

Calcul de l'Autocovariance et des Autocorrélations

Annexes

Économétrie des séries temporelles

Calcul de l'Autocovariance et des Autocorrélations

Cette annexe couvre la dérivation de la fonction d'autocorrélation (ACF) pour les modèles MA(1), MA(Q), AR(1), AR(2), AR(3) et ARMA(1,1). Tout au long de cette annexe, $\{\varepsilon_t\}$ est supposé être un processus de bruit blanc, et les paramètres des processus sont toujours supposés être cohérents avec la stationnarité de covariance. Tous les modèles sont supposés avoir une moyenne de 0, une hypothèse faite sans perte de généralité puisque les autocovariances sont définies en utilisant des séries temporelles décentrées,

$$\gamma_s = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)]$$

où $\mu = E[Y_t]$. Rappelons que l'autocorrélation est simplement le rapport de l'autocovariance d'ordre s à la variance,

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}.$$

Cette annexe présente deux méthodes pour dériver les autocorrélations des processus ARMA : la substitution arrière et les équations de Yule-Walker, un ensemble de k équations avec k inconnues où $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ sont la solution.

A.1 Équations de Yule-Walker

Les équations de Yule-Walker sont un système linéaire de $\max(P, Q) + 1$ équations (dans un ARMA(P, Q)) où la solution du système est la variance à long terme et les premières $k - 1$ autocovariances. Les équations de Yule-Walker sont formées en égalisant la définition d'une autocovariance avec une expansion produite en substituant la valeur contemporaine de Y_t . Par exemple, supposons que Y_t suit un processus AR(2),

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

La variance doit satisfaire

$$\begin{aligned} E[Y_t Y_t] &= E[Y_t(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)] \\ E[Y_t^2] &= E[\phi_1 Y_t Y_{t-1} + \phi_2 Y_t Y_{t-2} + Y_t \varepsilon_t] \\ V[Y_t] &= \phi_1 E[Y_t Y_{t-1}] + \phi_2 E[Y_t Y_{t-2}] + E[Y_t \varepsilon_t]. \end{aligned}$$

Dans l'équation finale ci-dessus, les termes de la forme $E[Y_t Y_{t-s}]$ sont remplacés par leurs valeurs de population, γ_s , et $E[Y_t \varepsilon_t]$ est remplacé par sa valeur de population, σ^2 .

$$V[Y_t Y_t] = \phi_1 E[Y_t Y_{t-1}] + \phi_2 E[Y_t Y_{t-2}] + E[Y_t \varepsilon_t]$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2$$

et donc la variance à long terme est une fonction des deux premières autocovariances, des paramètres du modèle, et de la variance des innovations. Cela peut être répété pour la première autocovariance,

$$E[Y_t Y_{t-1}] = \phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-1}] + \phi_2 E[Y_{t-1} Y_{t-2}] + E[Y_{t-1} \varepsilon_t]$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1,$$

et pour la deuxième autocovariance,

$$E[Y_t Y_{t-2}] = \phi_1 E[Y_{t-2} Y_{t-1}] + \phi_2 E[Y_{t-2} Y_{t-2}] + E[Y_{t-2} \varepsilon_t]$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0.$$

Ensemble, les trois dernières équations forment un système de trois équations avec trois inconnues. La méthode de Yule-Walker repose fortement sur la stationnarité de covariance et donc $E[Y_t Y_{t-j}] = E[Y_{t-h} Y_{t-h-j}]$ pour tout h . Cette propriété des processus stationnaires de covariance a été utilisée à plusieurs reprises pour former les équations de Yule-Walker puisque $E[Y_t Y_t] = E[Y_{t-1} Y_{t-1}] = E[Y_{t-2} Y_{t-2}] = \gamma_0$ et $E[Y_t Y_{t-1}] = E[Y_{t-1} Y_{t-2}] = \gamma_1$. La méthode de Yule-Walker sera démontrée pour plusieurs modèles, en commençant par un simple MA(1) et en allant jusqu'à un ARMA(1,1).

A.1.1 MA(1)

Les autocorrélations du MA(1) sont simples à dériver.

$$Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Les équations de Yule-Walker sont

$$E[Y_t Y_t] = E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_t] + E[\varepsilon_t Y_t]$$

$$E[Y_t Y_{t-1}] = E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_{t-1}] + E[\varepsilon_t Y_{t-1}]$$

$$E[Y_t Y_{t-2}] = E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_{t-2}] + E[\varepsilon_t Y_{t-2}]$$

$$\gamma_0 = \theta_1^2 \sigma^2 + \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \theta_1 \sigma^2$$

$$\gamma_2 = 0$$

De plus, γ_s et ρ_s , pour $s \geq 2$, sont nuls en raison de la propriété de bruit blanc des résidus, et donc les autocorrélations sont

$$\rho_1 = \frac{\theta_1 \sigma^2}{\theta_1^2 \sigma^2 + \sigma^2} = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_2 = 0.$$

A.1.2 MA(Q)

Les équations de Yule-Walker peuvent être construites et résolues pour tout MA(Q), et la structure de l'autocovariance est simple à détecter en construisant un sous-ensemble du système complet.

$$\begin{aligned} E[Y_t Y_t] &= E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_t] + E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} Y_t] + E[\theta_3 \varepsilon_{t-3} Y_t] + \dots + E[\theta_Q \varepsilon_{t-Q} Y_t] \\ \gamma_0 &= \theta_1^2 \sigma^2 + \theta_2^2 \sigma^2 + \theta_3^2 \sigma^2 + \dots + \theta_Q^2 \sigma^2 + \sigma^2 \\ &= \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \dots + \theta_Q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y_t Y_{t-1}] &= E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_{t-1}] + E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} Y_{t-1}] + E[\theta_3 \varepsilon_{t-3} Y_{t-1}] + \dots + E[\theta_Q \varepsilon_{t-Q} Y_{t-1}] \\ \gamma_1 &= \theta_1 \sigma^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma^2 + \theta_2 \theta_3 \sigma^2 + \dots + \theta_{Q-1} \theta_Q \sigma^2 \\ &= \sigma^2 (\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \dots + \theta_{Q-1} \theta_Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y_t Y_{t-2}] &= E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_{t-2}] + E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} Y_{t-2}] + E[\theta_3 \varepsilon_{t-3} Y_{t-2}] + \dots + E[\theta_Q \varepsilon_{t-Q} Y_{t-2}] \\ \gamma_2 &= \theta_2 \sigma^2 + \theta_1 \theta_3 \sigma^2 + \theta_2 \theta_4 \sigma^2 + \dots + \theta_{Q-2} \theta_Q \sigma^2 \\ &= \sigma^2 (\theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_4 + \dots + \theta_{Q-2} \theta_Q) \end{aligned}$$

Le schéma qui émerge montre que

$$\gamma_s = \theta_s \sigma^2 + \sum_{i=1}^{Q-s} \theta_i \theta_{i+s} \sigma^2 = \sigma^2 \left(\theta_s + \sum_{i=1}^{Q-s} \theta_i \theta_{i+s} \right)$$

et donc, γ_s est une somme de $Q - s + 1$ termes. Les autocorrélations sont

$$\rho_1 = \frac{\theta_1 + \sum_{i=1}^{Q-1} \theta_i \theta_{i+1}}{1 + \sum_{i=1}^Q \theta_i^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\theta_2 + \sum_{i=1}^{Q-2} \theta_i \theta_{i+2}}{1 + \sum_{i=1}^Q \theta_i^2}$$

$$\vdots$$

$$\rho_Q = \frac{\theta_Q}{1 + \sum_{i=1}^Q \theta_i^2}$$

$$\rho_{Q+s} = 0, \quad s \geq 0$$

A.1.3 AR(1)

La méthode de Yule-Walker nécessite $\max(P, Q) + 1$ équations pour calculer l'autocovariance d'un processus ARMA(P, Q), et dans le cas d'un AR(1), deux équations sont requises (la troisième est incluse pour établir ce point).

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}
E[Y_t Y_t] &= E[\phi_1 Y_{t-1} Y_t] + E[\varepsilon_t Y_t] \\
E[Y_t Y_{t-1}] &= E[\phi_1 Y_{t-1} Y_{t-1}] + E[\varepsilon_t Y_{t-1}] \\
E[Y_t Y_{t-2}] &= E[\phi_1 Y_{t-1} Y_{t-2}] + E[\varepsilon_t Y_{t-2}]
\end{aligned}$$

Ces équations peuvent être réécrites en termes d'autocovariances, de paramètres du modèle et de σ^2 en prenant l'espérance et en notant que $E[\varepsilon_t Y_t] = \sigma^2$ puisque $Y_t = \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots$ et $E[\varepsilon_t Y_{t-j}] = 0$ pour $j > 0$ car $\{\varepsilon_t\}$ est un processus de bruit blanc.

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 \\
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 \\
\gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1
\end{aligned}$$

La troisième équation est redondante car γ_2 est entièrement déterminé par γ_1 et ϕ_1 , et les autocovariances d'ordre supérieur sont similairement redondantes puisque $\gamma_s = \phi_1 \gamma_{s-1}$ pour tout s . Les deux premières équations peuvent être résolues pour γ_0 et γ_1 ,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 \\
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 \\
\Rightarrow \gamma_0 &= \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2 \\
\Rightarrow \gamma_0 - \phi_1^2 \gamma_0 &= \sigma^2 \\
\Rightarrow \gamma_0(1 - \phi_1^2) &= \sigma^2 \\
\Rightarrow \gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 \\
\Rightarrow \gamma_1 &= \phi_1 \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}.
\end{aligned}$$

Les autocovariances restantes peuvent être calculées en utilisant la récurrence $\gamma_s = \phi_1 \gamma_{s-1}$, et donc

$$\gamma_s = \phi_1^s \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}.$$

Enfin, les autocorrélations peuvent être calculées comme des rapports d'autocovariances,

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1 \\
\rho_s &= \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \phi_1^s.
\end{aligned}$$

A.1.4 AR(2)

Les autocorrélations dans un AR(2)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

peuvent être calculées de manière similaire en utilisant le système d'équations de Yule-Walker avec $\max(P, Q) + 1$ équations,

$$\begin{aligned}
E[Y_t Y_t] &= \phi_1 E[Y_{t-1} Y_t] + \phi_2 E[Y_{t-2} Y_t] + E[\varepsilon_t Y_t] \\
E[Y_t Y_{t-1}] &= \phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-1}] + \phi_2 E[Y_{t-2} Y_{t-1}] + E[\varepsilon_t Y_{t-1}] \\
E[Y_t Y_{t-2}] &= \phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-2}] + \phi_2 E[Y_{t-2} Y_{t-2}] + E[\varepsilon_t Y_{t-2}]
\end{aligned}
\tag{4.127}$$

puis en remplaçant les espérances par leurs contreparties populationnelles, γ_0 , γ_1 , γ_2 et σ^2 .

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2 \\
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \\
\gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0
\end{aligned}
\tag{4.128}$$

De plus, il doit être vrai que $\gamma_s = \phi_1 \gamma_{s-1} + \phi_2 \gamma_{s-2}$ pour $s \geq 2$. Pour résoudre ce système d'équations, divisons les équations d'autocovariance par γ_0 , la variance à long terme. En omettant la première équation, le système se réduit à deux équations avec deux inconnues,

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0
\end{aligned}$$

puisque $\rho_0 = \gamma_0 / \gamma_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\
\rho_1 - \phi_2 \rho_1 &= \phi_1 \\
\rho_1(1 - \phi_2) &= \phi_1 \\
\rho_1 &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \\
&= \phi_1 \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \right) + \phi_2 \\
&= \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1 - \phi_2)}{1 - \phi_2} \\
&= \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2}
\end{aligned}$$

Puisque $\rho_s = \phi_1 \rho_{s-1} + \phi_2 \rho_{s-2}$, ces deux premières autocorrélations sont suffisantes pour calculer les autres autocorrélations,

$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 = \frac{\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2) + \phi_2 \phi_1}{1 - \phi_2}$$

et la variance à long terme de Y_t ,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2 \\
\gamma_0 - \phi_1 \gamma_1 - \phi_2 \gamma_2 &= \sigma^2 \\
\gamma_0(1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2) &= \sigma^2 \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2}
\end{aligned}$$

La solution finale est calculée en substituant ρ_1 et ρ_2 ,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} - \phi_2 \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2}} \\
&= \frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \cdot \frac{\sigma^2}{(\phi_1 + \phi_2 - 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)}
\end{aligned}$$

A.1.5 AR(3)

Commencez par construire les équations de Yule-Walker,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t Y_t] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1} Y_t] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{t-2} Y_t] + \phi_3 \mathbb{E}[Y_{t-3} Y_t] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_t] \\
\mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1} Y_{t-1}] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{t-2} Y_{t-1}] + \phi_3 \mathbb{E}[Y_{t-3} Y_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-1}] \\
\mathbb{E}[Y_t Y_{t-2}] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1} Y_{t-2}] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{t-2} Y_{t-2}] + \phi_3 \mathbb{E}[Y_{t-3} Y_{t-2}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-2}] \\
\mathbb{E}[Y_t Y_{t-3}] &= \phi_1 \mathbb{E}[Y_{t-1} Y_{t-3}] + \phi_2 \mathbb{E}[Y_{t-2} Y_{t-3}] + \phi_3 \mathbb{E}[Y_{t-3} Y_{t-3}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-4}].
\end{aligned}$$

En remplaçant les espérances par leurs valeurs populationnelles, $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ et σ^2 , les équations de Yule-Walker peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \phi_3 \gamma_3 + \sigma^2 \\
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + \phi_3 \gamma_2 \\
\gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 + \phi_3 \gamma_1 \\
\gamma_3 &= \phi_1 \gamma_2 + \phi_2 \gamma_1 + \phi_3 \gamma_0
\end{aligned}$$

et la relation récursive $\gamma_s = \phi_1 \gamma_{s-1} + \phi_2 \gamma_{s-2} + \phi_3 \gamma_{s-3}$ peut être observée pour $s \geq 3$.

En omettant la première condition et en divisant par γ_0 ,

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 + \phi_3 \rho_1 \\
\rho_3 &= \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_0.
\end{aligned}$$

Cela laisse trois équations à trois inconnues puisque $\rho_0 = \gamma_0 / \gamma_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 \rho_1 \\
\rho_3 &= \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3
\end{aligned}$$

Après quelques calculs fastidieux, la solution à ce système est :

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{\phi_1 + \phi_2 \phi_3}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} \\
\rho_2 &= \frac{\phi_2 + \phi_1^2 + \phi_3 \phi_1 - \phi_2^2}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2} \\
\rho_3 &= \frac{\phi_3 + \phi_1^3 + \phi_1^2 \phi_3 + \phi_1 \phi_2^2 + 2\phi_1 \phi_2 + \phi_2^2 \phi_3 - \phi_2 \phi_3 - \phi_1 \phi_3^2 - \phi_3^3}{1 - \phi_2 - \phi_1 \phi_3 - \phi_3^2}.
\end{aligned}$$

Enfin, la variance inconditionnelle peut être calculée en utilisant les trois premières autocorrélations,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \phi_3\gamma_3 + \sigma^2 \\
\gamma_0 - \phi_1\gamma_1 - \phi_2\gamma_2 - \phi_3\gamma_3 &= \sigma^2 \\
\gamma_0(1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \phi_3\rho_3) &= \sigma^2 \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \phi_3\rho_3} \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2(1 - \phi_2 - \phi_1\phi_3 - \phi_3^2)}{(1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_1)(1 + \phi_2 + \phi_3\phi_1 - \phi_3^2)(1 + \phi_3 + \phi_1 - \phi_2)}.
\end{aligned}$$

A.1.6 ARMA(1,1)

Le calcul des autocovariances et autocorrélations d'un processus ARMA est plus complexe que pour un processus AR ou MA pur. Un ARMA(1,1) est spécifié comme suit :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Puisque $P = Q = 1$, le système de Yule-Walker nécessite deux équations, en notant que l'autocovariance d'ordre 3 ou plus est une fonction triviale des deux premières autocovariances.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t Y_t] &= \mathbb{E}[\phi_1 Y_{t-1} Y_t] + \mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_t] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_t] \\
\mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] &= \mathbb{E}[\phi_1 Y_{t-1} Y_{t-1}] + \mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-1}]
\end{aligned}$$

La présence du terme $\mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_t]$ dans la première équation complique la résolution du système, car ε_{t-1} apparaît directement dans Y_t via $\theta_1 \varepsilon_{t-1}$ et indirectement via $\phi_1 Y_{t-1}$. Les relations non nulles peuvent être déterminées en substituant récursivement Y_t jusqu'à ce qu'il ne consiste qu'en ε_t , ε_{t-1} et Y_{t-2} (puisque Y_{t-2} est non corrélé avec ε_{t-1} par l'hypothèse de bruit blanc).

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1(\phi_1 Y_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2 Y_{t-2} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2 Y_{t-2} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t-2} + (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_t] = \theta_1(\phi_1 + \theta_1)\sigma^2$, et les équations de Yule-Walker peuvent être exprimées en utilisant les moments populationnels et les paramètres du modèle.

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1\gamma_1 + \theta_1(\phi_1 + \theta_1)\sigma^2 + \sigma^2 \\
\gamma_1 &= \phi_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2
\end{aligned}$$

Ces deux équations à deux inconnues peuvent être résolues :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1\gamma_1 + \theta_1(\phi_1 + \theta_1)\sigma^2 + \sigma^2 \\
&= \phi_1(\phi_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2) + \theta_1(\phi_1 + \theta_1)\sigma^2 + \sigma^2 \\
&= \phi_1^2\gamma_0 + \phi_1\theta_1\sigma^2 + \theta_1(\phi_1 + \theta_1)\sigma^2 + \sigma^2 \\
\gamma_0 - \phi_1^2\gamma_0 &= \sigma^2(\phi_1\theta_1 + \phi_1\theta_1 + \theta_1^2 + 1) \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2}
\end{aligned}$$

De même, pour γ_1 :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \theta_1 \sigma^2 \\
&= \phi_1 \left(\frac{\sigma^2(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \right) + \theta_1 \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2(\phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 + 2\phi_1^2 \theta_1)}{1 - \phi_1^2} + \theta_1 \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2(\phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 + 2\phi_1^2 \theta_1) + \theta_1 \sigma^2(1 - \phi_1^2)}{1 - \phi_1^2} \\
&= \frac{\sigma^2(\phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 + 2\phi_1^2 \theta_1 + \theta_1 - \phi_1^2 \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \\
&= \frac{\sigma^2(\phi_1 + \theta_1 + \phi_1 \theta_1^2 + \phi_1^2 \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \\
&= \frac{\sigma^2(\phi_1 + \theta_1)(1 + \phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, la première autocorrélation est :

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\frac{\sigma^2(\phi_1 + \theta_1)(1 + \phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2}}{\frac{\sigma^2(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2}} = \frac{(\phi_1 + \theta_1)(1 + \phi_1 \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1}$$

En revenant à l'équation suivante de Yule-Walker :

$$\mathbb{E}[Y_t Y_{t-2}] = \mathbb{E}[\phi_1 Y_{t-1} Y_{t-2}] + \mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_{t-1} Y_{t-2}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-2}]$$

Ainsi, $\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1$, et en divisant les deux côtés par γ_0 , on obtient $\rho_2 = \phi_1 \rho_1$. Les autocovariances et autocorrélations d'ordre supérieur suivent respectivement $\gamma_s = \phi_1 \gamma_{s-1}$ et $\rho_s = \phi_1 \rho_{s-1}$, et donc $\rho_s = \phi_1^{s-1} \rho_1$ pour $s \geq 2$.

A.2 Substitution rétroactive

La substitution rétroactive est une méthode directe mais fastidieuse pour dériver la fonction d'autocorrélation (ACF) et la variance à long terme.

A.2.1 AR(1)

Le processus AR(1),

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

est stationnaire si $|\phi_1| < 1$ et si $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc. Pour calculer les autocovariances et autocorrélations en utilisant la substitution rétroactive, on transforme $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ en un processus MA pur par substitution récursive :

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1 (\phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2 Y_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2 (\phi_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^3 Y_{t-3} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots \\
Y_t &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i}.
\end{aligned}$$

La variance est l'espérance du carré :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \text{Var}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_t^2] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i} \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} [(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots)^2] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}^2] + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^j \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \sigma^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^j \cdot 0 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}.
\end{aligned}$$

L'étape difficile dans la dérivation est la séparation des ε_{t-i} en ceux qui sont appariés à leur propre retard (ε_{t-i}^2) et ceux qui ne le sont pas ($\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}$, $i \neq j$). Le reste de la dérivation découle de l'hypothèse que $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc, donc $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}^2] = \sigma^2$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}] = 0$ pour $i \neq j$. Enfin, l'identité $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \phi_1^{2i} = \frac{1}{1 - \phi_1^2}$ pour $|\phi_1| < 1$ a été utilisée pour simplifier l'expression.

La première autocovariance peut être calculée en utilisant les mêmes étapes sur la représentation $MA(\infty)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{j-1} \varepsilon_{t-j} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots) (\varepsilon_{t-1} + \phi_1 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-3} + \dots) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \varepsilon_{t-1-i}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^{j-1} \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j} \right] \\
&= \phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1-i}^2] + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^{j-1} \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}] \\
&= \phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \sigma^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^{j-1} \cdot 0 \\
&= \phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \sigma^2 \\
&= \phi_1 \gamma_0.
\end{aligned}$$

De même, l'autocovariance d'ordre s peut être déterminée :

$$\begin{aligned}
\gamma_s &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-s}] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=s}^{\infty} \phi_1^{j-s} \varepsilon_{t-j} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\phi_1^s \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \varepsilon_{t-s-i}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=s, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^{j-s} \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j} \right] \\
&= \phi_1^s \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \mathbb{E}[\varepsilon_{t-s-i}^2] + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=s, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^{j-s} \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}] \\
&= \phi_1^s \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \sigma^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=s, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^{j-s} \cdot 0 \\
&= \phi_1^s \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \sigma^2 \\
&= \phi_1^s \gamma_0.
\end{aligned}$$

Enfin, les autocorrélations peuvent être calculées à partir des ratios des autocovariances :

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1 \quad \text{et} \quad \rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \phi_1^s.$$

A.2.2 MA(1)

Le modèle $MA(1)$ est le modèle de série temporelle non dégénéré le plus simple considéré dans ce cours :

$$Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$

La dérivation de sa fonction d'autocorrélation est triviale, car aucune substitution rétroactive n'est nécessaire. La variance est donnée par :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \text{Var}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_t^2] \quad (4.136) \\
&= \mathbb{E}[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)^2] \\
&= \mathbb{E}[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t^2] \\
&= \mathbb{E}[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2] + \mathbb{E}[2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] \\
&= \theta_1^2 \sigma^2 + 0 + \sigma^2 \\
&= \sigma^2(1 + \theta_1^2).
\end{aligned}$$

La première autocovariance est :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] \quad (4.137) \\
&= \mathbb{E}[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(\theta_1 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1})] \\
&= \mathbb{E}[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}] + \mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_{t-1}^2] + \mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] \\
&= 0 + \theta_1 \sigma^2 + 0 + 0 \\
&= \theta_1 \sigma^2.
\end{aligned}$$

La deuxième autocovariance (et les autocovariances d'ordre supérieur) est :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-2}] \quad (4.138) \\
&= \mathbb{E}[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(\theta_1 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2})] \\
&= \mathbb{E}[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-2}] \\
&= \mathbb{E}[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}] + \mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}] + \mathbb{E}[\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-3}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}] \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Les autocorrélations sont donc :

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}, \quad \rho_s = 0 \quad \text{pour } s \geq 2.$$

A.2.3 ARMA(1,1)

Un processus ARMA(1,1) est défini par :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Il est stationnaire si $|\phi_1| < 1$ et si $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc. La dérivation de la variance et des autocovariances est plus complexe que pour un processus AR(1). Il est à noter que cette dérivation est plus longue et plus complexe que la résolution des équations de Yule-Walker.

Représentation MA(∞)

On commence par calculer la représentation MA(∞) en utilisant la substitution rétroactive :

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1 (\phi_1 Y_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2 Y_{t-2} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2 (\phi_1 Y_{t-3} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t-2} + (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^3 Y_{t-3} + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1 \theta_1 \varepsilon_{t-2} + (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^3 (\phi_1 Y_{t-4} + \theta_1 \varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-3}) + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \phi_1 (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-2} + (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^4 Y_{t-4} + \phi_1^3 \theta_1 \varepsilon_{t-4} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \phi_1^2 \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \phi_1 (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-2} + (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^4 Y_{t-4} + \phi_1^3 \theta_1 \varepsilon_{t-4} + \phi_1^2 (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-3} + \phi_1 (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-2} + (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \varepsilon_t + (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1} + \phi_1 (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-2} + \phi_1^2 (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-3} + \dots \\
&= \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i}.
\end{aligned}$$

Variance (γ_0)

La variance est donnée par :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \text{Var}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_t^2] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i} \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\varepsilon_t^2 + 2\varepsilon_t \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i} \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] + \mathbb{E} \left[2\varepsilon_t \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i} \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i} \right)^2 \right] \\
&= \sigma^2 + 0 + \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} (\phi_1 + \theta_1)^2 \varepsilon_{t-1-i}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^j (\phi_1 + \theta_1)^2 \varepsilon_{t-1-i} \varepsilon_{t-1-j} \right] \\
&= \sigma^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} (\phi_1 + \theta_1)^2 \sigma^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^j (\phi_1 + \theta_1)^2 \cdot 0 \\
&= \sigma^2 + (\phi_1 + \theta_1)^2 \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \\
&= \sigma^2 + (\phi_1 + \theta_1)^2 \sigma^2 \frac{1}{1 - \phi_1^2} \\
&= \sigma^2 \left(1 + \frac{(\phi_1 + \theta_1)^2}{1 - \phi_1^2} \right) \\
&= \sigma^2 \frac{1 - \phi_1^2 + (\phi_1 + \theta_1)^2}{1 - \phi_1^2} \\
&= \sigma^2 \frac{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1}{1 - \phi_1^2}.
\end{aligned}$$

Autocovariance d'ordre 1 (γ_1)

L'autocovariance d'ordre 1 est donnée par :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i} \right) \left(\varepsilon_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-2-i} \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_t \varepsilon_{t-2-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1-i} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-2-i} \right) \right] \\
&= 0 + 0 + (\phi_1 + \theta_1) \sigma^2 + \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i+1} (\phi_1 + \theta_1)^2 \varepsilon_{t-2-i}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0, j \neq i+1}^{\infty} \phi_1^i \phi_1^j (\phi_1 + \theta_1)^2 \varepsilon_{t-1-i} \varepsilon_{t-2-j} \right] \\
&= (\phi_1 + \theta_1) \sigma^2 + \phi_1 (\phi_1 + \theta_1)^2 \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \\
&= (\phi_1 + \theta_1) \sigma^2 + \phi_1 (\phi_1 + \theta_1)^2 \sigma^2 \frac{1}{1 - \phi_1^2} \\
&= \sigma^2 \left((\phi_1 + \theta_1) + \frac{\phi_1 (\phi_1 + \theta_1)^2}{1 - \phi_1^2} \right) \\
&= \sigma^2 \frac{(\phi_1 + \theta_1)(1 - \phi_1^2) + \phi_1 (\phi_1 + \theta_1)^2}{1 - \phi_1^2} \\
&= \sigma^2 \frac{(\phi_1 + \theta_1)(1 + \phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2}.
\end{aligned}$$

Autocorrélations

L'autocorrélation d'ordre 1 est :

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(\phi_1 + \theta_1)(1 + \phi_1 \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1}. \quad (4.142)$$

Les autocorrélations d'ordre supérieur suivent la récurrence :

$$\rho_s = \phi_1 \rho_{s-1}, \quad s \geq 2.$$