \le -\pi \Leftrightarrow -2\pi \le -3x \le -\dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$

$\oplus 0 \le -3x+\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} \le -3x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

- $f'(x) = 6\sin(-3x+\dfrac{\pi}{2}) \le 0 \Leftrightarrow (-3x+\dfrac{\pi}{2}) \in [-\pi, 0] \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

car :

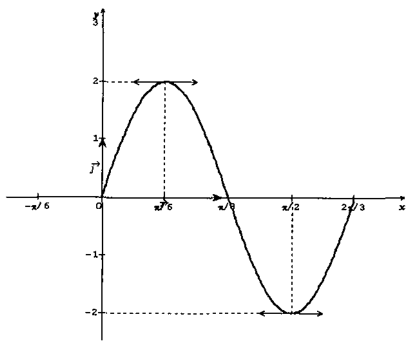
$\oplus -\pi \le -3x+\dfrac{\pi}{2} \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3\pi}{2} \le -3x \le -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

$f(0) = 2\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $f(\dfrac{\pi}{6}) = 2\cos 0 = 2$, $f(\dfrac{\pi}{2}) = 2\cos(-\pi) = -2$ et $f(\dfrac{2\pi}{3}) = 2\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

<u>D'où le tableau de variation de f</u>

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||		
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Courbe de f



Exercice 15

$f(x) = tanx + sin4x$

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{k}\pi \ , \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \right\}$

2) si $x \in Df$ alors $(x + \pi) \in Df$

et $f(x + \pi) = \tan(x + \pi) + \sin 4(x + \pi) = tanx + \sin(4x + 4\pi)$
$= tanx + sin4x = f(x)$

D'où $f(x + \pi) = f(x)$ ce qui prouve que f est périodique de période : $T = \pi$

3) * si $x \in Df$ alors $(-x) \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$. D'où f est impaire

*f est π périodique donc il suffit d'étudier f sur I_0 intervalle d'amplitude π or comme de plus f est impaire alors on choisit $I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et le domaine d'étude se réduit à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

* f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = 1 + tan^2x + 4\cos(4x)$

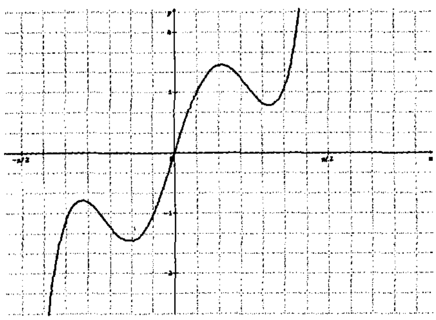
$\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} (\underbrace{\tan x}_{+\infty} + \underbrace{\sin 4x}_{0}) = +\infty$ d'où $D: x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote à C

Par raison de symétrie $D': x = -\frac{\pi}{2}$ est aussi une asymptote à C

Remarque : les zéros de $f'(x)$ ne sont pas remarquables

à l'aide de logiciel Géogebra on tracé l'allure de la courbe de f qui conforme notre conclusion .

Courbe de f



Exercice 16

$f(x) = tanx$

1) f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = 1 + tan^2x > 0$

$\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$ de la forme $\frac{1}{0^+}$ d'où $D: x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote à Cf

le tableau de variation de f

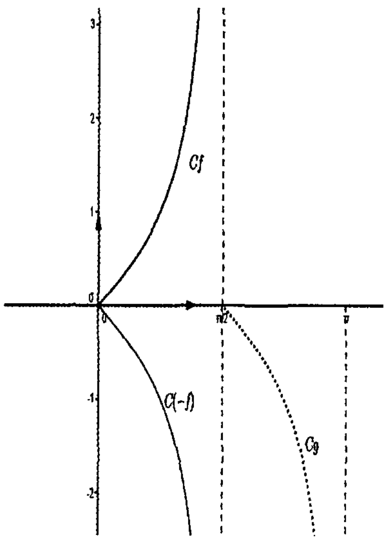
x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

la courbe de f et celle de $(-f)$ sont symétriques par rapport à la droite des abscisses.

2) a) $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$$\tan(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{\cos(x - \frac{\pi}{2})} = \frac{-\cos x}{\sin x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x} = -g(x) \quad ; \quad x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$



b) C' la courbe de g est l'image de la courbe

de $(-f)$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{\pi}{2}\vec{\imath}$

c) tableau de variation de g :

x	$\frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ π
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

Exercice 17

$$f(x) = cosx - \frac{\sqrt{3}}{2}x \ , \ f'(x) = -\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in [-5,12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in [-5,12] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3} \right\}$$

tableau de variations :

x	-5		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{10\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{3}$		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	f(-5)	↘	$f(\frac{-2\pi}{3})$	↗	$f(\frac{-\pi}{3})$	↘	$f(\frac{4\pi}{3})$	↗	$f(\frac{5\pi}{3})$	↘	$f(\frac{10\pi}{3})$	↗	$f(\frac{11\pi}{3})$	↘	$f(12)$

* f admet un maximum local respectivement en : $\frac{-\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{11\pi}{3}$

* f admet un minimum local respectivement en : $\frac{-2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{10\pi}{3}$

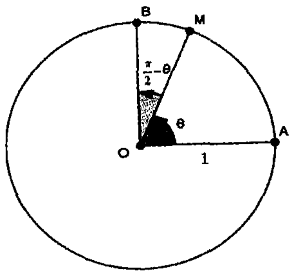
Exercice 18

$f(x) = x.cosx \ , \ x \in [0,+\infty[$

pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $f(2k\pi) = 2k\pi$ et $f((2k+1)\pi) = -(2k+1)\pi$

ce qui prouve que f est ni majorée ni minorée par suite f n'admet pas un plus petit extremum local sur $x \in [0,+\infty[$

Exercice 19



1) a) dans le triangle OAM on a : (Formule d'el-Kashi)

$$AM^2 = OA^2 + OM^2 - 2(OA \times OM)cos\theta$$

$$= 2 - 2cos\theta = 2(1 - cos\theta)$$

$$= 2\left[1 - (1 - 2sin^2\frac{\theta}{2})\right] = 4sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$AM^2 = 4sin^2\frac{\theta}{2} \ et \quad \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ \Rightarrow \boxed{AM = 2sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

b) dans le triangle OBM on a :

$$BM^2 = OB^2 + OM^2 - 2(OB \times OM)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= 2\left[1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right)\right)\right] = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$BM^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\Rightarrow \boxed{BM = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

2) $f(x) = 2\sin x + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

a) f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $f'(x) = 2\cos x - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

* On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\left[\cos x - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Et puisque $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ on aura : $x = \frac{\pi}{8}$

* $0 \le x \le \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} \le -x \le 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} \le \frac{\pi}{4} - x \le \frac{\pi}{4}$

donc pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ on a : $x \le \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow \cos x \ge \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ $\left(\begin{array}{l}\text{car la fonction cosinus} \\ \text{est décrissante sur} \left[0, \frac{\pi}{8}\right]\end{array}\right)$

Par suite f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ et de même décroissante sur $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$

* $f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

* $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4\sin\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4\sin\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

D'où le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	$\sqrt{2}$ $\nearrow$	$2\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\searrow$ $\sqrt{2}$

3) $AM + BM = 2\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$, posons $x = \frac{\theta}{2}$

La fonction g est maximal pour $x = \frac{\pi}{8}$ donc $AM + BM$ est maximal pour : $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{8}$

C'est-à-dire $\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

Exercice 20

$$f(x) = x - \sin x \text{ , } x \in \mathbb{R}$$

1) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq x - \sin x \leq x+1$

par suite : $x-1 \leq f(x) \leq x+1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) a) point d'intersection de C et $D : y = x - 1$

$f(x) = x-1 \Leftrightarrow x - \sin x = x-1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k$; $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $C \cap D = \left\{M_k(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) point d'intersection de C et $D : y = x + 1$

$f(x) = x+1 \Leftrightarrow x - \sin x = x+1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k$; $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $C \cap D = \left\{N_k(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) On a : * $f'(x) = 1 + \cos x$

$f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + 1 = 1$ et $f'(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + 1 = 1$

$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - 1$

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + 1$

* T est Tangente à C aux points M_k d'abscisse $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$$T : y = f'(\frac{\pi}{2}+2k\pi)(x-\frac{\pi}{2}-2k\pi)+f(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$$

$$y = 1\times(x-\frac{\pi}{2}-2k\pi)+\frac{\pi}{2}+2k\pi-1 \Rightarrow y = x-1 \Rightarrow T = D$$

* T' est Tangente à C aux points N_k d'abscisse $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

$$T' : y = f'(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)(x+\frac{\pi}{2}-2k\pi)+f(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)$$

$$y = 1\times(x+\frac{\pi}{2}-2k\pi)-\frac{\pi}{2}+2k\pi+1 \Rightarrow y = x+1 \Rightarrow T = D$$

Conclusion : les droites D et D' sont tangents à C respectivement aux points M_k et N_k

Exercice 21

1) La longueur de tuyau est : $IM + MD + MC = AD - MH + 2MD$ $(MD = MC)$

• le triangle MDH est rectangle en H d'où :

$$\frac{MH}{MD} = \sin\alpha \Rightarrow MH = (\sin\alpha)MD \text{ et } \frac{DH}{MD} = \cos\alpha \Rightarrow MD = \frac{DH}{\cos\alpha}$$

Ainsi on aura : $f(\alpha) = AD - MH + 2MD = AD - (sin\alpha)MD + 2MD$

$$= AD - (sin\alpha)\frac{DH}{\cos\alpha} + 2\frac{DH}{\cos\alpha}$$

• or : H est le milieu $[DC]$ et $DC = AB$ donc $DH = \frac{AB}{2}$

D'où $f(\alpha) = AD - (sin\alpha)\frac{AB}{2\cos\alpha} + 2(\frac{AB}{2\cos\alpha})$

Finalement : $\boxed{f(\alpha) = \frac{AB}{\cos\alpha} - \frac{AB}{2}\tan\alpha + AD}$

2) a) $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\alpha) = -AB(\frac{-\sin\alpha}{\cos^2\alpha})-\frac{AB}{2}(\frac{1}{\cos^2\alpha}) = \frac{AB}{\cos^2\alpha}(\sin\alpha-\frac{1}{2})$

$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ car $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$f(\alpha) = AB - 0 + AD = AB + AD$

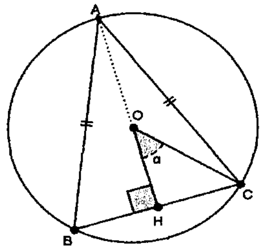
α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$-$		$+$	
$f(\alpha)$	$(AB + AD)$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}AB + AD$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\frac{\pi}{6})=\frac{2AB}{\sqrt{3}}-\frac{AB}{2\sqrt{3}}+AD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB+AD$$

$$\lim_{\alpha\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{AB}{\cos\alpha}-\frac{AB}{2}\tan\alpha+AD=\lim_{\alpha\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{AB}{\cos\alpha}(1-\frac{1}{2}\sin\alpha)+AD$$
$$=+\infty$$

b) la longueur L de tuyau est minimal pour $\alpha=\frac{\pi}{6}$, et dans ce cas : $L=\frac{\sqrt{3}}{2}AB+AD$

Exercice 22



$OA=OB=OC=1$, $AB=AC$

$H\hat{O}C=\alpha$, $HB=HC=\frac{BC}{2}$

1) a) Dans le triangle OHC (rectangle en H) on a :

* $sin\alpha=\frac{HC}{OC}=HC\Rightarrow sin\alpha=\frac{BC}{2}$ Donc $\boxed{BC=2sin\alpha}$

* $cos\alpha=\frac{OH}{OC}=OH$ ainsi $OH=cos\alpha$ et puisque : $AH=OA+OH=1+OH$

On aura : $\boxed{AH=1+cos\alpha}$

b) Soit a l'aire de triangle , on a : $a=\frac{1}{2}$(base × hauteur) $=\frac{1}{2}$BC × AH

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2}(2\sin\alpha)(1+\cos\alpha)\Rightarrow\boxed{a=\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$

2) $f(\alpha)=\sin\alpha(1+\cos\alpha)$; $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (produit de deux fonctions dérivables) et on a :

$$\begin{aligned}f'(\alpha)&=(\sin\alpha)'(1+\cos\alpha)+\sin\alpha(1+\cos\alpha)'=\cos\alpha(1+\cos\alpha)+\sin\alpha(-sin\alpha)\\&=\cos\alpha(1+\cos\alpha)-\sin^2\alpha=\cos\alpha(1+\cos\alpha)+\cos^2\alpha-1\\&=\cos\alpha(1+\cos\alpha)+(1+\cos\alpha)(cos\alpha-1)=(1+\cos\alpha)(2\cos\alpha-1)\end{aligned}$$

Donc : $f'(\alpha)=(1+cos\alpha)(2cos\alpha-1)$; $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) * $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $f'(\alpha)=(1+\cos\alpha)(2cos\alpha-1)=0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}=cos\frac{\pi}{3}$

- $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
- $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$

D'où le tableau de variation de f :

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

3) f admet un maximum en $\frac{\pi}{3}$ atteint la valeur $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

* Donc l'aire a de triangle ABC est maximal pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et dans ce cas on a : $a = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

* les deux triangles OBH et OBC sont isométriques d'où $B\hat{O}H = C\hat{O}H$ ainsi $B\hat{O}C = \frac{2\pi}{3}$

Or $A\hat{B}C = \frac{1}{2} B\hat{O}C$ $(angle\ au\ centre\ et\ angle\ inscrit\ associé)$ $\Longrightarrow A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$

<u>Conclusion</u> : $\begin{cases} AB = AC \\ B\widehat{A}C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$ ABC est un triangle équilatéral .

QCM

1) **(b)** $q > 1$

On a : $u_1 < 0$ *et* $u_2 = qu_1 < 0$ ainsi la raison est positive

2) **(a)** (u_n) est majorée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sin(n) \leq 1$

3) **(c)** (u_n) est bornée

$n^2+1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2+1} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{-2}{n^2+1} \geq -2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $-2 \leq u_n \leq 0$

4) **(b)** (u_n) est décroissante

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -2\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n+1} + 2\left(\dfrac{5}{3}\right)^n = -2\left(\dfrac{5}{3}\right)^n \left[\dfrac{5}{3} - 1\right] = -\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n < 0$

5) **(b)** (u_n) est décroissante.

VRAI-FAUX

1) Faux

Contre exemple : $u_n = -n + 1$; $n \geq 0$

La suite (u_n) n'est pas bornée mais elle est majorée par 1. ($u_n \leq 1$, *pour tout* $n \in IN$)

2) Vrai

Une suite est bornée lorsque elle est majorée et minorée à la fois.

3) Faux

Par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, est ni croissante ni décroissante

4) Vrai

en effet : $u_{n+1} - u_n = r$ la raison de cette suite

* si $r \geq 0$ alors (u_n) est croissante

* si $r \leq 0$ alors (u_n) est décroissante

5) Faux

En effet : lorsque sa raison $q < 0$, la suite (u_n) est ni croissante ni décroissante.

Mobiliser ses compétences :

Situation1 :

1) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

a) $s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{4} \times f(0) + \frac{1}{4} \times f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \times f(\frac{2}{4}) + \frac{1}{4} \times f(\frac{3}{4})$

$$s_4 = \frac{1}{4} \times \left[f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4}) \right] = \frac{1}{4} \times \left[\frac{1}{2} + (\frac{1}{16} + \frac{1}{2}) + (\frac{4}{16} + \frac{1}{2}) + (\frac{9}{16} + \frac{1}{2}) \right]$$

$$s_4 = \frac{1}{4} \times \left[\frac{8}{16} + \frac{9}{16} + \frac{12}{16} + \frac{17}{16} \right] = \frac{46}{64} = \frac{23}{32}$$

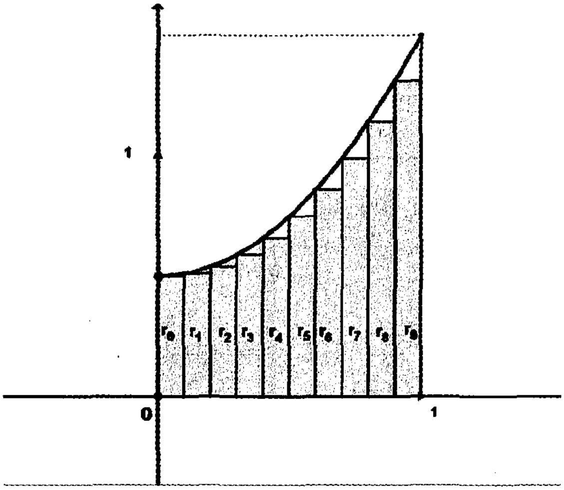
b) $S_4 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{4} \times f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \times f(\frac{2}{4}) + \frac{1}{4} \times f(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4} \times f(1)$

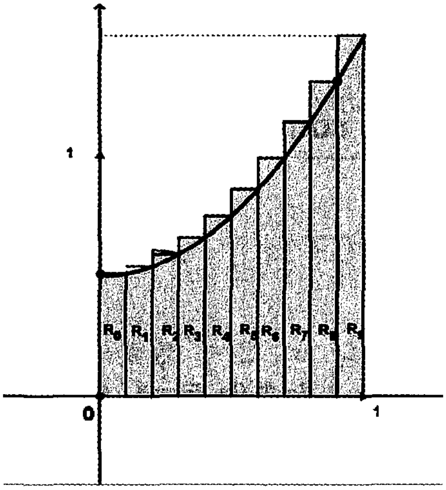
$$S_4 = \frac{1}{4} \times \left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(1) \right] = \frac{1}{4} \times \left[(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}) + (\frac{4}{16} + \frac{1}{2}) + (\frac{9}{16} + \frac{1}{2}) + \frac{3}{2} \right]$$

$$S_4 = \frac{1}{4} \times \left[\frac{9}{16} + \frac{12}{16} + \frac{17}{16} + \frac{24}{16} \right] = \frac{62}{64} = \frac{31}{32}$$

c) $s_4 \leq A \leq S_4$ d'où $\frac{23}{32} \leq A \leq \frac{31}{32}$

2) a)





b) * $s_{10} = \frac{1}{10} \times \left[f(0) + f(\frac{1}{10}) + f(\frac{2}{10}) + f(\frac{3}{10}) + \ .\ .\ .\ . + f(\frac{9}{10}) \right]$

$$s_{10} = \frac{1}{10} \times \left[\frac{50}{100} + \frac{51}{100} + \frac{54}{100} + \frac{59}{100} + \frac{66}{100} + \frac{75}{100} + \frac{86}{100} + \frac{99}{100} + \frac{114}{100} + \frac{131}{100} \right]$$

D'ou $s_{10} = \frac{785}{1000}$

* $S_{10} = \frac{1}{10} \times \left[f(\frac{1}{10}) + f(\frac{2}{10}) + f(\frac{3}{10}) + \ .\ .\ .\ . + f(\frac{9}{10}) + f(1) \right]$

$$S_{10} = \frac{1}{10} \times \left[\frac{51}{100} + \frac{54}{100} + \frac{59}{100} + \frac{66}{100} + \frac{75}{100} + \frac{86}{100} + \frac{99}{100} + \frac{114}{100} + \frac{131}{100} + \frac{150}{100} \right]$$

D'où $S_{10} = \frac{885}{1000}$

Par suite : $\frac{785}{1000} \leq A \leq \frac{885}{1000}$

3) a) * $s_n = \frac{1}{n} \times \left[f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) \right]$

$$s_n = \frac{1}{n} \times \left[\frac{1}{2} + (\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}) + (\frac{2^2}{n^2} + \frac{1}{2}) + (\frac{3^2}{n^2} + \frac{1}{2}) + \ldots + (\frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{1}{2}) \right]$$

$$s_n = \frac{1}{n} \times \left[\frac{n}{2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^2} \right]$$

* $S_n = \frac{1}{n} \times \left[f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1) \right]$

$$S_n = \frac{1}{n} \times \left[(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}) + (\frac{2^2}{n^2} + \frac{1}{2}) + (\frac{3^2}{n^2} + \frac{1}{2}) + \ldots + (\frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{1}{2}) + (\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{2}) \right]$$

$$S_n = \frac{1}{n} \times \left[\frac{n}{2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^2} \right]$$

b) * on sait que : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D'où $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

$$s_n = \frac{1}{n} \times \left[\frac{n}{2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^2} \right] = \frac{1}{n} \times \left[\frac{n}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^2} \right]$$

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{2} + \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Par suite : $s_n = \frac{5}{6} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

* $S_n = \frac{1}{n} \times \left[\frac{n}{2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^2} \right] = \frac{1}{n} \times \left[\frac{n}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right]$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{2} + \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Par suite : $S_n = \frac{5}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

c) Calculatrice 0,83333333333333333333 $\leq A \leq$ 0,83333333333333333334 pour $n =$

Situation2 :

I) 1) a)* r_4 est de diagonale 1. Soit a sa coté

D'après Pythagore $a^2 + a^2 = 1^2$ d'où $a^2 = \frac{1}{2}$ ce qui donne $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Par suite : $p_4 = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

* R_4 est de coté 1 donc $P_4 = 4 \times 1 = 4$

b) le périmètre du cercle est égal à $1 \times \pi = \pi$

il est clair que le périmètre du cercle est compris entre p_4 *et* P_4.

D'où $p_4 \leq \pi \leq P_4 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} \leq \pi \leq 4$

2) on note A , B , A' *et* B' les sommets du carré r_4

et I son centre.

a) la médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle $(\mathcal{C})$

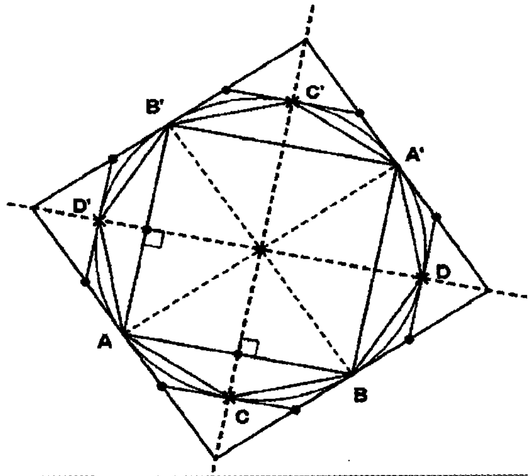
en C *et* C'

de même la médiatrice de $[AB']$ coupe le cercle $(\mathcal{C})$

en D *et* D' **(voir figure)**

$ACBDA'C'B'D'$ est un octogone régulier.

car : tous ses sommets appartiennent à $(\mathcal{C})$ *et*



$\widehat{AIC} = \widehat{CIB} = \widehat{BID} = \widehat{DIA'} = \widehat{A'IC'} = \widehat{C'IB'} = \widehat{B'ID'} = \widehat{D'IA} = \frac{\pi}{4}$ Avec I le centre de $(\mathcal{C})$.

b) voir figure

c) $p_4 < p_8$

3) a) voir figure

b) $P_8 < P_4$

4) $p_8 \leq \pi \leq P_8$

II) 1) a) On a : $AC^2 = DC.HC$ et $DC = 1$ d'ou $AC^2 = HC$

* le triangle ACD est rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur $[CD]$

Donc $AH^2 = HC.HD$ (relation métrique dans un triangle rectangle)

$AH^2 = HC.HD \Rightarrow \mathrm{HC}.(1-HC) = AH^2$

$$\Rightarrow HC - HC^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow HC^2 - HC = -\frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(HC - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{AB^2}{4} \quad \Rightarrow \left(HC - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left|HC - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}} \Rightarrow HC - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}} \qquad \text{Car } HC < \frac{1}{2}$$

Par suite : $\boxed{AC^2 = \ \mathrm{HC} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}}}$

b) $p_n = n.AB \Rightarrow AB = \dfrac{p_n}{n}$. et $p_{2n} = 2n.AC$

$$p_{2n} = 2n.AC = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}}} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - AB^2}}$$

$$p_{2n} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}} \qquad car \ AB = \frac{p_n}{n}$$

$$p_{2n} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{p_n^2}{n^2}}} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sqrt{n^2 - p_n^2}}$$

$$p_{2n} = 2n.\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sqrt{n^2 - p_n^2}} = 2\mathrm{n}.\sqrt{\frac{1}{2n}\left(n - \sqrt{n^2 - p_n^2}\right)}$$

Par suite : $\boxed{p_{2n} = \sqrt{2n}.\sqrt{n - \sqrt{n^2 - \mathrm{p}_n^2}}}$

2) a) $OA = \dfrac{1}{2}$; $AH = \dfrac{AB}{2}$ et $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 - AB^2}$

$$AE.OH = OA.AH \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{\text{OA.AH}}{\text{OH}} = \frac{\frac{AB}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{1-AB^2}} = \frac{AB}{2\sqrt{1-AB^2}}$$

D'où $$EF = 2.AE = \frac{AB}{\sqrt{1-AB^2}}$$

b) $$P_n = n.EF = \frac{n.AB}{\sqrt{1-AB^2}} = \frac{p_n}{\sqrt{1-\frac{p_n^2}{n^2}}} \quad \text{car } \mathrm{p}_n = n.AB$$

Ce qui donne : $$P_n = \frac{n.p_n}{\sqrt{n^2-p_n^2}}$$

3) $p_n = n.AB =$ et $P_n = \dfrac{n.p_n}{\sqrt{n^2-p_n^2}}$

n	Valeur approchée de p_n à 10^{-8} prés	Valeur approchée de P_n à 10^{-8} prés	Encadrement de π
$2^2 = 4$	2,82842713	4.00000002	
$2^3 = 8$			
$2^4 = 16$			
$2^5 = 32$			
$2^6 = 64$			
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

Exercices :

Exercice1 :

1. *pour n=1 $1^2+2^2+...+n^2=1^2=1$ et $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=1$ donc la propriété est vraie à l'ordre initial

* Soit $n\geq 1$ Supposons que $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

et Montrons que $1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)$

On a $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \Rightarrow 1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$

$= (n+1)\left[\frac{1}{6}n(2n+1)+(n+1)\right]$

$=(n+1)\frac{1}{6}[n(2n+1)+6(n+1)]$

C q f d On a donc : pour $n\geq 1$ $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

2.

Exercice 2 :

a) $u_n=\dfrac{5n-1}{n^2-5}$

Dans $\mathbb{R}$, $x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=-\sqrt{5}$ *ou* $x=\sqrt{5}$

la suite (u_n) est définie à partir du rang $n_0=3$ ($entier\ naturel > \sqrt{5}$)

$u_3=\dfrac{7}{2}$, $u_4=\dfrac{19}{11}$, $u_5=\dfrac{6}{5}$ et $u_6=\dfrac{29}{31}$

b) $v_n=\sqrt{n^2+n-12}$

$pour\ x\in\mathbb{R}$, on pose $p(x)=x^2+x-12$

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
x^2+x-12		+	0	−	0	+	

$\Delta=49$; $x'=-4$ *et* $x''=3$

D'où la suite (v_n) est définie à partir du rang $n_0=3$

$v_3=0$, $v_4=2\sqrt{2}$, $v_5=3\sqrt{2}$ et $v_6=\sqrt{30}$

c) $w_n=\dfrac{-1}{3^n-3}$

$3^n - 3 = 0 \iff n = 1$

D'où la suite (w_n) est définie à partir du rang $n_0 = 2$

$$w_2 = \frac{-1}{6} \quad , \quad w_3 = \frac{-1}{24} \quad , \quad w_4 = \frac{-1}{78} \quad \text{et} \quad w_5 = \frac{-1}{240}$$

d) $a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n-9}}$

$n - 9 > 0 \iff n > 9$

D'où la suite (a_n) est définie à partir du rang $n_0 = 10$

$$a_{10} = 11 \quad , \quad a_{11} = 6\sqrt{2} \quad , \quad a_{12} = \frac{13\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad a_{13} = 7$$

e) $b_n = \cos(\dfrac{1}{n-3})$

la suite (b_n) est définie à partir du rang $n_0 = 4$

$$b_4 = \cos(1) \quad , \quad b_5 = \cos(\frac{1}{2}) \quad , \quad b_6 = \cos(\frac{1}{3}) \quad \text{et} \quad b_7 = \cos(\frac{1}{4})$$

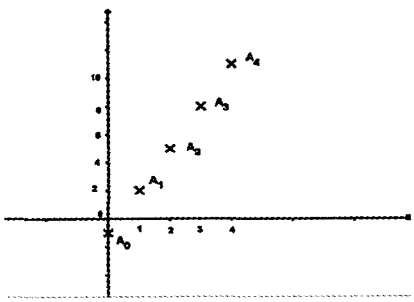
f) $t_n = \sqrt{2^n - 12}$

$2^n \geq 12$ pour $n \geq 4$

la suite (t_n) est définie à partir du rang $n_0 = 4$

$$t_4 = 2 \quad , \quad t_5 = 2\sqrt{5} \quad , \quad t_6 = 2\sqrt{13} \quad \text{et} \quad t_7 = 2\sqrt{29}$$

Exercice3 :



1) $u_n = 3n - 1$, $n \geq 0$

a) $u_0 = -1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 8$ et $u_4 = 11$

$A_0(0,-1)$, $A_1(1,2)$, $A_2(2,5)$, $A_3(3,8)$ et $A_4(4,11)$

b) $u_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 2$; $u_{n+2} = 3(n+2) - 1 = 3n + 5$

et $u_{2n} = 3(2n) - 1 = 6n - 1$

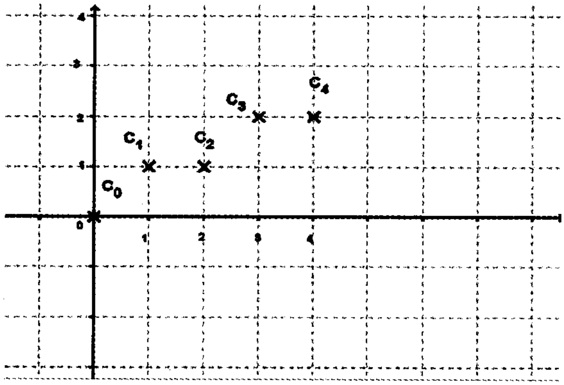
2) $w_n = \sqrt{2n+4}$, $n \geq 0$

a) $w_0 = 2$, $w_1 = \sqrt{6}$, $w_2 = 2\sqrt{2}$, $w_3 = \sqrt{10}$ et $w_4 = 2\sqrt{3}$

$B_0(0,2)$, $B_1(1, \sqrt{6})$, $B_2(2, 2\sqrt{2})$, $B_3(3,\sqrt{10})$ et $B_4(4,2\sqrt{3})$

b) $w_{n+1} = \sqrt{2(n+1)+4} = \sqrt{2n+6}$, $w_{n+2} = \sqrt{2(n+2)+4} = \sqrt{2n+8}$ et $w_{2n} = \sqrt{2(2n)+4} = 2\sqrt{n+1}$

3) $k_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ , si n est pair} \\ \dfrac{n+1}{2} \text{ , si n est impair} \end{cases}$



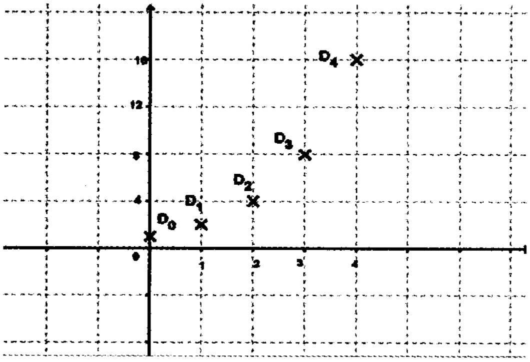
a) $k_0 = \dfrac{0}{2} = 0$, $k_2 = \dfrac{2}{2} = 1$, $k_4 = \dfrac{4}{2} = 2$

$k_1 = \dfrac{1+1}{2} = 1$, $k_3 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$C_0(0,0)$, $C_1(1,1)$, $C_2(2,1)$, $C_3(3,2)$ et $C_4(4,2)$

b) $k_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} \text{ , si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{n+2}{2} \text{ , si } n \text{ est pair} \end{cases}$; $k_{n+2} = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} \text{ , si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+3}{2} \text{ , si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et $k_{2n} = \dfrac{2n}{2} = n$, $n \geq 0$

4) $\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_{n+1} = 2s_n \text{ , } n \geq 0 \end{cases}$



a) $s_0 = 1$, $s_1 = 2s_0 = 2$, $s_2 = 2s_1 = 4$

$s_3 = 2s_2 = 8$ et $s_4 = 2s_3 = 16$

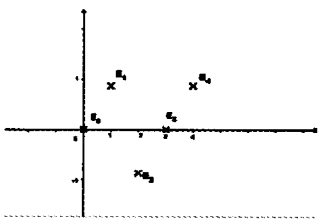
$D_0(0,1)$, $D_1(1,2)$, $D_2(2,4)$, $D_3(3,8)$ et $D_4(4,16)$

b) (S_n) est une suite géométrique

de premier terme $s_0 = 1$ et de raison $q = 2$

d'où $s_n = s_0 q^n = 2^n$ par suite : $s_{n+1} = 2^{n+1}$, $s_{n+2} = 2^{n+2}$ et $s_{2n} = 2^{2n}$

5) $t_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, $n \geq 0$



a) $t_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, $n \geq 0$

$t_0 = \sin 0 = 0$, $t_1 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_3 = \sin 2\pi = 0$ et $t_4 = \sin\frac{8\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $t_{n+1} = \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)$, $t_{n+1} = \sin\left(\frac{2(n+2)\pi}{3}\right)$, $t_{2n} = \sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)$

Exercice4 :

1) $u_n = \frac{\left[(n+1)+(n+2)\right]\times 1}{2} = n + \frac{3}{2}$, $n \geq 0$

2) $aire(D) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots ..+u_9$

$u_{n+1} - u_n = \left(n+1+\frac{3}{2}\right) - \left(n+\frac{3}{2}\right) = 1$ d'ou (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$

par suite : $aire(D) = \frac{10\times(u_0+u_9)}{2} = 5\times\left(\frac{3}{2}+\frac{21}{2}\right) = 60$ (unité d'aire)

Exercice5 :

$u_{n+1} = 2^{4n+2}$, $n \geq 0$

1) $u_{(n+1)} = 2^{4(n+1)-2}$ d'ou $u_n = 2^{4n-2}$

2) $u_{n+1} = 2^{4n+2} = 2^{(4n-2)+4} = 2^4 \times 2^{4n-2} = 16u_n$

Ou bien : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{4n+2}}{2^{4n-2}} = 2^{(4n+2)-(4n-2)} = 2^4 = 16.$

D'où (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 16$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{4}$

Exercice6 :

1) $P(n+1) = \left(1-\frac{1}{100}\right).p(n) = 0,99.P(n)$

2) P est une suite géométrique de raison $q = 0,99$ et de premier terme $P(0)$.

D'où $P(n) = (0,99)^n \times P(0)$

3) $P(0) = 1000\ millibards$

$P(4) = (0,99)^4 \times P(0) = (0,99)^4 \times 1000 = 960,596$ millibards

4) $\mathrm{P(n)} = 894 \Leftrightarrow (0,99)^n \times 1000 = 894$

$\Leftrightarrow (0,99)^n = 0,894$

$\Leftrightarrow (0,99)^n = 0,894$

La calculatrice affiche : $(0,99)^{10} = 0,904$ $\boxed{(0,99)^{11} = 0,895}$ et $(0,99)^{12} = 0,886$

Pour $n = 11$ l'altitude est $1100\ mètres$

Exercice7 :

a) $u_n = \dfrac{2n}{n^2+3}$, $\mathrm{n} \geq 0$

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $f'(x) = \dfrac{2(x^2+3)-2x.(2x)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{2(3-x^2)}{(x^2+3)^2}$

$u_0 = 0$, $u_1 = 0,5$

$u_2 = \dfrac{4}{7}$ et $u_3 = 0,5$

$u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\sqrt{3}/3$	$\searrow$ 0

Conclusion : la suite (u_n) est ni croissante ni décroissante.

b) $v_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n+1}}$, $\mathrm{n} \geq 0$

$v_n = g(n)$ avec $\mathrm{g(x)} = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$

g est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $g'(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1} - 2x.(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})}{x+1} = \dfrac{x+2}{(x+1)\sqrt{x+1}} \geq 0 \ pour\ x \geq 0$

La fonction g est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $\mathrm{g}(n) \leq \mathrm{g}(n+1)$ $pour$ $n \geq 0$

$\Rightarrow$ $u_n \leq \mathrm{u}_{n+1}$ Ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

c) $w_n = \dfrac{2^n \sqrt{n}}{3^n}$, $n \geq 0$

$w_0 = 0$, $w_1 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$ et $w_2 = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

On a : $w_0 < w_1$ *et* $w_1 > w_2$

D'où la suite (u_n) est ni croissante ni décroissante.

Exercice8 :

a) $u_n = 3 + \dfrac{2n}{n^2+1}$, $n \geq 0$

* il est clair que $u_n \geq 3$ pour tout entier n, car $\dfrac{2n}{n^2+1} \geq 0$

* soit $n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)^2 \geq 0 \Rightarrow n^2+1-2n \geq 0 \Rightarrow 2n \leq n^2+1$$
$$\Rightarrow \frac{2n}{n^2+1} \leq 1 \Rightarrow 3+\frac{2n}{n^2+1} \leq 4 \Rightarrow u_n \leq 4$$

Par suite : $3 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $v_n = 3 - \cos(4n-1)$, $n \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(4n-1) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos(4n-1) \leq 1$

$$\Rightarrow 2 \leq 3-\cos(4n-1) \leq 4 \Rightarrow 2 \leq u_n \leq 4$$

c) $w_n = 1 + \dfrac{(-5)^n}{6^n \sqrt{n}}$, $n \geq 1$

$|x+y| \leq |x|+|y|$

$$|w_n| \leq 1 + \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right| \Rightarrow |w_n| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leq 1$ alors $|w_n| \leq 2$

Par suite $-2 \leq w_n \leq 2$

Exercice 9 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2.u_n + 1 \quad , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1) démonstration par récurrence :

* vérification pour $n = 0$.

$u_0 = 0$, on a $u_0 \geq 0$ (vrai)

* soit $n \in IN$.

Supposons que $u_n \geq 0$, montrons que $u_{n+1} \geq 0$

$$u_n \geq 0 \Rightarrow 2u_n \geq 0 \Rightarrow 2u_n + 1 \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq 0$$

Conclusion : $u_n \geq 0$, *pour tout* $n \in IN$.

2) $u_{n+1} - u_n = u_n + 1 \geq 0$ car $u_n \geq 0$, *pour tout* $n \in IN$.

Donc $u_{n+1} \geq u_n$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante.

Exercice10 :

1) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$, $n \geq 0$

a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+1}{n+4} - \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{(2n+1)(n+3)-(n+4)(2n-1)}{(n+3)(n+4)}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{7}{(n+4)(n+3)} \geq 0$ Donc $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est croissante

autre méthode : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2} \geq 0$

La fonction f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $f(n) \leq f(n+1)$ *pour* $n \geq 0$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante

b) * la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$, *pour tout* $n \in IN$

ce qui donne : $\boxed{u_n \geq \frac{-1}{3}}$, *pour tout* $n \in IN$

* $u_n = \dfrac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \dfrac{7}{n+3}$

$-\dfrac{7}{n+3} \leq 0 \Rightarrow 2 - \dfrac{7}{n+3} \leq 2$ ce qui donne : $\boxed{u_n \leq 2}$, *pour tout* $n \in IN$

* $\boxed{\forall \ n \in IN : -\frac{1}{3} \leq u_n \leq 2}$ la suite (u_n) est bornée.

2) $u_n = \dfrac{-3n+1}{2n-4}$, $n \geq 3$

a) $u_n = g(n)$ avec $g(x) = \dfrac{-3x+1}{2x-4}$

g est dérivable sur [3 , +∞ [et $g'(x) = \dfrac{10}{(2x-4)^2} \geq 0$

La fonction g est croissante sur [3 , +∞ [donc $g(n) \leq g(n+1)$ *pour* $n \geq 3$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante

b) * la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_3$, *pour tout* $n \geq 3$

Ce qui donne : $\boxed{u_n \geq -4}$, *pour tout* $n \geq 3$

* $u_n = \dfrac{-3n+1}{2n-4} = \dfrac{-3(n-2)-5}{2(n-2)} = \dfrac{-3}{2} - \dfrac{5}{2(n-2)}$

$-\dfrac{5}{2(n-2)} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{-3}{2} - \dfrac{5}{2(n-2)} \leq \dfrac{-3}{2}$ .Ce qui donne $\boxed{u_n \leq \frac{-3}{2}}$

* la suite (u_n) est bornée.

3) $u_n = -3n+1$, $n \geq 0$

a) $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1)+1] - [-3n+1] = -3 \leq 0$

$\Rightarrow$ $u_n \geq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est décroissante.

b) * la suite (u_n) est décroissante donc $u_n \leq u_0$, *pour tout* $n \geq 0$

ce qui donne : $u_n \leq 1$ *pour tout* $n \geq 0$. la suite (u_n) est majorée par 1 .

* la suite (u_n) n'est pas minorée.

4) $u_n = \sqrt{3n+2}$, $n \geq 0$

a) $n \leq n+1 \Rightarrow 3n \leq 3(n+1) \Rightarrow 3n+2 \leq 3(n+1)+2 \Rightarrow \sqrt{3n+2} \leq \sqrt{3(n+1)+2}$

$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

<u>Ou bien</u> : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+5} - \sqrt{3n+2} = \dfrac{\sqrt{3n+5}^2 - \sqrt{3n+2}^2}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+2}} \geq 0$, $n \in IN$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$ La suite (u_n) est croissante.

b) *On peut remarquer que la suite (u_n) est minorée par 0.

* la suite (u_n) n'est pas majorée.

5) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n \ , \quad n \geq 0 \end{cases}$

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$

D'où pour $n \geq 0$ on a : $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $u_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0$$

$\Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est décroissante.

b) $0 \leq \dfrac{2}{3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_n \leq 1$ ((u_n) est bornée)

6) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{3} u_n \ , \quad n \geq 0 \end{cases}$

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$

D'où pour $n \geq 0$ on a : $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

(u_n) n'est pas monotone. ($u_0 = 1$, $u_1 = \frac{-2}{3}$, $u_2 = \frac{4}{9}$)

b) d'après 5) on a : $0 \le |u_n| \le 1 \Rightarrow -1 \le u_n \le 1$ ((u_n) est bornée).

Exercice11 :

$u_n = 3n + \cos n$, $n \ge 0$

$u_n = f(n)$ *avec* $f(x) = 3x + \cos x$

f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'(x) = 3 - \sin x \ge 0$ car $-1 \le \sin x \le 1$

f est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $f(n) \le f(n+1)$

$\Rightarrow$ $u_n \le u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

Exercice12 :

$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$; $n \ge 1$

$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \ge 0 \Rightarrow u_{n+1} \ge u_n$

ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

Exercice13 :

$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, $n \ge 1$

Soit $n \in IN^*$

$n \le n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\pi}{n+1} \le \frac{\pi}{n} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \le \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$

Car : $\frac{\pi}{n}$ et $\frac{\pi}{n+1}$ appartiennent à $[0, \pi]$ et la fonction : $x \to cosx$ est décroissante sur $[0, \pi]$

Ce qui donne $u_n \le u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice14 :

$u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$, $n \geq 0$

1) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$

f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et $f\,'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \geq 0$

la fonction f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $f(n) \leq f(n+1)$ $pour$ $n \geq 0$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante

2) $u_n - 3 = \dfrac{3n+1}{n+2} - 3 = \dfrac{3n+1-3(n+2\quad)}{n+2} = \dfrac{-5}{n+2} \leq 0$, $pour\ tout$ $n \geq 0$

ce qui donne $u_n \leq 3$, $pour\ tout$ $n \geq 0$

3) $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2} = 3 - \dfrac{5}{n+2}$

$2{,}9999 < u_n \Leftrightarrow 2{,}9999 < 3 - \dfrac{5}{n+2} \Leftrightarrow \dfrac{5}{n+2} < 0{,}0001$

$\Leftrightarrow \dfrac{n+2}{5} > 10000 \quad \Leftrightarrow \quad n+2 > 50000 \quad \Leftrightarrow \quad n > 49998$

il suffit donc de prendre $k = 49998$.

Exercice15 :

$u_n = 3n^2 - 6n - 10$, $n \geq 1$

1) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x^2 - 6x - 10$

f est dérivable sur $[\,1\,,+\infty\,[$ et $f\,'(x) = 6(x-1) \geq 0$, pour tout $x \in [1\,,+\infty[$

la fonction f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$ donc $f(n) \leq f(n+1)$ $pour$ $n \geq 1$

$\Rightarrow$ $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante

2) $u_n = 3(n^2 - 2n + 1) - 13 = 3(n-1)^2 - 13$

$u_n > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad 3(n-1)^2 - 13 > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad 3(n-1)^2 > 10013$

$\Leftrightarrow (n-1)^2 > \dfrac{10013}{3} \qquad \Leftrightarrow |n-1| > \sqrt{\dfrac{10013}{3}}$

$u_n > 10^4$ Lorsque $n > 1 + \sqrt{\frac{10013}{3}}$ car $n \geq 1$

$1 + \sqrt{\frac{10013}{3}} \cong 3338{,}666..$ il suffit donc de prendre $k = 33338$

3) * $u_n = 3(n-1)^2 - 13 \geq -13$ $\longrightarrow$ ((u_n) *est minorée par* -13)

* (u_n) n'est pas majorée.

Exercice16 :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ ...\ + \frac{1}{n\,!}\,, \qquad n \geq 0$$

1) $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k\,!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ ...\ + \frac{1}{n\,!} + \frac{1}{(n+1)!}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que : la suite (u_n) est croissante.

2) montrons par récurrence que : $k! \geq 2^{k-1}$ *pour tout* $k \geq 2$.

* vérification pour $k = 2$

$2! = 2 \times 1 = 2$ *et* $2^{2-1} = 2^1 = 2$ on a $2! \geq 2^{2-1}$ (vrai)

* soit un entier $k \geq 2$

Supposons que $k! \geq 2^{k-1}$ montrons que $(k+1)! \geq 2^k$

On a : $k! \geq 2^{k-1}$ et $k+1 \geq 2$ d'où $(k+1) \times k! \geq 2 \times 2^{k-1}$

Ce qui donne $(k+1)! \geq 2^k$

Conclusion : $k! \geq 2^{k-1}$, *pour tout* $k \geq 2$

3) *pour* $k \geq 2$ on a : $k! \geq 2^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,!} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}}$

- $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ ...\ + \frac{1}{n!} = (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}) + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ ...\ + \frac{1}{n!} - (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1 - \frac{1}{1!} = u_n - 1 - \frac{1}{1!} = u_n - 2$$

* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k}}=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$ *somme de (n-1) termes consécutifs d'une suite géométrique*

D'où $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .On aura donc : $u_n-2\leq 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ce qui donne : $u_n\leq 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ par suite $u_n\leq 3$, pour tout $n\geq 0$.

Exercice 17 :

$$u_n=\frac{n+a}{a-n-1} \quad , \quad n>a.$$

$$v_n=\frac{1}{u_n-u_{n-1}}-\frac{1}{u_{n-1}-u_{n-2}} \; , \quad n\geq 2 \longleftarrow \qquad (\; n > a+2 \; ou \; (a+1)\,)$$

1) $u_{n-1}=\dfrac{(n-1)+a}{a-(n-1)-1}=\dfrac{n-1+a}{a-n}$

$$u_n-u_{n-1}=\frac{n+a}{a-n-1}-\frac{n-1+a}{a-n}=\frac{(n+a)(a-n)-(a-n-1)(n-1+a)}{(a-n)(a-n-1)}$$

$$u_n-u_{n-1}=\frac{2a-1}{(a-n)(a-n-1)} \quad \text{et} \quad u_{n-1}-u_{n-2}=\frac{2a-1}{(a-n+1)(a-n)}$$

donc

$$v_n=\frac{1}{u_n-u_{n-1}}-\frac{1}{u_{n-1}-u_{n-2}}=\frac{(a-n)(a-n-1)}{2a-1}-\frac{(a-n)(a-n+1)}{2a-1}=\frac{2(n-a)}{2a-1}$$

$$v_{n+1}=\frac{2(n+1-a)}{2a-1}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2(n+1-a)}{2a-1}-\frac{2(n-a)}{2a-1}=\frac{2}{2a-1}$$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=\dfrac{2}{2a-1}$

2) $\dfrac{2}{2a-1}\geq 0 \Leftrightarrow 2a-1\geq 0 \Leftrightarrow a\geq\dfrac{1}{2}$

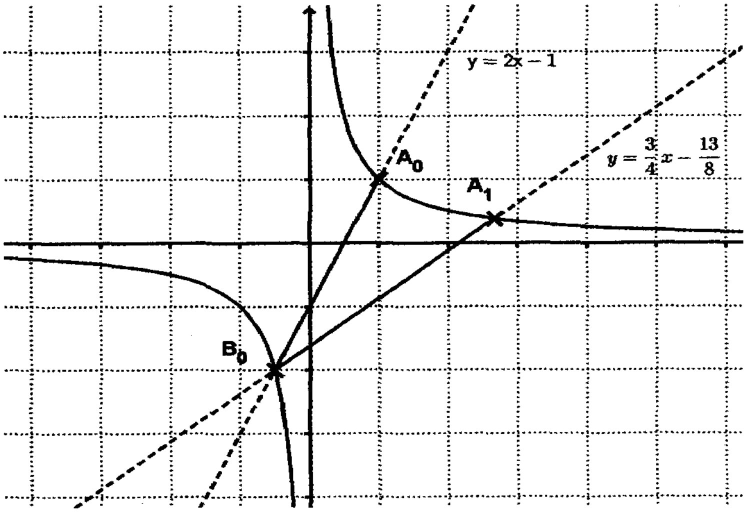
* la suite (v_n) est croissante pour $a \geq \frac{1}{2}$

* * la suite (v_n) est décroissante pour $a \leq \frac{1}{2}$

*** pour $a=\frac{1}{2}$, la suite (v_n) est constante.

__Exercice18 :__

1) $(H): y = \frac{1}{x}$



(H) est une hyperbole de

centre O d'axes :$x = 0$ et $y = 0$

2) * $A_0(1\,,1)$

A_0 et B_0 appartiennent à (H)

et à la droite Δ passant par $A_0(1\,,1)$

et coefficient directeur 2.

Δ: $y = 2x + m$, $m \in IR$

$A_0(1\,,1) \in \Delta \Rightarrow 1 = 2 + m$

$\Rightarrow m = -1$ ainsi $\Delta : y = 2x - 1$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x}=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ 2x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x=1 \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(H) \cap \Delta = \left\{ A_0(1\,,1) \;\; , \;\; B_0\left(-\frac{1}{2},-2\right) \right\}$$

De même $A_1\left(\frac{8}{3},\frac{3}{8}\right)$

3) * $A_n\left(a_n,\frac{1}{a_n}\right)$ et $B_n\left(b_n,\frac{1}{b_n}\right)$

la droite (A_nB_n) a pour coefficient directeur 2 d'où $\dfrac{y_{B_n}-y_{A_n}}{x_{B_n}-x_{A_n}}=2 \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{b_n}-\frac{1}{a_n}}{b_n-a_n}=2$

Ce qui donne : $\boxed{a_n.b_n=-\dfrac{1}{2}}$

** $A_{n+1}\left(a_{n+1},\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ et $B_n\left(b_n,\dfrac{1}{b_n}\right)$

la droite $(A_{n+1}B_n)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$ d'où $\dfrac{y_{B_n}-y_{A_{n+1}}}{x_{B_n}-x_{A_{n+1}}}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{b_n}-\frac{1}{a_{n+1}}}{b_n-a_{n+1}}=\dfrac{3}{4}$

Ce qui donne : $\boxed{a_{n+1}.b_n=-\dfrac{4}{3}}$

4) * $a_n.b_n=-\dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1}.b_n=-\dfrac{4}{3}$

Prouve que : $b_n=-\dfrac{1}{2a_n}$ puis $-\dfrac{a_{n+1}}{2a_n}=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{8}{3}a_n$

donc (a_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{8}{3}$.

** $a_{n+1}.b_{n+1}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{8}{3}a_n.b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}$ or $a_n=-\dfrac{1}{2b_n}$

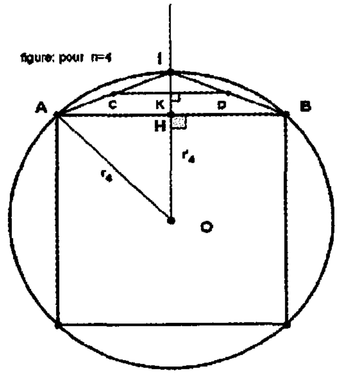
Ce qui donne : $\dfrac{8}{3}.\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=1 \Rightarrow b_{n+1}=\dfrac{3}{8}b_n$

Donc (b_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{3}{8}$

5)* $a_n=a_0.\left(\dfrac{8}{3}\right)^n \Rightarrow a_n=\left(\dfrac{8}{3}\right)^n$ d'où $A_n\left(\left(\dfrac{8}{3}\right)^n,\left(\dfrac{3}{8}\right)^n\right)$

** $b_n=b_0.\left(\dfrac{3}{8}\right)^n \Rightarrow b_n=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{8}\right)^n$ d'où $B_n\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{8}\right)^n,-2\left(\dfrac{8}{3}\right)^n\right)$

Exercice19 :



1) le triangle OHA est rectangle et isocèle en H,

le carré tracé est de périmètre 2 donc :

$$r'_4 = OH = AH = \frac{1}{4}$$

$$r_4 = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{r_4} < \pi < \frac{1}{r'_4} \Rightarrow 2\sqrt{2} < \pi < 4$$

2)

$$OK = \frac{OI + OH}{2} \Rightarrow OK = \frac{OA + OH}{2} \Rightarrow r'_{2n} = \frac{r_n + r'_n}{2}$$

3) $OC^2 = OI.\mathrm{OK} \Rightarrow OC^2 = OA.\mathrm{OK} \Rightarrow r_{2n}^2 = r_n.r'_{2n}$

D'où $r_{2n} = \sqrt{r_n.r'_{2n}}$

4) On a : $\begin{cases} r'_{2n} = \dfrac{r_n + r'_n}{2} \\ r_{2n} = \sqrt{r_n.r'_{2n}} \end{cases}$

* $\begin{cases} r'_4 = \dfrac{1}{4} \\ r_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'_8 = \dfrac{r_4 + r'_4}{2} \\ r_8 = \sqrt{r_4.r'_8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'_8 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{8} \\ r_8 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{8}\right)} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{32}} \end{cases}$

* $\begin{cases} r'_{16} = \dfrac{r_8 + r'_8}{2} \\ r_{16} = \sqrt{r_8.r'_{16}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r'_{16} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{16} + \dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} \\ r_{16} = \sqrt{\dfrac{1}{32}\left[\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}.\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right]} \end{cases}$

Remarque :

- En Chine, au V[e] siècle, $\frac{355}{113}$ est utilisé comme valeur approchée de π.

- Viète, au XVI[e] siècle, a trouvé que $\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times ..$
- Wallis, au XVII[e] siècle a trouvé

$$\pi = 4 \times \left(2 \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \dots \right)$$

- Leibniz, fin du XVII[e] siècle,

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots \right)$$

QCM

1) **(a)** (v_n) est convergente.

2) **(b)** $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3) **(c)** $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

4) **(b)** (v_n) est bornée

5) **(a)** (v_n) est constante

VRAI - FAUX

1) **Faux**

contre exemple : soit (u_n) la suite définie sur IN par $u_n = (-1)^n$

on a : $-1 \leq u_n \leq 1$ pour tout $\in IN$, mais la suite (u_n) est divergente.

2) **Faux**

même contre exemple . (u_n) n'admet pas de limite.

3) **Vrai**

voir définition , pour A=100 (par exemple), il existe un entier N tel que :

$n \geq N \quad \Rightarrow \quad u_n > 100$

4) **Faux**

contre exemple : $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

$u_n > 0 \quad pour \quad n \geq 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) **Faux**

Voir contre exemple précédent

Mobiliser ses compétences :

1) a) * C_1 est de rayon $R_1 = 1$

*soit R_2 le rayon C_2

on a : $(R_2)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

* soit R_3 le rayon C_3

on a : $(R_3)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad R_3 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* soit R_4 le rayon C_4

on a : $(R_4)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad R_4 = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

** c_1 est de rayon $r_1 = R_2 = \frac{\sqrt{15}}{4}$

** c_2 est de rayon $r_2 = R_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

** c_3 est de rayon $r_3 = R_4 = \frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $V_1 = \pi . R_1^2 . h = \pi . (1)^2 . \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$; $V_2 = \pi . R_2^2 . h = \pi \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15\pi}{64}$

$V_3 = \pi . R_3^2 . h = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}$; $V_4 = \pi . R_4^2 . h = \pi \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 . \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7\pi}{64}$

* $v_1 = V_2 = \frac{15\pi}{64}$; $v_2 = V_3 = \frac{3\pi}{16}$ et $v_3 = V_4 = \frac{7\pi}{64}$

c) $V_{S_4} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{15\pi}{64} + \frac{3\pi}{16} + \frac{7\pi}{64} = \frac{25\pi}{32}$

et $v_{s_4} = V_2 + V_3 + V_4 = \frac{15\pi}{64} + \frac{3\pi}{16} + \frac{7\pi}{64} = \frac{17\pi}{32}$

d) $2v_{s_4} \leq V_{boule} \leq 2V_{S_4} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{17\pi}{16} \leq V_{boule} \leq \dfrac{25\pi}{16}$

2) a) * C_1 est de rayon $R_1 = 1$

*soit R_2 le rayon C_2

on a : $(R_2)^2 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}$

* soit R_3 le rayon C_3

On a : $(R_3)^2 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad R_3 = \sqrt{1 - \dfrac{2^2}{n^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$R_n = \sqrt{1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}}$$

b) $V_{S_n} = \dfrac{\pi}{n}R_1^2 + \dfrac{\pi}{n}R_2^2 + \dfrac{\pi}{n}R_3^2 + \ldots\ldots + \dfrac{\pi}{n}R_n^2$

$$V_{S_n} = \frac{\pi}{n}\left[1^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right]$$

$$V_{S_n} = \frac{\pi}{n}\left[n - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2}{n^2}\right] = \pi\left[1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2}{n^3}\right]$$

c) $r_1 = R_2 = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}$; $r_2 = R_3 = \sqrt{1 - \dfrac{2^2}{n^2}}$; $r_{n-1} = R_n = \sqrt{1 - \dfrac{(n-1)^2}{n^2}}$

$$v_{s_n} = \frac{\pi}{n}r_1^2 + \frac{\pi}{n}r_2^2 + \frac{\pi}{n}r_3^2 + \ldots\ldots + \frac{\pi}{n}r_{n-1}^2$$

$$v_{s_n} = \frac{\pi}{n}\left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right]$$

$$v_{s_n} = \frac{\pi}{n}\left[n - 1 - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2}{n^2}\right] = \pi\left[1 - \frac{1}{n} - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2}{n^3}\right]$$

$$\boxed{v_{s_n} = V_{S_n} - \frac{\pi}{n}}$$

3) a) démonstration par récurrence :

* vérification pour $n = 1$

$$\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=\frac{2\times3}{6}=\frac{6}{6}=1^2 \qquad \text{(vrai)}$$

* soit $n \geq 1$

Supposons que $1^2+2^2+3^2+......+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons que $1^2+2^2+3^2+......+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$1^2+2^2+3^2+......+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)\left[2n^2+n+6n+6\right]}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Conclusion : $1^2+2^2+3^2+......+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier $n \geq 1$

b) $1^2+2^2+3^2+......+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ d'après le résultat précédent.

* $$V_{s_n}=\pi\left[1-\frac{1^2+2^2+.......+(n-1)^2}{n^3}\right]=\pi\left[1-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right]$$

$$V_{s_n}=\pi\left[\frac{6n^3-n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right]=\frac{n.\pi}{6n^3}\left[6n^2-(2n^2-3n+1)\right]$$

$$V_{s_n}=\frac{n.\pi}{6n^3}\left[4n^2+3n-1)\right]=\frac{\pi.n.(n+1).(4n-1)}{6n^3}$$

* $$v_{s_n}=V_{s_n}-\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}-\frac{\pi.n.(n+1)(4n-1)}{6n^3}$$

$$v_{s_n}=\frac{\pi.n.(n-1)(4n+1)}{6n^3} \qquad \text{(Calculs à faire)}$$

c) $V_n = V_{S_n} = \dfrac{\pi.n.(n+1).(4n-1)}{6n^3} = \dfrac{\pi.(n+1).(4n-1)}{6n^2}$

$$V_n = \frac{\pi}{6}\left[\frac{4n^2+3n-1}{n^2}\right] = \frac{\pi}{6}\left[4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{6}\left[4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(V_n - \frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

c) $V_{boule} = 2\times \lim_{n\to+\infty} V_n = 2\times \lim_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{4\pi}{3}$

Exercices :

Exercice1 :

1) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(-\pi.n+1) = -\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 2$ car $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

3) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{-3n+1}{2n-4} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{-3+\frac{1}{n}}{2-\frac{4}{n}} = -\dfrac{3}{2}$

4) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(-3n^2+5n) = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(-3+\dfrac{5}{n}\right) = -\infty$

5) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-2+\sqrt{3n}\right) = +\infty$

6) $u_0 = 1$, $u_{n+1} = -\dfrac{2}{\pi}u_n$, $n \geq 0$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{2}{\pi}$

Comme $-1 < -\dfrac{2}{\pi} < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

7) $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3^n \ , \quad n \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

8) $u_n = \frac{n^3}{(-0,3)^n} \ , \quad n \geq 0$

$$u_{2n} = \frac{(2n)^3}{(-0,3)^{2n}} = \frac{8n^3}{(0,3)^{2n}} \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1} = \frac{(2n+1)^3}{(-0,3)^{2n+1}} = -\frac{(2n+1)^3}{(0,3)^{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -\infty$$

d'où (u_n) n'admet pas de limite.

Exercice2 :

1) $u_n = \frac{1}{n+3}\cos n \ , \quad n \geq 0$

$$|\cos n| \leq 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{n+3}|\cos n| \leq \frac{1}{n+3} \ \Rightarrow \ |u_n| \leq \frac{1}{n+3}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}\sin(n^2) \ , \quad n \geq 0$

$$|\sin(n^2)| \leq 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}|\sin(n^2)| \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \ \Rightarrow \ |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) $u_n = \sqrt{4n^2+1} - n \ , \quad n \geq 0$

Pour $n > 0$, $\quad u_n = \sqrt{n^2(4+\frac{1}{n^2})} - n = n.\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} - n = n\left[\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} - 1\right]$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-1=1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

4) $u_n = \dfrac{19^n+2}{5^n-17}$, $\quad n \geq 0$

$$u_n = \frac{19^n+2}{5^n-17} = \frac{\left(\frac{19}{5}\right)^n + \frac{2}{5^n}}{1-\frac{17}{5^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{19}{5}\right)^n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \text{ d'ou } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exercice3 :

1) $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

d'où (u_n) converge vers 0.

2) $a_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$, $\quad n \geq 1$

a) $u_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+3} = \left(\dfrac{2}{3}\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+2} = \dfrac{2}{3} u_n$

(u_n) est une suit géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ de premier terme $u_0 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

d'où $a_n = u_0 \cdot \left[\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]$ (somme de (n+1) termes consécutifs d'une suite géométrique)

$$a_n = \frac{4}{9}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right] = \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{4}{3}$

Exercice 4 :

1) $u_n = 2^n - n$, $n \geq 0$

a) $u_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1)$

$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n - 1 \geq 0$

$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

b) (u_n) est croissante $\Rightarrow u_n \geq u_0$ pour tout $n \geq 0$

$\Rightarrow 2^n - n \geq 1$ par suite $2^n \geq n+1$, pour tout $n \geq 0$

2) $v_n = 2^n - \frac{1}{2}n$, $n \geq 0$

$2^n \geq n+1 \Rightarrow 2^n - \frac{1}{2}n \geq \frac{1}{2}n + 1 \Rightarrow v_n \geq \frac{1}{2}n + 1$

On a : $v_n \geq \frac{1}{2}n + 1$ pour $n \geq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}n + 1 \right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Exercice5 :

$$u_n = \left(\frac{n}{10} - 1 \right)^n , \quad n \geq 0$$

1) $u_0 = 1$; $u_1 = -\frac{9}{10}$; $u_2 = \frac{8^2}{10^2}$; $u_3 = -\frac{7^3}{10^3}$; $u_4 = \frac{6^4}{10^4}$; $u_5 = -\frac{5^5}{10^5}$; $u_6 = \frac{4^6}{10^6}$

$u_7 = -\frac{3^7}{10^7}$; $u_8 = \frac{2^8}{10^8}$; $u_9 = -\frac{1}{10^9}$ et $u_{10} = 0$

(pour $0 < n \leq 10$ on a u_n se rapproche de zéro)

2) $n > 100 \Rightarrow \frac{n}{10} > 10 \Rightarrow \frac{n}{10} - 1 > 9 \Rightarrow \left(\frac{n}{10} - 1 \right)^n > 9^n \Rightarrow u_n > 9^n$

3) on a : $u_n \geq 9^n$ pour $n \geq 100$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(9^n \right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice6 :

$$u_n=\frac{5^n+2^n}{5^n-2^n}\ , \qquad n\geq 1$$

1) * $u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}+2^{n+1}}{5^{n+1}-2^{n+1}}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\left(5^{n+1}+2^{n+1}\right)\left(5^n-2^n\right)-\left(5^n+2^n\right)\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right)}{\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right)\left(5^n-2^n\right)}=\frac{2\times5^n\times2^{n+1}-2\times5^{n+1}\times2^n}{\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right)\left(5^n-2^n\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4\times5^n\times2^n-10\times5^n\times2^n}{\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right)\left(5^n-2^n\right)}=\frac{-6\times5^n\times2^n}{\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right)\left(5^n-2^n\right)}\ \leq\ 0$$

$\Rightarrow\ u_n\ \geq\ u_{n+1}$ donc (u_n) est décroissante .

* $5^n+2^n\geq5^n-2^n\succ0\ \Rightarrow\ \dfrac{5^n+2^n}{5^n-2^n}\geq1\ \Rightarrow\ u_n\geq1$ pour tout $n\geq0$

2) $$u_n=\frac{5^n+2^n}{5^n-2^n}=\frac{5^n\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}=\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

3) $$u_n<1,0001\Leftrightarrow\ \frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}<1,0001\ \Leftrightarrow\ 1+\left(\frac{2}{5}\right)^n<(1,0001)\times\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 1+\left(\frac{2}{5}\right)^n<1,0001-(1,0001)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\ (2,0001)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n<0,0001$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{2}{5}\right)^n<\frac{0,0001}{2,0001}\qquad \text{avec } \frac{0,0001}{2,0001}\cong0,000049997$$

Pour que $u_n<1,0001$ il suffit que par exemple : $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n<0,000049$

La calculatrice affiche : $\left(\frac{2}{5}\right)^{11} \cong 0{,}000041943$ et *et* $\left(\frac{2}{5}\right)^{10} \cong 0{,}000104857$

De plus la suite $w_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ est décroissante

Conclusion : *pour* $n > k = 10$ on a : $u_n < 1{,}0001$

Exercice 7 :

$u_0 = -1$, $u_{n+1} = 5u_n + 3$, $n \geq 0$

1) $\alpha = 5\alpha + 3 \Leftrightarrow 4\alpha = -3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{3}{4}}$

2) $v_n = u_n + \frac{3}{4}$, $n \geq 0$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{3}{4} = 5u_n + 3 + \frac{3}{4} = 5u_n + \frac{15}{4} = 5.\left(u_n + \frac{3}{4}\right)$

Ce qui donne $v_{n+1} = 5v_n$

Par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 5$

b) $v_n = v_0 \times 5^n$ avec $v_0 = u_0 + \frac{3}{4} = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

Donc $v_n = -\frac{5^n}{4}$ et $u_n = v_n - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\left(5^n + 3\right)$

c) $u_n = -\frac{1}{4}\left(5^n + 3\right)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exercice 8 :

$u_0 = 2$, $u_{n+1} = (-0{,}2)u_n + 1$, $n \geq 0$

1) $\alpha = -(0{,}2)\alpha + 1 \Leftrightarrow (1{,}2)\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{1{,}2} = \frac{5}{6}$

2) $v_n = u_n - \frac{5}{6}$, $n \geq 0$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{6} = (-0,2)u_n + 1 - \frac{5}{6} = -\frac{1}{5}u_n + \frac{1}{6} = -\frac{1}{5}\left(u_n - \frac{5}{6}\right)$

Ce qui donne $\quad v_{n+1} = -\frac{1}{5}v_n$

Par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{5}$

b) $v_n = v_0 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ avec $v_0 = u_0 - \frac{5}{6} = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$

Donc $v_n = \frac{7}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$ et $u_n = v_n + \frac{5}{6} = v_n = \frac{7}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\left[7.\left(-\frac{1}{5}\right)^n + 5\right]$

c) $u_n = \frac{1}{6}\left[7.\left(-\frac{1}{5}\right)^n + 5\right]$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$ d'ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{6}$

Exercice 9 :

$u_n \geq 0$ et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $n \geq 0$

1) $u_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \geq 0$

$v_n - 1 = \frac{u_n}{1+u_n} - 1 = \frac{-1}{1+u_n} \leq 0 \Rightarrow v_n \leq 1$ Par suite $0 \leq v_n \leq 1$ pour $n \geq 0$.

2) $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}} - \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(1+u_{n+1})(1+u_n)}$

Comme $(1+u_{n+1})(1+u_n) \geq 0$ alors $(v_{n+1} - v_n)$ et $(u_{n+1} - u_n)$ sont de même signe

<u>Conclusion</u> : (u_n) est croissante si et seulement si (v_n) est croissante.

3) lorsque la suite (u_n) est convergente alors elle converge vers un réel $\ell \geq 0$ car $u_n \geq 0$

$\Rightarrow (v_n)$ converge vers $\frac{\ell}{1+\ell}$

4) en général, la réciproque est fausse.

Par exemple : $u_n = 2^n$ et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $n \geq 0$

$v_n = \frac{2^n}{1+2^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ mais la suite (u_n) est divergente ($\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$)

Exercice 10 :

Soit $a_n = \frac{u_n}{v_n}$

1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}.\frac{v_n}{u_n} = \frac{(n+1)^2.(0,8)^{n+1}.(0,9)^n}{n^2.(0,8)^n.(0,9)^{n+1}} = \frac{(0,8).(n+1)^2}{(0,9).n^2}$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{8}{9}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{8}{9}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

* $n \geq 17 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{17} \Rightarrow 0 \leq 1+\frac{1}{n} \leq \frac{18}{17} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{18}{17}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{8}{9}\left(\frac{18}{17}\right)^2 \Rightarrow \frac{8}{9}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{2592}{2601} \leq 1$$

Par suite : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, pour $n \geq 17$

2) On a : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, pour $n \geq 17$ donc $a_{n+1} \leq a_n$, pour $n \geq 17$ (car $a_n > 0$)

Ce qui donne : $0 \leq a_n \leq a_{17}$, pour $n \geq 17$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq a_{17} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u_n \leq a_{17}.(0,9)^n$$

<u>Conclusion</u> : il existe un réel c tel que $0 \leq u_n \leq c.(0,9)^n$, pour $n \geq 17$

3) $0 \leq u_n \leq c.(0,9)^n$, pour $n \geq 17$ et $\lim_{n\to+\infty} c.(0,9)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 11 :

1) $(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p = 1 + C_n^1 x^1 + \left[C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots\dots + C_n^n x^n\right]$

$(1+x)^n \geq 1+x$ car $C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots\dots + C_n^n x^n \geq 0$

Formule de binôme de Newton :

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p =$

$C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n b^n$

2) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$. $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n! \times (n+1)(n+1)^n}{(n+1)! \times n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ D'après **(1)** (pour $x = \dfrac{1}{n}$)

Ce qui donne $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 2$ pour $n \geq 1$.

3) $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 2 \geq 1$ et $a_n > 0$ donc $a_n \geq a_{n+1}$

Par suite (a_n) est décroissante.

4) montrons par récurrence que $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$

* Vérifions pour $n = 1$

$a_1 = \dfrac{1!}{1^1} = 1 \leq \dfrac{1}{2^{1-1}} = 1$ (Vrai)

* soit $n \in IN^*$

Supposons que $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et montrons que $a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^n}$

D'après **(2)** on a : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} a_n$ et comme $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ alors $a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^n}$

<u>Conclusion</u> : $a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $n \geq 1$

De plus $a_n \geq a_{n+1}$, pour tout $n \geq 1$ donc $a_{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $n \geq 1$

5) $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $n \geq 1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

Exercice 12 :

$u_n = \sqrt{n^2+4n} - n - 2$, $n \geq 0$

1)

$$u_n = \sqrt{n^2+4n} - (n+2) = \frac{\left[\sqrt{n^2+4n} - (n+2)\right]\left[\sqrt{n^2+4n} + (n+2)\right]}{\sqrt{n^2+4n} + (n+2)} = \frac{(n^2+4n) - (n+2)^2}{\sqrt{n^2+4n} + (n+2)} = \frac{-4}{\sqrt{n^2+4n} + (n+2)}$$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\sqrt{n^2+4n} + (n+2)\right] = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 13:

1) pour $n \geq 1$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ce qui donne $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, pour $n \geq 1$

2) $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$

a) $S_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$; $S_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}707$; $S_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 2{,}284$

$S_4 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} \approx 2{,}784$ et $S_5 = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 3{,}231$

b) d'après 1)

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \geq \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad ,\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Additionnons membre à membre en obtient :

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) + \ldots. + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right)$$

$$
\begin{array}{ll}
+ & \dfrac{1}{2\sqrt{1}} \geq \sqrt{\cancel{2}} - \sqrt{1} \\
+ & \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \geq \sqrt{3} - \sqrt{\cancel{2}} \\
\vdots & \qquad \vdots \\
 & \dfrac{1}{2\sqrt{n-1}} \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{\cancel{n}} \qquad ; \\
+ & \\
 & \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{\cancel{n}} \\
\hline
= & \dfrac{1}{2\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \quad \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{1}
\end{array}
$$

Ce qui donne : $\frac{1}{2}S_n \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$ par suite $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$

c) $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$, pour $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Exercice 14 :

1) $o_0 = 0{,}5p_0 + 50 = 0{,}5 \times 100 + 50 = 100$

$d_0 = -0{,}3p_0 + 162 = -0{,}3 \times 100 + 162 = 132$

$p_n = 10{,}5p_{n-1} + 0{,}5(d_n - o_n) = 10{,}5p_{n-1} + 0{,}5.[-0{,}8p_n + 112] = 1{,}05p_{n-1} - 0{,}4p_n + 56$

Donc $1{,}4p_n = 1{,}05p_{n-1} + 56$ ce qui donne : $\boxed{p_n = 0{,}75p_{n-1} + 40}$

* $p_1 = 0{,}75p_0 + 40 = 0{,}75 \times 100 + 40 = 115$

* $o_1 = 0{,}5p_1 + 50 = 0{,}5 \times 115 + 50 = 107{,}5$

* $d_1 = -0{,}3p_1 + 162 = -0{,}3 \times 115 + 162 = 127{,}5$

* $p_2 = 0{,}75p_1 + 40 = 0{,}75 \times 115 + 40 = 126{,}25$

* $o_2 = 0{,}5p_2 + 50 = 0{,}5 \times 126{,}25 + 50 = 113{,}125$

* $d_2 = -0{,}3p_2 + 162 = -0{,}3 \times 126{,}25 + 162 = 124{,}125$

2) $p_n = 10{,}5p_{n-1} + 0{,}5(d_n - o_n) = 10{,}5p_{n-1} + 0{,}5.[-0{,}8p_n + 112] = 1{,}05p_{n-1} - 0{,}4p_n + 56$

Donc $1{,}4p_n = 1{,}05p_{n-1} + 56$ ce qui donne : $p_n = \frac{3}{4}p_{n-1} + 40$

3)* $p_3 = \frac{3}{4}p_2 + 40 = 0{,}75 \times 126{,}25 + 40 = 134{,}6875$

* $p_4 = \frac{3}{4}p_3 + 40 = 0{,}75 \times 134{,}6875 + 40 = 141{,}0156$

* $p_5 = \frac{3}{4}p_4 + 40 = 0{,}75 \times 141{,}0156 + 40 = 145{,}7617$

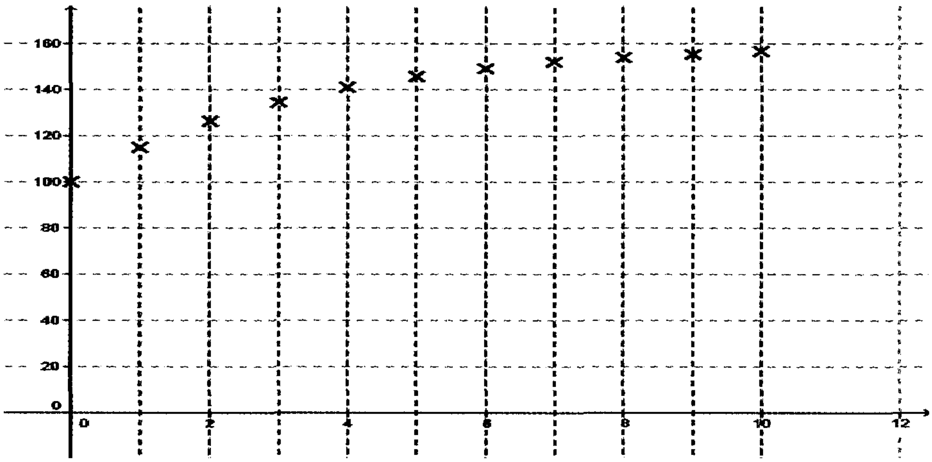
* $p_6 = \frac{3}{4}p_5 + 40 = 0{,}75 \times 145{,}7617 + 40 = 149{,}3212$

* $p_7 = \frac{3}{4}p_6 + 40 = 0{,}75 \times 149{,}3212 + 40 = 151{,}9909$

* $p_8 = \frac{3}{4}p_7 + 40 = 0{,}75 \times 151{,}9909 + 40 = 153{,}9931$

* $p_9 = \frac{3}{4}p_8 + 40 = 0{,}75 \times 153{,}9931 + 40 = 155{,}4948$

* $p_{10} = \frac{3}{4}p_9 + 40 = 0{,}75 \times 155{,}4948 + 40 = 156{,}6211$



4) a) $\alpha = \frac{3}{4}\alpha + 40 \Leftrightarrow 4\alpha = 3\alpha + 160 \Leftrightarrow \alpha = 160$

b) $u_n = p_n - 160$, $n \geq 0$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 160 = \frac{3}{4}p_n + 40 - 160 = \frac{3}{4}p_n - 120 = \frac{3}{4}(p_n - 160) = \frac{3}{4}u_n$$

$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n$ Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

c) $u_n = u_0.q^n = -60\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$ car $u_0 = p_0 - 160 = 100 - 160 = -60$

$p_n = u_n + 160 = 160 - 60\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[160 - 60\times\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 160$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

e) $o_n = 0{,}5p_n + 50$ et $d_n = -0{,}3p_n + 162$

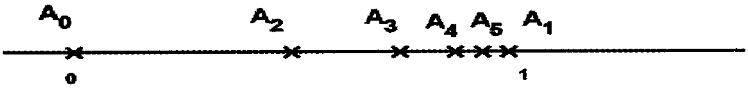
$\lim\limits_{n\to+\infty} o_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[0{,}5p_n + 50\right] = 0{,}5\times160 + 50 = 130$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-0{,}3p_n + 162\right] = -0{,}3\times160 + 162 = 114$

Les valeurs d'équilibre des indices O et D sont respectivement 130 et 114.

Exercice 15:

1)



$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{5}{8}$ et $a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{11}{16}$

2) $x_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 1$

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$

En simplifiant, on aura :

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + ... + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + (a_n - \cancel{a_{n-1}})$

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = a_n - a_0 = a_n$

3) $x_{n+1} = a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_n}{2} - a_n = \dfrac{a_{n-1} - a_n}{2} = \dfrac{-(a_n - a_{n-1})}{2}$

$x_{n+1} = \dfrac{-(a_n - a_{n-1})}{2} = -\dfrac{1}{2}x_n$ donc (x_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

4) $x_n = x_1.q^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ car $x_1 = a_1 - a_0 = 1$

$$a_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$$ par suite $a_n = \dfrac{2}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right] = \dfrac{2}{3}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

6) lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, les points A_n se rapprochent du point A d'abscisse $\dfrac{2}{3}$.

Exercice16:

1)

$u_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, $u_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{5}{16}$, $u_3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 = \dfrac{2}{64}$

$u_4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^2 = \dfrac{85}{256}$

2) En général :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left[1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2\right] = \frac{1}{4}a_n$$

Avec: $a_n = 1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = 1^2 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \dots + \dfrac{1}{2^{2n-2}}$

Poisons $b_n = \dfrac{1}{2^{2n-2}}$, $n \geq 1$. On a: $b_{n+1} = \dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{1}{2^2} \times \dfrac{1}{2^{2n-2}} = \dfrac{1}{4}b_n$

(b_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$

$$a_n = 1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ \dots\ + \frac{1}{2^{2n-2}} = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

D'où $a_n = b_1\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right] = \dfrac{4}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$ car $b_1 = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{4}{3} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4} a_n = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$

<u>Exercice 17:</u>

1) $u_1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$, $u_2 = u_1 + 8\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^2 = \dfrac{17}{81}$ et $u_3 = u_2 + 64\times\left(\dfrac{1}{27}\right)^2 = \dfrac{17}{81} + \dfrac{64}{729} = \dfrac{217}{729}$

2) à chaque étape on colorie encore le $\dfrac{1}{9}$ de la partie non colorée.

* l'aire de la partie non colorée est la différence entre l'aire du grand carré ,qui est égale à 1, et l'aire de la partie colorée ,qui est égale à u_n.

<u>Conclusion</u> : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{9}(1-u_n)$

3) $u_{n+1} = \dfrac{8}{9}u_n + \dfrac{1}{9}$ et $v_n = u_n - 1$, $n \geq 1$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \dfrac{8}{9}u_n + \dfrac{1}{9} - 1 = \dfrac{8}{9}u_n - \dfrac{8}{9} = \dfrac{8}{9}(u_n - 1)$

$v_{n+1} = \dfrac{8}{9}v_n$ d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{8}{9}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $-1 < q < 1$

c) $u_n = 1 + v_n$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+v_n) = 1$

Exercice 18:

1) a) $u_1=\dfrac{2\pi\times 1}{4}=\dfrac{\pi}{2}$, $u_2=\dfrac{2\pi\times\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{\pi}{4}$, $u_3=\dfrac{2\pi\times\frac{1}{4}}{4}=\dfrac{\pi}{8}$ et $u_4=\dfrac{2\pi\times\frac{1}{8}}{4}=\dfrac{\pi}{16}$

b) (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ donc $u_n=u_1.q^{n-1}=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\pi.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{\pi}{2^n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2^n}=0$

2) a) $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+....+u_n=u_1\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$

D'où $v_n=\dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right]=\pi.\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]=\pi\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\pi.\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]=\pi$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$

3) a) $a_1=1^2$, $a_2=1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, $a_3=1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$, $a_4=1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{8}\right)^2$

en général : $a_n=1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+....+\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2$

b) $a_n=1^2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}+\ ....\ +\dfrac{1}{2^{2n-2}}$

On pose $b_n=\dfrac{1}{2^{2n-2}}$, $n\geq 1$. on a : $b_{n+1}=\dfrac{1}{2^{2n}}=\dfrac{1}{2^2}\times\dfrac{1}{2^{2n-2}}=\dfrac{1}{4}b_n$

(b_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{4}$

$$a_n=1^2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ ....\ +\frac{1}{2^{2n-2}}=b_1+b_2+.....+b_n$$

D'où $a_n = b_1\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-\dfrac{1}{4}}\right] = \dfrac{4}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$ car $b_1 = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{4}{3} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

Exercice19:

1) a) pour passer d'un flacon n au flacon $(n+1)$

chaque coté est remplacé par quatre (voir schéma) donc $c_{n+1} = 4c_n$

et $c_1 = 3$ car le flacon 1 a trois cotés.

Donc $\begin{cases} \boxed{c_1 = 3} \\ c_{n+1} = 4c_n \end{cases}$ erreur à corriger

b) (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ d'où $c_n = c_1.q^{n-1} = 3\times 4^{n-1}$

2) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n \end{cases}$

(x_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ d'où $x_n = x_1.q^{n-1} = 1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

3) a) $p_n = c_n \times x_n = 3\times 4^{n-1}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$

$$p_{n+1} = 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{4}{3}\times\left[3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right] = \frac{4}{3}p_n$$

D'où (p_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{4}{3}$

b) $p_{n+1} = \dfrac{4}{3}p_n$ et $p_n \geq 0$ d'ou $p_{n+1} \geq p_n$

(p_n) est une suite croissante.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty$ car $\dfrac{4}{3} > 1$.

l'aire d'un triangle équilatéral de coté a est égal à :

$$\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$$

4) a) $a_1 = \dfrac{1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $a_2 = a_1 + 3\times\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right] = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $a_{n+1} = a_n + c_n\dfrac{x_{n+1}^2.\sqrt{3}}{4} = a_n + 3\times4^{n-1}\times\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n}\times\sqrt{3}}{4} = a_n + \dfrac{3\sqrt{3}\times4^n\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^n}{16}$

ce qui donne : $a_{n+1} = a_n + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

5) a) démonstration par récurrence :

* vérifions pour $n = 1$

$$\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}[1] = \frac{4\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4} = a_1 \qquad \text{(Vrai)}$$

* supposons que $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{16} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left[1+\dfrac{4}{9}+\ldots\ldots+\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$

Montrons que $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{16} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left[1+\dfrac{4}{9}+\ldots\ldots+\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n}\right]$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[1+\frac{4}{9}+\ldots\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[1+\frac{4}{9}+\ldots\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

<u>Conclusion</u> : $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{16} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left[1+\dfrac{4}{9}+\ldots\ldots+\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$ pour tout $n \geq 1$.

b) $1+\dfrac{4}{9}+\ldots\ldots+\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} = 1\times\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\dfrac{4}{9}}\right] = \dfrac{9}{5}\times\left[1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right]$

D'où $a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[\frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{9}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$

Exercice 20:

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

1) $1+x+x^2+.....+x^n = 1\times\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = f(x)$ comme étant somme de $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$

2) a) f est une fonction rationnelle elle est donc dérivable sur son ensemble de définition

b) d'une part : $f(x) = 1+x+x^2+x^3+.......+x^n$ donc $f'(x) = 1+2x+3x^2+.......+nx^{n-1}$

D'autre part : $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $f'(x) = \frac{-(n+1).x^n.(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

3) $s_n = 1+2.\left(\frac{1}{2}\right)+3.\left(\frac{1}{2}\right)^2+4.\left(\frac{1}{2}\right)^3+.....+n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$s_n = f'\left(\frac{1}{2}\right) = = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4\left[1+\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}\right]$$

4) $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \geq 0$

a) pour $n \geq 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^n}\times\frac{2^{n-1}}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$

$n \geq 2 \Rightarrow 2n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

ce qui donne : $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$ car $u_n > 0$ *pour* $n \geq 2$

b) démonstration par récurrence :

* vérifions pour $n = 2$, $u_3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1}.u_2$ d'après **(4/a)**

* soit $n \geq 2$

Supposons que : $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.u_2$ montrons que : $u_{n+2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n}.u_2$

On a $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.u_2$ et $u_{n+2} \leq \frac{3}{4}u_{n+1}$ (d'après **(4/a)**)

Donc $u_{n+2} \leq \frac{3}{4}u_{n+1} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.\mathrm{u}_2$ ce qui donne $u_{n+2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n}.u_2$

<u>Conclusion</u> : $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.u_2$ pour $n \geq 2$

c) * $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.u_2$ pour $n \geq 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

* $$s_n = 4\left[1+\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}\right] = 4\times\left[1+\frac{1}{4}\times\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^n}\right] = 4\times\left[1+\frac{1}{4}u_n - u_{n+1}\right]$$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} 4\left[1+\frac{u_n}{4}-u_{n+1}\right] = 4 \quad \text{car} \quad \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

QCM

1) **(a)**

$$Q_1 = 17 \quad \text{et} \quad Q_3 = 28$$

2) **(a) 3eme quartile et non 2eme quartile (faute de frappe)**

3) **(c)**
On $a = -1$ et $b = 100$ donc $m' = am + b = -m + 100$ et $\sigma' = |a|\sigma = \sigma$

4) **(c)**
68% des effectifs sont situées dans $[\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma] = [11.5\,;13.5]$

5) **(b)** $G(\bar{X}, \bar{Y})$ Donc $G(14, 4)$

VRAI – FAUX

1) **Vrai**
Le réel est la médiane

2) **Vrai**

3) **Vrai**
4) **Faux** **voir activité 2 p 206**
5) **Vrai**

Exercices

Exercice 1

1) a) ►

Moyenne général	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	15	16
Effectif 3S1	0	3	4	4	5	7	3	4	2	1	0	0
Effectif cumulé croissant	0	3	7	11	16	**23**	26	30	32	33	33	33

L'effectif total pour 3 S1 est N= 33 et $\frac{N}{2}=16,5$

La médiane pour la classe 3S1 est M1 = 10

►

Moyenne général	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	15	16
Effectif 3S2	2	4	3	3	3	4	3	2	2	3	1	2
Effectif cumulé croissant	2	6	9	12	15	**19**	22	24	26	29	30	32

L'effectif total pour 3 S2 est N= 32 et $\frac{N}{2}=16$

La médiane pour la classe 3S2 est M1 $= \frac{10+10}{2}=10$

b) • $\frac{N}{4}=8,25$ (effectif cumulé → 9) donc le premier quartile pour 3S1 est **Q1 = 8**

$\frac{3N}{4}=24,75$ (effectif cumulé → 25) donc le troisième quartile pour 3S1 est **Q3 = 11**

• $\frac{N}{4}=8$ (effectif cumulé → 8) donc le premier quartile pour 3S1 est **Q1 = 7**

$\frac{3N}{4}=24$ (effectif cumulé → 24) donc le troisième quartile pour 3S1 est **Q3 = 12**

2) a)

Diagramme en boite de la série 3S1

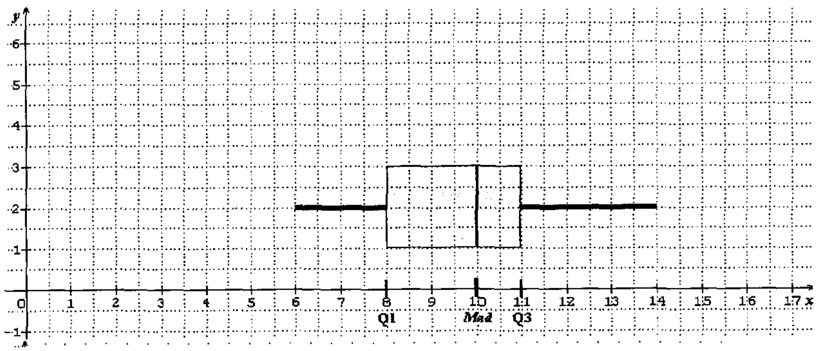
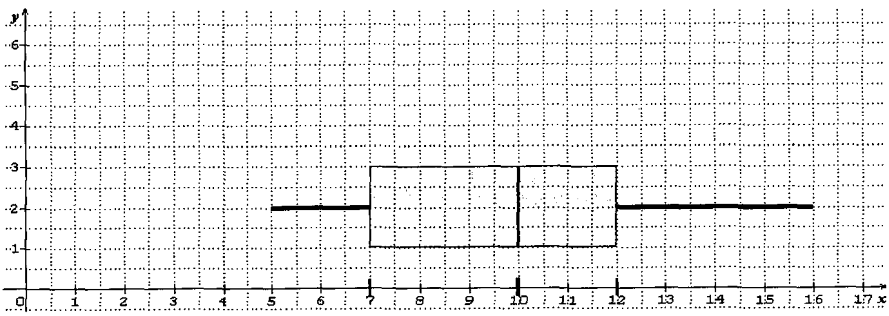


Diagramme en boite de la série 3S2



a) les deux classes non pas le même profile : interquartile différent
Nous constatons que la première série 3S1 est moins dispersée ,il ya davantage de valeurs proches de la médiane

Exercice 2

1)

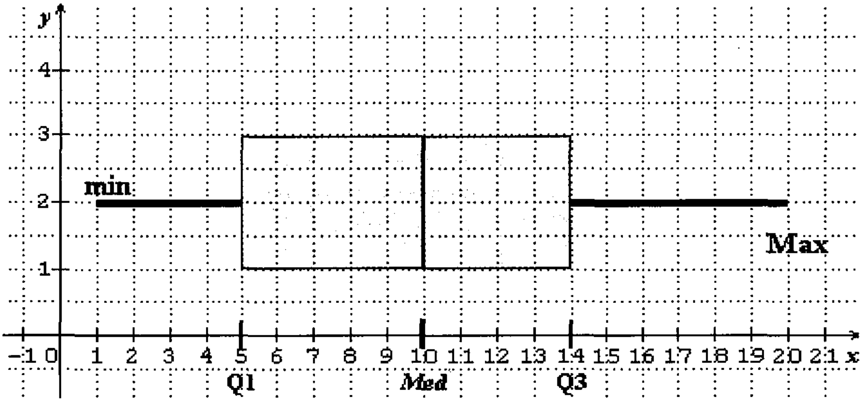
Nombre aléatoire	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	4	2	1	2	4	2	1	3	3	2	3	3	1	4	2	2	1	3	1	1
Effectif cumulé croissant	4	6	7	9	13	**15**	16	19	22	24	27	30	31	35	37	39	40	41	44	45

2) • L'effectif total est N= 45 et $\frac{N+1}{2}=23$. La médiane est $M = 10$

• $\frac{N}{4}=11,25$ (effectif cumulé → 12) donc le premier quartile pour 3S1 est **Q1 = 5**

• $\frac{3N}{4}=33,75$ (Effectif cumulé → 34) donc le troisième quartile pour 3S1 est **Q3 = 14**

3) a) diagramme en boite :



b) il y a 25 % de nombre aléatoires inférieurs à 5
il y a 75 % de nombre aléatoires inférieur à 14
il y a 50 % de nombre aléatoires inférieur à 10

Exercice3

1)

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14
Effectif	4425	4500	5099	5257	5344	5965	6177	6464	**6819**	7149	7444	7767	7964	8189
Effectif cumulé croissant	4425	8925	14024	19281	24625	30590	36767	43231	**50050**	57199	64643	72410	80374	88563

2) • L'effectif total est N= 88563 et $\frac{N+1}{2}=44282$. La médiane est **Me** $=$ **9**

- $\frac{N}{4} = 22140,75$ Donc le premier quartile pour 3S1 est **Q1 = 5**

- $\frac{3N}{4} = 66422,25$ Donc le troisième quartile pour 3S1 est **Q3=12**

Interprétions

Avant 1994 il y on a 25 % de nombre totale des médecins

Avant 2001 il y on a 75 % de nombre totale des médecins

Avant 1998 il y on a 50 % de nombre totale des médecins

Exercice 4

** **Année 2000**

température	16,6	19,6	19,7	20	20,2	20,4	20,6	20,7	21	21,1	21,3	21,4	21 ,5
Effectif	1	1	2	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1
1Effectif cumulé croissant	1	2	4	5	6	8	9	10	11	13	15	16	17

température	21,6	22,1	22,2	22,7	23,2	23,3	23,6
Effectif	1	2	1	1	1	1	1
Effectif cumulé croissant	18	20	21	22	23	24	**25**

1) • L'effectif total est N= 25 et $\frac{N+1}{2} = 13$. La température moyenne est $21^0,1$

- $\frac{N}{4} = 6,25$ (effectif cumulé → 7) donc le premier quartile pour 3S1 est **Q1 = 20.4**

- $\frac{3N}{4} = 18,75$ (Effectif cumulé → 19) donc le troisième quartile pour 3S1 est **Q3 = 22.1**

** **Année 2001**

température	16,6	19,4	19,6	19,8	20,1	20,2	20,3	20,7	21,1	21,3	21,8	21,9
Effectif	1	1	1	1	2	1	1	3	1	2	1	1
1Effectif cumulé croissant	1	2	3	4	6	7	9	12	13	15	16	17

température	22,1	22,7	23	23,1	23,2	24,1	24,6
Effectif	1	1	1	2	2	1	1
Effectif cumulé croissant	18	19	21	22	23	24	25

2) • L'effectif total est N= 25 et $\dfrac{N+1}{2}=13$. La température moyenne est $21^0,3$

• $\dfrac{N}{4}=6,25$ (effectif cumulé → 7) donc le premier quartile pour 3S1 est **Q1 = 20.2**

• $\dfrac{3N}{4}=18,75$ (Effectif cumulé → 19) donc le troisième quartile pour 3S1 est **Q3 = 23**

Diagramme en boite pour l'année 2000

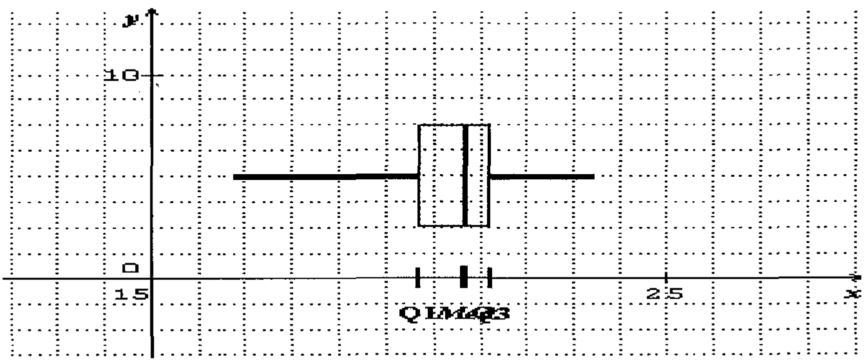
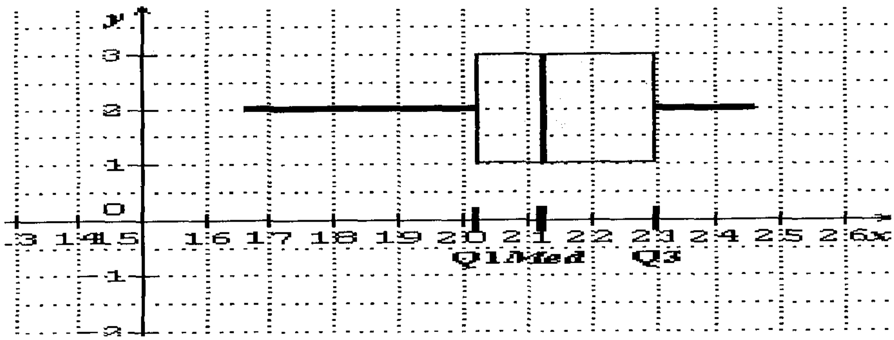


Diagramme en boite pour l'année 2001



Interprétation

- En moyenne il fait plus chaud en 2001 que l'année 2000.
- L'étendue des températures est plus forte en 2001 que 2000.
- Le climat est plus « modéré » 2000 qu'en 2001 car les températures sont moins « étirées » autour de la moyenne.

Exercice 5

Tireur A $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i = 29$

$$\sigma(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i n_i x_i^2 - (\bar{x})^2} = 1,46$$

Tireur B $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i = 29$

$$\sigma(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i n_i x_i^2 - (\bar{x})^2} = 1,37$$

L'écart-type de tireur B est plus faible donc la dispersion autour de la moyenne est plus faible ainsi le tireur B est plus régulier

Exercice 6

Posons: $\bar{X} = 9{,}5$; $\bar{Y} = 10$; $\sigma = 2$ et $\sigma' = 3$

On a : $\bar{Y} = a\bar{X} + b$ et $\sigma' = |a|\sigma$

Donc on obtient : $10 = 9{,}5a + b$ et $3 = 2|a|$

Ainsi : $|a| = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{3}{2}$

- Si $\boxed{a = \frac{3}{2}}$ alors $b = 10 - 9{,}5 \times 1{,}5 = -4{,}25$ par suite $\boxed{b = -4{,}25}$
- Si $\boxed{a = -\frac{3}{2}}$ alors $b = 10 + 9{,}5 \times 1{,}5 = 14{,}25$ par suite $\boxed{b = 24{,}25}$

Exercice 7

Groupe A

Moyenne : $\bar{x} = 9{,}46$; médiane $m = 9$; écart-type : $\sigma_A(x) = 2.56$;

1er quartile Q1=8 ; 3me quartile Q3=11

Groupe B

Moyenne : $\bar{x} = 10.87$; médiane $m = 10.5$; écart-type : $\sigma_B(x) = 3.05$;

1er quartile $Q1 = 9$; 3me quartile $Q3 = 13$

1) Le groupe B a obtenu en moyen des meilleurs résultats
2) *on a* : $\sigma_B(x) = 3.05 > \sigma_A(x) = 2.56$ d'où : la dispersion autour de la moyenne de la série groupe A est plus faible

Remarque on peut calculer L'écart-type relatif $\frac{\sigma}{\bar{x}}$

L'écart-type relatif de groupe A est 0.27
L'écart-type relatif de groupe B est 0.28
L'écart-type relatif de groupe A est plus faible donc la dispersion autour de la moyenne de la série groupe A est plus faible

Exercice 8

Elève A

NOTES	8	10	11	12	13	15	16
Effectif	1	1	1	2	2	2	1

Elève B

NOTES	7	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	1	2	1	1	2	1	1	1

$.\ \sigma_A(x) \approx 2.33$; $\overline{X_A} = 12.5$ et $.\ \sigma_B(x) \approx 2.35$; $\overline{X_B} = 11.2$

on a : $\sigma_B(x) = 2.35 > \sigma_A(x) \approx 2.33$ d'où : la dispersion autour de la moyenne des notes de l'élève A est plus faible c'est-à-dire moins dispersé

Exercice 9 :

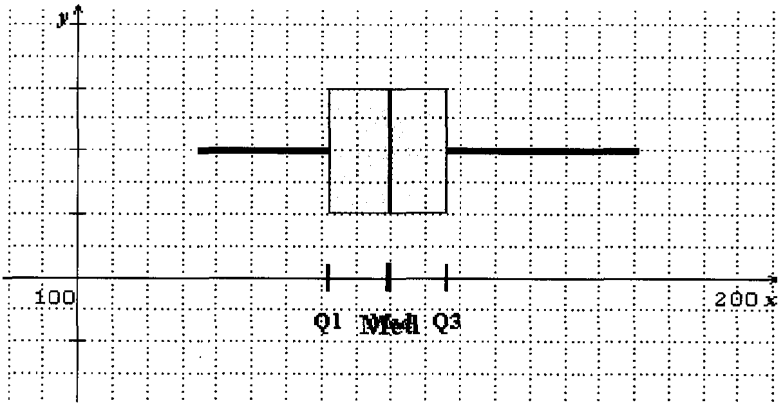
1) **Effectif total N = 40**

température	[118; 127[	[127; 136[	[136; 145[	[145; 154[	[154; 163[	[163; 172[	[172; 181[
Centre de la clase	122.5	131.5	140.5	149.5	158,.5	167.5	176.5
Effectif	3	5	9	12	5	4	2
Effectif cumulé croissant	3	8	17	29	34	38	40
fréquence cumulée croissante	**0,075**	**0,2**	**0,425**	**0,725**	**0,85**	**0,95**	**1**

2) a) •La médiane est **Me =147.5** •le premier quartile est $\boldsymbol{Q1 = 138}$

• le troisième quartile est $\boldsymbol{Q3 = 155.8}$

b) diagramme en boite :



3) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i n_i c_i = 147{,}575$

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i n_i {c_i}^2 - \bar{x}^2} = 13{,}938$

4) $\bar{x} - \sigma = 133{,}637$; $\bar{x} + \sigma = 161{,}513$

Le pourcentage des élèves qui appartient à l'intervalle $[133.637; 161.513]$ est 77,5 % donc on a une distribution normale .

Exercice 10

1) Les deux courbes ont la même variation
2) Oui une augmentation du budget consacré à la publicité entraine une augmentation du volume de vente .
3) La baisse du volume de vente à partir de mois de septembre est due a la baisse de budget consacré à la publicité

Exercice 11

$$\boldsymbol{Coefficient\ multiplicateur = \frac{Valeur\ d'arrivée}{Valeur\ de\ départ}}$$

1) ►Coefficient multiplicateur (électricité) $MC1 = \frac{148}{100} = 1{,}48$

   ►Coefficient multiplicateur (Eau) $MC2 = \frac{120}{100} = 1{,}2$

2)

Exercice 12

1) 1996 $\longrightarrow$ $38 + 60 = 98\%$
   1997 $\longrightarrow$ $50 + 45 = 95\%$
   1998 $\longrightarrow$ $42 + 50 = 92\%$
   1999 $\longrightarrow$ $38 + 45 = 83\%$
   2000 $\longrightarrow$ $44 + 47 = 91\%$
   2001 $\longrightarrow$ $45 + 48 = 93\%$
   2002 $\longrightarrow$ $53 + 40 = 93\%$

   On a pas 100% chaque année cela peut s'expliquer par le faite qu'il ya des gents qui ne veulent pas s'exprimer
2) En 1996 la popularité de ce chef d'entreprise été la plus forte

Exercice 13

1) le nuage de points est très concentré autour de la droite D
2) On utilise alors l'ajustement affine : $y = 0{,}42x - 2665{,}5$ pour estimer que le nombre de dentistes, si le nombre d'habitants atteint $x = 9000000$, est égal à $0{,}42 \times 90000000 - 2665{,}5 = 3777334{,}5$ donc le nombre estimer est
   $\mathbf{3777335}$ ***dentistes***
3) une estimer de la population de sorte que le nombre de dentistes est au moins 1600 c'est-à-dire $y \geq 1600$, on a donc :

$$0.42x - 2665{,}5 \geq 1600 \Rightarrow x \geq \frac{1600 + 2665{,}5}{0{,}42} = 10155{,}95$$

Ainsi le nombre estimer est au moins 10156 habitants

Exercice 14

1) a) $\bar{x} = \dfrac{4826.4 + 4788.9 + \ldots + 15960.3}{15} = 9359{,}03$

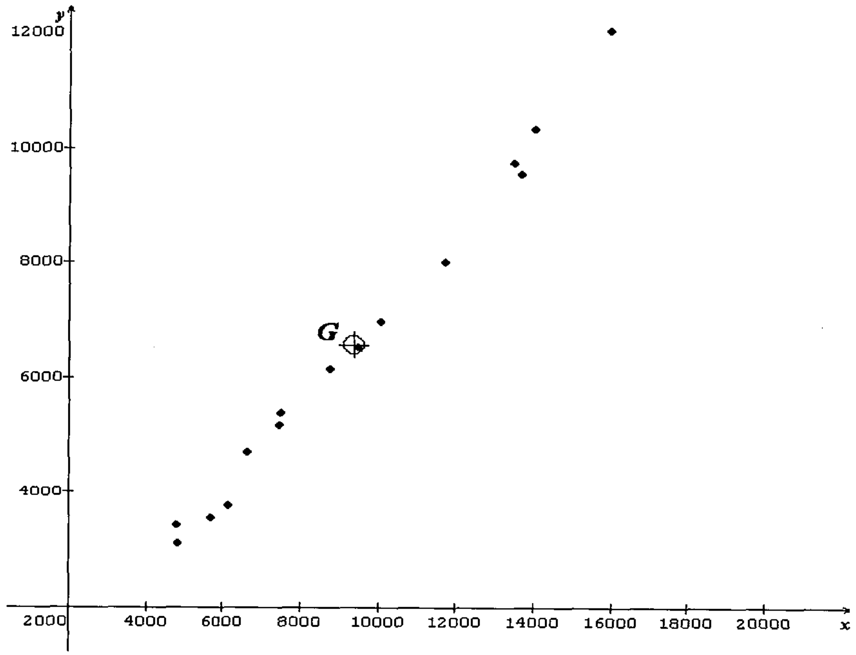
$$\sigma_x = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i x_i^2 - (\bar{x})^2} \approx 3535{,}54$$

b) $\bar{y} = \dfrac{3087.4 + 3417.1 + \ldots + 12054.9}{15} \approx 6558{,}37$

$$\sigma_y = \sqrt{v(y)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i y_i^2 - (\bar{y})^2} \approx 2727{,}62$$

2) On peut constater que σ_x est nettement supérieure à σ_y ce qui traduit une dispersion plus grande de la première série: X .

3) [redacted] $G(\bar{X},\bar{Y}) \Longrightarrow G(9359.03\ ;\ \ 6558.37)$



4) [redacted] on partage le tableau on deux : le tableau 1 de 1990 à 1997 et le deuxième tableau de 1998 à 2004.

T_1 :

	X importation	Y exportation
1990	4826.4	3087.4
1991	4788.9	3417.1
1992	5688.8	3549.7
1993	6172.1	3760
1994	6647.3	4696.6
1995	7464.3	5172.5
1996	7498.8	5372
1997	8793.5	6147.9

T_2 :

	X importation	Y exportation
1998	9489.5	6518.3
1999	10070.5	6966.9
2000	11738	8004.8
2001	13697.3	9536.2
2002	13510.9	9748.6
2003	140.38.9	10342.6
2004	15960.3	12054.9

$G_1(\bar{X}_1, \bar{Y}_1) \Longrightarrow G_1(6485{,}01\ ;\ 4400.4)$ Et $G_2(\bar{X}_2, \bar{Y}_2) \Longrightarrow G_2(12643.2\ ;\ 9024.61)$

L'ajustement affine de la série double(XY) demandé est la droite (G_1G_2): $y = ax + b$

Équation de la droite (G_1G_2) : $y = a\,x + b$; avec :

$$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \frac{4624.21}{6158.19} \approx 0{,}75$$

$G_1 \in (G_1G_2)$ donc $y_{G1} = 0{,}75x_{G1} + b$, ce qui donne $b = y_{G1} - 0{,}75x_{G1} \approx -461.86$

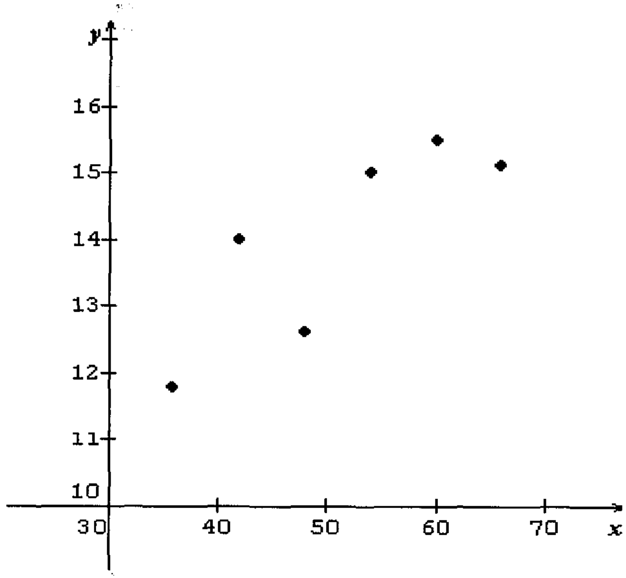
Équation de la droite (G_1G_2) : $y = 0{,}75\,x - 461{,}86$

b) on $x = 17000\ millions$ donc le montant de l'exportation (en millions de dinars) estimer est : $y = 0{,}75 \times 17000 - 461{,}86 = 12288.14$

le montant estimer est **12288. 14 millions de dinars**

Exercice 15

1) *nuage des ponts de la série double (X,Y)*



2) Tableau 1

X :âge	36	42	48
Y :Tension artérielle	11.8	14	12.6

$$G_1(\bar{X}_1, \bar{Y}_1) \Longrightarrow G_1(42\,;12.8)$$

Tableau 2

X :âge	36	42	48
Y :Tension artérielle	11.8	14	12.6

$$G_2(\bar{X}_2, \bar{Y}_2) \Longrightarrow G_2(60\,;15.2)$$

L'ajustement affine de la série double(X,Y) demandé est la droite (G_1G_2): $y = ax + b$

Équation de la droite (G_1G_2) : $y = a\,x + b$; avec :

$$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \frac{2,4}{18} \approx 0,13$$

$G_1 \in (G_1G_2)$ Donc $y_{G1} = 0,13 \times x_{G1} + b$, ce qui donne

$b = y_{G1} - 0{,}13x_{G1} = 12.8 - 0{,}13 \times 42 \approx 7.2$

Équation de la droite (G_1G_2) : $y = 0.13\,x + 7.2$

c) on a : $x = 25\ ans$ donc la tension maximal estimer est :

$y = 0{,}13 \times 25 + 7.2 = 12.66$

La tension maximal estimer est **12.66**

Exercice 16

1) Tableau 1

X : poids du père	65	63	67	64	68	62
Y : poids du fils	68	66	68	65	69	66

$$G_1(\bar{X}_1, \bar{Y}_1) \Rightarrow G_1(65\ ;\ 67{,}33)$$

Tableau 2

X : poids du père	70	66	68	67	69	71
Y : poids du fils	68	65	71	67	68	70

$$G_2(\bar{X}_2, \bar{Y}_2) \Rightarrow G_2(67{,}22\ ;\ 67{,}67)$$

L'ajustement affine de la série double(X,Y) demandé est la droite (G_1G_2): $y = ax + b$

Équation de la droite (G_1G_2) : $y = a\,x + b$; avec :

$$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} \approx 0{,}15$$

$G_1 \in (G_1G_2)$ Donc $y_{G1} = 0{,}15 \times x_{G1} + b$, ce qui donne

$b = y_{G1} - 0{,}15x_{G1} \approx 57{,}59$

Équation de la droite (G_1G_2) : $y = 0.15\,x + 57.59$

On a : $x = 87\ kg$ donc le poids de fils estimer est : $y = 70.64\ kg$

Exercice 17

On utilise la méthode de Mayer (voir exercice 14-15 et 16)

Nature de la régression : Droite de Mayer : $G1(13{,}6\ ;\ 82)$ $G2(44{,}32\ ;\ 130)$

Équation de la courbe de régression : $y = 1{,}56\,x + 60{,}75$

On a $x = 28.1\ kj$ donc $y = 104.59$

Ainsi la fréquence cardiaque est $\mathbf{104.59}$

Exercice 18

x	0.32	0.48	0.64	0.8	0.92	1	1.12	1.2	1.32	1.44	1.52	1.6	1.76	1.84	2	2.08	2.24
Y	84	88	96	100	108	116	120	124	132	136	140	144	152	160	164	168	176

Droite de Mayer : G1(0,48 ; 89,33) G2(1,50 ; 138,57)

Droite de régression : droite de Mayer : $\boldsymbol{y = 48{,}14\,x + 66{,}23}$

Estimation : $\boldsymbol{y = 48.14 \times 1.24 + 66.23 \approx 125{,}92}$

La taille est : $\boldsymbol{125{,}92\ m}$

Exercice 19

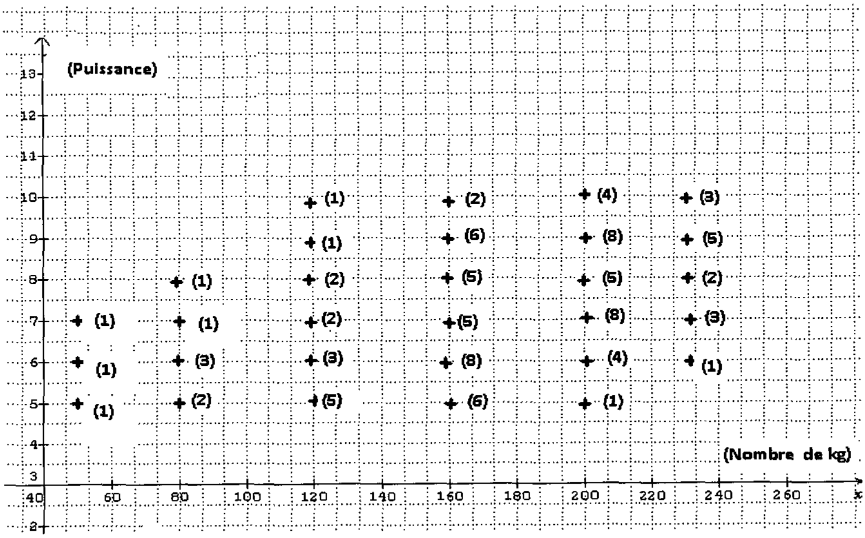
- 1re méthode : graphiquement :

- 2eme méthode :

Droite de régression droite de Mayer
Droite de Mayer : $G1(2\ ;\ 205{,}333)$ $G2(7\ ;\ 248{,}714)$
la courbe de régression : $y = 8{,}68\,x + 187{,}98$
Après 10 ans c'est l'an 2014 de rang $x = 20$
Le chiffre d'affaire est : $y = 361{,}58(\mathit{milliers\ de\ dinars})$

Exercice 20

1)



2) **Point moyen :** $G(\bar{X},\bar{Y}) \Longrightarrow G(186{,}4\,;7{,}35\,)$

3) **Le nuage des points semble bien dispersé autour de point moyen : il est possible de donner un ajustement affine de la série (XY)**

4) ►**distribution marginal de X :**

xi	Mois de 60	[60,100[	[60,100[	[100,140[	[140,180[	[180,220[	220 *et plus*
ni	3	7	14	32	68	30	14

►**distribution marginal de Y :**

yi	5	6	7	8	[9[	10 et plus
ni	15	20	20	15	20	10

Exercice 21

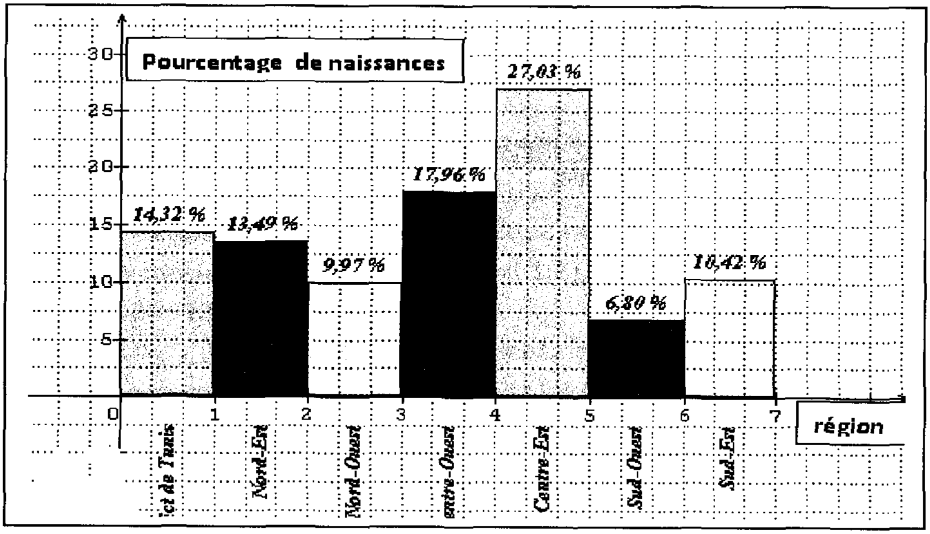
1) ▶**distribution marginal de X :**

xi	[15,20[	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[
ni	3212	26492	44799	39519	23332	5505	690

▶**distribution marginal de Y :**

yi	District de Tunis	Nord-est	Nord-Ouest	Centre-Ouest	Centre-Est	Sud-ouest	Sud-est
ni	20558	19365	14318	25788	38808	9760	14952

2) a)

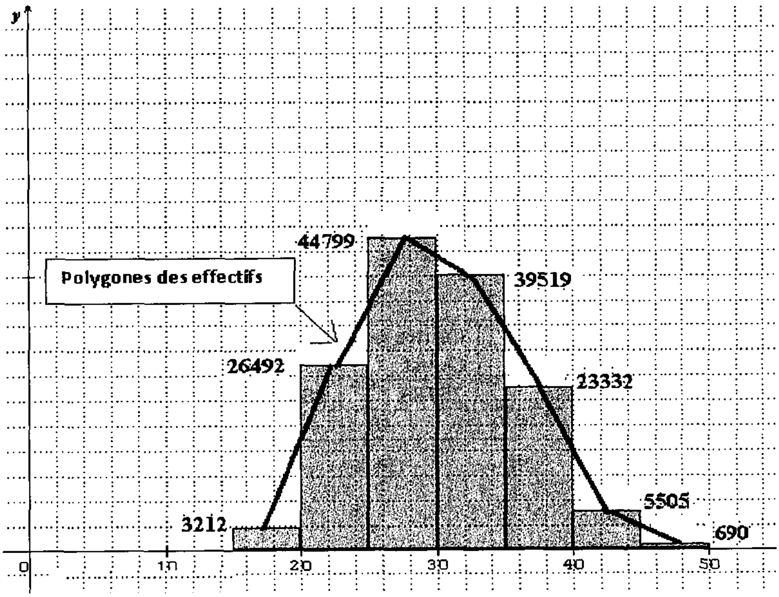


b) la région : Centre –Est de la Tunisie à le Taux plus élevé de naissances

3) a) la moyenne de la série à variable X est :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i n_i c_i \approx 30,0267$$

b)



c) le polygone des effectifs a la forme d'une cloche symétrique par rapport à la moyenne donc la distribution de la variable **X** est normale.

QCM

1) (b) $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

2) (b) $\frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

3) (a) p=0 et q>0 $\Rightarrow$ p<q

4) (a) $\frac{1}{2}$

5) (c) $\frac{1}{4}$

VRAI – FAUX

1) **Faux** (vrai pour deux événements incompatibles) en effet
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
   contre exple : On lance un dé cubique non truqués numéroté de 1 à 6 et on considère les événements A={ 1;2} et B={ 1;2 ;3}
   $P(A \cup B)=P(B) \neq P(A)+P(B)$
2) **faux** (vrai pour deux événements indéppandants) en effet
   le contre exeple de 1) $P(A \cap B)=P(A) \neq P(A).P(B)$
3) **Vrai** car deux événements élémentaires sont incompatibles
4) **vrai** en effet
   soit $E=B \setminus A$ $\Rightarrow$ A et E sont incompatibles et $B=A \cup E$
   $\Rightarrow P(B) = P(A)+P(E)$ et comme $P(E) \geq 0$ alors on a $P(B) \geq P(A)$.
5) **Vrai**
   A et B incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ Donc $p(A \cap B) = 0$

MOBILISER SES COMPETENCES :

Situation 1 :

1)

a. $\frac{1}{50^4}$ = 0,000 000 16

b. $1 - \frac{1}{50^4} =$

2) a . 1− $(0{,}999\ 999\ 84)^n$

b. $p_{100} = 1 - (0{,}999\ 999\ 84)^{100} \cong 0{,}000\ 015\ 6$

Situation 2:

1. $\frac{10!}{4!.6!}$ =210
2.
   a. Tout ces chemins se terminent au point de coordonnés (10 ;2)
   b. A reste toujours strictement en tête
      ⇔ le nombre des montées reste toujours strictement superieur au nombre des descentes
      ⇔ le chemin commence par une montée et ne rencontre pas l'axe de abscisses
3. a.
   b.
   c. en commencant par une descente il reste à faire 3 descentes et 6 montées il ya donc C_9^3 manières de le faire .

4. a. Le nombre de bons chemins = le nombre de chemins – (nombre de mauvais chemins+nombre de chemins commencant par une descente).

$$= C_{10}^4 - (\ C_9^3 + C_9^3) = C_{10}^4 - 2\ C_9^3 = 42$$

b. P(le candidat A reste toujours strictement en tête)= $\frac{42}{210} = \frac{2}{10} = \frac{6-4}{6+4}$

Exercices

Exercice 1

1. $E = \{3,4,6\}$
P({3})=$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; P({4})=$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $P(\{6\}) = \frac{1}{6}$
2. P(obtenir un chiffre pair) = P({4}) + $P(\{6\}) = \frac{1}{2}$
3. P(obtenir 4 ou 6) = P({4}) + $P(\{6\}) = \frac{1}{2}$

Exercice2

1. E= {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}
La proba d'obtenir un chiffre est proportionnelle à ce chiffre :⇒
$\frac{P(1)}{1} = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6}$
D'autre part :$\sum_{i=1}^{6} P(i) = 1 \Rightarrow$ P(1)+2 P(1)+3 P(1)+4 P(1)+5 P(1)+6 P(1)=1
⇒ P(1)= $\frac{1}{21}$; P(2)= $\frac{2}{21}$; P(3)= $\frac{3}{21}$; P(4)= $\frac{4}{21}$; P(5)= $\frac{5}{21}$; P(6)= $\frac{6}{21}$
2. P(un chiffre pair)=P({2 ;4 ;6})=$\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$
3. P(un chiffre multiple de 3)=P({3 ;6})=$\frac{3}{21}+\frac{6}{21}=\frac{3}{7}$
4. P(un chiffre >2)=P({3 ;4 ;5 ;6})=$\frac{3+4+5+6}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$

Exercice3

$P(a_2)= \frac{P(a_1)+P(a_2)}{2} \Rightarrow P(a_2)=P(a_1) = 0,04$

$P(a_3)= \frac{P(a_2)+P(a_4)}{2} \Rightarrow P(a_4)=2P(a_3)-P(a_2)$

D'autr part : $P(a_1)+ P(a_2)+ P(a_3)+ P(a_4)=1 \Rightarrow 0,04+0,04+3\,P(a_3)-0,04=1$

$\Rightarrow P(a_3)=\frac{1-0,04}{3} = \frac{0,96}{3} = 0,32$

Conclusion : P est définie par $P(a_2)=P(a_1) = 0,04$; $P(a_3) = 0,32$ et $P(a_4)= 0,6$

Exercice4

1. E={ B ;R ;N} B :bole blanche ;R :boule rouge et N :boule noire
   $P(B) = \frac{2}{10}$; $P(R)=\frac{3}{10}$ et $P(N) = \frac{5}{10}$
2. $P(2R)= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$
3. $P(2N)= \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100}=\frac{1}{4}$
4. P(deux boules de mm couleur)=P(2B)+P(2R)+P(2N)=$\frac{4}{100}+\frac{9}{100}+\frac{25}{100}=\frac{38}{100}$
5. P(2 b de couleur différentes)= $1-\frac{38}{100}=\frac{62}{100}$
6. P(obtenir une boule blanche et une boule roge)=$\frac{2}{10}.\frac{3}{10}+\frac{3}{10}.\frac{2}{10}=\frac{12}{100}$
7. P(obtenir au moins une boule blanche)= 1-P(aucune boule blanche)
   $= 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{36}{100}$

Exercice5

1. P(L'homme est OR_+ et la femme est BR_-)= $\frac{39}{100} \times \frac{1,4}{100}$
2. P(L'homme est A et la femme est AB)= $\frac{40,9}{100} \times \frac{4,5}{100}$
3. P(L'homme est A et la femme est A)= $\frac{40,9}{100} \times \frac{40,9}{100}$
4. P(L'homme est A et la femme n'est pas A)= $\frac{40,9}{100} \times (1-\frac{40,9}{100})$
5. P(L'homme ou la femme est A)=1- P(L'homme n' est pas A et la femme n'est pas A)= $1-(1-\frac{40,9}{100})^2$
6. P(L'homme est R_+ et la femme est R_+)= $\frac{86,9}{100} \times \frac{86,9}{100}$
7. P(L'homme ou la femme est R_-)=1 - $\frac{86,9}{100} \times \frac{86,9}{100}$
8. P(L'homme et la femme sont de Rhésus différents)=2 x $\frac{86,9}{100} \times \frac{13,1}{100}$

Exercice6

1. P(une femelle ne soit pas albinos)=1 – P(une femelle soit pas albinos)

$$= 1 - \frac{0,26}{100} = \frac{99,74}{100}$$

2. Dans cette population : P(albinos mâles) = $\frac{4}{300}$

$$P(\text{albinos femelles}) = \frac{0,26}{150}$$

P(albinos)= P(albinos mâles)+ P(albinos femelles) $= \frac{4}{300} + \frac{0,26}{150} = \frac{4,52}{300}$

(Rmarque : on peut aussi utiliser l'arbre de choix)

3. P(un lapin albinos soit mâle) = $\frac{4}{4,52}$

Exercice7

1. P(ne pas atteindre le cible)= $1-(\frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{5}{18}) = \frac{5}{9}$
2. P(obtenir au moins 50 points) = P(50)+P(100) $= \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$
3. P(obtenir au plus 50 points) = P(50)+P(20) $= \frac{1}{9} + \frac{5}{18} = \frac{7}{18}$

Exercice8

1. P(tirer deux boules portant deux nombres différants) = $\frac{C_4^1.C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$
2. P(tirer deux boules portant le même nombre) = $\frac{C_4^2+C_5^2}{C_9^2} = \frac{6+10}{36} = \frac{4}{9}$
3. a. les valeurs possibles de S sont : -6 ; 3 et 12

   b. P(S=-6) $= \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$; P(S=3)= $\frac{C_4^1.C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$; P(S=12)= $\frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

   c. P(S>0)= P(S=3)+ P(S=12)= $\frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

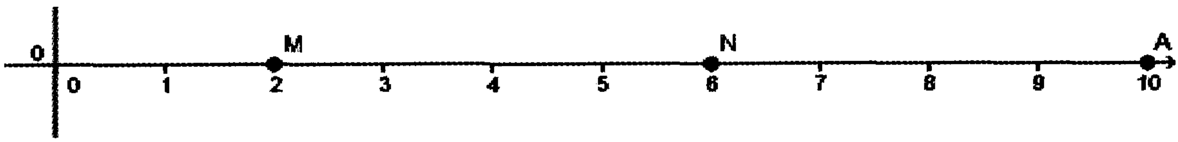
   d. P(S paire) = P(S=-6)+ P(S=12)= $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

Exercice9

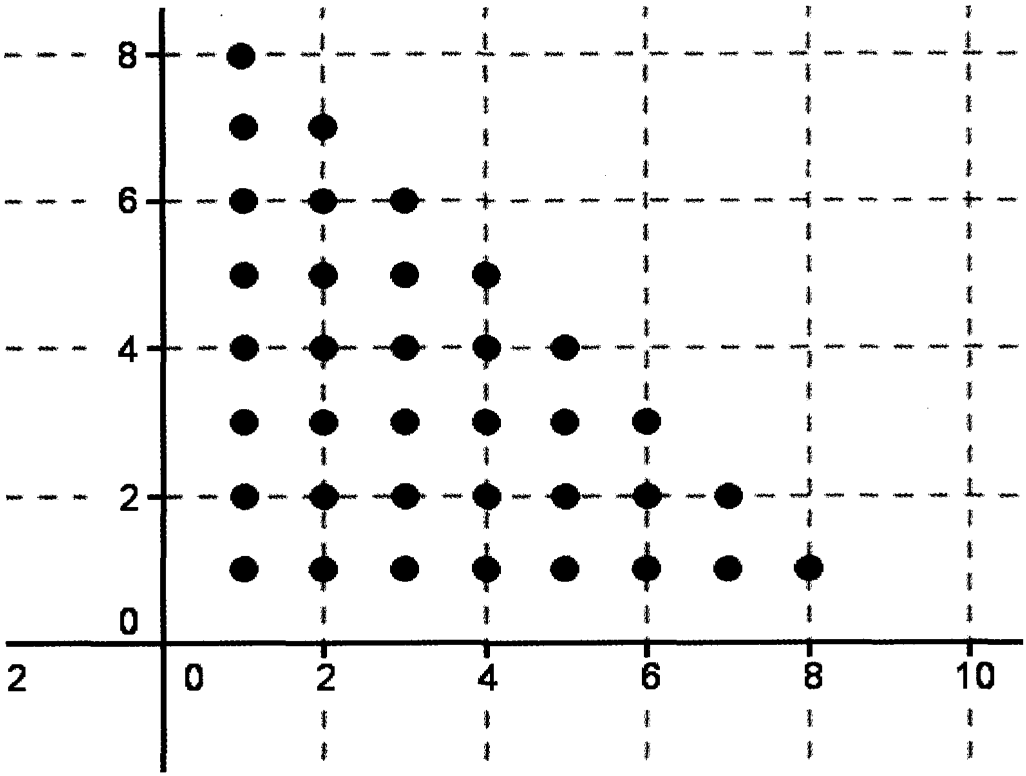
1. a. On suppose OM=x ; MN=y et NA=z avec x ;y et z sont des entiers strictement positives

   OM+MN+NA=OA $\Rightarrow$x+y+z =10 $\Rightarrow$ x+y < 10

E={(x,y) où x et y sont des entiers strictement positives et tels que x+y<10}



b.



c. Card(E)= 1+2+3+4+5+6+7+8= 9x4 =36

2. a. Nous savons que dans un triangle : un coté est inferieur à la somme de deux autres. $\Rightarrow$

$x<y+z \Rightarrow 2x<x+y+z \Rightarrow 2x<10 \Rightarrow x<5$

$y<x+z \Rightarrow 2y<x+y+z \Rightarrow 2y<10 \Rightarrow y<5$

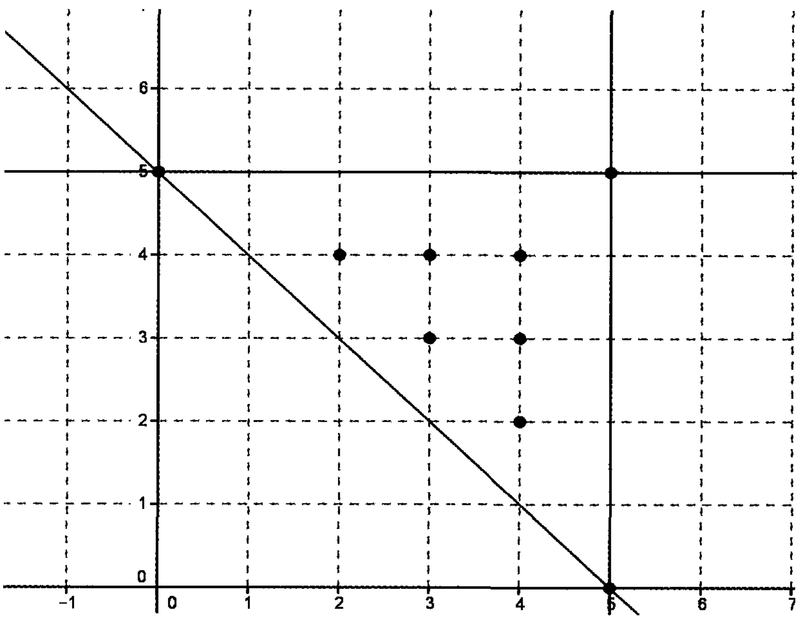
$z<x+y \Rightarrow 2z<x+y+z \Rightarrow 2z<10 \Rightarrow z<5$

$z<5 \Rightarrow x+y+z < x+y+5 \Rightarrow 10< x+y+5 \Rightarrow x+y> 5$

Donc l'événement étudié (povoir construire untriangle dont les côtés mesurent x ; y et z) correspond à la partie A définie par :

A={(x,y)∈ E tels que x<5 , y<5 et x+y>5 }

b.



c. card(A) =6

d. $P(A) = \frac{card(A)}{card(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Exercice 10

1. P(le proff interroge trois filles)=$\frac{A_{20}^3}{A_{38}^3} = \frac{6840}{50616}$
2. P(le proff interroge trois 2élèves de même sexe)=$\frac{A_{20}^3+A_{18}^3}{A_{38}^3} = \frac{6840+4896}{50616}$
3. P(le proff interroge une fille et deux garçons)=3 x $\frac{A_{20}^1+A_{18}^2}{A_{38}^3}$= 3x$\frac{20\ x 18\ x\ 17}{50616}$
4. P(le troisième élève interrogé est une fille) =

   P(F ;F ;F)+ P(F ;G ;F)+ P(G ;F ;F)+ P(G ;G ;F)=

   $\frac{20.19.18}{50616} + \frac{20.18.19}{50616} + \frac{18.20.19}{50616} + \frac{18.17.20}{50616} = \frac{26640}{50616}$

Exercice 11

1. P(obtenir 100 fois pile)= $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
2. P(obtenir au moins une fois pile) = 1 – P(aucune fois pile) =1 - $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
3. P(obtenir exactement 50 fois pile)= C_{100}^{50}X$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$

Exercice 12

1. 0 solution de (E) ⇔q=0 impossible

   Donc P(0 soit solution)= 0
2. 1 solution ⇔ 1+p-q =0⇔q=1+p

   Donc P(1 soit solution)=P{(p=1 ;q=2) ;(p=2 ;q=3) ;...(p=5 ;q=6)}

   $$= \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \text{x } 5 = \frac{5}{36}$$
3. -1 et 1 soient solutions de (E) ⇔ $\begin{cases} 1 + p - q = 0 \\ 1 - p - q = 0 \end{cases}$⇔ q=1 et p=0

   impossible donc P(-1 et 1 soient solutions de (E))=0
4. (E) admet deux solutions distinctes ⇔$\Delta=p^2+4q>0$ toujours vrai

   Donc P((E) admet deux solutions distinctes) =1
5. (E) admette une solution double ⇔$\Delta=p^2+4q = 0$ impossible

   Donc P((E) admette une solution double)= 0
6. (E) n'admette pas de solutions ⇔$\Delta=p^2+4q < 0$ impossible

   Donc P((E) n'admette pas de solutions)= 0

Exercice 13

On considère l'événement A :<<deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour >> et $\bar{A}$ l'événement contraire.

$P(\bar{A}) = \frac{A_{365}^{36}}{365^{36}} \cong \frac{2,93.10^{91}}{1,75.10^{92}} < \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) > P(\bar{A})$ Donc il est plus raisonable de parier sur le fait que deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour que de parier sur le contraire.

Exercice 14

On considère A l'événement :<<obtenir une somme égale à 10>>

On considère B l'événement :<<obtenir une somme égale à 9>>

Les résultats qui donnent une somme égale à 10 sont :

$$\begin{cases} (1,3,6) \rightarrow 3! \ \ cas \\ (1,4,5) \rightarrow 3! \ \ cas \\ (2,2,6) \rightarrow 3 \ \ cas \\ (2,3,5) \rightarrow 3! \ \ cas \\ (2,4,4) \rightarrow 3 \ \ cas \\ (3,3,4) \rightarrow 3 \ \ cas \ (\frac{3!}{2!}) \end{cases} \Rightarrow \text{card(A)= 3x3! +3x3 = 27}$$

Les résultats qui donnent une somme égale à 9 sont :

$$\begin{cases} (1,2,6) \rightarrow 3! \ \ cas \\ (1,3,5) \rightarrow 3! \ \ cas \\ (1,4,4) \rightarrow 3 \ \ cas \\ (2,2,5) \rightarrow 3 \ \ cas \\ (2,3,4) \rightarrow 3! \ \ cas \\ (3,3,3) \rightarrow 1 \ \ cas \end{cases} \Rightarrow \text{card(B)= 3x3! +3x2+1 = 25}$$

On a Card(A) > card(B) ce pour cela qu'on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9.

Exercice 15

1. $C_8^3 = 56$
2. a. $8.\frac{3}{C_8^3} = \frac{24}{56}$

   b. $1 - \frac{24}{56} = \frac{32}{56}$

   c. 0

   d. $\frac{4.6}{56} = \frac{3}{7}$

   e. $\frac{4.2}{56} = \frac{1}{7}$

Exercice 16

1. P(faire apparaître au moins un six en 4 coups avec un dé)=

   = 1- P(aucun six en 4 coups) = $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$
2. P(faire apparaître au moins un six en 4 coups avec un dé)= $\frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$

   Cela explique le fait que le chevalier de Méré augmentait ses revenus l'orsqu'il pariait qu'avec un dé non truqué il était capable d'obtenir au moins un six en 4 coups.
3. P(faire apparaître au moins un double six en 24 coups avec deux dés)

   = 1- P(aucun double six en 24 coups)

   $= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} < \frac{1}{2}$ Cela explique le fait que le chevalier de Méré commence à perdre l'orsqu'il pariait qu'avec deux dés non truqués il était capable d'obtenir au moins un double six en 24 coups.
4. P(faire apparaître au moins un double six en 25 coups avec deux dés)

   = 1- P(aucun double six en 25 coups)

   $= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} > \frac{1}{2}$ ⇒ oui s'il avait parié sur l'apparition d'au moins un double six en 25 coups avec deux dés il aurait continué de gagner.

Exercice 17

1. P(X gagne la première partie,la troisième partie et perd les deux autres) = 0,6x0,4x0,6x0,4 =0,0576
2. P(X gagne au moins une partie)= 1-P(X ne gagne aucune partie)
   $=1-\ (0,4)^4 \quad =0,9744$
3. P(X gagne exactement une partie)= 4 x 0,6 x $(0,4)^3$ =0,1536
4. P(X gagne au moins deux parties)=
   = P(X gagne au moins une partie)- P(X gagne exactement une partie)
   $=1-\ (0,4)^4 - 4 \times 0,6 \times (0,4)^3 = 0,9744 - 0,1536 = 0,8208$
5. P(X gagne au moins quatre parties)= P(X gagne quatre parties)=$(0,6)^4$

Exercice 18

1. P(aucun n'atteigne le cible)= $\left(1-\frac{1}{4}\right).\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
2. P(au moins un joueur atteigne le cible)= 1- P(aucun n'atteigne le cible)
   $=1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
3. P(le joueur A atteint le premier la cible)= $\frac{1}{4}$
   P(le joueur B atteint le premier la cible)= $(1-\frac{1}{4}).\frac{1}{3} \; = \; \frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
   P(le joueur C atteint le premier la cible)= $\frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Exercice 19

1. P(S=4)= P(4)+P(1 ;3)+P(3 ;1)
   $=\frac{1}{6} \quad + \frac{1}{6}.\frac{1}{3} \quad + \frac{1}{6}.\frac{1}{3} \quad = \frac{5}{18}$
2. P(S pair) =1 – P(S impair)
   = 1 – (P(impair;2))
   $= 1 - \frac{3}{6}.\frac{1}{3} \; = \; \frac{5}{6}$
3. $P(S \leq 7) = 1 - P(S > 7)$
   = 1 - P(S=8)
   =1 - P(5;3)
   $=1- \frac{1}{6}.\frac{1}{3} = \frac{17}{18}$

Exercice20

P(pion tortue gagne)= $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$

P(pion lièvre gagne)= $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{671}{1296}$

P(pion lièvre gagne) > P(pion tortue gagne)

Donc la situation du pion lièvre est plus enviable.

Q C M

1) b) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z'}\right) = -\frac{5}{2}$

car : $\frac{z}{z'} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = (-\frac{1}{2}) + (-\frac{5}{2})i$

2) (a) $OA = 2$

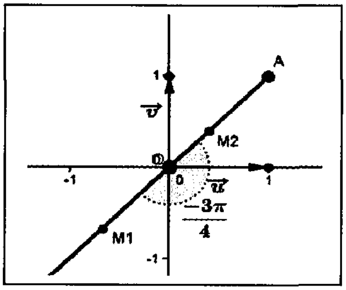
Car : $OA = |z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

3) (b) $\arg(-3z) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

En effet : $\arg(-3z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi] \Rightarrow \arg(-3z) \equiv \frac{\pi}{3} + \pi\ [2\pi]$

$\Rightarrow \arg(-3z) \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

4) (c) $\arg(z_M) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ **ou (b)** $\arg(z_M) \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$



5) (c) $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \pi\ [2\pi]$

Car: $\overrightarrow{OA}\binom{1}{2}$ *et* $\overrightarrow{OB}\binom{-2}{-4}$ ce qui donne $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OA}$;

$\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de sens contraire .

VRAI – FAUX

1) faux

car : la partie réelle, respectivement la partie imaginaire, d'un nombre complexe appartient à $\mathbb{R}$

Contre exemple : $z = (1+i) + 2i = 1 + 3i$ donc $a = 1 + i \ , b = 2 \, mais \ Re(z) = 1, Im(z) = 3$

2) faux

Contre exemple : $z = 1 + \sqrt{3}i \ \ et \ \ z' = 2$; on a : $|z| = |z'| = 2$ mais $z' \neq z$ et $z' \neq -z$

3) vrai

En effet : $M \in C_{(O,1)} \Rightarrow \mathrm{OM} = 1 \Rightarrow |\mathrm{z}| = 1 \Rightarrow |\mathrm{z}^2| = |\mathrm{z}|^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{OM}' = 1$

4) faux

lorsque : $|\mathrm{z}| = 1$ alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$; les points d'affixes respectifs z et $\frac{1}{z}$ appartiennent au cercle trigonométrique.

5) faux

Car : $\arg(z^2) \equiv 2.\arg(z) \quad [2\pi]$ (théorème de cours)

Exercices :

Exercice1 :

* $(1-i)(1-2i) = 1-2i-i-2 = -1-3i$

* $(2-i)^2 - (3-2i)(3+2i) = (4-4i-1) - (3^2+2^2) = -10-4i$

* $\dfrac{5-i}{2i} = \dfrac{i(5-i)}{2.i^2} = \dfrac{5i+1}{-2} = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{5}{2}i$

* $\dfrac{2}{3i} - \dfrac{3}{1-i} = \dfrac{2(1-i)-3(3i)}{3i(1-i)} = \dfrac{2-11i}{3(1+i)} = \dfrac{(2-11i)(1-i)}{3(1+i)(1-i)} = \dfrac{-9-13i}{3\times 2} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{13}{6}i$

Ou bien :

$$\frac{2}{3i} - \frac{3}{1-i} = \frac{2i}{3i^2} - \frac{3(1+i)}{2} = -\frac{2}{3}i - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i = \frac{13-9i}{3\times 2} = -\frac{3}{2} - \frac{13}{6}i$$

Exercice2 :

$z = 1-3i$; $z' = -3+2i$

1)* $Z_1 = z\times z' = (1-3i)(-3+2i) = -3+2i+9i+6 = 3+11i$

* $Z_2 = z^2\times z' = (1-3i)^2\times(-3+2i) = (1-6i-9)\times(-3+2i) = (-8-6i)\times(-3+2i)$

$Z_2 = 24-16i+18i+12 = 36+2i$

* $Z_3 = \dfrac{z-2}{z'+i} = \dfrac{-1-3i}{-3+3i} = \dfrac{(-1-3i)(1+i)}{-3(1-i)(1+i)} = \dfrac{-1-i-3i+3}{-3(1^2+1^2)} = \dfrac{2-4i}{-6} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}i$

2) * $Z_4 = \bar{z}\times z' = (1+3i)(-3+2i) = -3+2i-9i-6 = -9-7i$

* $Z_5 = z^2\times\overline{z'} = (1-3i)^2\times(-3-2i) = (1-6i-9)\times(-3-2i) = (-8-6i)\times(-3-2i)$

$Z_5 = 24+16i+18i-12 = 12+34i$

* $Z_6 = \dfrac{z-2}{\overline{z'}+i} = \dfrac{-1-3i}{-3-i} = \dfrac{1+3i}{3+i} = \dfrac{(1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3-i+9i+3}{3^2+1^2} = \dfrac{6+8i}{10} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$

<u>Exercice3</u> :

1) a) $z^2+3=0 \Leftrightarrow z^2=-3 \Leftrightarrow z^2=(i\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow z=i\sqrt{3} \ ou \ z=-i\sqrt{3}$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{-i\sqrt{3}\ ,\ i\sqrt{3}\right\}$

b) $z^2-3z=3(1-z)-6 \Leftrightarrow z^2-3z=3-3z-6$

$$\Leftrightarrow z^2=-3 \Leftrightarrow z=-i\sqrt{3} \ ou \ z=i\sqrt{3}$$

Donc $S_{\mathbb{C}}=\left\{-i\sqrt{3}\ ,\ i\sqrt{3}\right\}$

c) $z^3-1=z-1 \Leftrightarrow z^3-z=0 \Leftrightarrow z(z^2-1)=0 \Leftrightarrow z=0 \ ou \ z^2=1$

$z^3-1=z-1 \Leftrightarrow z=0 \ ou \ z=1 \ ou \ z=-1$; $S_{\mathbb{C}}=\{-1\ ,0\ ,1\}$

2) a) $z^2-2z+4=(z^2-2z+1)+3=(z-1)^2+3$

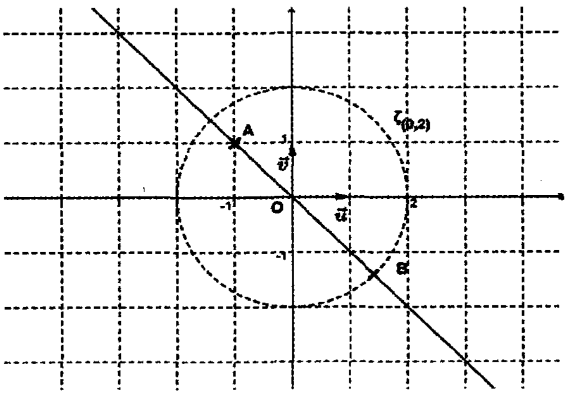
b) $z^2-2z+4=0 \Leftrightarrow (z-1)^2+3=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=-3$

$$\Leftrightarrow (z-1)=i\sqrt{3} \ o \ (z-1)=i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z=1+i\sqrt{3} \ ou \ z=1-i\sqrt{3} \ ; \quad S_{\mathbb{C}}=\left\{1+i\sqrt{3}\ ,\ 1-i\sqrt{3}\right\}$$

<u>Exercice4</u> :

$z_A=-1+i$, $z_B=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$



1) voir figure

2) $A(-1\ ,1)$ et $B(\sqrt{2}\ ,-\sqrt{2})$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\begin{vmatrix}-1 & \sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$$

les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires par suite les points O , A et B sont alignés.

(<u>deuxième méthode</u>) :

$\arg(z_A)\equiv\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\arg(z_B)\equiv\frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

$$\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\vec{u}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right)\quad [2\pi]$$

$\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right) - \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) \quad [2\pi]$

$\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A) \quad [2\pi]$

$\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{-\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ ce qui donne $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$

les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires par suite les points O , A *et* B sont alignés.

Exercice5 :

1) $z_M = z \quad et \quad z_{M'} = z + 2i$

$aff\left(\overrightarrow{MM'}\right) = z_{M'} - z_M = (z+2i) - z = 2i$

Soit $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $2i \quad \rightarrow \quad \vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$

On a : $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right) = aff(\vec{w})$ d'ou $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

Par suite M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{w}$. ($M' = t_{\vec{w}}(M)$)

2) $z_M = z \quad et \quad z_{M''} = -3z$

$aff\left(\overrightarrow{OM''}\right) = z_{M''} = -3z$ et $aff(\overrightarrow{OM}) = z$

On a: $aff\left(\overrightarrow{OM''}\right) = -3.aff(\overrightarrow{OM})$ d'où $\overrightarrow{OM''} = -3\overrightarrow{OM}$

par suite M'' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport -3.

$$(M'' = h_{(O,-3)}(M))$$

Exercice 6 :

$z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 1 - 2i$,

1) $|z_A - z_B| = |-2| = 2$; $|z_A - z_C| = |3i| = 3$ et $|z_B - z_C| = |2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

2) $AB^2 = |z_A - z_B|^2 = 2^2 = 4$; $AC^2 = |z_A - z_C|^2 = 3^2 = 9$

et $BC^2 = |z_B - z_C|^2 = \sqrt{13}^2 = 13$

On a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

ce qui prouve que le triangle ABC est rectangle en A. (Réciproque de **théorème d Pythagore**)

3) le point I : centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu du segment $[BC]$

car ABC est rectangle en A.

Donc $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4-i}{2} = 2 - \frac{1}{2}i$

Exercice7 :

1^{iere} méthode :

$$AB = |z_B - z_A| = |aj - a| = |a| \times |j-1| = |a| \times \left|\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right| = |a| \times \frac{\left|-3+i\sqrt{3}\right|}{2} = |a| \times \sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |aj^2 - a| = |a| \times |j^2-1| = |a| \times \left|\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right| = |a| \times \frac{\left|-3-i\sqrt{3}\right|}{2} = |a| \times \sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |aj^2 - aj| = |a| \times |j^2 - j| = |a| \times \left|-i\sqrt{3}\right| = |a| \times \sqrt{3}$$

$AB = AC = BC = |a| \times \sqrt{3} \neq 0$ D'où ABC est un triangle équilatéral.

2^{iere} méthode :

$$j = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{et} \quad j^2 = \left[1, \frac{4\pi}{3}\right]$$

* $OA = |a|$, $|OB| = |aj| = |a| \times |j| = |a|$ et $|OC| = |aj^2| = |a| \times |j|^2 = |a|$

Donc $\boxed{OA = OB = OC = 1}$

$$* \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) - \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \arg(z_B) - \arg(z_A) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \arg(a.j) - \arg(a) \quad [2\pi]$$

$$\equiv [\arg(a) + \arg(j)] - \arg(a) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \arg(j) \quad [2\pi]$$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$ de même on montre que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

Et $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

Ce qui prouve que ABC est équilatéral et inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercice 8 :

a)* méthode géométrique :

$|z-3|=2$, on considère le point A d'affixe 3.

$|z-3|=2 \iff |z-z_A|=2 \iff AM=2$

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-3|=2$ est le cercle de centre A et de rayon $R=2$

* méthode analytique :

on pose $z=x+iy$ $ou\ x\ et\ y\ sont\ des\ réels.$

$|z-3|=2 \iff |(x-3)+iy|=2$

$\iff \sqrt{(x-3)^2+y^2}=2$

$\iff (x-3)^2+y^2=4$

Conclusion : l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-3|=2$ est le cercle de centre $A(3,0)$ et de rayon $R=2$

b) $|z-i|=1$, on considère le point B d'affixe i.

$|z-i|=1 \iff |z-z_B|=1 \iff BM=1$

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-i|=1$ est le cercle de centre B et de rayon $R=1$

c) $|z-i+1|=3$, on considère le point C d'affixe $(-1+i)$

$|z-(-1+i)|=3 \iff |z-z_C|=3 \iff CM=3$

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-i+1|=3$ est le cercle de centre C et de rayon $R=3$

d) * méthode géométrique :

$|z-2+i|=|z-1|$, on considère les points A et B d'affixes respectives $2-i$ et 1

$|z-2+i|=|z-1| \iff |z-(2-i)|=|z-1| \iff |z-z_A|=|z-z_B| \iff MA=MB$

l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-2+i|=|z-1|$

est la médiatrice du segment $[AB]$.

* méthode analytique :

on pose $z = x + iy \quad ou \;\; x \; et \; y \; sont \; des \; réels.$

$$|z-2+i| = |z-1| \iff |(x-2)+i(y+1)| = |(x-1)+iy|$$

$$\iff \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\iff (x-2)^2+(y+1)^2 = (x-1)^2+y^2$$

$$\iff x^2-4x+4+y^2+2y+1 = x^2-2x+1+y^2$$

$$\iff x-y-2=0$$

Conclusion : l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-2+i| = |z-1|$ est la droite

d'équation: $x-y-2=0$

e) $|z-2i+1| = |z+i|$, on considère les points E et F d'affixes respectives $-1+2i$ et $-i$

$$|z-2i+1| = |z+i| \iff ME = MF$$

l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-2i+1| = |z+i|$ est la médiatrice du segment $[EF]$.

Exercice 9:

$$|(1+i).z| = 3 \iff |1+i| \times |z| = 3 \iff \sqrt{2} \times |z| = 3 \iff |z| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|(1+i)\,z| = 3$ est le cercle de centre O

et de rayon $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Exercice 10:

$z_A = 1+i, \quad aff(\vec{w}) = 1+2i \quad et \;\; M \; d'affixe \; z.$

a) $M \in D(A, \vec{w}) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

$$\iff \overrightarrow{AM} = k\vec{w} \quad avec \;\; k \in \mathbb{R}$$

$$\iff aff(\overrightarrow{AM}) = k.aff(\vec{w}), \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\iff z-(1+i) = k.(1+2i), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\iff z = k.(1+2i)+1+i = (k+1)+i(2k+1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Conclusion : M appartient à la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{w}$ si et seulement si il existe un réel k tel que $z = k.(1+2i)+1+i = (k+1)+i(2k+1)$

b) le vecteur $\overrightarrow{w'}$ d'affixe $2-i$ est orthogonal à $\vec{w}$

$$\left(\vec{w}\binom{1}{2} \quad et \ \overrightarrow{w'}\binom{2}{-1} \quad , \qquad \vec{w}.\overrightarrow{w'} = 2-2=0 \right)$$

$M \in D' \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux

$\iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont colinéaires

$\iff \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{w'} \quad avec \ k \in IR$

$\iff aff(\overrightarrow{AM}) = k.aff\left(\overrightarrow{w'}\right), \quad k \in \mathbb{R}$

$\iff z-(1+i) = k.(2-i) \quad , \quad k \in \mathbb{R}$

$\iff z = k.(2-i)+1+i \quad , \quad k \in \mathbb{R}$

Conclusion : M appartient à la droite D' passant par A et de vecteur normal $\vec{w}$ si et seulement si

il existe un réel k tel que $z = k.(2-i)+1+i$

c) $M \in D \cap (Ox) \iff$ z *est un réel* de plus $z = k.(1+2i)+1+i$ avec $k \in \mathbb{R}$

$\iff z \in IR$ et $z = (k+1)+i(2k+1)$

$\iff z = (k+1)+i(2k+1)$ avec $2k+1=0$

$\iff z = \dfrac{1}{2}$

Remarque : On pourra montrer que la droite D a pour équation cartésienne : $y = 2x-1$

$$D \cap (Ox) = \left\{ L\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \right\}$$

d) soit Δ la tangente à C en A.

le vecteur $\overrightarrow{OA}$ $d'affixe$ $1+i$ est un vecteur normal de Δ

le vecteur $\vec{T}$ $d'affixe$ $1-i$ est un vecteur directeur de Δ

$M \in \Delta \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux

$\iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires

$\iff \overrightarrow{AM} = k\vec{T} \quad avec \ k \in IR$

$\iff aff(\overrightarrow{AM}) = k.aff(\vec{T}), \quad k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \; z-(1+i) = k.(1-i) \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \; z = k.(1-i)+1+i \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

Conclusion : M appartient à la droite Δ si et seulement si il existe un réel k tel que

$$z = k.(1-i)+1+i$$

Exercice 11:

Soit A' le point d'affixe $z' = \dfrac{1}{z_A}$

$$OA' = |z'| = \frac{1}{|z_A|} \quad ; \quad (\overrightarrow{u},\overrightarrow{OA'}) \equiv \arg(\frac{1}{z_A}) \quad [2\pi]$$

$$OA' = |z'| = \frac{1}{|z_A|} \quad ; \quad (\overrightarrow{u},\overrightarrow{OA'}) \equiv -\arg(z_A) \quad [2\pi]$$

$$OA' = |z'| = \frac{1}{|z_A|} \quad ; \quad (\overrightarrow{u},\overrightarrow{OA'}) \equiv -(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OA}) \quad [2\pi]$$

il est clair, dans la figure donnée, que le point A' ne peut pas être que le point B.

Exercice 12:

a) $z = \dfrac{2(\sqrt{3}+i)}{4(1+i)} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2(1+i)}$ soit : $z_1 = \sqrt{3}+i$ *et* $z_2 = 1+i$

* $r_1 = |z_1| = \sqrt{3+1} = 2$; $z_1 = 2.(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i) = 2.\left[\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right]$

* $r_2 = |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $z_2 = \sqrt{2}.(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i) = 2.\left[\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$

$$r = |z| = \frac{|z_1|}{2|z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ;$$

$$\arg z \equiv \arg\left(\frac{z_1}{2z_2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \arg z_1 - \arg(2z_2) \quad [2\pi]$$

$$\arg z \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \quad [2\pi] \Rightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \Rightarrow \arg z \equiv \frac{-\pi}{12} \quad [2\pi]$$

Par suite : $z = \frac{\sqrt{2}}{2}.\left[\cos(\frac{-\pi}{12}) + i \sin(\frac{-\pi}{12})\right]$

b) $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3} = \frac{z_1^2}{z_2^3}$ avec: $z_1 = 1+i$ *et* $z_2 = 1-i = \overline{z_1}$

D'après a) $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

D'où $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg z_2 \equiv \arg(\overline{z_1})$ $[2\pi]$

$$\equiv -\arg(z_1) \ [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} \ [2\pi]$$

On aura donc : $|z| = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^3} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arg z \equiv \arg\left(\frac{z_1^2}{z_2^3}\right)$ $[2\pi]$

$$\equiv \arg(z_1^2) - \arg(z_2^3) \ [2\pi]$$

$$\equiv 2\arg(z_1) - 3\arg(z_2) \ [2\pi]$$

Donc $\arg z \equiv \frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$

$$\equiv \frac{5\pi}{4} \ [2\pi]$$

Par suite : $z = \frac{\sqrt{2}}{2}.\left[\cos(\frac{5\pi}{4}) + i \sin(\frac{5\pi}{4})\right]$

c) $z = -2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{100000}$

$$|z| = |-2| \times \left|-1+i\sqrt{3}\right|^{100000} = 2 \times 2^{100000} = 2^{100001}$$

$$\arg(z) \equiv \arg(-2) + \arg\left[(-1+i\sqrt{3})^{100000}\right] \quad [2\pi]$$

$$\arg(z) \equiv \pi + 100000.\arg\left[-1+i\sqrt{3}\right] \quad [2\pi]$$ Avec $\boxed{-1+i\sqrt{3} = 2(\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}) = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]}$

$$\arg(z) \equiv \pi + 100000\times\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \qquad \Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{200003.\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Comme on a : $\boxed{\frac{200003}{3} = -\frac{1}{3}+66668}$

Alors $\arg(z) \equiv \frac{-\pi}{3}+66668\pi \quad [2\pi]$ et finalement $\arg(z) \equiv \frac{-\pi}{3} \quad [2\pi]$

Par suite : $z = 2^{100001}.\left[\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3})\right]$

d) $z = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{-\pi}{12}) + i\sin(\frac{-\pi}{12})$

e) $z = \sin\frac{2\pi}{11} + i\cos\frac{2\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{11}) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{11})$

par suite : $z = \cos(\frac{7\pi}{22}) + i\sin(\frac{7\pi}{22})$

f) $z = 1 - i.\tan\frac{\pi}{15} = 1 - \dfrac{i.\sin\frac{\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{15}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{15} - i.\sin\frac{\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{15}}$

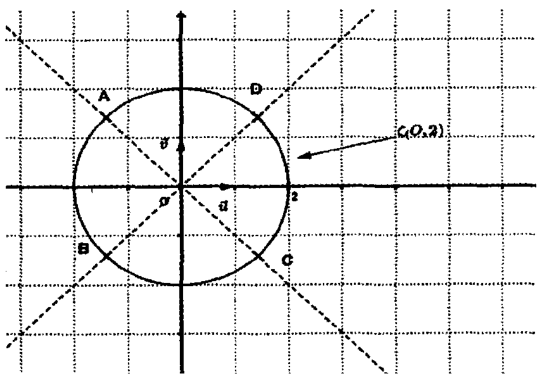
$$z = \frac{\cos\frac{\pi}{15} - i.\sin\frac{\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{15}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{15}}.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{15}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)\right].$$

Remarque : $\cos\frac{\pi}{15} > 0$

Exercice 13:

1) * $|z| = OA = 2$ et $\arg(z) \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) \quad [2\pi]$

$$\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$$



* $z_B = i.z$

$OB = |z_B| = |i| \times |z| = 1 \times 2 = 2$

$\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \arg(z_B) \quad [2\pi]$

$\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \arg(i) + \arg(z) \quad [2\pi]$

$\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{4} \; [2\pi] \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \dfrac{5\pi}{4} \quad [2\pi]$

* $z_C = i^2.z \; - z$

$OC = |-z| = |z| = 2$, $\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \arg(-z) \; [2\pi] \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$

$\Rightarrow \quad \left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \dfrac{3\pi}{4}+\pi \; [2\pi] \Rightarrow \quad \left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{4} \; [2\pi]$

* $z_D = i^3.z = - i.z$

$OD = |-iz| = |-i| \times |z| = 2$, $\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \arg(-i.z) \; [2\pi]$

$\Rightarrow \quad \left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \arg(-i) + \arg(z) \quad [2\pi] \Rightarrow \quad \left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OD}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{4} \; [2\pi]$

$\Rightarrow \quad \left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4} \; [2\pi]$

2) d'après 1) on a : $z_A = 2.\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \text{i}.\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$; $z_B = 2.\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + \text{i}.\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

$z_C = 2.\left(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + \text{i}.\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right)$ et $z_D = 2.\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \text{i}.\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

3) * $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z + i^2 z}{2} = \dfrac{z - z}{2} = 0$ et $\dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{iz + i^3 .z}{2} = \dfrac{iz - iz}{2} = 0$

$\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2} = 0 = z_O \quad \Rightarrow \quad A * C = B * D = O$

D'où $ABCD$ est un parallélogramme de centre O **(1)**

* $OA = OB = OC = OD = 2$ **(2)**

$$* \ \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right) - \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad \textbf{(3)}$$

Conclusion : $ABCD$ est un carré.

<u>Exercice14</u>:

1) * $z_M = -\sqrt{3} + i$, soit θ *un argument de* z_M

$|z_M| = \sqrt{3+1} = 2$ D'où $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \dfrac{5\pi}{6} \ [2\pi]$

Donc $\boxed{\arg(z_M) \equiv \dfrac{5\pi}{6} \ [2\pi]}$

* $z_N = i.z_M \Rightarrow \arg(z_N) \equiv \arg(i) + \arg(z_M) \ [2\pi]$

$$\Rightarrow \arg(z_N) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \ [2\pi]$$

$\Rightarrow \arg(z_N) \equiv \dfrac{8\pi}{6} \ [2\pi]$ Donc $\boxed{\arg(z_N) \equiv \dfrac{4\pi}{3} \ [2\pi]}$

* $z_P = \dfrac{z_M}{z_N} \Rightarrow \arg(z_P) \equiv \arg(z_M) - \arg(z_N) \ [2\pi]$

$$\Rightarrow \arg(z_P) \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3} \ [2\pi]$$

$\Rightarrow \arg(z_P) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$ Donc $\boxed{\arg(z_P) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]}$

2) a) $\arg(z) \equiv \arg(z_M) \ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dfrac{5\pi}{6} \ [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OH}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6} \ [2\pi]$$

$E_1 = \left\{ H \quad d'affixe\ z\ \ tel\ que : \quad \arg(z) \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \right\}$ est la demi-droite $[OM)$ privée de O.

avec $\arg(z_M) \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$ et $OM = \left|-\sqrt{3} + i\right| = 2$ *(voir figure)*

b) $\arg(z) \equiv \arg(z_N) \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) \equiv \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OH}}\right) \equiv \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$E_2 = \left\{ H \quad d'affixe\ z\ \ tel\ que : \quad \arg(z) \equiv \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi] \right\}$ est la demi-droite $[ON)$ privée de O.

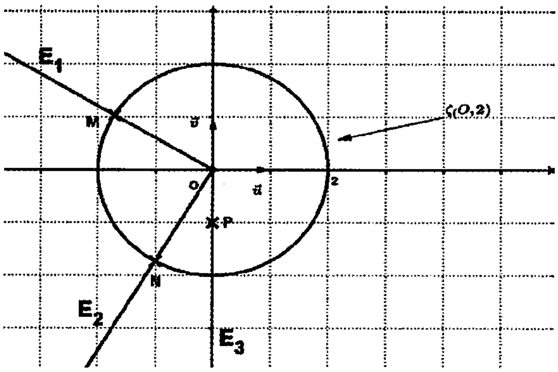
avec $\arg(z_N) \equiv \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi]$ et $ON = |iz_M| = |i| \times |z_M| = 2$ *(voir figure)*

c) $\arg(z) \equiv \arg(z_P) \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) \equiv \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OH}}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$E_3 = \left\{ H \quad d'affixe\ z\ \ tel\ que : \quad \arg(z) \equiv \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi] \right\}$ est la demi-droite $[OP)$ privée de O.

avec $\arg(z_P) \equiv \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $OP = \frac{|z_M|}{|z_N|} = 1$ *(voir figure)*



Exercice 15:

a)

$z' = z - 3i \Leftrightarrow z' - z = -3i$

$\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$ avec $aff(\vec{w}) = -3i$

$M' = t_{\vec{w}}(M)$

b)

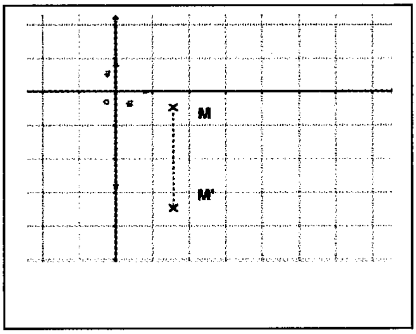
$z' - 1 = -2z \quad \Leftrightarrow$

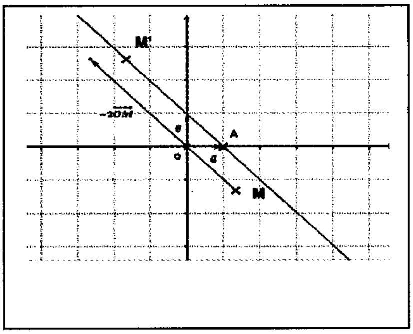
$\overrightarrow{AM'} = -2.\overrightarrow{OM}$ avec $z_A = 1$

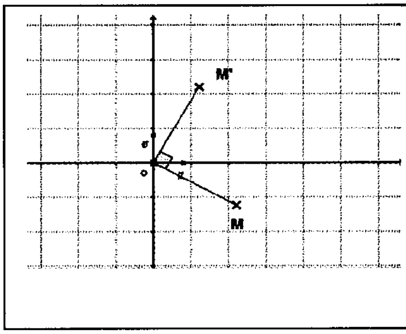
c)

$z' = iz \Rightarrow |z'| = |z|$

et $\arg(z') \equiv \arg(z) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$







Exercice 16:

1) a) * $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, soit θ_A un argument de z_A

$|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ d'où $\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_A \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

par suite : $z_A = 2.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

* $z_B = 3 + i\sqrt{3}$, soit θ_B un argument de z_B

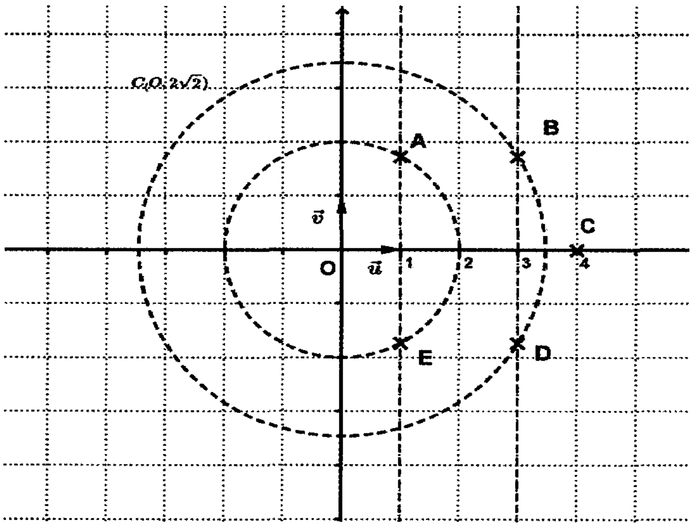
$|z_B| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ d'où $\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_B \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Par suite : $z_B = 2\sqrt{3}.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right)$

* $z_C = 4 = 4.(\cos 0 + i.\sin 0)$

* $z_D = 3 - i\sqrt{3} = \overline{z_B} = 2\sqrt{3}.\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i.\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$

* $z_E = 1 - i\sqrt{3} = \overline{z_A} = 2.\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i.\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$



b) * $\begin{cases} OA = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

* $\begin{cases} OE = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OE}}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

* $C\ (4,0)$

* $\begin{cases} OB = 2\sqrt{3} \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$

* $\begin{cases} OD = 2\sqrt{3} \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \frac{-\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$

c) $z_D = \overline{z_B}$ et $z_E = \overline{z_A}$

donc les points $D\ et\ E$ sont les symétriques respectifs de $B\ et\ A$ par rapport à $(O,\vec{u})$.

2) (OC) est un axe de symétrie pour le polygone OABCDE

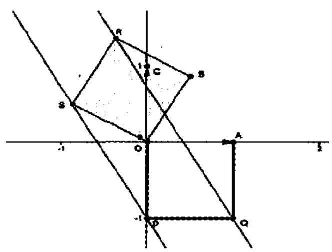
Aire $(OABCDE) = 2.aire(OABC)$

Comme $OABC$ est un trapèze de bases $[OC]\ et\ [AB]$ alors $aire(OABC) = \dfrac{(OC + AB)\times h}{2}$

$$aire(OABC) = \frac{(OC + AB)\times h}{2} = \frac{(4+2)\times\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Par suite : $\boxed{\text{aire } (OABCDE) = 6\sqrt{3}}$

Exercice17: 1) voir figure



2) a) $O(0,0) \longrightarrow z_O = 0$

$A(1,0) \longrightarrow z_A = 1$

$C(0,1) \longrightarrow z_C = i$

$B\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow \quad z_B = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P(0,-1) \longrightarrow \quad z_P = -i$

$Q(1,-1) \longrightarrow \quad z_Q = 1 - i$

$\begin{cases} OS = OB = OA = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OS}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \longrightarrow \quad z_S = \cos\frac{5\pi}{6} + i.\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) * $OR^2 = OB^2 + BR^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \Rightarrow |z_R| = OR = \sqrt{2}$

* $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OR}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OR}}\right)\ [2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OR}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \Rightarrow \quad \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OR}}\right) \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi] \Rightarrow \quad \arg(z_R) \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

Par suite : $z_R = \sqrt{2}.(\cos\frac{7\pi}{12} + i.\sin\frac{7\pi}{12}) \quad = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{3}+1}{2})$

3) **erreur Remplacer :** $\boldsymbol{B\ par\ S}$

Remarque :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4} == \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$
$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4} == \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos(a+b) = \cos a\times\cos b - \sin a\times\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\times\cos b + \sin b\times\cos a$$

par suite : $z_R = \sqrt{2}.(\cos\frac{7\pi}{12} + i.\sin\frac{7\pi}{12}) \ = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{3}+1}{2})$

(PS) et (QR) sont parallèles, en effet :

$$\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{QR}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}-1 \\ \sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}+1 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{QR}\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{PS},\overrightarrow{QR}) = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}+3}{2} \end{vmatrix} = \frac{-3-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{4} = 0$$

Ou bien :

Remplacer (QR) par (AS)

(PB) et (AS) sont perpendiculaires, en effet :

$$\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1 \end{pmatrix} \; et \; \overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AS} = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{PB}$ *et* $\overrightarrow{AS}$ sont orthogonaux

QCM

1) (a)

QCM contient 3 lettres distinctes. Le nombre d'anagrammes est donc: 3! =6

2) (c)

Nombre des triplets (ordre et réplétion) parmi 4 donc c'est $4^3 = 64$

3) (b)

le nombre des bureaux possible est le nombre des combinaisons de 3 parmi 4

donc c'est $C_4^3 = 4$

4) (a) Deux points distinctes définissent une droite donc

Nombre de partie à 2 éléments d'un ensemble à 5 éléments donc le nombre des droites obtenu est : C_5^2=10

5) (c)

Nombre de partie à 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments donc le nombre des triangles obtenu est : C_5^3=10

VRAI – FAUX

1) Faux

ANANAS contient six lettres dont trois lettres A et deux lettres N d'où le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de classements
des cinq lettres, divisé par le nombre de classements des deux N et de trois A . Le nombre d'anagrammes de ANANAS est égal à : (6!) / (3! × 2!) =60

2) Vrai (voir (1))

<u>Remarque</u>

Une anagramme d'un mot de n lettres est une permutation des n éléments de ce mot. Il y en a donc, a priori (n !)
Mais si un groupe de lettres se répète p_1 fois au sein de ce mot, alors les permutations de ces p_1 lettres, qui sont au nombre de (p_1!) ne changent pas le mot, de sorte que l'on a compté, dans les (n !) anagrammes, p! fois trop d'anagrammes. Il faut donc diviser (n !) par p_1! pour ne pas compter trop d'anagrammes. On procède de même avec le deuxième groupe de mots se répétant p_2 fois. Et ainsi de suite Le nombre N d'anagrammes de mots de n lettres comportant k groupes lettres se répétant p_1 , p_2 ,...p_k fois est donc égal à :

$$N = \frac{n!}{p_1!p_2!....p_k!}$$

3) Vrai En effet :

le nombre des issues possibles est : 6^4=1296
le nombre des issues ne contenant aucun 1 est : 5^4 =625
le nombre des issues contenant au moins un 1 est : 1296 – 625 =671> $\frac{1296}{2}$

4) Vrai en effet

- Le nombre total des mots à 8 lettres contenant O et S est : 2^8

••

* Le nombre total des mots à 8 lettres ne contenant aucune lettre S est 1
*Le nombre total des mots à 8 lettres contenant une seule fois la lettre
S est $1^1 \times 1^7 \times C_8^1 = C_8^1$
* Le nombre total des mots à 8 lettres contenant deux fois la lettre
S est $1^2 \times 1^6 \times C_8^2 = C_8^2$
D'où le nombre des mots demandé est :$2^8 - (1 + C_8^1 + C_8^2)$

5) **Faux** :il faut faire attention car parmi les 3 cœurs on peut trouver un as cœur.
Le nombre est alors : $C_1^1 . C_3^1 . C_7^2 . C_{21}^1 + C_3^2 . C_7^3$

Mobiliser ses compétences

Situation1

1) ESSENTIEL contient 9 lettres dont trois lettres E et deux lettres S d'où le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de classements des 9 lettres, divisé par le nombre de classements des deux S et de trois E .

C'est : $\frac{(9!)}{3! \times 2!} = 30240$

2) MATHEMATIQUES contient 12 lettres dont 2 lettres E et 2 lettres M , 2 lettres A et 2 lettres T d'où le nombre d'anagrammes est égal :

$$\frac{(12!)}{(2!)^4} = 29937600$$

Situation2

1) $\frac{(15!)}{10! \times 5!}$ =3003
2) Un chemin qui joigne A à Z correspond à 10 pas vers la droite et 5 pas vers le haut
3) Donc le nombre de chemins qui joignent A à Z est le même que le nombre de 15 lettres qui contiennent 10 fois la lettre d et 5 fois la lettre h. c'est donc $\frac{(15!)}{10! \times 5!}$ =3003.
4) a. Le nombre de chemins qui joigne A à E est :2 (hd ; dh)
   b. Le nombre de chemins qui joigne E à Z est : $\frac{(13!)}{9! \times 4!}$ = 715
   C. le nombre de chemins qui joignent A à Z en passant par E est : 2x$\frac{(13!)}{9! \times 4!}$ =1430
5) le nombre de chemins qui joignent A à Z en passant par E puis par M est :
$2 \times \frac{5!}{4!} \; \frac{(8!)}{3! \times 5!}$ = 2x5x7x8=560

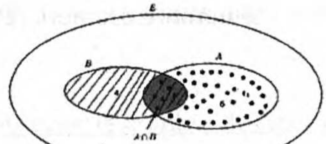
Exercices

Exercice 1

On peut représenter ces données par un diagramme: à l'intérieur de l'ensemble E des appareils, on représente en <u>partie hachurée</u> l'ensemble A des appareils qui possède un défaut A et en <u>partie pointée</u> l'ensemble$B$ des appareils qui possède un défaut B . L'intersection $A \cap B$ des deux ensembles $A \; et \; B$ apparaît en partie <u>colorée</u>.

On complète en suite les effectifs de différentes parties en utilisant les données :

4 appareils possède un défaut $A \; et \; B$
On place le nombre 4 dans la partie colorée



10 appareils possède un défaut A
mais parmi ces 10 appareils on sait qu'il y en a 4
qui possède un défaut B. Il y a donc 10 - 4 = 6 appareils
possède un défaut A sans qu'il présentent le defaut B
On place le nombre 6 dans la partie pointée

On place le nombre 4 dans <u>la partie hachurée</u>
Card(AUB)=card(A)+card(B) – card(A∩B)=10 +8-4 =14

Il y a donc 14 appareils possède un défaut $A \; ou \; B$ (ou les deux)

Conclusion Il reste donc $\boxed{100 - 14 = 86}$ appareils ne présentent aucun défaut

Exercice 2

1) $0 \leq p \leq 8$ $\frac{10!}{0!} = \frac{10!}{1} = 10! = 3628800$; $\frac{10!}{1!} = \frac{10!}{1} = 10! = 3628800$

$\frac{10!}{2!} = \frac{10!}{2} = 1814400$; $\frac{10!}{3!} = \frac{1814400}{3} = 604800$; $\frac{10!}{4!} = \frac{604800}{4} = 151200$

$\frac{10!}{5!} = \frac{151200}{5} = 30240$; $\frac{10!}{6!} = \frac{30240}{6} = 5040$; $\frac{10!}{7!} = \frac{5040}{7} = 720$; $\frac{10!}{8!} = \frac{720}{8} = 90$

2) a)$n \geq 2$

* si n est paire alors $n = 2p$ alors $n(n-1) = 2p(2p-1)$: nombre pair

* si n est impaire alors $n = 2p + 1$ alors $n(n-1) = (2p+1)2p$: nombre pair

Conclusion : n.(n-1) est paire

b) pour tout entier naturel $0 \leq p \leq n-2$ on a : $\frac{n!}{p!} = n.(n-1) \ldots .(p+1)$paire car n.(n-1) est paire

Exercice 3

a) $2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (198) \times (200) = (2 \times 1).(2 \times 2).(2 \times 3) \ldots \ldots (2 \times 99)(2 \times 100)$

$$= \underbrace{[2 \times 2 \times \ldots \times 2]}_{100\ termes} \times [1 \times 2 \times \ldots \times 99 \times 100]$$

$= 2^{100}.100!$

b) un travail analogue à celui fait en a) donne :2.4.6....2000=$2^{1000}.1000!$

On a alors : $\frac{2.4.6.....2000}{3.5.7....2001} = \frac{(2.4.6.....2000)^2}{2001!} = \frac{(2^{1000}.....1000!)^2}{2001!}$

Exercice 4

1) $n \in \{2,3,4,5\}$

2!=1x2=2 4 !=1x2x3x4=24

3 !=1x2x3=6 5 != 4 !x5 =120

2) l'entier n est multiple de 10 pour tout $n \geq 5$

3) l'entier n est multiple de 20 pour tout $n \geq 5$

4) l'entier n est multiple de 100 pour tout $n \geq 10$

5) l'entier n est multiple de 1000 pour tout $n \geq 15$

6) le reste de la division euclidienne entier naturel par 1000 ,forme ces trois derniers chiffres

$$N = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \ldots + 2006!$$

- Pour tout $n \geq 15$, l'entier n est multiple de 1000
  D'où le reste de la division euclidienne de la somme $(15! + 16! \ldots + 2006!)$
  par 1000 est 0 ainsi les trois derniers chiffres de N sont les trois derniers chiffres de de la somme $(1! + 2! \ldots + 14!)$

1! = 1 ; 2! = 2 ; 3! = 6 ; 4! = 24 ; 5! = 120 ; 6! = 720 ; 7! = 5040 ; 8! = 40320
9!= 362880 ; 10! = 3628800; 11! = 39916800; 12! = 479001600; 13! = 6227020800
14! = 87178291200

d'où les trois derniers chiffres recherchés sont les trois derniers chiffres de la somme:

200 + 800 + 600 + 800 + 800 + 880 + 320 + 040 + 720 + 120 + 24 + 6 + 2 + 1 = 5313

Les trois derniers chiffres de N : 313

Exercice 5

On compte 10 chiffres :$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

(Un nombre de quatre chiffre et de la forme $abcd$ avec $a \neq 0$)

1) Ainsi $Card(A) = 9 \times 10^3 = 9000$

2) Un nombre de A est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de Ω =1 {1;2;3;4;5;6;7;8;9} en guise de premier chiffre. Il y a 9 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 9 seulement

(aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 9 chiffres.

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts vaut donc :

$$9 \times A_9^3 = 9 \times 504 = 4536$$

3) un nombre pair est de la forme $abcd$ avec $a \neq 0$ et $d \in \{0,2,4,6,8\}$

On peut former $9 \times 10^2 \times 5 = 4500$ *nombres paires de quatre chiffres*

4) un nombre pair est de la forme $abcd$ avec $a \neq 0$ et $d \in \{0,2,4,6,8\}$

Nous voulons de plus que les quatre chiffres soit distincts

* pour d=0 correspond 9 chois possible pour la valeur de a ;8 chois possibles pour la valeur de b et 7 chois pour c. on a donc 9x8x7=504 nombres paire de quatre chiffres distincts se terminant par 0

*pour d≠0 correspond 8 chois possible pour la valeur de a (a≠0) ;8 chois possibles pour la valeur de b et 7 chois possibles pour c. on a donc (8x8x7)x4=1792 nombres paire de quatre chiffres distincts ne se terminant pas par 0.

Conclusion : On peut former 504+1792=2296 nombres paires de quatre chiffres distincts

5) Le contraire de C : « au moins l'un des chiffres 0, 1, 2 »

est B : « ne contient aucun des chiffre 0, 1, 2 »

Le nombre d'éléments de C est égal au nombre total d'éléments de B diminué du nombre d'éléments A (composés de quatre chiffres distincts) , nombre qui a été calculé dans la question 2

On a : $card\ (B) = A_7^4 = 840$ d'où $card\ (C) = 4536 - 840 = 3696$

Exercice 6

a) Une main qui contient exactement un as est formée d'un as parmi les quatre as et sept parmi les 28 cartes qui restent donc le nombre m_1 de mains contenant un seul as est :

$$m_1 = C_4^1 \times C_{28}^7 = 4736160$$

b) Une main qui contient exactement deux as est formée de 2 as parmi les quatre as et six parmi les 28 cartes qui restent donc le nombre m_2 de mains contenant exactement 2 as est :

$$m_2 = C_4^2 \times C_{28}^6 = 1506960$$

c) Le nombre des mains contenant au moins un as est égal au :

nombre total de mains - le nombre de mains ne contenant aucun as $=C_{32}^8 - C_{28}^8 = \cdots$

d) Le nombre de main contenant au moins un as et au moins un valet est :

(Le nombre de main contenant au moins un as) $-$ (Le nombre de main contenant au moins un as et aucun valet) $=(C_{32}^8 - C_{28}^8) - (C_{28}^8 - C_{24}^8) = C_{32}^8 + C_{24}^8 - 2C_{28}^8$ =5 037 561

Exercice 7

On a 120 cases en totales, on va compter le nombre de combinaison des cases noircis qui est le nombres possibles des grilles, ainsi on a : C_{120}^{23} grilles possibles

Exercice 8 On peut écrire $\frac{18!}{4!5!9!}$ mots à 18 lettres avec ces lettres

Exercice 9

Ω : Ensemble des couples (a, b) tels que $a \in \{1,2,3,4,5,6\}$ et $b \in \{1,2,3,4,5,6\}$

1) $Card(\Omega) = 6^2 = 36$

2) A: Ensemble des couples (a, b) tels que $a \in \{2,4,6\}$ et $b \in \{2,4,6\}$

$$Card(\mathrm{A}) = 3^2 = 9$$

3) B: Ensemble des couples (a, b) tels que $a \in \{2,4,6\}$et $b \in \{1,3,5\}$ ou bien$b \in \{2,4,6\}$et $a \in \{1,3,5\}$

$$Card(\mathrm{B}) = (3^1 \times 3^1) \times 2 = 18$$

4) on peut utiliser le tableau suivant :

3 fois on obtient une somme est égale à 4

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

5) 4 fois on obtient une somme est égale à 9 (voir tableau)

6) 33 fois on obtient une somme supérieur strictement à 3 (voir tableau)

Exercice 10

Pour une façon donnée, on appelle : N le nombre de sauts de 2 marches qu'elle a effectué
P le nombre de sauts de un marche qu'elle a effectué.

On sait que $2N + P = 13$ puisque la grenouille arrive en haut des marches

Les possibilités pour le couple (N, P) sont donc :

$(0,13); (1,11); (2,9); (3,7); (4,5); (5,3)$ et $(6,1)$
Pour une possibilité (N, P) donnée, le nombre de manière possible revient à choisir les positions des N sauts de deux marches parmi les $(N + P)$ sauts, soit donc C_{N+P}^{N}

Donc si on reprend la liste, ça donne : $\begin{cases} (0,13) \longrightarrow C_{13}^{13} = 1 \\ (1,11) \longrightarrow C_{12}^{1} = 12 \\ (2,9) \longrightarrow C_{11}^{2} = 55 \\ (3,7) \longrightarrow C_{10}^{3} = 120 \\ (4,5) \longrightarrow C_{9}^{4} = 126 \\ (5,3) \longrightarrow C_{8}^{5} = 56 \\ (6,1) \longrightarrow C_{7}^{1} = 7 \end{cases}$

Le nombre de façons distinctes que la grenouille a d'arriver en haut de l'escalier est donc
(1 + 12 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7) soit 377 façons

Remarque

Ce problème peut se résoudre de manière plus générale pour un escalier à n marches: On appelle $u_n$le nombre de possibilités pour monter l'escalier, par exemple s'il a 1 marche, $n = 1$ et $u_1 = 1$
(En effet la grenouille ne peut que faire un saut de 1 marche) , s'il a 2 marches, $n = 2$ et $u_2 = 2$
La grenouille peut soit sauter deux fois une marche, soit une fois 2 marches.
La grenouille peut arriver dans deux positions différentes :

* Soit elle est à une marche du sommet, auquel cas elle devra sauter une marche

ce qui donne u_{n-1}possibilités

* Soit elle se trouve à deux marches du haut de l'escalier, elle devra donc sauter 2 marches ce qui donne u_{n-2} possibilité. On a donc $\begin{cases} u_1 = 1 \ et \ u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \ ; \ n > 2 \end{cases}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**
u_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	**377**

Conclusion : pour n = 13 on $\boxed{u_{13} = 377}$

Exercice 11

Pour 25 stations il faut $2C_{25}^{2}$ = 600 types de billets.

Pour 28 stations il faut $2C_{28}^{2}$ =756 types de billets.

Il faut donc imprimer 756 -600 = 156 nouveaux types de billets.

Exercice 12

1) 3 ! = 6
2) 4 != 24
3) 8 ! =

Exercice 13

1) 7 !
2) 6 !
3) 6 !
4) 6x 6 !
5) $\begin{cases} A..E... \\ E..A... \end{cases}$; $\begin{cases} .A..E.. \\ .E..A.. \end{cases}$; $\begin{cases} ..A..E. \\ ..E..A. \end{cases}$; $\begin{cases} ...A..E \\ ...E..A \end{cases}$

   Dans 8 mots les voyelles sont séparées par deux lettres.

Exercice 14

Il ya deux configurations possibles : G.F.G.F.G.F OU F.G.F.G.F.G

Pour chaque configuration il ya 3! manières de présenter les filles et 3! manières de présenter les garçons ; il ya donc au total : 2x(3!x3!)=72 manières .

Exercice 15

a) $C_{12}^{2}.C_{10}^{4}.C_{6}^{6}$
b) $C_{12}^{4}.C_{8}^{4}.C_{4}^{4}$

Exercice 16

$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 = (1+1)^8 = 2^8$

Exercice 17

1. C_6^5 =6
2. C_6^4=
3. C_6^3=
4. $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$ = 2^6 -1 =63

Exercice 18

a) $6^3 = 216$

b) *nombre des cas où les trois faces sont identiques : 6

* nombre des cas où deux faces sont identiques : 6x5=30

* nombre des cas où les faces sont distincts deux à deux : $C_6^3 = 20$

N = 6+30+20=56

Exercice 19

1. D'après la formule de Binôme de Newton :

$(1+1)^{100} = C_{100}^0 + C_{100}^1 + C_{100}^2 + C_{100}^3 + \cdots + C_{100}^{100} \Rightarrow$ A+B= 2^{100}

$(1-1)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 - C_{100}^3 + \cdots - C_{100}^{99} + C_{100}^{100} \Rightarrow$ A−B= 0^{100} =0

$\Rightarrow$ A =B = 2^{99}

2. Rappelons que : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

a) $C_{n+1}^p = \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!} = \frac{(n+1).n!}{p.(p-1)!.(n-(p-1))!} = \frac{n+1}{p} \frac{n!}{(p-1)!(n-(p-1))!} = \frac{n+1}{p} C_n^{p-1}$

b) D'après a) $\frac{1}{p} C_n^{p-1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^p$ ce qui donne

$$\frac{1}{1} C_{100}^0 = \frac{1}{101} C_{101}^1$$

$$\frac{1}{2} C_{100}^1 = \frac{1}{101} C_{101}^2$$

… … … … …

……………………

……………………

$$\frac{1}{101} C_{100}^{100} = \frac{1}{101} C_{101}^{101}$$

D'ou S = $\frac{1}{101} [C_{101}^1 + C_{101}^2 + \cdots + C_{101}^{101}] = \frac{1}{101} [2^{101} - 1]$

Exercice 20

- ✓ $r = \pm 1$ $\{1; 2; 3\}$; $\{2; 3; 4\}$; $\{3; 4; 5\}$; $\{4; 5; 6\}$; $\{5; 6; 7\}$; $\{6; 7; 8\}$; $\{7; 8; 9\}$ $n_1 = 7$
- ✓ $r = \pm 2$ $\{1; 3; 5\}$; $\{2; 4; 6\}$; $\{3; 5; 7\}$; $\{4; 6; 8\}$; $\{5; 7; 9\}$ $n_2 = 5$
- ✓ $r = \pm 3$ $\{1; 4; 7\}$; $\{2; 5; 8\}$; $\{3; 6; 9\}$ $n_3 = 3$
- ✓ $r = \pm 4$ $\{1; 5; 9\}$ $n_4 = 1$

Conclusion : **N= 7+5+3+1= 16**

QCM /

1) $\overrightarrow{KO} = \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MR}$ donc $\overrightarrow{KO} = \overrightarrow{MR}$ $\longrightarrow$ **(b)**

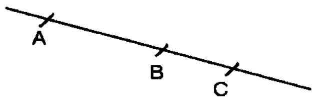
2) M, K, R et O sont coplanaires (situées dans le plan (OPR)) $\longrightarrow$ **(b)**

3) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$ $\longrightarrow$ **(a)**

4) On a : $S(0,2,-1)$ donc $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ **(a)**

5) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IQ}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où det$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{RP}) = 2 \neq 0$ $\longrightarrow$ **(c)**

Vrai – Faux



1) **Faux**

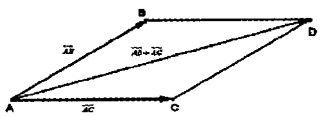
A , B et C Trois points alignés de l'espace.

Les droites (AB) et (BC) sont confondues avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

2) **Faux**

*Les trois vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{V}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une famille liée car $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ sans avoir deux de ces vecteurs sont colinéaires.

*<u>Ou bien</u> on peut considérer le parallélogramme $ABCD$:



. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

et pourtant les troisvecteurs $\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires 2 à 2

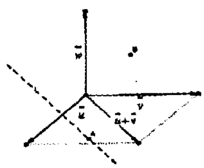
3) **Vrai**

Théorème admis (voir cours page 169)

4) **Vrai** $\overrightarrow{u'} = a.\vec{u}$, avec $a \in IR^*$

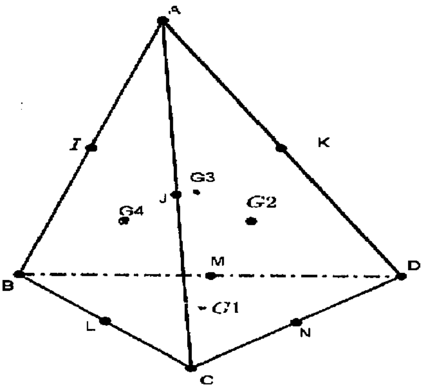
DET$\left(\overrightarrow{u'}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ =DET$(a.\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a.$ DET$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

5) **Faux** cas de figure :



Mobiliser ses compétences :

Situation 1



1) dans le plan (ABC) On a : G_4 est le centre de gravité de triangle ABC

d'où $\overrightarrow{G_4A} + +\overrightarrow{G_4B} + \overrightarrow{G_4C} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{GA} + +\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{G_4A} + \overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{G_4B} + \overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{G_4C} = 3\overrightarrow{GG_4}$

Ainsi : $\overrightarrow{GA} + +\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ donc G est le barycentre des points pondérés $(G_4, 3)$ *et* $(D, 4)$ dans le plan (GG_4D)

D'après la définition de barycentre dans le plan il existe alors un unique point G dans l'espace vérifiant $\overrightarrow{GA} + +\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Remarque : G est l'isobarycentre de tétraèdre $ABCD$

2) a) $\overrightarrow{GA} + +\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{GN} + \underbrace{\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}}_{\vec{0}} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$$

Donc G est le milieu de $[NI]$ ce qui prouve que G , I et N sont alignés.

b) *$\overrightarrow{GA} + +\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JC} + +\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{GM} + \underbrace{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}}_{\vec{0}} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GJ} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$$

Donc G est le milieu de $[JM]$ ce qui prouve que G , J et M sont alignés.

* de même G est le milieu de $[KL]$ ce qui prouve que G , L et K sont alignés

Conclusion : les droites (IN) , (JM) et (KL) sont concourantes en G

3) a) • G_1 est le centre de gravité de triangle BCD d'où $\overrightarrow{G_1B} + +\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

On a : $\overrightarrow{GA} + +\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_1} + \underbrace{\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D}}_{\vec{0}} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_1} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GG_1}$

Par suite $\overrightarrow{AG}$ *et* $\overrightarrow{GG_1}$ sont colinéaires ce qui prouve que A , G et G_1 sont alignés

• G_2 est le centre de gravité de triangle ACD d'où $\overrightarrow{G_1A} + +\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

On a : $\overrightarrow{GA} + +\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GG_1} + \underbrace{\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D}}_{\vec{0}} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GG_1} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{GG_2}$

Par suite $\overrightarrow{BG}$ *et* $\overrightarrow{GG_1}$ sont colinéaires ce qui prouve que B , G et G_2 sont alignés

• G_3 est le centre de gravité de triangle ABD d'où $\overrightarrow{G_1A} + +\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

On a : $\overrightarrow{GA} + +\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GG_1} + \underbrace{\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1D}}_{\vec{0}} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GG_1} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{CG} = 3\overrightarrow{GG_3}$

Par suite $\overrightarrow{BG}$ *et* $\overrightarrow{GG_1}$ sont colinéaires ce qui prouve que C , G et G_3 sont alignés

• De même : G_4 est le centre de gravité de triangle $ABD \Longrightarrow \overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{GG_4}$

ce qui donne D , G et G_4 sont alignés

<u>Conclusion</u> : les droites (AG_1) , (BG_2) , (CG_3) et (DG_4) sont concourantes en G

4) d'après la 3) question on a : $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GG_1}$, $\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{GG_2}$, $\overrightarrow{CG} = 3\overrightarrow{GG_3}$ et $\overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{GG_4}$

Donc : $3\overrightarrow{GG_1} + 3\overrightarrow{GG_2} + 3\overrightarrow{GG_3} + 3\overrightarrow{GG_4} = \overrightarrow{AG} +, \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$

Par suite :$3(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_4}) = \vec{0}$

Finalement : $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_4} = \vec{0}$

<u>Situation 2</u>

1) on a :

• $B(1,0,0)$ *et* $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \longrightarrow D'(0,1,1)$ *or* O est le milieu de $[BD']$ donc $\boxed{O(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$

• $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$ *et* I est le milieu de $[AB]$ donc $\boxed{I(\frac{1}{2},0,0)}$

• $A(0,0,0)$, $D(0,1,0)$ *et* J est le milieu de $[AD]$ donc $\boxed{J(0,\frac{1}{2},0)}$

• $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ Donc $\boxed{K(0,1,\frac{1}{2})}$ • $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ Donc $\boxed{L(\frac{1}{2},1,1)}$

• $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ Donc $\boxed{M(1,\frac{1}{2},1)}$ • $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ Donc $\boxed{N(1,0,\frac{1}{2})}$

2) * $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = -(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK})$

d'où la famille $\{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}\}$ est liée ce qui donne : O, I, M et K sont coplanaires

• $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = -(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK})$

D'où la famille $\{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}\}$ est liée ce qui donne : $\boldsymbol{O, I, K}$ *et* M sont coplanaires

De même on montre que : $\boldsymbol{O, I, K}$ *et* L sont coplanaires

$\boldsymbol{O, I, K}$ *et* J sont coplanaires

$\boldsymbol{O, I, K}$ *et* N sont coplanaires

Ainsi les points M, L, N *et* J sont dans le même plan (OIK)

<u>Conclusion</u> O, I, K *et* M sont coplanaires

3) * $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow [IL]et[JM]$ ont même milieu

* De même $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{NM} \Longrightarrow [KN]\ et[LM]$ ont même milieu

* Aussi : $[IL]$ *et* $[KN]$ ont même milieu

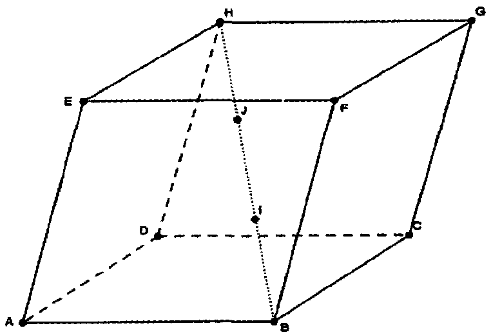
4) * I, J, K, L, M *et* N forment six cotés distincts deux à deux

* $IJ = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = JK = KL = LM = MN$

Donc $IJKLMN$ est un hexagone régulier de centre le point O (d'après (3))

Exercices

Exercice 1



1) a) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$ donc $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}$

b) I est le centre de gravité de triangle ACF d'où $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

On a : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IF}) + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}) = 3\overrightarrow{BI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}$

Il Résulte : $\overrightarrow{BH} = 3\overrightarrow{BI}$ ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires

Par suite les points I, B et H sont alignés

2) J est le centre de gravité de triangle DEG et H un point de l'espace

Donc : $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} = 3\overrightarrow{HJ}$

Aussi on a : $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$

Ce qui donne : $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB}$ car $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}$

Finalement on aura : $3\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HB}$

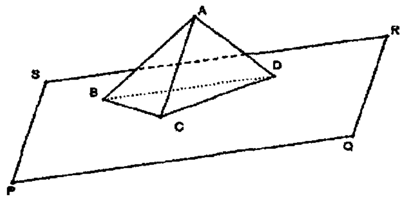
On en déduit que les points H , J et B sont alignés

On a : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JD}) + (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JE}) + (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}) = 3\overrightarrow{BJ} + \underbrace{\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JG}}_{\vec{0}}$

Il résulte : $\overrightarrow{BH} = 3\overrightarrow{BJ}$ ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires

par suite les points J, B et H sont alignés.

Exercice 2



- On a : d'une part $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QP}$

D'autre part : $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}$

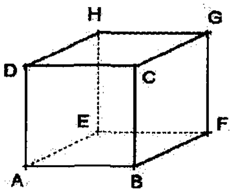
$=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA})=2\overrightarrow{DB}$

Donc $\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{DB}$ (1)

- Un raisonnement analogue donne : $\overrightarrow{CS}-\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{RS}=2(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC})=2\overrightarrow{DB}$ (2)

D'après (1) et (2) : $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{RS}$. donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Exercice 3



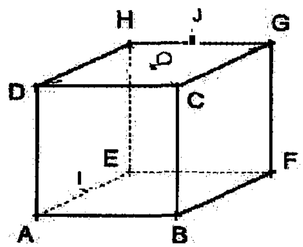
- $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}\Rightarrow P=E$
- $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow Q=C$
- $\overrightarrow{DR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GB})$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HG}+\underbrace{\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}\right)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}$$

on aura : $\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow R=C$

Exercice 4

1) a) dans le triangle CGH on a : $\begin{cases}O \text{ milieu de } [HC]\\ J \text{ milieu de } [HG]\end{cases}$ donc $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$



Comme $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$, on aura $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AI}$

Par suite $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI}$ d'où $\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AO}$

Ce qui donne : $\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AO}$,il résulte $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AO}$

b) A et O sont deux points de plan (ACH)

D'où $(AO)\subset(ACH)$

Ainsi $(IJ)//(AO)$ et $(AO)\subset(ACH)\Rightarrow(IJ)//(A\,CH)$

2) on a : O est le milieu de segment $[HC]$ donc $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}=2\,\overrightarrow{AO}$

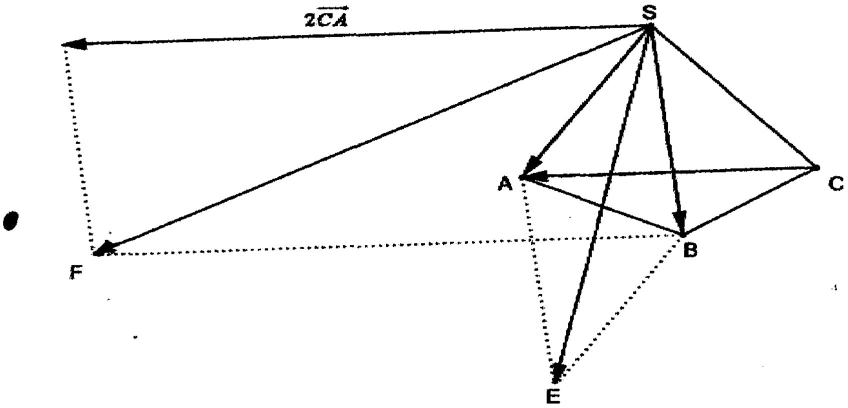
Et puisque $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AO}$ alors on aura : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH})$

3)* $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AO}$ donc $\mathscr{D}(O,\overrightarrow{IJ})$ est la droite (AO)

* $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AF}$ donc $\mathcal{D}(G, \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{OF})$ est la droite menée de G

et de vecteur directeur $\overrightarrow{AF}$ d'où : $\mathcal{D}\ (G, \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{OF}) = (DG)$

Exercice 5



Rappelons que : $\mathcal{D}(A, \vec{u}) \,//\, P(B, \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow$ La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

On a : * $\overrightarrow{SF} - \overrightarrow{SE} = \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{EF}$

* $\overrightarrow{SF} - \overrightarrow{SE} = 2\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = 2\,\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{SA} + \underbrace{\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SB}}_{\vec{0}} = 2\,\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{SA}$

Ainsi $\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{SA}$ ce qui prouve que la famille $\{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}\}$ est liée

Comme $\overrightarrow{CA}$ *et* $\overrightarrow{SA}$ sont deux vecteurs de plan (SAC) alors (EF) *et* (SAC) sont parallèles

Exercice 6

A, B, C et D quatre points non coplanaires, T un point de l'espace

$$2\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AT} + (\overrightarrow{CT} + \overrightarrow{TB}) = (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB}) + 4\,\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{CT} = 4\,\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CT} = 4\,\overrightarrow{AD} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AT} = 4\,\overrightarrow{AD}$$

ce qui donne $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AT} - 4\,\overrightarrow{AD}$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement dépendants ce qui prouve que les quatre points A, C, D et T sont coplanaires.

Exercice 7

1) Dans le triangle SAB on a : $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3}$, d'après la réciproque de théorème

de Thales on a : (MN) et (BC) sont parallèles

Or on sait que $ABCD$ est un parallélogramme d'où $(BC) // ((AD)$

Ainsi on aura : $(MN) // (AD)$

Comme (AD) est une droite du plan (SAD) il résulte (MN) et (SAD) sont parallèles

Ou bien :* $\overrightarrow{AD}, et\ \overrightarrow{AS}$ sont deux vecteurs de plan (SAD)

* $\overrightarrow{MN}$ est un vecteur de la droite (MN)

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \underbrace{(0 \times \overrightarrow{AS})}_{\vec{0}} \text{ donc la famille } \{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}\} \text{ est liée}$$

D'où $\boxed{(MN) \text{ et } (SAD) \text{ sont parallèles}}$

2) * $\overrightarrow{AD}, et\ \overrightarrow{AS}$ sont deux vecteurs de plan (SAD)

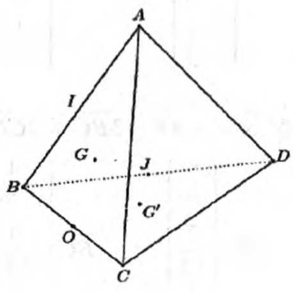
* $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont deux vecteurs de plan (MNP)

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \underbrace{(0 \times \overrightarrow{AS})}_{\vec{0}} \text{ donc la famille } \{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}\} \text{ est liée } (1)$$

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \underbrace{(0 \times \overrightarrow{AD})}_{\vec{0}} \text{ donc la famille } \{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}\} \text{ est liée } (2)$$

Conclusion (SAD) et (MNP) sont deux plans parallèles.

Exercice 8



1) On a : G' est le centre de gravité de triangle BCD

donc : $\overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC}\right) + \left(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GD}\right) = \vec{0}$

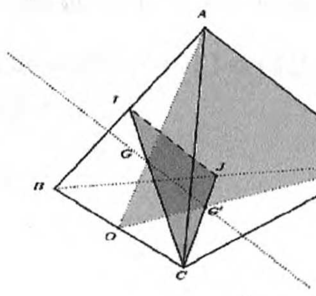
$\Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG'}$

$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GG'}$ (G centre de gravité de triangle ABC)

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{GG'}$

2) On peut tout d'abord percevoir que (OAD) et (CIJ)

ne sont pas parallèles



* $(AD)//(GG')$ et $(AD) \subset (OAD)$ d'où $(GG')//(OAD)$ **(1)**

*dans le triangle AOD on a : $(IJ)//(AD) \Rightarrow (IJ)//(GG')$

et $(IJ) \subset (CIJ)$ d'où $(GG')//(CIJ)$ **(2)**

On sait que G est un point de la médiane issue de C dans le triangle ABC

D'où $G \in (IC) \subset (CIJ)$ et d'après (1) on aura $(GG') \subset (CIJ)$ **(3)**

de même $G \in (OA) \subset (OAD)$ et le résultat (2) prouve que : $(GG') \subset (OAD)$ **(4)**

Finalement d'après **(3)** et **(4)** (OAD) et (CIJ) se coupent suivant la droite (GG')

Exercice 9

1)

2) F ???

⊕ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{12} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow 2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{d' où} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

⊕ $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CA}$

$$2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow 2\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{d' où} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{20} \\ 0 \end{pmatrix}$$

⊕ $\vec{w} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}$

$$(-\overrightarrow{AB})\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \longrightarrow (-3\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow 2\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d' où} \quad \vec{w}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{13}{15} \\ \frac{11}{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 10

a) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 441 \neq 0$

Donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace

b)

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{vmatrix} = (-\frac{\sqrt{3}}{3})\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{vmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{vmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{vmatrix}$$

$$= (-\frac{\sqrt{3}}{3}) \times \frac{\sqrt{12}}{6} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{12}}{6} = 0$$

Donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ n'est pas une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace

Exercice 11

1) * $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ d'où $H(0,1,1)$

* $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} =$ d'où $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

* $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ d'où $J(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

2) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-2)\overrightarrow{IJ}$ donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires

3) la famille $\{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\}$ est liée et $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires d'où $\{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\}$ est une famille liée ce qui prouve que $(IJ)//(ADE)$

4) E est un point commun des plans (ADE) et (EIJ) donc ils ne sont pas strictement parallèles

les familles $\{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EI}\}$ et $\{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EJ}\}$ sont libres d'où les deux plans (ADE) et (EIJ) sont sécants suivant une droite Δ passant par E de vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice 12 **Remarque :** changer (G par G_1)

1) $ABCDEFG_1H$ **est un parallélépipède**

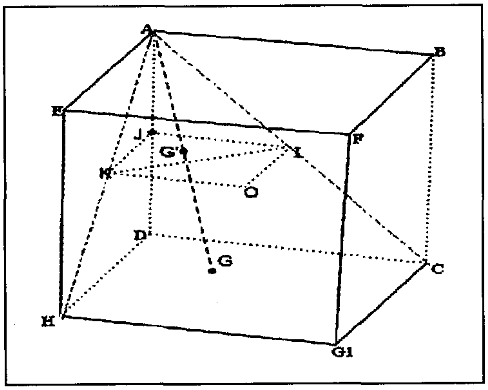
− G est le centre de gravité de triangle DHC . Donc : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{AG}$

− G' est le centre de gravité de triangle IJK . Donc : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AG'}$

Et comme : $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AK}$

D'où : $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH})=2(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AK})\Longrightarrow 3\overrightarrow{AG}=2\times(3\overrightarrow{AG'})$

Il résulte $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AG'}$



2)* dans le triangle AHD on a : $\overrightarrow{HD}=2\,\overrightarrow{KJ}$

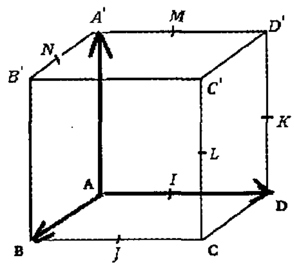
*dans le triangle AEC on a : $\overrightarrow{EA}=2\,\overrightarrow{OI}$

Puisque $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{EA}$ alors $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{KJ}$

Ce qui prouve que $OIJK$ est un parallélogramme .

Exercice 13

On rapporte l'espace au repère cartésien $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'})$.



1) * $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

* $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ donc $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

* $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ donc $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AL})=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}-0+\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\neq 0$$

Donc A , J , K et L ne sont pas coplanaires

2) * $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MD'}+\overrightarrow{D'D}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}$ donc $\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$

* $\overrightarrow{MB'}=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B'}=\left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{MB'}\begin{pmatrix}1\\ (-\frac{1}{2})\\ 0\end{pmatrix}$

$* \ \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{MJ}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\det\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB'},\overrightarrow{MJ}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2}\right) & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2}\right) \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Donc M, D, B' et J sont pas coplanaires

3) le point O n'est pas défini.

Exercice 14

1) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -18 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -18 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -18 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

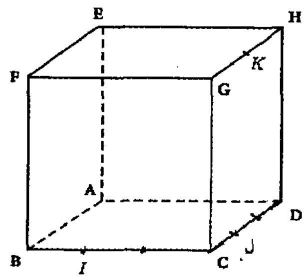
$= -28 + 30 - 2 = 0$

Donc $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont linéairement dépendants

2) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}4\\-2\\-18\end{pmatrix} = \vec{w}$ et puisque $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont linéairement dépendants alors le point M est un point du plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 15

1) a) pour $n = 2$ on a : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$



b) • $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

• $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ Car $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CD}$

c) *on a* : $\frac{2}{3}\overrightarrow{FK} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{FK}$ Sont colinéaires d'où I, J, F et K sont coplanaires

2) $n \in \mathbb{N}^*$

- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = -\frac{1}{n+1}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{n+1}\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{n}{n+1}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{n+1}\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{n}\overrightarrow{CD}$

On a $\frac{n}{n+1}\overrightarrow{FK} = \frac{n}{n+1}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{n}\overrightarrow{CD}\right) = \frac{n}{n+1}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{n+1}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{FK}$ Sont colinéaires d'où I, J, F et K sont coplanaires pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 16 (les coordonnés de D (0,4,4))

$A(1,3,0); B(3,1,0)$; $C(4,4,0)$ et $D(0,4,4)$

1) (**) coordonnées de point I

On a : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$ avec $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$

alors : $\frac{2}{5}\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}\\-\frac{8}{5}\end{pmatrix}$. Donc on aura : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{18}{5}\\\frac{12}{5}\end{pmatrix}$ et par suite $\boxed{I(\frac{2}{5},\frac{18}{5},\frac{12}{5})}$

(**)coordonnées de point J

On a : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$ avec $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

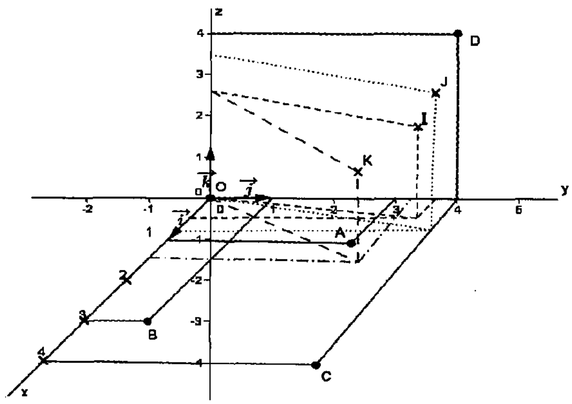
alors : $\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. Donc on aura : $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\4\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}$ et par suite $\boxed{J(\frac{2}{3},4,\frac{10}{3})}$

(**) Coordonnées de point L

On a : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{OD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}$

avec $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}3\\-3\\-4\end{pmatrix}$ *alors* : $\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\-\frac{6}{5}\\-\frac{8}{5}\end{pmatrix}$. Donc on aura : $\overrightarrow{OL}\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{14}{5}\\\frac{12}{5}\end{pmatrix}$ et par suite $\boxed{L(\frac{6}{5},\frac{14}{5},\frac{12}{5})}$

2)

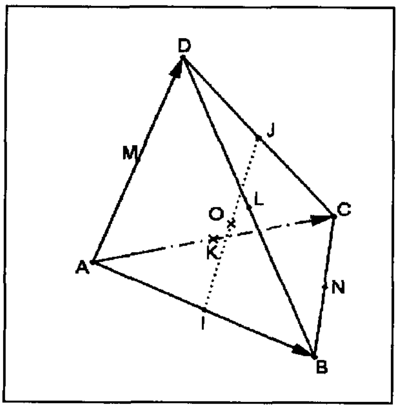


3) $\det(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DL},\overrightarrow{DJ})=\det\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{DA},\frac{2}{5}\overrightarrow{DB},\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}\right)=(\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{6})\times\det(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$

$$=\frac{2}{75}\times\begin{vmatrix}1&3&4\\-1&-3&0\\-4&-4&-4\end{vmatrix}=\frac{2}{75}\times\left(4\begin{vmatrix}-1&-3\\-4&-4\end{vmatrix}-0+(-4)\begin{vmatrix}1&3\\-1&-3\end{vmatrix}\right)=-\frac{64}{75}\neq 0$$

Donc I, J, L et D ne sont pas coplanaires

Exercice 17



On considère le repère cartésien $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$

$A(0,0,0)$; $B(1,0,0)$; $C(0,1,0)$ *et* $D(0,0,1)$

- I milieu de $[AB]$ $\Longrightarrow I(\frac{1}{2},0,0)$
- J milieu de $[CD]$ $\Longrightarrow J(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
- K milieu de $[AC]$ $\Longrightarrow K(0,\frac{1}{2},0)$

- L milieu de $[BD]$ $\Rightarrow L(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ - M milieu de $[AD]$ $\Rightarrow M(0,0,\frac{1}{2})$

- N milieu de $[BC]$ $\Rightarrow N(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

1) On a : $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \overrightarrow{MJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ d'où $INJM$ est un parallélogramme

2) a) **erreur : ce sont les données de l'exercice n°7**

b) O milieu de $[IJ]$ $\Rightarrow O(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

On a : $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LK}$ ainsi les deux vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont colinéaires

Ce qui prouve que O , K et L sont alignés il résulte (KL) passe par O .

3) $G\ (x_G, y_G, z_G)$, centre de gravité de triangle BCD , on a par définition :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3} \;\; ; \; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{3} \;\; \text{et} \;\; x_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{1}{3}$$

Donc $G\ (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ par suite :

$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ prouve que $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$ et ce résultat prouve que O , A et G sont alignés

Finalement ,la droite (AG) passe par O.

Exercice 18

1) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 6\end{pmatrix}$

On suppose qu'il existe un réel α tel que : $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\,\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases}-2 = 2\alpha\\ 1 = -2\alpha\\ 3 = 6\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2 = 2\alpha\\ -1 = 2\alpha\\ 1 = 2\alpha\end{cases} \Rightarrow 1 = 2 \quad \text{impossible}$$

Donc il n'existe aucun réel α tel que : $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\overrightarrow{AC}$ ce qui donne : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

D'où A, B et C ne sont pas alignés

2) soit $D(5,x,y)$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\x-2\\y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si l existe un réel α tel que : $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}$

Donc $\begin{cases}4=-2\alpha\\x-2=\alpha\\y+1=3\alpha\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\x=2+\alpha\longrightarrow x=0\\y=3\alpha-1\longrightarrow y=-7\end{cases}$

<u>Conclusion</u> : pour $\begin{cases}x=0\\y=-7\end{cases}$ les points A , B et D sont alignés

3) $E(z,4,3)$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}z-1\\2\\4\end{pmatrix}$

<u>1[er] méthode</u>

A , B , C et E sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=0$

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\begin{vmatrix}-2&2&z-1\\1&-1&2\\3&6&4\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}-1&2\\6&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&z-1\\6&4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&z-1\\-1&2\end{vmatrix}$$

$$=27+9z=0\Longrightarrow\boxed{z=-3}$$

<u>Conclusion</u> : A , B , C et E sont coplanaires pour $z=-3$

<u>2[éme] méthode</u>

A, B , C et E sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β vérifiant :

$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ se traduit par le système : $\begin{cases}z-1=-\alpha+2\beta & (L_1)\\2=\alpha-\beta & (L_2)\\4=3\alpha+6\beta & (L_3)\end{cases}$

Or : $6\times(L_2)+(L_3)\Longrightarrow\alpha=\frac{16}{9}$, on remplace cette valeur de α dans la ligne (L_2) il résulte

$\beta=-\frac{2}{9}$ Ainsi on trouve $z=-3$

Exercice 19

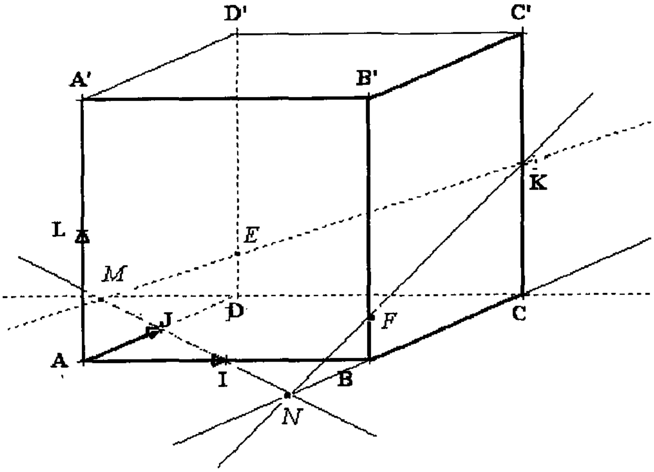
1) dans le repère $(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AL})$ on a :

$A(0,0,0)$; $I(1,0,0)$; $J(0,1,0)$; $L(0,0,1)$;

$B(2,0,0)$; $C(2,2,0)$; $D(0,2,0)$

$A'(0,0,2)$; $B'(2,0,2)$; $C'(2,2,2)$ *et* $D'(0,2,2)$

2) figure :



3) • $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ il est clair que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires

* d'où (IJ) *et* (CD) sont non parallèles **(1)**

* $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{IJ}$ d'où $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires par suite $I\,,J$ *et* M sont alignés d'où $M \in (IJ)$ **(2)**

* $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ d'où $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires par suite C, D *et* M sont alignés d'où $M \in (CD)$ **(3)**

<u>Conclusion</u> les résultats **(1) +(2) +(3)** nous donne : (CD) et (IJ) sont sécantes en M

• $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow$ $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (4)

* d'où (IJ) *et* (BC) sont non parallèles **(4)**

* $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -\overrightarrow{IJ}$ d'où $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont colinéaires par suite $I\,,J$ *et* N sont alignés d'où $N \in (IJ)$ **(5)**

*$\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont colinéaires par suite B, C *et* N sont alignés d'où $N \in (BC)$ **(6)**

Conclusion les résultats **(4) +(5) +(6)** nous donne : (BC) et (IJ) sont sécantes en N

4) voir figure dans la question la deuxième question

5) a) (*) dans le triangle MCK : $(ED)\ //(CK)$ d'où d'après le théorème de Thales on a $\dfrac{MD}{MC}=\dfrac{ED}{CK}$

Or $\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow MD=1$ et $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow MC=3$ il résulte $\dfrac{1}{3}=\dfrac{ED}{CK}$ et $\boxed{\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CK}}$

(*) de même dans le triangle NCK : $(BF)\ //(CK)$ d'où $\dfrac{NB}{MC}=\dfrac{BF}{CK}=\dfrac{1}{3}$ $\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CK}}$

b) Coordonnées de E :

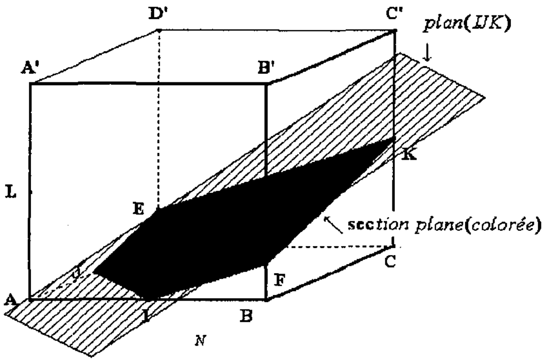
- $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AL}$

Donc $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AJ}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AL} \Rightarrow E(0,2,\dfrac{1}{3})$

Coordonnées de E :

- De même $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CK} \Rightarrow F(2,0,\dfrac{1}{3})$

6) surface engendré par le pentagone $IJEKF$



QCM/

1) $\vec{w} = -2\vec{v} \longrightarrow$ (c)

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (-2\vec{u}) = -2(\vec{u} \cdot \vec{u}) = -2\|\vec{u}\|^2 \longrightarrow$ (b)

3) $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|(-2\vec{w}) + \vec{w}\| = \|-\vec{w}\| = \|\vec{w}\| \longrightarrow$ (a)

4) on a : $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \perp \vec{w}$ donc $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 2\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) = 0 + 2 \times 0 = 0 \longrightarrow$ (a)

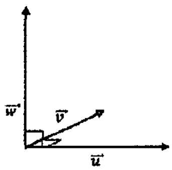
5) $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ donc $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 2\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0 + 2\|\vec{u}\|^2 = 2 \longrightarrow$ (b)

Vrai – Faux

1) **faux**

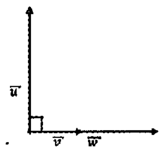
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ Base orthogonale : on a $\vec{u}$ est orthogonale à $\vec{w}$

et $\vec{v}$ est orthogonale à $\vec{w}$ Mais $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



2) **Faux**

Le cas ou $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas une base de $\mathcal{E}$



3) **Vrai**

Pour qu'une droite soit parallèle à un plan il suffit de prouver qu'un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan qui sont orthogonaux c'est le cas dans cette proposition.

4) **Faux.** <u>**th**</u> : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{O}$

5) **Faux**

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base directe de $\mathcal{E}$, posons : $\vec{u} = \vec{i}$; $\vec{v} = \vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$

On a : : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{i}}_{\vec{0}} + \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

Ainsi : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ et $\vec{v} \neq \vec{w}$

Mobiliser ses compétences :

Situation1

1) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ on a

$* \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ donc $\boxed{I(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

$* \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{J(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)}$

$* \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ donc $\boxed{K(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})}$

$* \overrightarrow{AI'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ donc $\boxed{I'(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

$* \overrightarrow{AJ'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'J'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'D'}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ donc $\boxed{J'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)}$

$* \overrightarrow{AK'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK'} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ donc $\boxed{K'(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})}$

2) $* \ I'J = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 0^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad *JK' = \sqrt{0 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$* \ I'K' = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$I'J = JK' = I'K'$ Prouve que $I'JK'$ est un triangle équilatéral

3) $* \ IJ = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 0 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad *IK = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

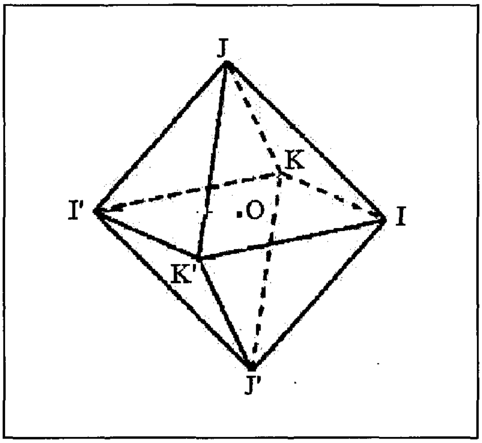
$* \ JK = \sqrt{0^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$IJ = IK = JK$ Prouve que IJK est un triangle équilatéral

Même calculs pour les 6 autres faces.

4) On a $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

donc $\boxed{O(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$



- $\begin{cases} \frac{x_{I'}+x_I}{2} = \frac{1}{2} = x_O \\ \frac{y_{I'}+y_I}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} = y_O \\ \frac{z_{I'}+z_I}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} = z_O \\ \Rightarrow O \text{ est le milieu de } [II'] \end{cases}$

- $\begin{cases} \frac{x_{J'}+x_J}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2} = x_O \\ \frac{y_{J'}+y_J}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} = y_O \\ \frac{z_{J'}+z_J}{2} = \frac{1}{2} = z_O \\ \Rightarrow O \text{ est le milieu de } [JJ'] \end{cases}$

- On démontre de même que O est le milieu de $[KK']$

<u>Conclusion</u> $[II']$; $[JJ']$ et $[KK']$ se coupent en leur milieu

5)* $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK'}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IK} \bullet \overrightarrow{IK'} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

* $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{JK'}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{JK} \bullet \overrightarrow{JK'} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

6) on sait que : - $[II']$ et $[KK']$ se coupent en leur milieu d'où $IKI'K'$ est parallélogramme (1)

- $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{IK'} = 0 \Longrightarrow K\hat{I}K'$ est un angle droit (2)

- $IK = IK'$ (deux cotés consécutifs isométriques) (3)

(1) + (2) +(3) signifie que le quadrilatère $IKI'K'$ est un carré

De même le quadrilatère $JKJ'K'$ est un carré

7) * $\overrightarrow{JJ'}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{II'}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{JJ'}\bullet\overrightarrow{II'}=0$ * $\overrightarrow{KK'}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{II'}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{II'}\bullet\overrightarrow{KK'}=0$

8) l'octaèdre $IJKI'J'K'$ est constitué de quatre tétraèdres isométriques $IJKK'$, $JI'KK'$, $IJ'KK'$ et $I'J'KK'$ donc son volume $\mathbb{V}$ est 4 fois le volume $\mathbb{v}$ de tétraèdre $IJKK'$

$$\text{Or : } \mathbb{v} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK})\cdot\overrightarrow{Ik'}\right| \text{ avec } \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \;;\; \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{IK'}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}$$

$$\text{D'où } \mathbb{V} = 4\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

<u>Ou bien</u> : l'octaèdre $IJKI'J'K'$ est constitué de deux pyramides isométriques $JIKI'K'$ et $J'IKI'K'$

Donc son volume $\mathbb{V}$ est 2 fois le volume **v_1** de pyramide $JIKI'K'$

$$\text{Or : } \mathbf{v_1}=\frac{\overbrace{surface(base)}^{\nearrow carré}\times hauteur}{3}=\frac{Aire(IKI'K')\times OJ}{3}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{12}$$

$$\text{Donc } \mathbb{V} = 2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

<u>Situation2</u>

1) dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'})$ on a

$*\ \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB'}$ donc $\boxed{I(\frac{3}{4},0,0)}$ $*\ \overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{L(0,\frac{3}{4},0)}$

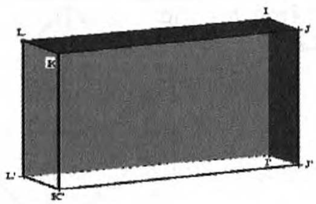
$*\ \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{J(1,\frac{1}{4},0)}$ $*\ \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\boxed{K(\frac{1}{4},1,0)}$

$*\ \overrightarrow{AI'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\boxed{I'(\frac{3}{4},0,1)}$ $*\ \overrightarrow{AJ'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{J'(1,\frac{1}{4},1)}$

$*\ \overrightarrow{AK'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\boxed{K'(\frac{1}{4},1,1)}$ $*\ \overrightarrow{AL'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ donc $\boxed{L'(0,\frac{3}{4},1)}$

2) On va montrer que trois faces consécutives de polyèdre $IJKLI'J'K'L'$ sont des parallélogrammes

Par exemple on va choisir les faces : $IJKL$, $ILL'I'$ et $IJJ'I'$



* $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ 0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$

donc $IJKL$ est un parallélogramme

* $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\\ 0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{I'L'}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IL}=\overrightarrow{I'L'}$

donc $ILL'I'$ est un parallélogramme

* de même $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{I'J'}$

donc $IJJ'I'$ est un parallélogramme

La notion de parallélépipède est la généralisation à l'espace de celle de <u>parallélogramme</u>.
Un parallélépipède est un polyèdre à 6 faces (hexaèdre) se regroupant en 3 couples de faces parallèles.
C'est un <u>paralléloèdre</u>, mais ce n'est pas le seul.
Un parallélépipède a toutes ses faces <u>parallélogrammiques</u>, mais la condition n'est pas suffisante
(*cf. par exemple le <u>dodécaèdre rhombique</u> dont les faces sont des losanges).Un parallélépipède dont les faces sont des losanges est appelé un *rhomboèdre*
*CNS : parallélépipède dont toutes les arêtes ont même longueur, ou bien toutes les faces sont isométriques.
Un parallélépipède à face contiguës orthogonales est dit *rectangle*

Il résulte $IJKLI'J'K'L'$ est un parallélépipède

3) * $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ 0\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\\ 0\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow \overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{IL}$

Ainsi $IJKl$ est un parallélogramme et l'angle $J\hat{I}K$ est droit donc c'est un rectangle

* $\overrightarrow{I'J'}\cdot\overrightarrow{I'L'}=0 \Longrightarrow \overrightarrow{I'J'}\perp\overrightarrow{I'L'}$

Par suite $I'J'K'L'$ est un parallélogramme dont l'angle $L'\hat{I'}K'$ est droit donc c'est un rectangle

4) $\overrightarrow{II'}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{I'J'}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ 0\end{pmatrix}=0$ et $\overrightarrow{II'}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{I'L'}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\\ 0\end{pmatrix}=0$

Donc $\overrightarrow{II'}\perp\overrightarrow{I'L'}$ et $\overrightarrow{II'}\perp\overrightarrow{I'J'}$ donc $\overrightarrow{II'}$ est normal au plan $(I'J'K')$.

5) dans le parallélépipède $IJKLI'J'K'L'$ on a : $I'J'K'L'$ est un rectangle l'arrête (II')est perpendiculaire à la face $I'J'K'L'$ donc c'est un parallélépipède rectangle

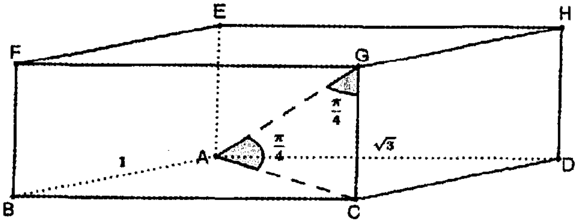
<u>Situation3</u>

$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ n'est pas toujours vraie car le produit vectoriel n'est pas associative

Par exemple pour : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ on a : $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=-\vec{j}+\vec{k}\neq\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=\vec{i}-\vec{j}$

Exercices

Exercice 1



1) a) (CG) est perpendiculaire au plan (ABC) et (AC) une droite de ce plan donc $(CG) \perp (AC)$

Donc $A\hat{C}G = \frac{\pi}{2}$ ce qui prouve que le triangle $\underline{ACG \text{ est rectangle en } C}$

Dans le triangle ACG on a : $A\hat{C}G + C\hat{A}G + A\hat{G}C = \pi \Longrightarrow A\hat{G}C = \pi - (A\hat{C}G + C\hat{A}G)$

$\Longrightarrow A\hat{G}C = \pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) \Longrightarrow A\hat{G}C = \frac{\pi}{4}$ D'où $A\hat{G}C = A\hat{C}G$ ainsi $\underline{ACG \text{ est isocèle en } C}$

b) d'après le théorème de Pythagore on a : $AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2 \times AC^2$

Or dans le triangle ACD rectangle en D on a : $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4$

Par suite on aura : $AG^2 = 8$ donc $AG = 2\sqrt{2}$

Ou bien : on a : $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4 \Longrightarrow AC = 2$

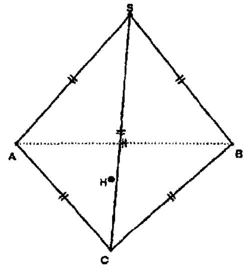
et d'après la loi de sinus dans le triangle ACG on a : $\dfrac{AC}{\sin\frac{\pi}{4}} = AG \Rightarrow AG = 2\sqrt{2}$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}) = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH}}_{0} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG}}_{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cosB\hat{A}C = 1 \Longrightarrow cosB\hat{A}C = \frac{1}{2}$. Donc $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$

Exercice 2



1) On a :

$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = HA \times HB \times \cos(A\widehat{H}B)$

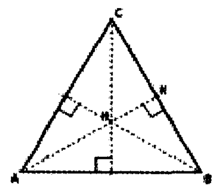
$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = HB \times HC \times \cos(B\widehat{H}C)$

$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = HC \times HA \times \cos(A\widehat{H}C)$

Or on sait que ABC est un triangle équilatéral

Donc $HA = HB = HC$ et $A\widehat{H}H = A\widehat{H}C = B\widehat{H}C = \dfrac{2\pi}{3}$

D'où $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$



Remarque

Soit K le milieu de $[AB]$ on a : $AK = \dfrac{\sqrt{3}}{2} AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

H est le centre de gravité de BC , on aura : $AH = \dfrac{2}{3} AK = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = HA \times HB \times \cos(A\widehat{H}B) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cos(\dfrac{2\pi}{3}) = -\dfrac{1}{6}$

2) a) (SH) est l'axe de cercle circonscrit au triangle ABC

b) $* \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{HA} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HA}) \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA} = 0 + AH^2 = \dfrac{1}{3}$ car $\overrightarrow{SH} \perp \overrightarrow{AH}$

$* \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{HB} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HB} = BH^2 = \dfrac{1}{3}$

$* \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{HC} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HC}) \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC} = CH^2 = \dfrac{1}{3}$

Exercice 3

1) a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$

$= -CA \times CD \times \cos(A\hat{C}D) + CB \times CD \times \cos(B\hat{C}D)$

On a : $CA = CB$ et $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ car ABC et BCD sont deux triangles équilatéraux isométriques

Ainsi : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

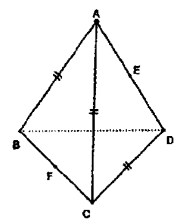
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ d'où (AB) et (CD) sont deux droites orthogonales

2) a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ (1) (relation de Chasles)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$ (2)

$AB = AC = AD = BD = BC = DC$



On additionne membre à membre les égalités (1) et (2)

$$2\overrightarrow{EF} = \underbrace{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BF}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

D'où $\boxed{\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})}$

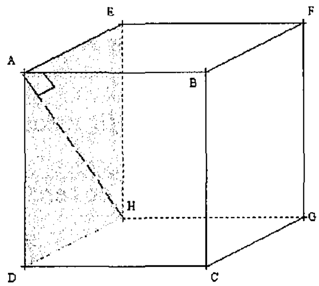
b) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC}] = \frac{1}{2}[-\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}]$

$$= \frac{1}{2}[-BA \times BC \times \cos(A\hat{B}C) + CB \times CD \times \cos(B\hat{C}D)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-BC^2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + CB^2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$$

Ainsi : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{BC}$ d'où (EF) et (BC) sont orthogonales.

Exercice 4



1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ car $(AB) \perp (AEH)$ et $(AH) \subset (AEH)$

2) a) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \cdot \overrightarrow{AH} = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}_{0} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH}$ Car $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$

$= AE \times AH \times \cos(E\hat{A}H) = AE \times AH \times cos\,(\frac{\pi}{4})$

$= AB \times (\sqrt{2}AB) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$

b) d'une part on a : $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = AB^2$

D'autre part : $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = AF \times AH \times \cos(F\hat{A}H) = (\sqrt{2}AB) \times (\sqrt{2}AB) \times \cos(F\hat{A}H)$

$= 2AB^2 \times \cos(F\hat{A}H)$

D'où $AB^2 = 2AB^2 \times \cos(F\hat{A}H) \Longrightarrow \cos(F\hat{A}H) = \frac{1}{2}$

Exercice 5

$$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2 \Leftrightarrow CA^2 - CB^2 - (DA^2 - DB^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD}$$

<u>conclusion :</u> (BA) orthogonale à (CD) <u>si et seulement si</u> $(CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2)$

Exercice 6

On sait que : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Donc : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 4(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Il résulte : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Exercice 7

a)* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{17}$ et $BC = \sqrt{30}$

* $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{BA \times BC} = \dfrac{9}{\sqrt{5} \times \sqrt{30}} = \dfrac{9}{5\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{10}$ avec $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 - 1 + 10 = 9$

donc $A\hat{B}C = 0{,}75\ rd$

* $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \dfrac{21}{\sqrt{17} \times \sqrt{30}}$ avec $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 + 2 + 15 = 21$

donc $A\widehat{CB} \cong 0{,}377\ rd$

$$* \cos(B\widehat{A}C) = \frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{-4}{\sqrt{5}\times\sqrt{17}} \quad \text{avec } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\bullet\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix} = 0+2-6=-4$$

donc $B\hat{A}C \cong 2{,}02\ rd$

b) $*\ AB=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$; $AC=\sqrt{49}=7$ et $BC=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$* \cos(A\widehat{B}C) = \frac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \frac{-1}{3\sqrt{5}\times\sqrt{2}} = \frac{-1}{3\sqrt{10}} \quad \text{donc } A\hat{B}C \cong 1{,}676\ rd$$

$$* \cos(A\widehat{C}B) = \frac{\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}}{CA\times CB} = \frac{3}{7\sqrt{2}} \quad \text{donc } A\widehat{C}B \cong 1{,}263\ rd$$

$$* \cos(B\widehat{A}C) = \frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{46}{3\sqrt{5}\times 7} = \frac{46}{21\sqrt{5}} \quad \text{donc } B\hat{A}C \cong 0{,}202\ rd$$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{5}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} \Rightarrow AC = \sqrt{10}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{13}$

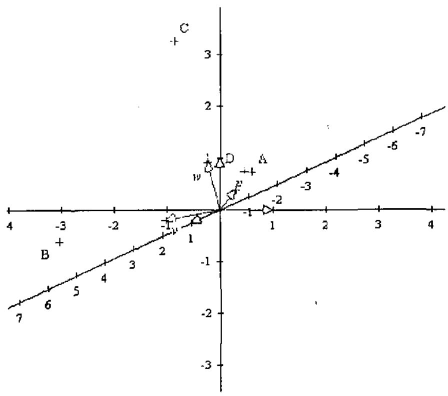
$$* \cos(A\widehat{B}C) = \frac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}}{AB\times BC} = \frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \quad \text{donc } A\hat{B}C \cong 1{,}051$$

$$* \cos(A\widehat{C}B) = \frac{\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}}{CA\times CB} = \frac{9}{\sqrt{10}\times\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}} \quad \text{donc } A\widehat{C}B \cong 0{,}661$$

$$* \cos(B\widehat{A}C) = \frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} \quad \text{donc } B\hat{A}C \cong 1{,}429\ rd$$

Exercice 8

1) Figure



2) a) dans la base $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\det_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\frac{1}{3}\overrightarrow{OB},\frac{1}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}\right)=\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)\times\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)\begin{vmatrix}1 & \sqrt{6} & -1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{12\sqrt{3}}\left\{\begin{vmatrix}\sqrt{6} & -1\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2}\end{vmatrix}-0+3\times\begin{vmatrix}1 & \sqrt{6}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)\times\left[(-\sqrt{12}-\sqrt{3})+3(-\sqrt{3}-\sqrt{12})\right]=\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)\times\left[-12\sqrt{3}\right]=-1\neq 0$$

D'où le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ défini une base de l'ensemble des vecteurs.

De plus on a :

$$\|\vec{u}\|=\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+2+1}=1\ ;\ \|\vec{v}\|=\left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{3}\sqrt{6+3+0}=1\ ;\ \|\vec{w}\|=\left\|\frac{1}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}\right\|=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{1+2+9}=1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{6}\times(\sqrt{6}-\sqrt{6})=0\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\times(-1-2+3)=0\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{w}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{6\sqrt{3}}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{6\sqrt{3}}\times(-\sqrt{6}+\sqrt{6})=0\Rightarrow\vec{v}\perp\vec{w}$$

conclusion : $[\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1\,]$ *et* $[\vec{u}\perp\vec{v}\,;\ \vec{u}\perp\vec{w}\,;\ \vec{w}\perp\vec{v}]$

donc $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est un repère orthonormé de l'espace

b)

On a : $\begin{cases}2\vec{u}=\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k}\ (1)\\ \sqrt{6}\vec{v}=\frac{\sqrt{6}}{3}\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}\quad(2)\\ (2\sqrt{3})\vec{w}=\overrightarrow{OC}=-\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}+3\vec{k}\ (3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)+(3)\Rightarrow\boxed{\vec{k}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{w}}\\ (1)+(2)\Rightarrow 2\vec{u}+\sqrt{6}\vec{v}=3\vec{i}+\vec{k}\Rightarrow\boxed{\vec{i}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{\sqrt{6}}{3}\vec{v}-\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{w}}\\ \text{l'équation (2)}\Rightarrow\boxed{\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{v}-\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{w}}\end{cases}$

On sait que : $\overrightarrow{OD}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\vec{u}+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}\right)\vec{v}+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\vec{w}$

d'où dans le repére $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$: $\boxed{D\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\right)}$

Exercice 9

1) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0\\0\\x\end{pmatrix};\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-x\\x\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix}-x\\x\\x\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$; $\overrightarrow{MQ}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ c'est-à-dire $\{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}\}$ est liée ce qui prouve que M,N,P et Q sont coplanaires.

2) $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$: Donc $MNPQ$ est un parallélogramme (1)

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=0$: Donc $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{MP}$ (2)

<u>Conclusion</u> : (1) et (2) prouvent que $MNPQ$ est un rectangle

3) un carré est un rectangle ayant deux cotés consécutifs isométriques ainsi :

$\begin{cases} MP = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}.|x| = x.\sqrt{2} \\ MN = |x| = x \end{cases}$ $puisque\ x \neq 0\ on\ a\ :\ MN = MP \Longrightarrow \sqrt{2} = 1\ (impossible\ )$

Par suite il n'existe aucune valeur de x pour laquelle $MNPQ$ soit un carré.

4) $S(x) = MN \times MP = \sqrt{2}x^2$ et $0 < x \leq 1 \rightarrow$ $\underline{(remplacé\ < par\ \leq)}$

$S(x)$ est maximal pour $x = 1$.

Exercice 10

1) * le triangle ABC est rectangle en A , d'après Le théorème Pythagore on a :

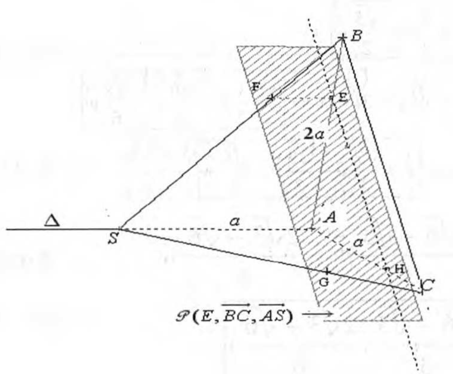
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5a^2$ D'où $BC = \sqrt{5}a$

* la droite (AS) est perpendiculaire au plan (ABC) et (AB) est une droite de ce plan Donc $(AS) \perp (AB)$,ainsi ABS est un triangle rectangle en A d'où $SB^2 = AS^2 + AB^2 = 5a^2 \Longrightarrow SB = \sqrt{5}a$

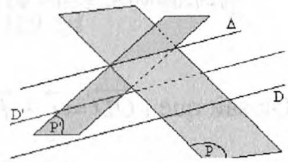
* de même le triangle ACS est un triangle rectangle en A d'où $SC^2 = AS^2 + AC^2 = 2a^2$

Par suite $SC = \sqrt{2}a$

2)



Théorème du toit : soient P et P' Deux plans contenant respectivement deux droites parallèles D et D'. Si P et P' sont sécants alors **leur droite d'intersection Δ est parallèle à D et D'**

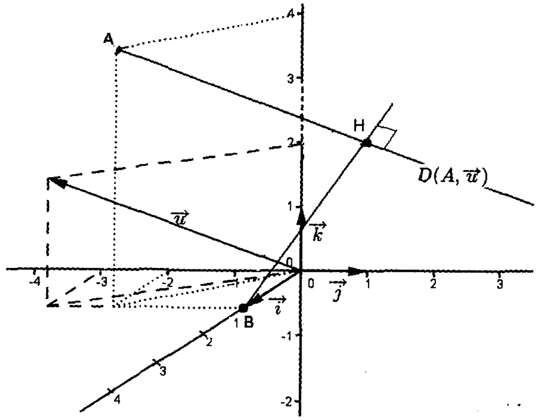


a) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur de plan $\mathscr{P}$ donc il existe une droite D_1 de $\mathscr{P}$ parallèle à (BC) d'où les deux plans (ABC) et $\mathscr{P}$ contenant respectivement deux droites parallèles et (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants suivant la droite (EH) , d'après le <u>théorème de toit</u> il résulte (EH) est parallèle à (BC) et D_1 Ainsi on a montrer que (EH) et (BC) sont parallèles

b) Même démonstration on considère les plans (CBS) et $\mathscr{P}$ qui sont sécants suivant (EG)

Exercice 11

1)



2) posons $H\ (x_H, y_H, z_H)$

H est le projeté orthogonal de B sur $(A, \vec{u})$ donc($\vec{u} \perp \overrightarrow{BH}$) et ($\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)

Ce qui donne : $\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \\ \overrightarrow{AH} = \alpha\ \vec{u}\ ;\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

avec : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix}$, $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ -3\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H + 2 \\ z_H - 4 \end{pmatrix}$

Ainsi les coordonnées de H vérifient le système : $\begin{cases} x_H - 3y_H + 2z_H - 1 = 0 \\ x_H - 1 = \alpha \\ y_H + 2 = -3\alpha \\ z_H - 4 = 2\alpha \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x_H - 3y_H + 2z_H - 1 = 0 \\ x_H - 1 = \alpha \\ y_H + 2 = -3\alpha \\ z_H - 4 = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H - 3y_H + 2z_H - 1 = 0 \quad (1) \\ x_H = 1 + \alpha \\ y_H = -2 - 3\alpha \\ z_H = 4 + 2\alpha \end{cases}$

En remplaçant $x_H, y_H\ et\ z_H$ donc l'équation (1) on obtient : $14 + 14\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$

Par suite H à pour coordonnés (0,1,2)

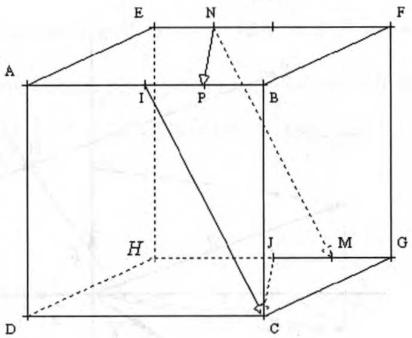
b) $BH = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

<u>Remarque</u> : $BH = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} = \dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{14}} = \sqrt{6}$, avec : $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice 12

1) Voir figure (1)

fig (1)



2) * On a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EN}$$
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$$
$$= \overrightarrow{GE} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EF})$$

Or : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA}$

Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CI}$

** Montrons que : $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{JC}$ (<u>correction</u> : remplacé $\overrightarrow{JP}$ *par* $\overrightarrow{JC}$)

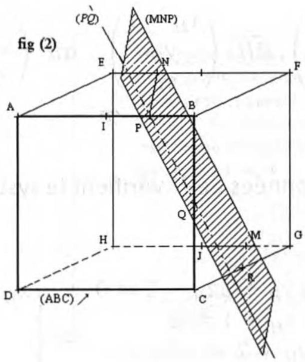
On a : $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{EB}$

Or : $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GH} \Rightarrow \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{HC}$

Donc $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{JC}$

3) on a : * $\begin{cases} P \in (AB) \subset (ABC) \\ P \in (MNP) \\ M \in (MNP) \text{ et } M \notin (ABC) \end{cases}$

fig (2)



Donc *(ABC)* et *(MNP)* sont sécants (1)

* $\begin{cases} P \in (AB) \\ Q \in (BC) \end{cases} \Rightarrow \boxed{(PQ) \subset (ABC)}(2)$

$\begin{cases} P = B * I \\ Q = B * C \end{cases} \Rightarrow (PQ)//(IC)$, or $(MN)//(IC)$ car $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CI}$

$* \Rightarrow (PQ)//(MN) \Rightarrow (PQ)//(MNP)$

et comme $P \in (MNP)$ on aura $\boxed{(PQ) \subset (MNP)}$ (3)

<u>Conclusion</u> : *(ABC)* et *(MNP)* sont sécants suivant la droite *(PQ)* **(fig2)**

4) a) Montrons que la droite (QR) est parallèle à la droite (MP) (**erreur** : remplacer (FC) par (MP) **)**

En effet : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{GM}$ $donc$ $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{GB}$ ainsi $(MP)//(GB)$

Aussi on a : $(QR)//(GB)$ (segment joignant les 2 milieux de deux cotés d'un triangle)

Il résulte : $(QR)//(MP)$

b) $(QR)//(MP)$ et $Q \in (MNP)$ d'où $(QR) \subset (MNP)$

On a alors $\begin{cases}(QR) \subset (MNP)\\ (QR) \subset (FCG)\end{cases}$ donc puisque (MNP) et (FCG) sont sécants leur droite d'intersection est (QR)

5) le plan (MNP) coupe respectivement

Les faces (ABE) ; (ABC) ; $FCG)$; (CGH) et (EFG)

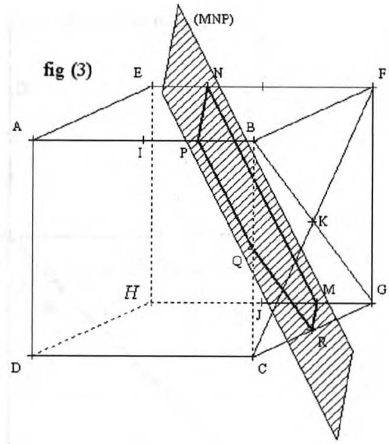
de cube $ABCDEFGH$ en $[NP]$; $[PQ]$; $[QR]$;$[RM]$

et $[NM]$ avec M, N, P, Q et R sont coplanaires

D'où la section plane de cube $ABCDEFGH$ par

le plan (MNP) est le pentagone $MNPQR$ (fig3)

fig (3)



Exercice 13

G barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 3)$ donc $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

G' barycentre de $(C, 1)$ et $(B, 4)$ donc $\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MG'}$

Ainsi $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\|$ d'où $\|5\overrightarrow{MG}\| = \left\|5\overrightarrow{MG'}\right\| \Leftrightarrow MG = MG'$

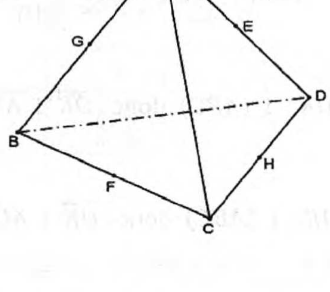
l'ensemble des points M tel que$\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\|$ le plan médiateur du segment $[GG']$

Exercice 14

1) a) Dans le triangle ACD on a : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{EH}$

Dans le triangle BCD on a : $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{HF}$

D'où $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{EH} + 2\overrightarrow{HF} = 2(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HF}) = 2\overrightarrow{EF}$



b) Dans le triangle ABC on a : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{GF}$

Dans le triangle BCD on a : $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{FH}$

D'où $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{FH} = 2(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FH}) = 2\overrightarrow{GH}$

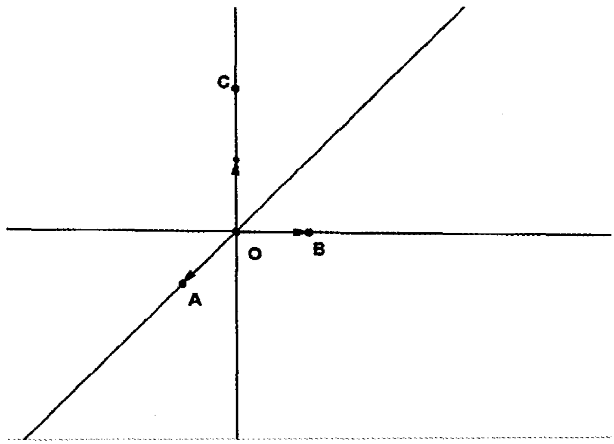
2) $(2\overrightarrow{EF})\cdot(2\overrightarrow{GH}) = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BD}$

$$= AC^2+\overrightarrow{AC}\cdot\Bigg(\underbrace{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}}_{\vec{0}}\Bigg)-\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD} = AC^2+0-BD^2 = AC^2-BD^2$$

D'où $4(\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GH}) = AC^2-BD^2$ ce qui donne : $\boxed{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GH} = \dfrac{AC^2-BD^2}{4}}$

Exercice 15

1)



2) a) $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$ et $C(0,0,2)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-1)^2+0+0 = 1$

b) $\cos(B\widehat{A}C) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$ avec $AB = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

Donc : $\cos(B\widehat{A}C) = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow B\widehat{A}C \simeq 71,56° \simeq 1,25(rd)$

3) a)$(OK)\perp(ABC)$ donc : $\overrightarrow{OK}\perp\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow -x+y=0 \Longrightarrow x=y$

$(OK)\perp(ABC)$ donc : $\overrightarrow{OK}\perp\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow -x+2z=0 \Longrightarrow x=2z$

Finalement on a : $x=y=2z$

b) on a : $K(2z,2z,z)$ d'où $\overrightarrow{KA}\begin{pmatrix}1-2z\\-2z\\-z\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KB}\begin{pmatrix}-2z\\1-2z\\-z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}-2z\\-2z\\2-z\end{pmatrix}$

Ainsi : $\det(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}) = \begin{vmatrix}1-2z & -2z & -2z\\ -2z & 1-2z & -2z\\ -z & -z & 2-z\end{vmatrix}$

$= (1-2z)\begin{vmatrix}1-2z & -2z\\ -z & 2-z\end{vmatrix} - (-2z)\begin{vmatrix}-2z & -2z\\ -z & 2-z\end{vmatrix} + (-z)\begin{vmatrix}-2z & -2z\\ 1-2z & -2z\end{vmatrix}$

$= (1-2z)(2-5z) + 2z(-4z) - 2z^2 = -9z+2$

c) $K \in (ABC)$ donc $\det(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}) = 0$ d'où $-9z+2=0$ ce qui donne $z = \frac{2}{9}$

Par suite $\boxed{K(\frac{4}{9},\frac{4}{9},\frac{2}{9})}$

4) On a : $\overrightarrow{KB}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ \frac{5}{9}\\ -\frac{2}{9}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow (KA)\perp(AC)$

$\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}-\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9}\\ \frac{16}{9}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow (KA)\perp(AB)$

Donc $[KB]et\ [KC]$ sont deux hauteurs dans le triangle ABC issues respectivement de B et C

leur point d'intersection K est donc l'orthocentre de ce triangle

<u>Exercice 16</u>

1) a) $\overrightarrow{v'}\cdot\vec{\imath} = (\lambda\vec{\imath}+\vec{v})\cdot\vec{\imath} = \lambda\|\vec{\imath}\|^2 + \vec{v}\cdot\vec{\imath} = \lambda + \vec{v}\cdot\vec{\imath}$ car $\|\vec{\imath}\| = 1$

$\overrightarrow{v'}$ est orthogonal à $\vec{\imath}$ si et seulement si $\overrightarrow{v'}\cdot\vec{\imath} = 0$ d'où $\lambda + \vec{v}\cdot\vec{\imath} = 0$ donc $\boxed{\lambda = -\vec{v}\cdot\vec{\imath}}$

b) pour $\lambda = -\vec{v}\cdot\vec{\imath}$ on a : $\overrightarrow{v'} = -(\vec{v}\cdot\vec{\imath})\,\vec{\imath} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{v'} \perp \vec{\imath}$ soit donc $\boxed{\vec{\jmath} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v'}\|}\overrightarrow{v'}}$

2) a)* $\overrightarrow{w'}\cdot\vec{\imath} = [\vec{w} - (\vec{\imath}\cdot\vec{w})\vec{\imath} - (\vec{\jmath}\cdot\vec{w})\vec{\jmath}]\cdot\vec{\imath}$

$= \vec{w}\cdot\vec{\imath} - (\vec{\imath}\cdot\vec{w})\cdot\underbrace{\|\vec{\imath}\|^2}_{1} - (\vec{\jmath}\cdot\vec{w})\underbrace{(\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath})}_{0} = \vec{w}\cdot\vec{\imath} - (\vec{\imath}\cdot\vec{w}) = 0$ car $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\vec{\jmath}\perp\vec{\imath}$

$\overrightarrow{w'}\cdot\vec{\imath} = 0$ Signifie $\boxed{\overrightarrow{w'}\perp\vec{\imath}}$

$* \overrightarrow{w'} \cdot \vec{j} = [\vec{w} - (\vec{i} \cdot \vec{w})\vec{i} - (\vec{j} \cdot \vec{w})\vec{j}] \cdot \vec{j} = \vec{w} \cdot \vec{j} - (\vec{i} \cdot \vec{w}) \underbrace{(\vec{i} \cdot \vec{j})}_{0} - (\vec{j} \cdot \vec{w}) \underbrace{\|\vec{j}\|^2}_{1}$

$\overrightarrow{w'} \cdot \vec{i} = \vec{w} \cdot \vec{j} - \vec{j} \cdot \vec{w} = 0$ signifie $\boxed{\overrightarrow{w'} \perp \vec{j}}$

b) pour le vecteur $\boxed{\vec{k} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{w'}\right\|}\overrightarrow{w'}}$ on a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormé de $\mathscr{W}$

Exercice 17

1) $I(x,0,0)$; $J(1,1-x,0)$; $K(1,1,x)$; $L(x,1,1)$; $M(0,1-x,1)$ et $N(0,0,x)$

2) On a : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-x\\1-x\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1-x\\0\\x-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0\\x-1\\x-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LK} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IJ}$

Par suite la famille $\{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{LK}, \overrightarrow{MN}\}$ est liée ce qui prouve que les points I, J, L, K, M et N sont coplanaires

3)

$\frac{AI}{AB} = \frac{AN}{AA'} = x \Rightarrow (NI)//(A'B) \subset (A'BC') \Rightarrow (NI)//(A'BC')$

$\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC} = 1 - x \Rightarrow (IJ)//(AC)//(A'C') \subset (A'BC')$
$\Rightarrow (IJ)//(A'BC')$

PROPRIETE1
Si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

PROPRIETE 2
Si une droite d est parallèle à une droite d'un plan P , alors la droite d est parallèle au plan P .

Donc (NI) et (IJ) sont deux droites sécantes et parallèles au plan $(A'BC')$ alors le plan parallèle à $(A'BC')$ passant par I est le plan (NIJ)

De plus I, J, L, K, M et N sont coplanaires donc ils appartiennent au plan (NIJ)

Le plan (NIJ) coupe respectivement Les 6 faces de cube $ABCDA'B'C'D'$ suivant les segments $[IJ], [JK], [KL], [LM], [MN]$ et $[NI]$

D'où la section plane de cube $ABCDA'B'C'D'$ par le plan (NIJ) est l'hexagone $IJKLMN$

4) a) $IJ = \sqrt{(1-x)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{2}\,|1-x| = \sqrt{2}(1-x)$ car $0 < x < 1$

$JK = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}.x$; $KL = \sqrt{2}(1-x)$

$LM = \sqrt{2}.x$; $MN = \sqrt{2}(1-x)$ et $NI = \sqrt{2}.x$

b) Soit p le périmètre de l'hexagone $IJKLMN$, on a :

$p = IJ + JK + KL + LM + MN + NM = 3\sqrt{2}.(1-x) + 3\sqrt{2}.x = 3\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{p = 3\sqrt{2}}$

5) a) $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1-x\\0\\x-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MJ}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LK}=(1-x)\overrightarrow{MJ}$ par suite $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont colinéaires

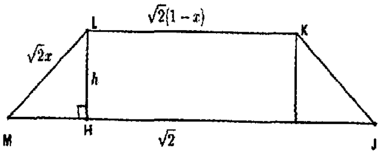
Ainsi $(MJ)//(LK)$ ce qui donne $MLKJ$ est un trapèze

Aussi on a : $ML = JK = \sqrt{2}$

il résulte que: $MLKJ$ est un trapèze isocèle

De même on montre que : (MJ) // (NI) et $IJ = NM$ donc $MJIN$ est un trapèze isocèle

b) • dans le trapèze$MLKJ$ on a :



$KL = \sqrt{2}(1-x) = a : petite\ base$

$MJ = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} = b : grande\ base$

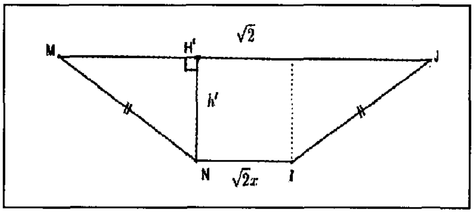
et $KJ = ML = \sqrt{2}.x$

Soit H le projeté orthogonal de L sur (MJ) d'après le théorème de Pythagore on a :

$h^2 = HL^2 = ML^2 - MH^2$ avec $MH = \frac{1}{2}(MJ - LK) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(1-x)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

Donc $h^2 = 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2$ et finalement on aura : $\boxed{h = x.\sqrt{\frac{3}{2}}}$

- De même dans le trapèze$MJIN$ on a :
  H' Le projeté orthogonal de N sur (MJ)



$h'^2 = NH'^2 = MN^2 - MH'^2$

Avec $MH' = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)$

Un calcul analogue au précédemment donne $\boxed{h' = (1-x).\sqrt{\frac{3}{2}}}$

c) aire du trapèze = $\frac{grande\ base + petite\ base}{2} \times hauteur$

On appelle $S_1(x)$ l'aire de trapèze $MLKJ$ et $S_1(x)$ celle de trapèze$MJIN$

On a: $S_1(x) = \frac{\sqrt{2}(1-x)+\sqrt{2}}{2} \times x\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-x)x$ et $S_2(x) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}x}{2} \times (1-x)\sqrt{\frac{3}{2}}$=(1-$x^2$)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}[(2-x)x + 1 - x^2] = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2x^2 + 2x + 1)$

d) $S(x)$est dérivable sur $]0,1[$ (fonction polynôme)

et $S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-4x+2) = \sqrt{3}(-2x+1)$

Or $S'(x) = \sqrt{3}(-2x+1) = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc l'aire $S(x)$ est maximale pour $x = \frac{1}{2}$ est sa valeur vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Exercice 18

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u} \ et \ \vec{w} \perp \vec{v}$$

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v} = (1-\sqrt{2})\vec{u}$ donc tout vecteur orthogonal à l'un deux est orthogonal à l'autre.

On prend par exemple $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et on a $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ donne $a = \sqrt{2}$ d'où $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19

1) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{AC} \wedge (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$$

2) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \wedge (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{CB}$$

$$= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{CB} = \underbrace{\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AC}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AC} + +\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{CB}$$

$$= -\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{CB} = \left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CB}$$

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DC} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AD}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) \wedge \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$$

Exercice 20

1) $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires

Donc l'ensemble des points M chercher est la droite (AB)

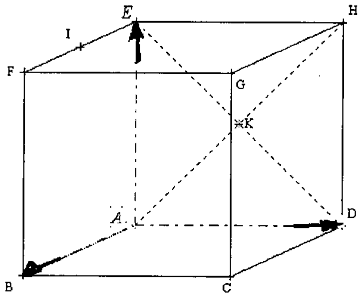
2) $(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\underbrace{\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} + 3\underbrace{\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MB}}_{\vec{0}}$

$= 2\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$

D'où $(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Donc l'ensemble chercher est la droite (AB)

Exercice 21



1) a) $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$ Donc $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\overrightarrow{AB} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\overrightarrow{AD} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ par suite $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Aussi on a : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ donc $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

b) $Aire(IGA) = \frac{1}{2}\|(\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA})\| = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

2) volume $(ABIG) = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}) \cdot \overrightarrow{IB}\right| = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IB}\right| = \frac{1}{6}$ avec $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 22

1) Dans le repère orthonormé direct $\left(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA}\right)$ (à rectifier)

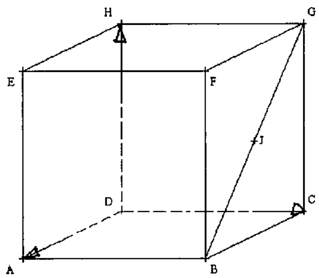
on a donc : $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DH} \wedge \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HD}$

$\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HD}$

2)* $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) \wedge \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC} + \vec{0} = \overrightarrow{DH}$

* $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}\right) = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{DC} \wedge \left(\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right) \\ &= \vec{0} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} \end{aligned}$$

d'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{DK}$

3) $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) \wedge \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}\right) = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) \wedge \left(-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}\right)$

$\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AH} = -\vec{0} + \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DA}$

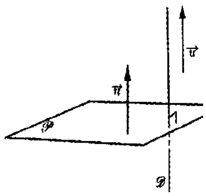
$\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CE}$

QCM/

1) $\vec{u} = -2\vec{v}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ **(b)**

2) $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ vecteur de la droite et de plan ;$A(1,-2,0) \in \mathcal{D}$ et $A \notin \mathcal{P}$ $\longrightarrow$ **(a)**

3) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathcal{P}$



$\mathcal{D}: \begin{cases}2x - y = 2\\2x + z = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = t\\y = -2 + 2t \quad t \in \mathbb{R}\\z = 1 - 2t\end{cases}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ vecteur de $\mathcal{D}$

$\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\longrightarrow$ **(b)**

4) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathcal{P}$: $\vec{n}\cdot\vec{k} = 0 = 0 + 2 \times 0 = 0$ $\longrightarrow$ **(c)**

5) $\longrightarrow$ **(c)** (voir (3) question)

Vrai – Faux

1) **faux**

Si $a = b = c = 0$ C'est l'ensemble vide$(si\ d \neq 0)$ ou tout point de l'espace $(si\ d = 0)$

2) **faux** même justification que la question précédente

ou bien :lorsque les deux plans sont parallèles.

L'équation : *ax + by + cz + d = 0* ou (a ; b; c) $\neq$(0 ; 0 ; 0) est appelée une équation cartésienne du plan P.

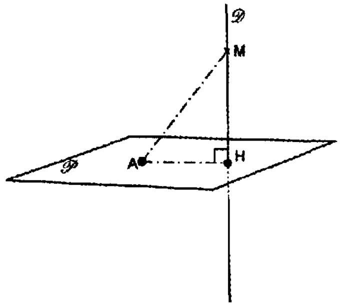
3) **Vrai** (propriété du cours)

4) **faux :** lorsque $h = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} - d \prec 0$, l'ensemble est vide.

5) **Vrai** (théorème de cours)

Mobiliser ses compétences :

Situation1



1) * si $M = H \rightarrow AM = AH$

* si $A = H \rightarrow AH = 0$ le résultat est évident

* Si $A \neq M \neq H$

Le triangle AMH est rectangle en H

D'après le théorème de Pythagore on a :

$AM^2 = AH^2 + MH^2$ Donc $AM^2 > AH^2$ D'où $AM > AH$

Conclusion : $AM \geq AH$

2) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$: vecteur directeur de $\mathcal{D}$ donc c'est un vecteur normal de $\mathcal{P}$

Par suite pour tout point $N(x, y, z)$ de plan $\mathcal{P}$ on a : $\overrightarrow{AN} \cdot \vec{n} = 0$, avec $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$

D'où $2(x+1) + y - 1 + z - 1 = 0 \Longrightarrow 2x + y + z + 2 - 2 = 0$

Finalement une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $2x + y + z = 0$

b) On a : $H(x_H, y_H, z_H) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ d'où les coordonnés de H vérifient l'équation de plan $\mathcal{P}$

et les équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ ainsi on obtient le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2x_H + y_H + z_H = 0 \ (1) \\ x_H = 1 + 2t \\ y_H = -1 + t \\ z_H = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

En remplaçant x_H , y_H et z_H dans l'équation (1) on aura $t = -\frac{1}{6}$ et $H(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6})$

c) d(A, $\mathcal{D}$) = $AH = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{13}{6}\right)^2 + \left(-\frac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{318}{36}} = \sqrt{\frac{53}{6}}$

Situation2

I/ 1) $\{\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{u'}\}$ v n'est pas liée donc P et P' ne sont pas parallèles ce qui prouve qu'ils sont sécants suivant une droite D

2) Le plan P de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

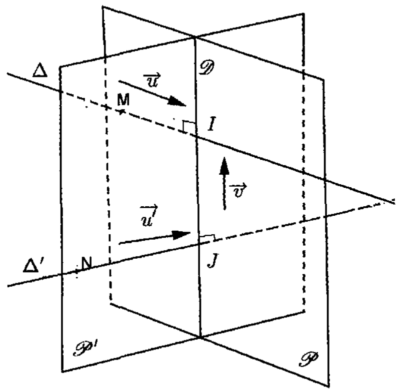
et le plan P' de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u'}$ et $\vec{v}$

Leur droite d'intersection de vecteur

$\vec{v}=\vec{u}\wedge\overrightarrow{u'}$ est la perpendiculaire

commune à Δ et Δ'

Donc D est perpendiculaire à Δ et Δ'



3) Δ et Δ' ne sont pas parallèles ceci assure l'unicité de leur perpendiculaire commune

4) $MN^2=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JN})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JN})$

$$=\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+2\underbrace{\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IJ}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{JN}+2\underbrace{\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{JN}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JN}\cdot\overrightarrow{JN}$$

$$=IJ^2+[MI^2+JN^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{JN}]=IJ^2+\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{JN}\|^2\geq IJ^2$$

Donc pour tous points $M\in\Delta$ et $N\in\Delta'$, on a : $MN\geq IJ$

<u>Remarque</u> : égalité pour $M=I \; et \; N=J$ car $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{JN}\neq\vec{0}$

II/ 1) $\Delta(A,\vec{u})\subset P$ et $\Delta'(B,\overrightarrow{u'})\subset P'$, ainsi P $(A;\vec{u};\vec{v})$ et P' $(B;\overrightarrow{u'};\vec{v})$

Avec : $A(1,0,0)\,;B(2,-1,-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

Par suite :

- $P:\begin{cases}x=1+\alpha+3\beta\\y=\alpha-\beta\\z=-\alpha+2\beta\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\Longrightarrow\begin{cases}2y+z=\alpha\\y+z=\beta\end{cases}\Longrightarrow P\;:\;x-5y-4z-1=0$

- $P':\begin{cases}x=2-\alpha+3\beta\\y=-1+\alpha-\beta\\z=-1+2\alpha+2\beta\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\Longrightarrow\begin{cases}x+3y+1=2\alpha\\x+y-1=2\beta\end{cases}$

$$\Longrightarrow P'\;:\;2x+4y-z-1=0$$

Or on sait que P et P' sont sécants suivant D , donc $D : \begin{cases} x - 5y - 4z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - z - 1 = 0 \end{cases}$

2) déterminer les coordonnées de I et J

* I est l'intersection de D et Δ donc ces coordonnées vérifient les équations de D et Δ

Ainsi on aura : $2 + 2\alpha + 4\alpha + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{7}$ donc : $I(\frac{6}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$

* J est l'intersection de D et Δ donc ces coordonnées vérifient les équations de D' et Δ'

Ainsi on aura : $2 - t + 5 - 5t + 4 - 8t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{7}$ donc : $J(\frac{9}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7})$

<u>Conclusion</u> : $IJ = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{49}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

Exercices :

Exercice 1

1) $\oplus$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $A \in (AB)$, donc $(AB) : \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2 \\ z = 2-3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

$\oplus$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $C \in (AC)$, donc $(AC) : \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = 1-t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

$\oplus$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $C \in (BC)$, donc $(AC) : \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

2) $\ominus$ $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}-3\\-2\\-4\end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{D}$, donc $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x = 1-3\alpha \\ y = 2-2\alpha \\ z = 2-4\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$\ominus$ $(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix}-4\\4\\-7\end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{D}$, donc $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x = 1-4\alpha \\ y = 2+4\alpha \\ z = 2-7\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $A \in (ABC)$, donc $(ABC) : \begin{cases} x = 1-2t-m \\ y = 2-2m \\ z = 2-3t-m \end{cases}$; $(t,m) \in \mathbb{R}^2$

2) $\ominus$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}$; $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}-3\\-2\\-4\end{pmatrix}$ et $C \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x = -2\alpha-3\beta \\ y = -2\beta \\ z = 1-3\alpha-4\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$\ominus$ $(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix}-4\\4\\-7\end{pmatrix}$; $(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC})\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $O \in \mathcal{P}'$

D'où on aura $\mathcal{P}'$: $\begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 4\alpha-4\beta \\ z = -7\alpha+\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 3

1) supposons que A appartient à Δ : $\begin{cases} 0 = 1+\alpha \\ -1 = 2-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$ ce qui est absurde par suite le

point $A \notin \Delta$; ainsi il existe un unique plan P contenant Δ et passant par A

2) soit B un point de Δ (par exemple pour $\alpha = -1 \to B(0,3,0)$)

$M \in P$ équivaut à $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\overrightarrow{AB}$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$: vecteur de Δ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Il résulte P : $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = -1 - \alpha + 4\beta \\ z = -2 - \alpha + 2\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 4

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a : $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

D'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ce qui prouve que A, B et C ne sont pas alignés.

2) $M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

d'où : (ABC) : $\begin{cases} x = 1 - 3\alpha - \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = -1 + 4\alpha + \beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

On va déterminer une équation cartésienne de plan (ABC) :

On a : $\begin{cases} x = 1 - 3\alpha - \beta \longrightarrow L_1 \\ y = \alpha - \beta \longrightarrow L_2 \\ z = -1 + 4\alpha + \beta \longrightarrow L_3 \end{cases}$

$L_1 - l_2 \longrightarrow x - y = 1 - 4\alpha \Longrightarrow 4\alpha = 1 - x + y$

$L_1 + 3l_2 \longrightarrow x + 3y = 1 - 4\beta \Longrightarrow 4\beta = 1 - x - 3y$

$4l_3 \longrightarrow 4z = -4 + 4(4\alpha) + 4\beta = -4 + 4(1 - x + y) + 1 - x - 3y \Longrightarrow 4z = 1 - 5x + y$

Finalement une équation de plan (ABC) est : $5x - y + 4z - 1 = 0$

Remarque : on pourra utiliser d'autres méthodes (voir exercice 10 et exercice15)

Exercice 5

1) • $x_A - y_A + z_A - 3 = 0 - 0 + 3 - 3 = 0 \Longrightarrow A \in P$

• $x_B - y_B + z_B - 3 = 3 - 0 + 0 - 3 = 0 \Longrightarrow B \in P$

• $x_C - y_C + z_C - 3 = 0 - (-3) + 0 - 3 = 3 - 3 = 0 \Longrightarrow C \in P$

2) $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow x - y + z - 3 = 0 \rightarrow z = -x + y + 3$

On pose : $x = t \in \mathbb{R}$ et $y = t' \in \mathbb{R}$, on aura $z = -t + t' + 3$

Alors une représentation paramétrique de P est $\rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t' \\ z = 3 - t + t' \end{cases} ; (t, t') \in \mathbb{R}^2$

Exercice 6

1) $I(x_I, y_I, z_I) \in P \cap D$ équivaut que les coordonnées de I vérifient le système (S) suivant :

(S) : $\begin{cases} x_I = -3\alpha & & \longrightarrow (l_1) \\ y_I = 2 - \alpha & & \longrightarrow (l_2) \\ z_I = -1 + 2\alpha & ; \alpha \in \mathbb{R} & \longrightarrow (l_3) \\ 2x_I + z_I = 0 & & \longrightarrow (l_4) \end{cases}$, on va déterminer le réel α

On remplace les lignes (l_1) et (l_3) dans (l_4) on trouve : $-6\alpha - 1 + 2\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$

Par suite $x_I = \frac{3}{4}$, $y_I = \frac{9}{4}$ et $z_I = -\frac{3}{2}$ d'où $I(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{3}{2}) \in P \cap D$

2) pour $\alpha = 0$ le point $A(0,2,-1) \in D$

On remplaçant les coordonnées de A dans l'équation de P on aura $2x_A + z_A = -1$

donc $A(0,2,-1) \notin P$ ce qui prouve que D n'est pas incluse dans P

<u>Remarque</u> : D coupe P au point I

Exercice 7

1)* $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: vecteur directeur de Δ

* $\Delta' : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (l_1) - (l_2) \longrightarrow x - 2z + 2 = 0 \\ (l_2) \longrightarrow y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 2 \\ y = 1 - z \end{cases}$

On pose : $\boldsymbol{z = \alpha} \in \mathbb{R}$, on aura $\Delta' : \begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

Ainsi $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$: vecteur directeur de Δ'

On remarque que $\vec{v} = -\vec{u}$ d'où $\boxed{\Delta \text{ et } \Delta' \text{ sont parallèles}}$

Le point $A(1,0,-1) \in \Delta$ mais en remplacent les coordonnées de A dans la première ligne des équations cartésiennes de Δ' on trouve : $1 + 0 - (-1) + 1 = 3 \neq 0$ ce qui donne $\boxed{A \notin \Delta' \text{ et } A \in \Delta}$

<u>Conclusion</u> : Δ et Δ' sont strictement parallèles

2) on désigne par P le plan contenant Δ et Δ'

Soit le point $B(-2,1,0) \in \Delta'$, on vérifie que $B \notin \Delta$ ainsi $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont deux vecteurs de P non colinéaires , $M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\vec{u}$

d'où une représentation paramétrique de : $P : \begin{cases} x = 1 - 3\alpha - 2\beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -1 + \alpha - \beta \end{cases} ; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

On a : $x + 2y = 1 - \alpha \longrightarrow 1 - x - 2y = \alpha$

et $x + 3y = 1 + \beta \longrightarrow x + 3y - 1 = \beta$

Par suite : $z = -1 + 1 - x - 2y - x - 3y + 1$

On en déduit : $P \ : \ 2x + 5y + z - 1 = 0$

<u>Exercice 8</u>

- $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$: vecteur directeur de Δ ; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$: vecteur directeur de Δ'

* On a $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0 \Longrightarrow \vec{u}\ et\ \vec{v}$ non colinéaires d'où Δ et Δ' non parallèles

* $I(x_I, y_I, z_I) \in \Delta \cap \Delta'$ équivaut que les coordonnées de I vérifient le système (S) suivant :

(S) : $\begin{cases} x_I = 1 - \alpha = 2t \\ y_I = -2 + 2\alpha = t ; \ \alpha \in \mathbb{R}\ et\ t \in \mathbb{R} \\ z_I = \alpha = 1 + t \end{cases}$

$(l_1) + (l_3) \longrightarrow t = 0\ \ et\ \alpha = 1$ d'où $I(0,0,1) \in \Delta \cap \Delta'$

$\boxed{\Delta\ et\ \Delta' \text{ sont sécantes au point } I(0,0,1)}$

- Soit Q le plan qui contient $\Delta\ et\ \Delta'$

$Q = (I, \vec{u}, \vec{v})$ Donc $Q : \begin{cases} x = -\alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 1 + \alpha + \beta \end{cases} ; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

On a : $x + z = 1 + 3\beta$ et $2z - x = 2 + 3\alpha$ ainsi $x + z - 1 = 3\beta$ et $2z - x - 2 = 3\alpha$

Dans la deuxième ligne on a : $3y = 2(3\alpha) + 3\beta = 4z - 2x - 4 + x + z - 1 = 5z - x - 5$

On en déduit : $\boxed{Q : x + 3y - 5z + 5 = 0}$

Exercice 9

a) une représentation paramétrique de P est : $\begin{cases} x = 2 - 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \beta \end{cases}$; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Une représentation paramétrique de P' est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = t' \\ z = 1 + 3t \end{cases}$; $(t, t') \in \mathbb{R}^2$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: deux vecteurs de P et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$: deux vecteurs de P'

La famille $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{u'}\right\}$ est libre car $det\left(\overrightarrow{u'}, \vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix}2 & -3 & 0\\0 & 2 & 0\\3 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -3\\0 & 2\end{vmatrix} = 4 \neq 0$

ce qui prouve que P et P' sont sécants suivant une droite (D)

$M(x, y, z) \in P \cap P'$ équivaut à : $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

D'où (D) a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

<u>Système de représentation paramétrique de (D)</u>

$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 4 - 2x \\ 2z = 2 + 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x \\ z = 1 + \frac{2}{3}x \end{cases} \overset{\text{on pose } x=6\alpha}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{cases} x = 6\alpha \\ y = \frac{4}{3} - 4\alpha \\ z = 1 + 9\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}}$

b) une représentation paramétrique de P est : $\begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Une représentation paramétrique de P' est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t + 5t' \\ z = 2t' \end{cases}$; $(t, t') \in \mathbb{R}^2$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$: deux vecteurs de P et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}$: deux vecteurs de P'

La famille $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{u'}\right\}$ est libre car $det\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{u'}\right) = \begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 3\\1 & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-2 & 2\\1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$

par suite P et P' sont sécants suivant une droite (D')

$M(x,y,z) \in P \cap P'$ équivaut à : $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - 2y + 5z - 6 = 0 \end{cases}$

D'où (D) a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - 2y + 5z - 6 = 0 \end{cases}$

<u>système de représentation paramétrique de (D')</u>

Dans le système (S) : $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - 2y + 5z - 6 = 0 \end{cases}$ on a :

$\longrightarrow -2L_1 + L_2$ donne $z = -x + 4$

$\longrightarrow -5L_1 - L_2$ donne $y = -x + 7$

On pose $x = t$ on aura une représentation paramétrique de (D') : $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 10</u>

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

D'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ce qui prouve que A, B et C ne sont pas alignés.

b) $M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ y & -1 & 5 \\ z+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(-6) - y(-3) + (z+1)(-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0$$

d'où (ABC) a pour équation : $2x - y + z - 3 = 0$

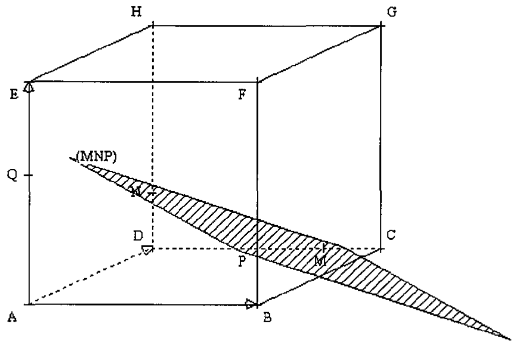
2) a) $2x_D - y_D + z_D - 3 = 6 + 1 - 2 - 3 = 2 \neq 0$ d'où $D \notin (ABC)$

b) Soit P le plan mené de D et parallèle à (ABC) ; $P : 2x - y + z + d = 0$ (même vecteur normal)

$2x_D - y_D + z_D + d = 5 + d = 0$ par suite $d = -5$

D'où $P : 2x - y + z - 5 = 0$

Exercice 11



1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DH}$

2) dans la base $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$ On a :

- $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DH} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

- Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$ on a : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE} \Rightarrow N\left(0, 1, \dfrac{1}{4}\right)$

Posons $\vec{u} = 4\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = 4\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi $(MNP) = (N, \vec{u}, \vec{v})$

Donc : $(MNP) : \begin{cases} x = -3\alpha + \beta \\ y = 1 - 4\beta \\ z = \dfrac{1}{4} + \alpha + \beta \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

3) a) (AE) à pour vecteur directeur $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passe par $A(0,0,0)$ donc : $(AE) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

b) $4\overrightarrow{MN} = \vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $4\overrightarrow{MP} = \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de plan (MNP)

$det\left(\overrightarrow{AE}, \vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ Donc (AE) et (MNP) sont sécants

c) $Q\ (x,y,z) \in (AE) \cap (MNP) \Leftrightarrow$ *il existe un triplet* (α,β,t)*de réels tq*: $\begin{cases} x = 0 = -3\alpha + \beta \\ y = 0 = 1 - 4\beta \\ z = t = \frac{1}{4} + \alpha + \beta \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = \beta \\ 1 = 4\beta \\ z = t = \frac{1}{4} + \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{12} \\ \beta = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4} + \alpha + \beta = \frac{7}{12} \end{cases}$$

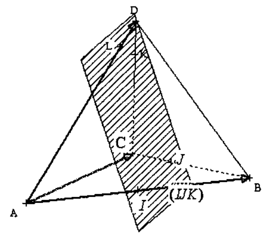
Donc $\boxed{Q(0\,,0\,,\frac{7}{12})}$

Exercice 12

1) $A(0,0,0); B(1,0,0); C(0,1,0)$ *et* $D(0,0,1)$

Déterminer tout d'abord les coordonnées de I

et les composantes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$



* $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow I(\frac{1}{2},0,0)$

* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

* $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$M(x,y,z) \in (IJK) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} \\ y & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ z & 0 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right).\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} - y.\begin{vmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} + z.\begin{vmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}y+\frac{7}{24}z=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}y+\frac{7}{2}z-\frac{1}{44}=0$$

Finalement une équation cartésienne de plan (IJK) est : $\boxed{12x+3y+7z-6=0\ .}$

<u>Remarque</u> on pourra déterminer les coordonnées de K et J

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\Longrightarrow K(0,\frac{1}{4},\frac{3}{4})$$

$$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow J(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$$

2) $\det\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IJ}\right)=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=-\frac{7}{24}\neq 0$ donc $\left\{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IJ}\right\}$ est une famille libre ce qui prouve que la droite (AD) et le plan (IJK) sont sécants en un point L

3) $L(x_L,y_L,z_L)\in(AD)\cap(IJK)\Leftrightarrow\begin{cases}12x_L+3y_L+7z_L-6=0\\ x_L=0\\ y_L=0\\ z_L=t\end{cases}\quad ;\ t\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7t-6=0\\ x_L=0\\ y_L=0\\ z_L=t\end{cases}\Leftrightarrow \boxed{L(0,0,\frac{6}{7})}$$

<u>Exercice 13</u>

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$: un vecteur normal de P et $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$: un vecteur normal de P'

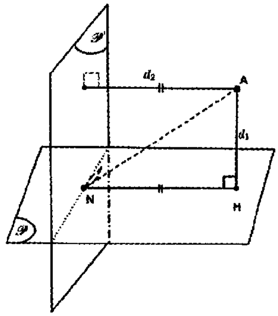
On a : $\vec{n}\cdot\vec{n}'=2-1-1=0$ d'où $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonal

par suite P et P' sont perpendiculaires

2) a) • $d_1 = d(A, P) = \dfrac{|x_A - y_A + z_A - 2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

• $d_2 = d(A, P') = \dfrac{|2x_A + y_A - z_A + 2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{|4|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

b) Posons $P \cap P' = \Delta$ Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan P La perpendiculaire à (AH) menée de H coupe Δ en N **(voir figure)**



Puisque P et P' sont perpendiculaires alors :

$d(A,\Delta) = AN$. Le triangle ANH est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore

on a : $AN^2 = AH^2 + NH^2 = d_1^2 + d_2^2$ d'où $AN^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 3 \Rightarrow \boxed{AN = \sqrt{3}}$

Exercice 14

$\Delta(A,\vec{u})$ et $\Delta'(B,\vec{u'})$ avec $A(-1,1,0)$; $B(0,1,1)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \wedge \vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$: vecteur directeur de D

Soit D la perpendiculaire commune à $\Delta(A,\vec{u})$ et $\Delta'(B,\vec{u'})$

$M(x,y,z) \in D$ si et seulement si $\{\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\}$ et $\{\overrightarrow{BM},\vec{u'},\vec{v}\}$ sont deux familles liées c'est-à-dire

$\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}) = 0$ et $\det(\overrightarrow{BM},\vec{u'},\vec{v}) = 0$ avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$

Donc $M(x,y,z) \in D$ équivaut à : $\begin{cases}\begin{vmatrix}x+1 & 2 & 5\\ y-1 & -3 & 3\\ z & 1 & -1\end{vmatrix} = 0\\[2ex] \begin{vmatrix}x & -1 & 5\\ y-1 & 1 & 3\\ z-1 & -2 & -1\end{vmatrix} = 0\end{cases}$

Par suite $M(x,y,z) \in D$ équivaut à : $\begin{cases} (x+1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ \\ x\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

Finalement un système d'équations cartésiennes de D est $\begin{cases} 7y + 21z - 7 = 0 \\ \\ 5x - 11y - 8z + 19 = 0 \end{cases}$

Ou encore D : $\begin{cases} y + 3z - 1 = 0 \\ \\ 5x - 11y - 8z + 19 = 0 \end{cases}$

- Trouvons maintenant une représentation paramétrique de D :

$$\begin{cases} (L_1) \to \quad y + 3z - 1 = 0 = 0 \\ \\ (L_2) \to \quad 5x - 11y - 8z + 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (L_1) \to \ y = 1 - 3z \\ \\ (L_2) \to 5x = -19 + 11y + 8z \to x = -\dfrac{8}{5} - 5z \end{cases}$$

On pose $z = \beta$, on aura $\boxed{D : \begin{cases} x = -\dfrac{8}{5} - 5\beta \\ y = 1 - 3\beta \\ z = \beta \end{cases} ; \ \beta \in \mathbb{R}}$

2) D coupe respectivement Δ et Δ' en I et J , la distance entre Δ et Δ' est IJ

- déterminer les coordonnées de I et J

* $I(x_I, y_I, z_I)$ est l'intersection de D et Δ donc ces coordonnées vérifient

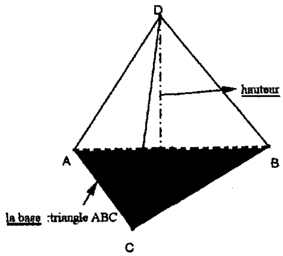
les équations paramétriques de D et Δ

Donc : $\begin{cases} x_I = -\dfrac{8}{5} - 5\beta = -1 + 2\alpha \\ y_I = 1 - 3\beta = 1 - 3\alpha \\ z_I = \beta = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$

$l_1 \to 7\alpha = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{3}{35}$ et $l_3 \to \beta = \alpha = -\dfrac{3}{35}$

il résulte : $\boxed{I(-\dfrac{41}{35}, \dfrac{44}{35}, -\dfrac{3}{35})}$

* $J(x_J, y_J, z_J)$ est l'intersection de D et Δ'



Donc : $\begin{cases} x_J = -\dfrac{8}{5} - 5\beta = -t \\ y_J = 1 - 3\beta = 1 + t \\ z_J = \beta = 1 - 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

$l_1 + l_2 \longrightarrow \beta = -\dfrac{1}{5}$ et $l_2 \longrightarrow -3\beta = t = \dfrac{3}{5}$ (Vérifier vos calculs à l'aide de la ligne L_3)

il résulte : $\boxed{J(-\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{1}{5})}$

Conclusion : $IJ = \sqrt{\left(\dfrac{20}{35}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{35}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{35}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{560}{35^2}} = \sqrt{\dfrac{16\times 35}{35^2}} = \sqrt{\dfrac{16}{35}} = \dfrac{4}{\sqrt{35}}$

Exercice 15

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$

$det\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix} = -20 \neq 0$ Donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires

2) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} = \vec{n}\begin{pmatrix}0\\-5\\-5\end{pmatrix}$: vecteur normal au plan (ABC)

Donc $(ABC) : -5y - 5z + d = 0$ et (ABC) contient le point A ainsi $-5y_A - 5z_A + d = 0$

Ce qui donne $d = 5$ d'où une équation de (ABC) est : $-5y - 5z + 5 = 0$

ou encore $(ABC) : y + z - 1 = 0$

b) $d(D, (ABC)) = \dfrac{|y_D + z_D - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

3) a) aire$(ABC) = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

b) volume$(ABCD) = \dfrac{1}{3}(surface\ de\ la\ base) \times (hautteur)$

$= \dfrac{1}{3}[\text{aire}(ABC)] \times d(D, (ABC))$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{10}{3}$$

Ou bien : volume$(ABCD) = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{|-20|}{6} = \frac{10}{3}$

Exercice 16

1) $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ donc le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$

est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, par suite une représentation paramétrique de $\mathcal{D}(A, \vec{n})$ est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} ;\ \alpha \in \mathbb{R}$$

2) $H(x_H, y_H, z_H) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ signifie les coordonnées de H vérifient la représentation

paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ d'où le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x_H = 2 + \alpha \\ y_H = 1 - 2\alpha \\ z_H = -1 + \alpha \\ x_H - 2y_H + z_H + 7 = 0 \end{cases} ;\ \alpha \in \mathbb{R}$$

On va déterminer le réel α : $2 + \alpha - 2(1 - 2\alpha) - 1 + \alpha + 7 = 0$ donne $\alpha = -1$

Donc $\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = H(1,3,-2).}$

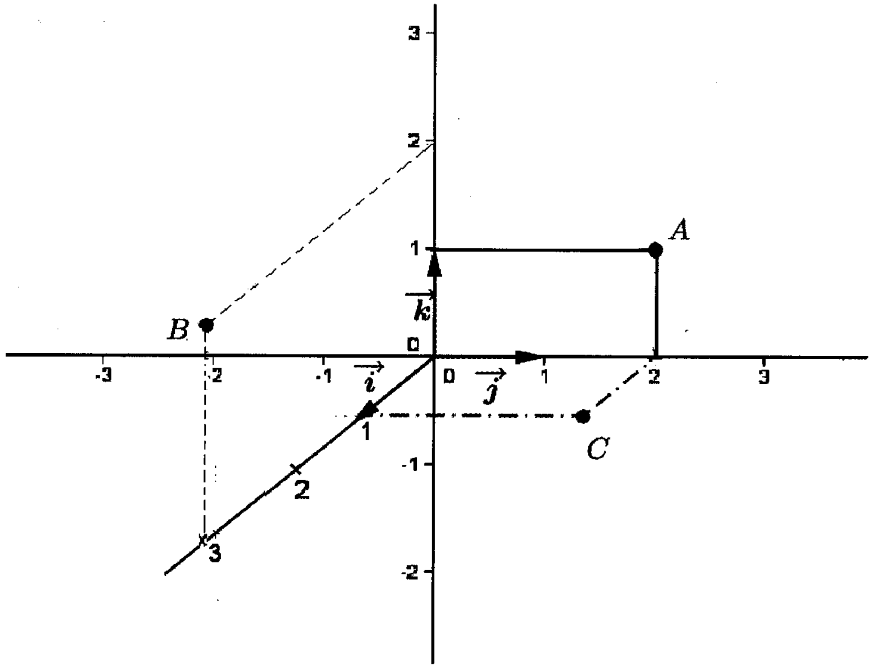
3) * H est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$ d'où $d(A, \mathcal{P}) = AH$

$AH = \sqrt{(1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ d'où $\boxed{d(A, \mathcal{P}) = \sqrt{6}.}$

* Par calcul direct (utiliser la formule) : $d(A, \mathcal{P}) = \frac{|x_A - 2y_A + z_A + 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

Exercice 17

1)



2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$: vecteur normal de plan (ABC)

Donc (ABC): $2x + 4y + 2z + d = 0$ et (ABC) contient le point A

Ainsi $2x_A + 4y_A + 2z_A + d = 0$. Ce qui donne $d = -10$

D'où une équation cartésienne de (ABC) après simplification est $\boxed{(ABC): x + 2y + z - 5 = 0}$

3) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$: vecteur normal de plan $P \Longrightarrow P$: $3x - 2y + z + d_1 = 0$

$C \in P$ donc : $3 - 4 + 0 + d_1 = 0 \Longrightarrow d_1 = 1$ finalement $\boxed{P\ :\ 3x - 2y + z + 1 = 0}$

Exercice 18

1) $(ABC) : z = 0$; $(ABE) : y = 0$; $(ADE) : x = 0$ $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

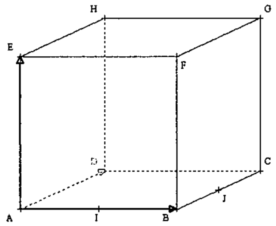
2) a) $C(1,1,0)$, $F(1,0,1)$ et $H(0,1,1)$, $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} \wedge \overrightarrow{CF} = \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $C \in (CFH)$ d'où $(CFH) : x + y + z - 2 = 0$

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \vec{n}$

D'où $\overrightarrow{AG}$ vecteur normal de plan (CFH)

3) a) $I(\frac{1}{2},0,0)$; $J(1,\frac{1}{2},0)$ et $G(1,1,1)$



$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{N} = 4\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$: Vecteur normal de (IJG)

Par suite : (IJG): $2x - 2y + z + d = 0$ et $G \in (IJG) \Longrightarrow d = -1$

D'où $\boxed{(IJG): 2x - 2y + z - 1 = 0}$

b) $E(0,0,1) : 0 - 0 + 1 - 1 = 0$ donc $E \in (IJG)$

Exercice 19

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$: vecteur directeur de D et $D \perp P$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal de P

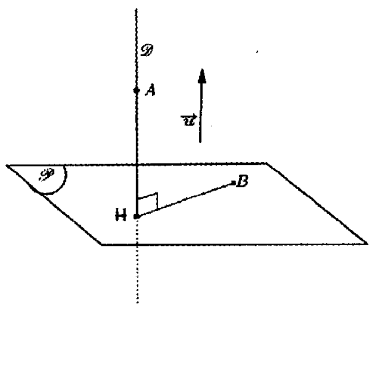
P : $-2x + y + z + d = 0$ et $-2x_B + y_B + z_B + d = 0$ donc $d = 7$

Conclusion : P : $-2x + y + z + 7 = 0$

2) a) * tout d'abord on va déterminer une représentation paramétrique de la droite D

En effet : $M \in D$ équivaut à $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}, t \in \mathbb{R}$

d'où D : $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$



* $H(x_H, y_H, z_H) \in P \cap D$ si et seulement si les coordonnées de H vérifient la représentation paramétrique de D et l'équation cartésienne de P

D'où le système suivant : (S) : $\begin{cases} x_H = 3 - 2t \\ y_H = -1 + t \\ z_H = 2 + t \\ -2x_H + y_H + z_H + 7 = 0 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

On a : $l_4 \longrightarrow -2(3-2t) - 1 + t + 2 + t + 7 = 0$ donc $t = -\dfrac{1}{3}$

Ce qui donne finalement : $\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = H\left(\dfrac{11}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right).}$

b) H est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{D}$ d'où $d(A, \mathcal{D}) = BH$

$BH = \sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{49}{9} + \dfrac{121}{9}} = \sqrt{\dfrac{174}{9}}$ d'où $\boxed{d(A, \mathcal{D}) = \sqrt{\dfrac{58}{3}}.}$

Exercice 20

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3 + 2 + 1 = 0$ d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux

par suite le triangle ABC est rectangle en A

2) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$: vecteur de $\mathcal{D}$ d'où $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$: vecteur normal de $\mathcal{P}$ $\Longrightarrow \mathcal{P}$: $-3x + y + z + d = 0$

$B \in \mathcal{P} \Longrightarrow -3x_B + y_B + z_B + d = 0$ Donc $d = -6$ ainsi $\mathcal{P}$: $-3x + y + z - 6 = 0$

$H(x_H, y_H, z_H) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ si et seulement si les coordonnées de H vérifient

la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$

D'où le système suivant : (S) : $\begin{cases} x_H = 3 - 3t \\ y_H = 2 + t \\ z_H = 2 + t \\ -3x_H + y_H + z_H - 6 = 0 \end{cases}$

On a : $l_4 \longrightarrow -3(3-3t) + 2 + t + 2 + t - 6 = 0$ donc $t = 1$

Il résulte : $\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = H(0,3,3).}$

c) $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AB}$ donc $ABHC$ est un parallélogramme (1)

ABC est un triangle rectangle en $A \Longrightarrow (AB) \perp (AC)$ (2)

(1) + (2) $\Longrightarrow$ le quadrilatère $ABHC$ est un <u>rectangle</u>

Exercice 21

1) $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$: vecteur normal de P et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$: vecteur normal de P'

On a $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = -1+2-1 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, donc P et P' sont perpendiculaires

2) a) $d = d(A\,,P\,) = \dfrac{|-x_A+y_A+z_A+1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $d' = d(A\,,P\,') = \dfrac{|x_A+2y_A-z_A+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

c) soit : $\Delta = P \cap P'$

$[d(A,\Delta)]^2 = d^2 + d'^2 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=1$ on en déduit : $d(A,\Delta) = 1$ (distance de A à Δ)

Exercice 22

1) 1ére méthode

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 14$$

Donc l'ensemble des points M est la sphère de centre $I(1,-2,3)$ et de rayon $r = \sqrt{14}$

2éme méthode

On a : $a=-2\,,b=4\,,c=\;-6\;\;et\;d=0$

$$h = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d = \frac{(-2)^2+4^2+(-6)^2}{4} - 0 = 14 > 0$$

h étant strictement positif d'où l'ensemble des points M la sphère

de rayon $r = \sqrt{h} = \sqrt{14}$ et de centre $I(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}) \longrightarrow I(1,-2,3)$

2) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+15=0$

$$h = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d = \frac{(-2)^2+4^2+(-6)^2}{4} - 15 = 14-15 = -1 < 0$$

h étant strictement négatif d'où l'ensemble des points M est l'ensemble vide

3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$

$$h = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d = \frac{(-2)^2+4^2+(-6)^2}{4} - 14 = 14 - 14 = 0$$

D'où l'ensemble des points M est le singleton $\left\{I(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})\right\} = \{I(1,-2,3)\}$

Exercice 23

1) le centre de la sphère (S) est un point de plan (ABC) donc l'intersection de (S) et (ABC) est le cercle contenu dans le plan (ABC) de centre A et de rayon 2

2) Q le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$

le centre de la sphère (S) est un point de plan Q donc l'intersection de (S) et (ABC) est le cercle contenu dans le plan Q de centre A et de rayon 2

3) P est le plan perpendiculaire à (AB) et passe par C

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$: vecteur normal de P $\Longrightarrow$ P : $-y + z + d = 0$

$C \in P \Rightarrow -y_C + z_c + d = 0$ Donc $d = 0$ ainsi $P : -y + z = 0$

$$d(A,\mathrm{P}) = \frac{|-y_A + z_A|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2 \ (rayon\ de\ la\ sphére)$$

Donc P coupe la sphère (S) suivant le cercle de centre H (le projeté orthogonal de A sur P)

et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

Cherchons les coordonnées de H

On a : $\begin{cases}\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB} \\ H \in P\end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 1-\alpha \\ z_H = \alpha \\ -y_H + z_H = 0\end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 1-\alpha \\ z_H = \alpha \\ -1+\alpha+\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\end{cases}$

D'où $x_H = 0$; $y_H = \frac{1}{2}$ et $z_H = \frac{1}{2}$ Donc $H\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 24

1)* $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2-16=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=16=4^2$

Donc (S) est une sphère de centre $I(2,-3,1)$ et de rayon $R=4$

* $d(I,\mathrm{P})=\dfrac{|x_I+y_I+z_I-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}<4\ (rayon\ de\ la\ sphére)$

Donc P coupe la sphère (S) suivant le cercle de centre H (le projeté orthogonal de I sur P)

et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{16-\dfrac{16}{3}}=4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Cherchons les coordonnées de H

On a : $\begin{cases}\overrightarrow{IH}=\alpha\vec{n}\\ H\in P\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=2+\alpha\\ y_H=-3+\alpha\\ z_H=1+\alpha\\ x_H+y_H+z_H-4=0\longrightarrow 3\alpha-4=0\longrightarrow\alpha=\dfrac{4}{3}\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

D'où $x_H=\dfrac{10}{3}$; $y_H=-\dfrac{5}{3}$ et $z_H=\dfrac{7}{3}$ Donc $H\left(\dfrac{10}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{3}\right)$.

2) le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$

le centre de la sphère (S) est un point de plan P donc l'intersection

de (S) et P est le cercle contenu dans le plan P de centre O et de rayon 2

3) * (S) est de centre $I(1,1,1)$ et de rayon $R=1$

* $P:\begin{cases}x=1-2\alpha+\beta\longrightarrow L_1\\ y=1-\beta\longrightarrow L_2\\ z=2-3\beta\longrightarrow L_3\end{cases}$

$l_2\longrightarrow 1-y=\beta$ et $L_3\longrightarrow z=2-3(1-y)$

d'où P à pour équation cartésienne : $3y-z-1=0$

* $d(I,\mathrm{P})=\dfrac{|3y_I-z_I-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}<R=1\ (rayon\ de\ la\ sphére)$

Donc P coupe la sphère (S) suivant le cercle de centre H (le projeté orthogonal de I sur P)

et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{10}}=\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

<u>coordonnées de H</u>

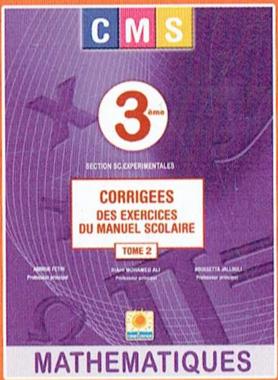
On a : $\begin{cases} \overrightarrow{IH} = \alpha\vec{n} \\ H \in P \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 1 + 3\alpha \\ z_H = 1 - \alpha \qquad ; \alpha \in IR \\ 3y_H - z_H - 1 = 0 \longrightarrow 10\alpha + 1 = 0 \longrightarrow \alpha = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$

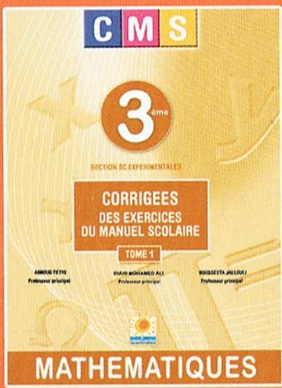
D'où $x_H = 1$; $y_H = \dfrac{7}{10}$ et $z_H = \dfrac{11}{10}$ Donc $H\left(1, \dfrac{7}{10}, \dfrac{11}{10}\right)$.

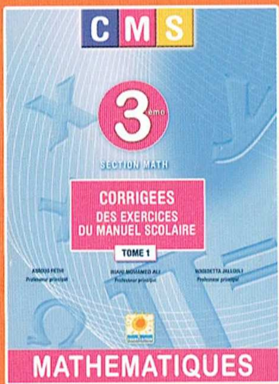
Collection

CMS

1 ère - 2 ème - 3 ème - 4 ème







Prix : 9000

I.S.B.N : 978-9938-824-83-4

9 789938 824834

CHAMS EDITION