Introduction et Révision des Concepts Essentiels des Séries Temporelles

Chapitre 1

Économétrie des séries temporelles

Ouvrages de référence

Time Series Analysis, James D. Hamilton

–

Analysis of Financial Time Series, Second Edition, Ruey S . Tsay

Introductory Econometrics for Finance, Second Edition, Chris Brooks

Econometrics analysis, Greene

Introductory Econometrics, Second Edition, J. M. Wooldridge

Applied Time Series Analysis A Practical Guide to Modeling and Forecasting, Terence C. Mills

Introductory Time Series with R, Paul S.P. Cowpertwait and Andrew V. Metcalfe

Applied Time Series Econometrics, Edited by Helmut Lütkepohl and Markus Krätzig

–

Time Series Analysis and Its Applications With R Examples, Third edition, Robert H. Shumway and David S. Stoffer

1. Introduction

Série temporelle : une séquence d'observations à travers le temps.

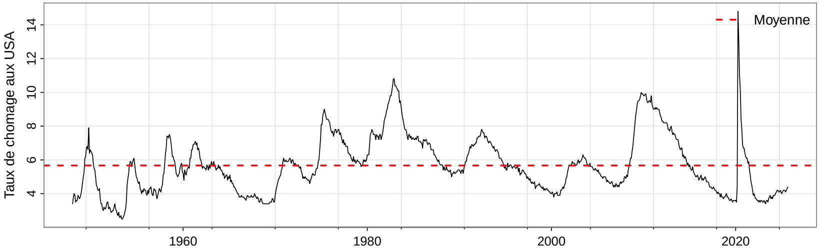
Objectif de l'analyse des séries temporelles : formuler un modèle statistique qui est une représentation bien spécifiée du processus inconnu qui a généré la série temporelle observée.

Taux de chômage aux États-Unis

```r
library(fredr) #https://fred.stlouisfed.org/docs/api/api_key.html
#fredr_set_key("votre clé perso")
library(tseries)
library(astsa)
library(xts)
library(quantmod)
```

–

```r
USunrate = fredr(series_id = "UNRATE",
           observation_start = as.Date("1948-01-01"),
           observation_end = as.Date("2025-10-01"))
tsplot(USunrate$date, USunrate$value,
       ylab="Taux de chomage aux USA", xlab='')
abline(h = mean(USunrate$value), col = "red", lty = 2, lwd = 2)
legend("topright", legend = "Moyenne", col = "red", lty = 2, lwd = 2, bty = "n"
```



Taux de chômage aux États-Unis (suite)

Un oeil sur les données

```r
head(USunrate)
```

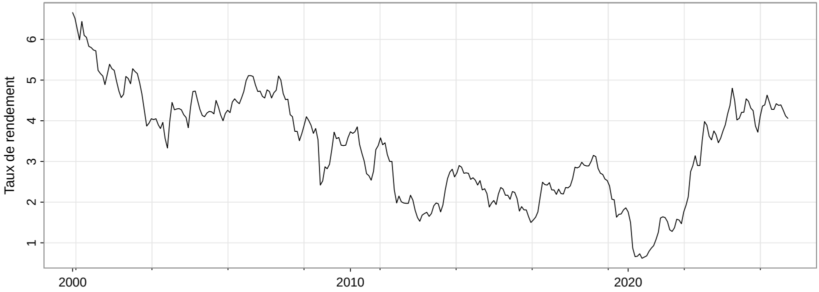
```
## # A tibble: 6 x 5
##   date       series_id value realtime_start realtime_end
##   <date>     <chr>     <dbl> <date>         <date>
## 1 1948-01-01 UNRATE      3.4 2025-12-09     2025-12-09
## 2 1948-02-01 UNRATE      3.8 2025-12-09     2025-12-09
## 3 1948-03-01 UNRATE      4   2025-12-09     2025-12-09
## 4 1948-04-01 UNRATE      3.9 2025-12-09     2025-12-09
## 5 1948-05-01 UNRATE      3.5 2025-12-09     2025-12-09
## 6 1948-06-01 UNRATE      3.6 2025-12-09     2025-12-09
```

```r
tail(USunrate)
```

```
## # A tibble: 6 x 5
##   date       series_id value realtime_start realtime_end
##   <date>     <chr>     <dbl> <date>         <date>
## 1 2025-04-01 UNRATE      4.2 2025-12-09     2025-12-09
## 2 2025-05-01 UNRATE      4.2 2025-12-09     2025-12-09
## 3 2025-06-01 UNRATE      4.1 2025-12-09     2025-12-09
## 4 2025-07-01 UNRATE      4.2 2025-12-09     2025-12-09
## 5 2025-08-01 UNRATE      4.3 2025-12-09     2025-12-09
## 6 2025-09-01 UNRATE      4.4 2025-12-09     2025-12-09
```

Rendement du marché des titres du Trésor américain à échéance constante de 10 ans

```
IRT10 = fredr(series_id = "GS10",
          observation_start = as.Date("2000-01-01"),
          observation_end = as.Date("2025-10-01"),
          frequency = "m")
tsplot(IRT10$date, IRT10$value,
       ylab="Taux de rendement", xlab='')
```



Structure du cours

2. Modèles Empiriques

Sorties expérimentales causées par des entrées :

$$\underset{[\text{sortie}]}{y_t} = \underset{[\text{entrée}]}{f(z_t)} + \underset{[\text{perturbation}]}{\nu_t}$$

y_t observé lorsque z_t est en entrée ; $f(\cdot)$ mappe les entrées aux sorties ; ν_t est une petite perturbation aléatoire.

Les mêmes sorties se répètent en répétant les expériences avec les mêmes entrées.

Modèles Empiriques (suite)

Dans un modèle économétrique, cependant :

$$\underset{\text{[observée]}}{y_t} = \underset{\text{[explication]}}{g(z_t)} + \underset{\text{[reste]}}{\varepsilon_t}$$

y_t décomposé en deux composantes : $g(z_t)$ (partie expliquée) et ε_t (partie inexpliquée).

Toujours possible de décomposer y_t même si y_t ne dépend pas de $g(z_t)$.

Modèles Empiriques (suite)

En économétrie :

$$\varepsilon_t = y_t - g(z_t)$$

Les modèles peuvent être conçus par la sélection de z_t.

Les critères de conception doivent être analysés : conduiront à la notion de modèle congruent.

Les modèles congruents successifs doivent expliquer les précédents : concept d'englobement - par lequel le progrès est réalisé.

Modèles de Séries Temporelles

Processus autorégressifs univariés :

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$

WN - bruit blanc : processus à moyenne nulle, variance constante

Séries temporelles multiples :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A} y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$$

e.g. VAR :

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \sim \mathrm{WN}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right)$$

Modèles de Séries Temporelles (suite)

Modèle autorégressif à retard distribué (ADL) :

$$y_t = \alpha_1 z_t + \alpha_2 y_{t-1} + \alpha_3 z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$

3. Données de Séries Temporelles

Une **série temporelle** est une variable aléatoire observée de manière répétée dans le temps, indexée par t.

Une **variable aléatoire** dans le contexte des séries temporelles est une fonction Y_t qui associe une valeur réelle à chaque instant t dans un ensemble d'indices temporels $\mathcal{T}$ (par exemple, des jours, mois, ou années).

$Y_t : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est l'ensemble des résultats possibles, et $t \in \mathcal{T}$.

À chaque instant t, Y_t représente une observation aléatoire, influencée par des facteurs incertains.

Contrairement à des variables indépendantes, les variables aléatoires Y_t dans une série temporelle présentent souvent des dépendances temporelles (un état passé influence les états futurs).

Exemple : Y_t pourrait représenter la température quotidienne d'une ville, la valeur d'une action boursière, ou le nombre de ventes quotidiennes d'un produit.

Processus Stochastiques

Un **processus stochastique** est une séquence ordonnée de **variables aléatoires** $\{y_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in \mathcal{T}\}$ telle que pour chaque $t \in \mathcal{T}$, $y_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur Ω, et pour chaque $\omega \in \Omega$, $y_t(\omega)$ est une réalisation du processus stochastique sur l'ensemble d'indices $\mathcal{T}$.

Une série temporelle $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ est une réalisation particulière $\{y_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ d'un processus stochastique, une fonction $\mathcal{T} \to \mathbb{R}$ où $t \to y_t(\omega)$.

Le processus stochastique sous-jacent est dit avoir généré la série temporelle $y_1(\omega), y_2(\omega), \ldots, y_T(\omega)$, notée $\{y_t\}$.

Caractéristiques des Séries Temporelles

Persistance - liée aux observations précédentes

Retour à la moyenne - retourne aux niveaux d'équilibre

Autocorrélation - pour décrire la dépendance temporelle

La distribution conjointe de $(y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-h})$ est caractérisée par la

Fonction d'Autocovariance :

$$\begin{aligned}
\gamma_t(h) &= \mathrm{cov}(y_t, y_{t-h}) \\
&= \mathrm{E}[(y_t - \mu_t)(y_{t-h} - \mu_{t-h})] \\
&= \int \cdots \int (y_t - \mu_t)(y_{t-h} - \mu_{t-h}) f(y_t, \ldots, y_{t-h})\, dy_t \cdots dy_{t-h}
\end{aligned}$$

où $\mu_t = \mathrm{E}[y_t] = \int y_t f(y_t)\, dy_t$ est la moyenne inconditionnelle de y_t.

L'indice t capture la dépendance temporelle de l'autocovariance.

Moments d'Échantillon

Moyenne :

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

Fonction d'Autocorrélation d'Échantillon (ACF) :

$$\rho_t(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2}$$

Moments d'Échantillon (suite)

Fonction d'Autocorrélation Partielle (PACF) :

$\mathrm{r}_{ij.k} = \mathrm{corr}(y_t, y_{t-h} | y_{t-1}, \dots, y_{t-h+1})$

Dans le cas à 3 variables :

$$\mathrm{r}_{02.1} = \frac{\mathrm{r}_{02} - \mathrm{r}_{01}\mathrm{r}_{12}}{\sqrt{1 - \mathrm{r}_{01}^2}\sqrt{1 - \mathrm{r}_{12}^2}}$$

où

$$\mathrm{r}_{01} = \mathrm{corr}(y_t, y_{t-1}) = \mathrm{corr}(y_{t-1}, y_{t-2}) = \mathrm{r}_{12} = \rho(1)$$
$$\mathrm{r}_{02} = \mathrm{corr}(y_t, y_{t-2}) = \rho(2)$$

Donc :

$$\mathrm{r}_{02.1} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

sous moyenne et variance constantes.

Moments d'Échantillon (suite)

Processus AR(p) :

$\mathrm{r}_{ij.k} = 0$ pour $h > p$

Indépendance conditionnelle

Pour $h = 2$:

$$\mathrm{r}_{02.1} = \mathrm{corr}(y_t, y_{t-2}|y_{t-1}) = 0$$

si

$$f(y_t, y_{t-2}|y_{t-1}) = f(y_t|y_{t-1})f(y_{t-2}|y_{t-1}).$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(y_t, y_{t-2}|y_{t-1}) &= f(y_t|y_{t-1}, y_{t-2})f(y_{t-2}|y_{t-1}) \\ &= f(y_t|y_{t-1}) \end{aligned}$$

Processus de Markov – la distribution conditionnelle de y_t étant donnée tout le passé $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$, dépend seulement du passé immédiat y_{t-1}.

Distributions des Moments d'Échantillon

Pour $y_t \sim \text{IID}(\mu, \sigma^2)$:

$$\sqrt{T}\bar{y} \to N(\mu, \sigma^2)$$

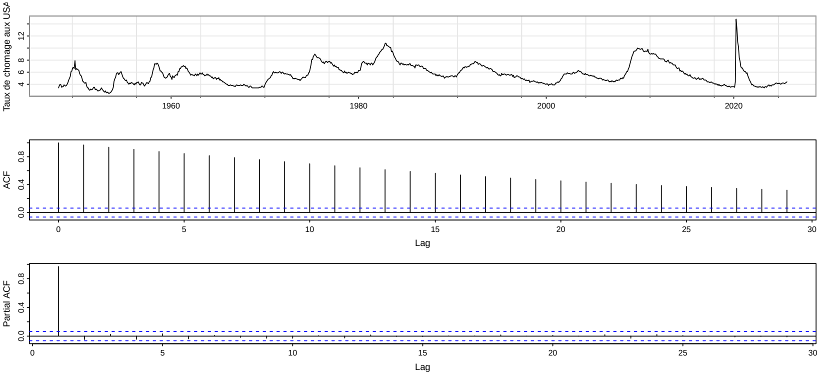
$$\sqrt{T}\hat{\rho}_h \to N(0, 1)$$

$$\sqrt{T}\hat{r}_{ij.k} \to N(0, 1)$$

où IID - indépendamment et identiquement distribué.

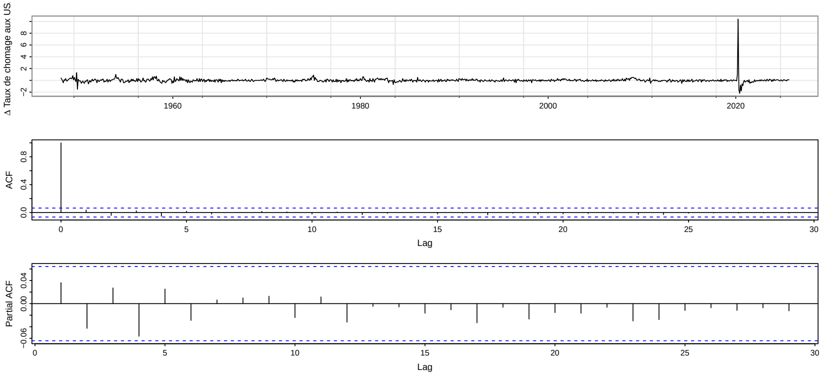
ACF/PACF pour le taux de chômage aux USA

```
par(mfrow=c(3,1))
tsplot(USunrate$date, USunrate$value,
       ylab="Taux de chomage aux USA", xlab='')
acf(USunrate$value, main = "ACF USunrate")
pacf(USunrate$value, main = "PACF USunrate")
```



ACF/PACF pour Δ taux de chômage aux USA

```r
par(mfrow=c(3,1))
tsplot(USunrate$date[-1], diff(USunrate$value),
       ylab=expression(Delta ~ "Taux de chomage aux USA"), xlab='')
acf(diff(USunrate$value), main = "")
pacf(diff(USunrate$value), main = "")
```



Stationnarité

Une série temporelle $\{y_t\}$ est **faiblement stationnaire** ou stationnaire en covariance si les premiers et seconds moments du processus existent et sont invariants dans le temps.

$$\mathrm{E}[y_t] = \mu < \infty \quad \forall t \in T$$

$$\mathrm{E}[(y_t - \mu)(y_{t-h} - \mu)] = \gamma(h) < \infty \quad \forall t, h$$

La stationnarité implique $\gamma_t(h) = \gamma_t(-h) = \gamma(h)$.

–

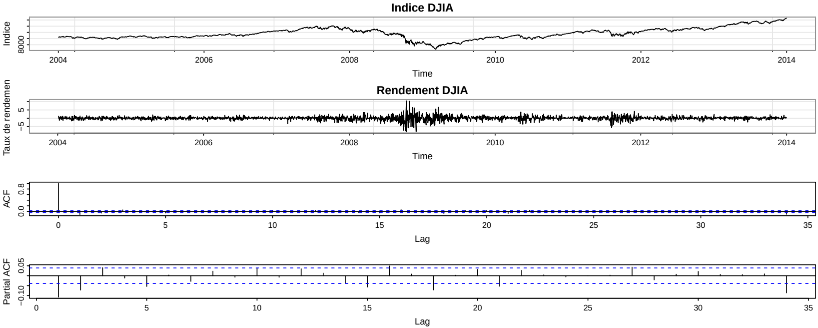
Une série temporelle $\{y_t\}$ est **strictement stationnaire** si, pour toute valeur de $h_1, h_2, \ldots, h_n$, la distribution jointe de $y_t, y_{t+h}, \ldots, y_{t+hn}$ dépend uniquement des intervalles $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et non de t :

$$f(y_t, y_{t+h}, \ldots, y_{t+hn}) = f(y_\tau, y_{\tau+h}, \ldots, y_{\tau+hn}) \quad \forall t, \tau$$

La stationnarité stricte implique que tous les moments sont invariants dans le temps.

Dow Jones Industrial Average

```
DJI = getSymbols("^DJI", src = "yahoo", from = "2004-01-01",
                 to = "2014-01-01", auto.assign = FALSE)
djia = Cl(DJI)
djiar = 100 * diff(log(djia))[-1]  # [-1] retire 1 observation
par(mfrow=c(4,1))
tsplot(index(DJI), djia, main="Indice DJIA", ylab="Indice")
tsplot(index(DJI)[-1], djiar, main="Rendement DJIA", ylab="Taux de rendement")
acf(djiar, main = '')
pacf(djiar, main = '')
```



Ergodicité

L'ergodicité concerne l'information qui peut être dérivée d'une moyenne temporelle sur la moyenne commune à un point dans le temps. (La loi des grands nombres faible n'est pas applicable car la série temporelle observée représente une seule réalisation du processus stochastique).

Soit $\{y_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in T\}$ un processus faiblement stationnaire, tel que $\mathrm{E}[y_t(\omega)] = \mu < \infty$ et $\mathrm{E}[(y_t(\omega) - \mu)^2] = \sigma_y^2 < \infty$, $\forall t$, et

$$\bar{y}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t$$

est la moyenne temporelle.

Si $\bar{y}_T \xrightarrow{p} \mu$ lorsque $T \to \infty$, $\{y_t\}$ est ergodique pour la moyenne.

Ergodicité - indépendance asymptotique

Stationnarité - invariance temporelle

Ergodicité (suite)

L'ergodicité nécessite que la mémoire d'un processus stochastique s'estompe de sorte que la covariance entre des observations de plus en plus distantes converge vers 0 suffisamment rapidement.

Pour les processus stationnaires,

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$$

est suffisant pour assurer l'ergodicité.

Ergodicité pour les seconds moments :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T-h+1} \sum_{t=h+1}^{T} (y_t - \mu)(y_{t-h} - \mu) \xrightarrow{p} \gamma(h)$$

Bruit blanc

Un processus de bruit blanc est un processus faiblement stationnaire qui a une moyenne nulle et est non corrélé dans le temps :

$$u_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$$

$\{u_t\}$ est WN si $\mathrm{E}[u_t] = 0$, $E[u_t^2] = \sigma^2 < \infty$, et $\mathrm{E}[u_t u_{t-h}] = 0$ où $h \neq 0$ et $t - h \in T$ pour tout $t \in T$.

Si la variance constante est relâchée à $\mathrm{E}[u_t^2] < \infty$, $\{u_t\}$ est un processus de bruit blanc faible.

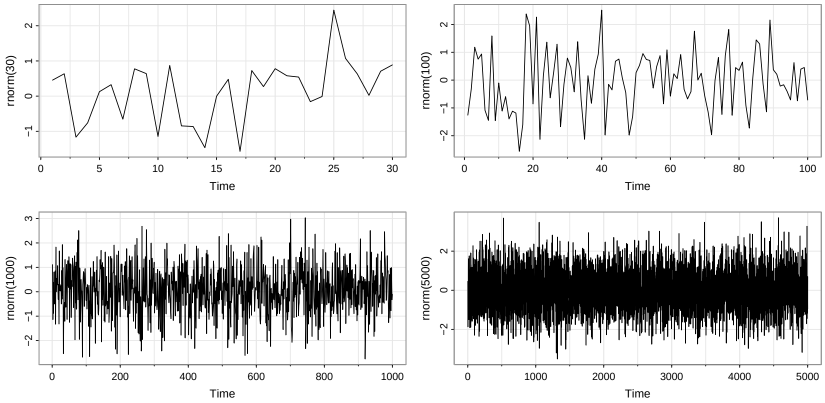
Si $\{u_t\}$ est normalement distribué, c'est un processus de bruit blanc gaussien :

$$u_t \sim \mathrm{NID}(0, \sigma^2)$$

Normalité $\Rightarrow$ stationnarité stricte et indépendance sérielle.

Génération de bruits blancs gaussiens centrés réduits

```
par(mfrow=c(2,2))
tsplot(rnorm(30)); tsplot(rnorm(100))
tsplot(rnorm(1000)); tsplot(rnorm(5000))
```



Processus IID

Un processus $\{u_t\}$ avec des variables indépendantes et identiquement distribuées est IID
:

$$u_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$$

Martingales

Le processus stochastique $\{y_t\}$ est une martingale par rapport à un ensemble d'informations I_{t-1} des données $\{I_{t-1} = y_{t-1}, \ldots, y_1\}$, réalisé à $t-1$, si $\mathrm{E}[|y_t|] < \infty$ et l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}[y_t|I_{t-1}] = y_{t-1}$.

Le processus $\{u_t = y_t - y_{t-1}\}$ avec $\mathrm{E}[|u_t|] < \infty$ et $\mathrm{E}[u_t|I_{t-1}] = 0$ est une séquence de différences de martingale (MDS).

Innovations

Une innovation $\{u_t\}$ contre un ensemble d'informations I_{t-1} est un processus dont la densité $f(u_t|I_{t-1})$ ne dépend pas de I_{t-1}.

$\{u_t\}$ est une innovation de moyenne contre un ensemble d'informations I_{t-1} si $\mathrm{E}[u_t|I_{t-1}] = 0$.

Une innovation $\{u_t\}$ doit être $\mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ si I_{t-1} contient l'historique $(U_{t-1} = u_0, u_1, \ldots, u_{t-1})$ de u_t, mais pas inversement.

Par conséquent, une innovation doit être une MDS.

Processus Intégrés

Les processus intégrés peuvent être rendus stationnaires par différenciation.

Un processus stochastique $\{y_t\}$ est une marche aléatoire si :

$$y_t = y_{t-1} + u_t \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad y_0 = 0$$

où $u_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$, $\forall t > 0$.

Une marche aléatoire est non stationnaire et donc non ergodique :

$$y_t = y_0 + \sum_{s=1}^{t} u_s \quad \forall t > 0.$$

La moyenne est invariante dans le temps :

$$\mu = \text{E}[y_t] = \text{E}\left[y_0 + \sum_{s=1}^{t} u_s\right] = y_0 + \sum_{s=1}^{t} \text{E}[u_s] = 0$$

Processus Intégrés (suite)

Mais les seconds moments divergent. La variance est :

$$\gamma_t(0) = \mathrm{E}[y_t^2] = \mathrm{E}\left[\left(y_0 + \sum_{s=1}^{t} u_s\right)^2\right] = \sum_{s=1}^{t} \sigma^2 = t\sigma^2$$

Les autocovariances sont :

$$\gamma_t(h) = \mathrm{E}[y_t y_{t-h}] = \mathrm{E}\left[\left(y_0 + \sum_{s=1}^{t} u_s\right)\left(y_0 + \sum_{k=1}^{t-h} u_k\right)\right] = (t-h)\sigma^2$$

pour tout $h > 0$.

Processus Intégrés (suite)

La fonction d'autocorrélation est :

$$\rho_t(h) = \frac{\gamma_t(h)}{\gamma_t(0)\gamma_{t-h}(0)} = \frac{(t-h)\sigma^2}{t\sigma^2(t-h)\sigma^2} = 1 - \frac{h}{t}$$

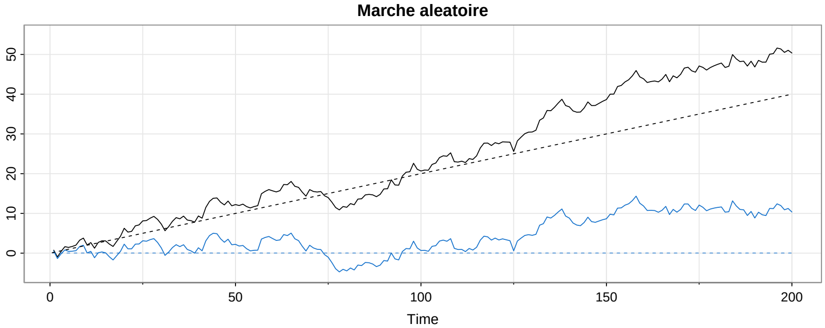
pour tout $h > 0$.

Si un processus stochastique doit être différencié d fois pour atteindre la stationnarité, il est intégré d'ordre d, ou $I(d)$.

Une marche aléatoire est $I(1)$ et les processus stationnaires sont $I(0)$.

Marche aléatoire avec et sans drift

```
set.seed(154) # pour la reproductibilité
w = rnorm(200); x = cumsum(w) # deux commandes en une ligne
wd = w +.2;    xd = cumsum(wd)
par(mfrow=c(1,1))
tsplot(xd, ylim=c(-5,55), main="Marche aleatoire", ylab='')
lines(x, col=4)
clip(0,200,0,50)
abline(h=0, col=4, lty=2)
abline(a=0, b=.2, lty=2)
```



Marche aléatoire, $\sigma_w = 1$, avec dérive $y_0 = 0.2$ (ligne noire), sans dérive, $y_0 = 0$ (ligne bleue), et une ligne droite pointillée avec une pente de 0.2.