Introduction aux modèles non-linéaires

Chapitre 5

Économétrie des séries temporelles

Structure du cours :

Modèles à changement de régimes

Modèles à seuil

Modèles Non Linéaires pour l'Analyse des Séries Temporelles

- **Focus** : Processus linéaires de séries temporelles.
- **Modèles non linéaires** : Fournissent des descriptions parcimonieuses des dynamiques des séries temporelles (notamment financières).
- **Modèles clés** :
  - Autorégressions à Changement de Régime (MSAR).
  - Autorégressions à Seuil (TAR), en particulier SETAR.

Autorégressions à Changement de Régime (MSAR)

- **Introduit par** : Hamilton (1989).
- **Modèle** : Combine une autorégression avec un état latent déterminant les paramètres autorégressifs.
- **Applications** : Surpasse les modèles linéaires pour les rendements d'actifs à basse fréquence (Perez-Quiros et Timmermann, 2000).

Définition : MSAR

Un **MSAR à k états** est un processus stochastique avec :

- **Dynamique** : Régie par un processus d'état markovien et une autorégression.
- **États** : Étiquetés $1, 2, \ldots, k$, notés s_t.
- **Matrice de transition** P :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

où $p_{ij} = \Pr(s_{t+1} = i \mid s_t = j)$.

Génération des Données dans un MSAR

- **Autorégression** :

$$Y_t = \phi_0(s_t) + \phi_1(s_t)Y_{t-1} + \cdots + \phi_p(s_t)Y_{t-p} + \sigma(s_t)\varepsilon_t$$

  où :
  - $\phi(s_t) = [\phi_0(s_t), \phi_1(s_t), \ldots, \phi_p(s_t)]'$ sont les paramètres autorégressifs dépendants de l'état.
  - $\sigma(s_t)$ est l'écart-type dépendant de l'état.
  - $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

Probabilités Ergodiques

- **Définition** : Probabilités inconditionnelles des états, notées $\pi = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k]'$.
- **Calcul** : Solution de $\pi = P\pi$.
- **Interprétation** : Vecteur propre normalisé de P associé à la valeur propre unitaire.

Exemple Simple : MSAR à 2 États

- **États** : Haut (H) et Bas (L).
- **Dynamique** :

$$Y_t = \begin{cases} \phi_H + \varepsilon_t & \text{si } s_t = H \\ \phi_L + \varepsilon_t & \text{si } s_t = L \end{cases}$$

- **Matrice de transition** :

$$P = \begin{bmatrix} p_{HH} & p_{HL} \\ p_{LH} & p_{LL} \end{bmatrix}$$

Génération des Données dans un Processus MSAR

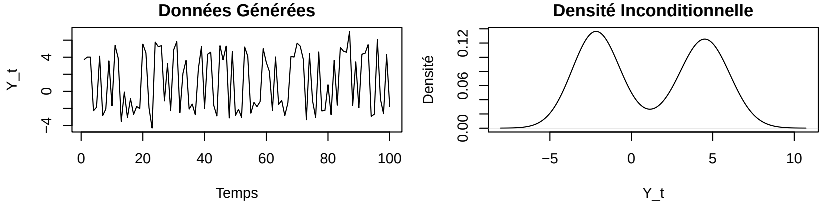
Ce modèle simple est utile pour comprendre la génération des données dans un processus à changement de régime markovien :

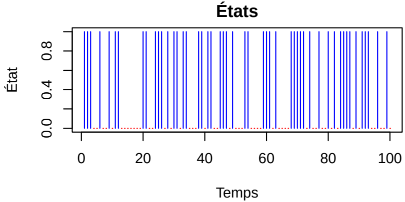
1. **À** $t = 0$: Un état initial s_0 est choisi selon les probabilités ergodiques (inconditionnelles).
   - Avec probabilité π_H, $s_0 = H$.
   - Avec probabilité $\pi_L = 1 - \pi_H$, $s_0 = L$.
2. **Évolution des états** : Les probabilités d'état évoluent indépendamment des données observées selon une chaîne de Markov.
   - Si $s_0 = H$, alors $s_1 = H$ avec probabilité p_{HH}, ou $s_1 = L$ avec probabilité $p_{LH} = 1 - p_{HH}$.
   - Si $s_0 = L$, alors $s_1 = H$ avec probabilité $p_{HL} = 1 - p_{LL}$, ou $s_1 = L$ avec probabilité p_{LL}.
3. **Génération de** Y_1 : Une fois l'état à $t = 1$ connu, la valeur de Y_1 est choisie comme suit :
$$Y_1 = \begin{cases} \phi_H + \varepsilon_1 & \text{si } s_1 = H \\ \phi_L + \varepsilon_t & \text{si } s_1 = L \end{cases}$$
4. **Répétition** : Les étapes 2 et 3 sont répétées pour $t = 2, 3, \ldots, T$ pour produire une série temporelle de données à changement de régime.

Simulation d'un mélange pur

- $\mu_H = 4, \mu_L = -2, \text{var}(\varepsilon_t) = 1$ pour les deux états
- $p_{HH} = .5 = p_{LL}$
- $\pi_H = \pi_L = .5$

Remarque : Il s'agit d'un modèle de mélange "pur" où la probabilité de chaque état ne dépend pas du passé. Cela se produit parce que la probabilité de passer de haut à bas est la même que la probabilité de passer de bas à haut, soit 0,5.



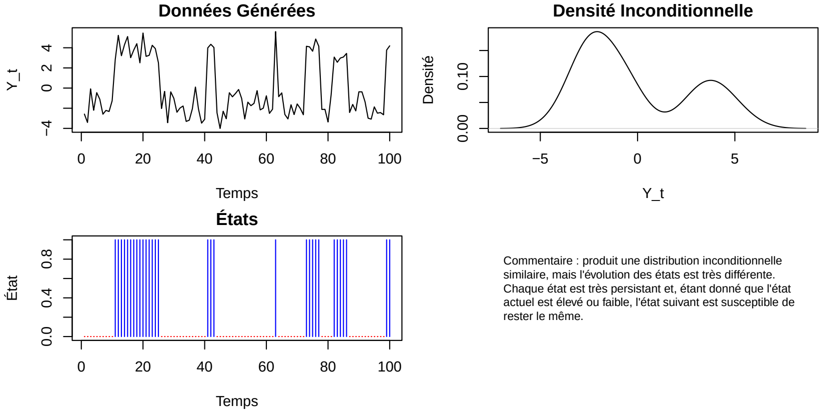


Commentaire : mélange avec des modes à −2 et 4, chacun ayant une probabilité égale, et les états (panneau supérieur, coin inférieur droit) sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.).

Simulation avec deux états persistants

- $\mu_H = 4, \mu_L = -2, \text{var}(\varepsilon_t) = 1$ pour les deux états
- $p_{HH} = .9 = p_{LL}$, la durée moyenne de chaque état est de 10 périodes.
- $\pi_H = \pi_L = .5$

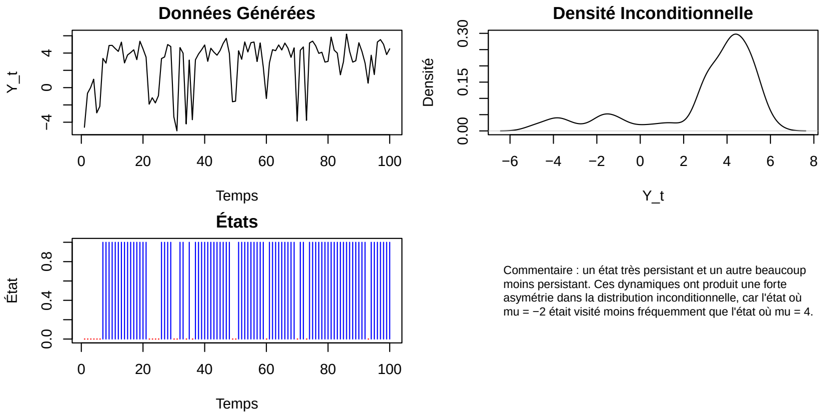
Remarque : Contrairement à la première paramétrisation, il ne s'agit pas d'un simple mélange. Étant donné que l'état actuel est H, il y a 90 % de chances que l'état suivant reste H.



Simulation avec un état persistant et un état transitoire

- $\mu_H = 4, \mu_L = -2, \text{var}(\varepsilon_t) = 1$ pour $s_t = H, \text{var}(\varepsilon_t) = 2$ pour $s_t = L$
- $p_{HH} = .9, p_{LL} = .5$
- $\pi_H = .83, \pi_L = .16$

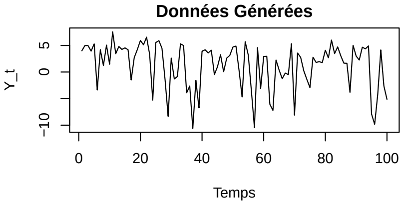
Remarque : Ce type de modèle est cohérent avec les données trimestrielles du PIB américain, où les périodes de croissance (H) durent généralement 10 trimestres, tandis que les récessions s'achèvent rapidement, généralement en 2 trimestres.

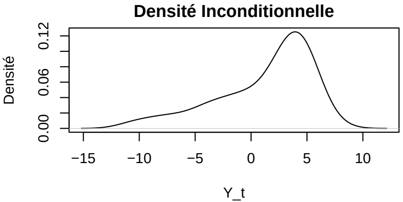


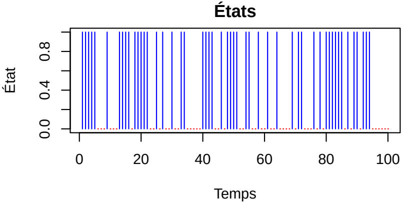
Simulation avec différentes variances

- $\mu_H = 4, \mu_L = -2, \text{var}(\varepsilon_t) = 1$ pour $s_t = H, \text{var}(\varepsilon_t) = 16$ pour $s_t = L$
- $p_{HH} = .5 = p_{LL}$
- $\pi_H = \pi_L = .5$

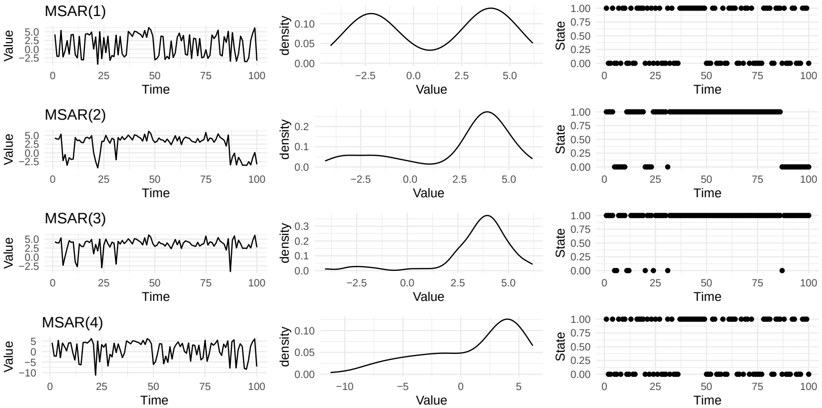
Remarque : Il s'agit d'un autre modèle de mélange “pur”, mais les variances diffèrent entre les états. Une caractéristique intéressante des modèles de mélange (le MSAR fait partie de la famille des modèles de mélange) est que la distribution inconditionnelle des données peut être non normale, même si les chocs sont distribués normalement de manière conditionnelle.







Commentaire : dynamiques d'état similaires au premier, mais produit une distribution inconditionnelle très différente. Cette différence survient car la variance dépend de l'état du processus de Markov.


MSAR(1)
MSAR(2)
MSAR(3)
MSAR(4)
Value
Time
density
State