Séries Temporelles Multivariées

Chapitre 4

Économétrie des séries temporelles

Structure du cours :

Autorégressions Vectorielles – VAR

Exemples de base

Propriétés

- Stationnarité

Revisiter les processus ARMA univariés

Prévision

- Causalité de Granger
- Fonctions de réponse impulsionnelle

Cointégration

- Examiner les relations à long terme
- Déterminer si un VAR est cointégré
- Modèles de Correction d'Erreur
- Tests de Cointégration - Engle-Granger

Autorégressions Vectorielles – VAR

Pourquoi l'analyse VAR ?

VAR Stationnaires

- Déterminer si les variables se rétroagissent les unes sur les autres
- Améliorer les prévisions
- Modéliser l'effet d'un choc dans une série sur une autre
- Différencier entre les dynamiques à court terme et à long terme

Cointégration

- Lier les marches aléatoires
- Découvrir les relations à long terme
- Peut améliorer considérablement les prévisions à moyen et long terme

Définition du VAR

Autorégression d'ordre P, AR(P) :

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_P y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Autorégression vectorielle d'ordre P, VAR(P) :

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \ldots + \Phi_P \mathbf{y}_{t-p} + \varepsilon_t$$

où $\mathbf{y}_t$ et ε_t sont des vecteurs de dimension $k \times 1$

VAR(1) bivarié :

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

Exprime de manière compacte deux modèles liés :

$$y_{1,t} = \phi_{01} + \phi_{11} y_{1,t-1} + \phi_{12} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$y_{2,t} = \phi_{02} + \phi_{21} y_{1,t-1} + \phi_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

Stationnarité Revisitée

La stationnarité est une forme statistiquement significative de régularité.

Un processus stochastique y_t est stationnaire en covariance si :

- $E[y_t] = \mu, \quad \forall t$
- $V[y_t] = \sigma^2, \quad \sigma^2 < \infty, \forall t$
- $E[(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)] = \gamma_s, \quad \forall t, s$

Stationnarité de l'AR(1) : $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

- $\mid \phi \mid < 1$
- ε_t est un bruit blanc

Stationnarité de l'AR(P) : $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_P y_{t-P} + \varepsilon_t$

- Les racines de $(z^P - \phi_1 z^{P-1} - \phi_2 z^{P-2} - \ldots - \phi_{P-1} z - \phi_P)$ sont inférieures à 1
- ε_t est un bruit blanc

Pas de dépendance à t

Relation avec AR

AR(1)

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2 y_{t-2} + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2(\phi_0 + \phi_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \phi_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i} \\
&= (1-\phi_1)^{-1}\phi_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i}
\end{aligned}
$$

Relation avec AR

VAR(1)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_t &= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 (\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1^2 \mathbf{y}_{t-2} + \mathbf{\Phi}_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1^2 (\mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \mathbf{\Phi}_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}_1^i \mathbf{\Phi}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}_1^i \varepsilon_{t-i} \\
&= (\mathbf{I}_k - \mathbf{\Phi}_1)^{-1} \mathbf{\Phi}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}_1^i \varepsilon_{t-i}
\end{aligned}
$$

Propriétés d'un VAR(1) et AR(1)

Moyenne, Variance, Autocovariance

Propriété	**AR(1)**	**VAR(1)**
Équation	$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi} 1 \mathbf{y} t - 1 + \boldsymbol{\varepsilon}_t$
Moyenne	$\frac{\phi_0}{1-\phi_1}$	$(\mathbf{I}_k - \mathbf{\Phi}_1)^{-1}\mathbf{\Phi}_0$
Variance	$\frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$	$(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 \otimes \mathbf{\Phi}_1)^{-1}\text{vec}(\mathbf{\Sigma})$
Autocovariance s	$\gamma_s = \phi_1^s V[y_t]$	$\mathbf{\Gamma}_s = \mathbf{\Phi} 1^s V[\mathbf{y} t]$
Autocovariance $-s$	$\gamma - s = \phi_1^s V[y_t]$	$\mathbf{\Gamma} - s = V[\mathbf{y}_t]\mathbf{\Phi}_1^{s\prime}$

Les autocovariances des processus vectoriels ne sont pas symétriques, mais $\mathbf{\Gamma}_s = \mathbf{\Gamma}'_{-s}$

Stationnarité

- AR(1) : $|\phi_1| < 1$
- VAR(1) : $|\lambda_i| < 1$ où λ_i sont les valeurs propres de $\mathbf{\Phi}_1$

VAR – Relation PIB / Chômage

Modèle

$$\begin{pmatrix} \text{PIB}_t \\ \text{CHO}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.547^{\star\star\star} \\ 0.049^{\star} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.182^{\star\star} & -0.639^{\star\star\star} \\ -0.096^{\star\star\star} & 0.507^{\star\star\star} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{PIB}_{t-1} \\ \text{CHO}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

Significance : $\star\star\star$: 1%, $\star\star$: 5%, $\star$: 10%

Modèles

Modèle du PIB

$$\text{PIB}_t = \phi_{01} + \phi_{11,1}\text{PIB}_{t-1} + \phi_{12,1}\text{CHO}_{t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

Modèle du Chomage

$$\text{CHO}_t = \phi_{02} + \phi_{21,1}\text{PIB}_{t-1} + \phi_{22,1}\text{CHO}_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

Estimations VAR(1)

$$\text{PIB}_t = 0.547^{\star\star\star} + 0.182^{\star\star}\text{PIB}_{t-1} - 0.639^{\star\star\star}\text{CHO}_{t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$\text{CHO}_t = 0.049^{\star} - 0.096^{\star\star\star}\text{PIB}_{t-1} + 0.507^{\star\star\star}\text{CHO}_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

Estimations AR(1)

$$\text{PIB}_t = 0.648^{\star\star\star} + 0.414^{\star\star\star}\text{PIB}_{t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$\text{CHO}_t = -0.003 + 0.692^{\star\star\star}\text{CHO}_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

Données

y_1 : **PIB**

y_2 : **Chomâge**

Pays : **USA**

Période : **jan. 1980 - déc. 2019**

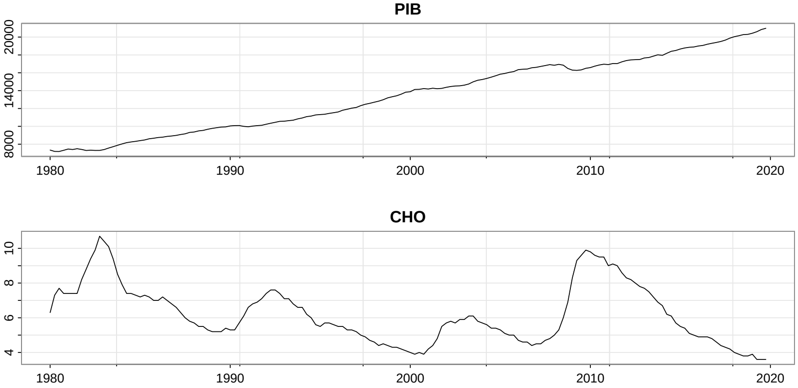
Fréquence : **trimestrielle**

Les données – Obtention

```r
start_date <- as.Date("1980-01-01")
#start_date <- as.Date("1957-01-01")
end_date <- as.Date("2019-12-31")
#end_date <- as.Date("2024-12-31")

# 1. Télécharger et transormer les données FRED
gdp_data <- fredr(series_id = "GDPC1",
                  observation_start = start_date,
                  observation_end = end_date, frequency = "q")
unemp_data <- fredr(series_id = "UNRATE",
                    observation_start = start_date,
                    observation_end = end_date, frequency = "q")
```

Graphs – données brutes



Les données – Manipulation

```r
# merge les deux variables dans une data.frame
data <- merge(gdp_data[, c("date", "value")],
              unemp_data[, c("date", "value")],
              by = "date", suffixes = c("_gdp", "_unemp"))
colnames(data) <- c("date", "gdp", "unemp")

# transformation des variables
data <- data %>%
  mutate(log_gdp = log(gdp), unemp = unemp) %>%
  select(date, log_gdp, unemp)

# s'assurer que les données sont stationnaires (différencier si nécessaire)
data_diff <- data %>%
  mutate(d_log_gdp = c(NA, diff(log_gdp)),
         d_unemp = c(NA, diff(unemp))) %>%
  na.omit()
```

Les données – Tester la stationarité

PIB – log et diff(log)

```
tseries::adf.test(data$log_gdp)
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  data$log_gdp
## Dickey-Fuller = -1.3962, Lag order = 5, p-value = 0.8282
## alternative hypothesis: stationary
```

```
tseries::adf.test(data_diff$d_log_gdp)
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  data_diff$d_log_gdp
## Dickey-Fuller = -4.3656, Lag order = 5, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

Les données – Tester la stationarité

CHO – taux et variation de taux

```
tseries::adf.test(data$unemp)
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  data$unemp
## Dickey-Fuller = -2.5066, Lag order = 5, p-value = 0.3651
## alternative hypothesis: stationary
```

```
tseries::adf.test(data_diff$d_unemp)
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  data_diff$d_unemp
## Dickey-Fuller = -3.8569, Lag order = 5, p-value = 0.01802
## alternative hypothesis: stationary
```

Les modèles – Estimation VAR(1) vs AR(1)

```r
# 2. Estimation des modèles
# (a) Modèle VAR(1) multivarié
data_diff$d_log_gdp <- data_diff$d_log_gdp*100
# *100 pour etre en % et coller à l'echelle de la variation du taux de chomage
var_model <- VAR(data_diff[, c("d_log_gdp", "d_unemp")],
                 p = 1, type = "const")

# (b) Modèles AR(1) univariés
ar_gdp <- arima(data_diff$d_log_gdp, order = c(1, 0, 0))
ar_unemp <- arima(data_diff$d_unemp, order = c(1, 0, 0))
```

VAR(1) – Résultats d'estimation

```r
# 3. Analyse des résultats
# Résultats du VAR(1)

# lancer tout de meme summary dans le rmd
# summary(var_model)

coeftest(var_model)
```

```
##
## t test of coefficients:
##
##                          Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
## d_log_gdp:(Intercept)    0.546785   0.074933  7.2970 1.430e-11 ***
## d_log_gdp:d_log_gdp.l1   0.182007   0.091499  1.9892  0.048442 *
## d_log_gdp:d_unemp.l1    -0.639115   0.202632 -3.1541  0.001934 **
## d_unemp:(Intercept)      0.048835   0.027895  1.7507  0.081981 .
## d_unemp:d_log_gdp.l1    -0.096275   0.034062 -2.8265  0.005327 **
## d_unemp:d_unemp.l1       0.507314   0.075432  6.7254 3.178e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Diagram of fit and residuals for d_log_gdp

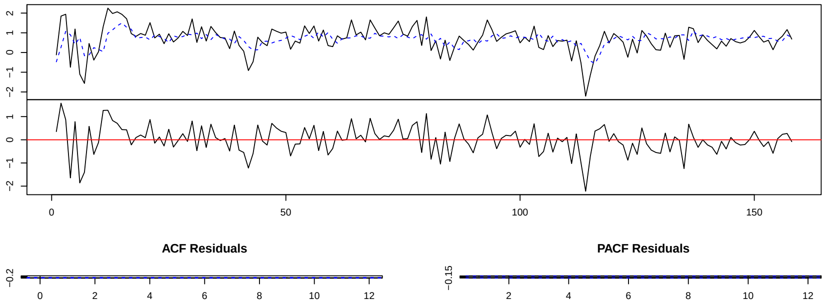
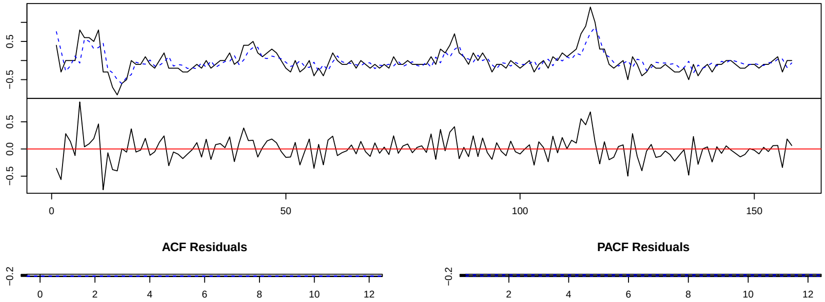


Diagram of fit and residuals for d_unemp



AR(1) – Résultats d'estimation

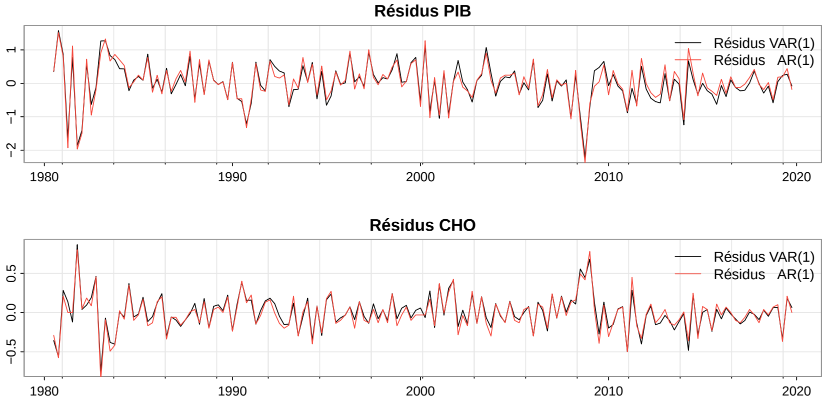
```r
# Résultats des modèles AR(1)
coeftest(ar_gdp)
```

```
##
## z test of coefficients:
##
##           Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
## ar1       0.413760   0.076315  5.4217 5.903e-08 ***
## intercept 0.648535   0.085898  7.5501 4.350e-14 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

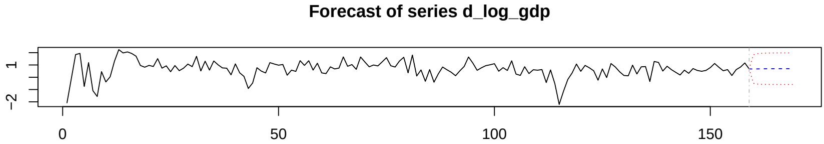
```r
coeftest(ar_unemp)
```

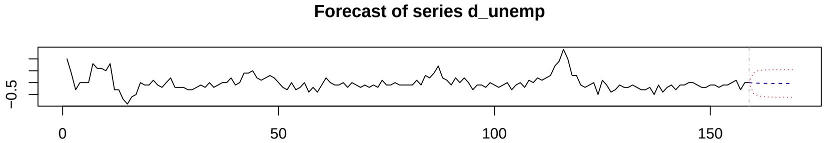
```
##
## z test of coefficients:
##
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## ar1        0.6918376  0.0600663 11.5179   <2e-16 ***
## intercept -0.0027798  0.0589276 -0.0472   0.9624
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Résidus VAR(1) vs AR(1)

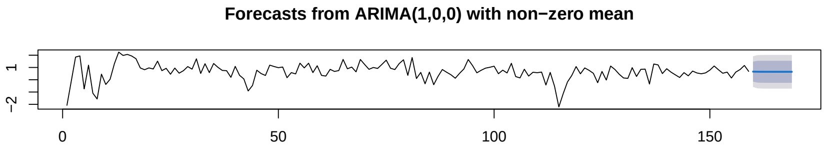


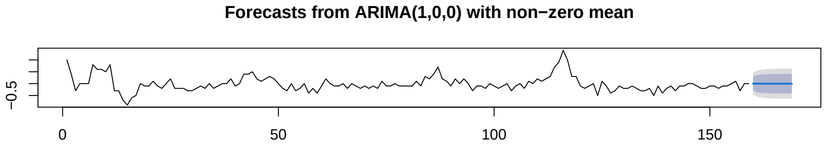
Prévision VAR(1)





Prévision AR(1)





Politique monétaire - VAR

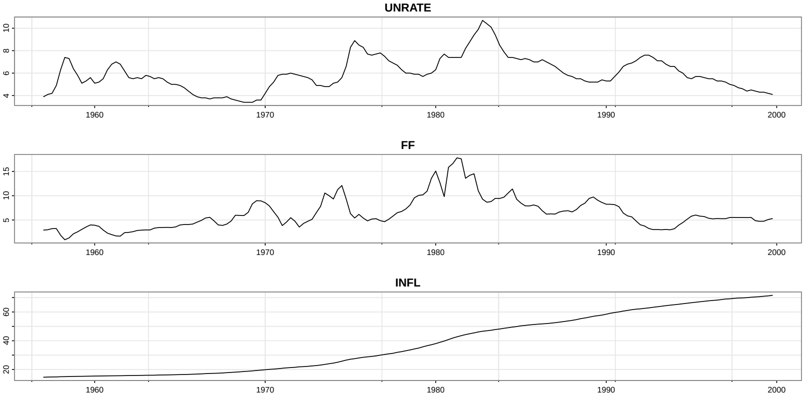
∼ Taylor Rule : Chomage, Fed Funds, Inflation

y_1 : **Chomage**, y_2 : **Fed Funds** y_3 : **Inflation** Pays : **USA** Période : **jan. 1957 - déc. 2019** Fréquence : **trimestrielle**

```r
start_date <- as.Date("1957-01-01")
end_date <- as.Date("1999-12-31")
# start_date <- as.Date("1980-01-01")
# end_date <- as.Date("2019-12-31")

UNRATE <- fredr(series_id = "UNRATE",
                observation_start = start_date,
                observation_end = end_date,
                frequency = "q")
DFF <- fredr(series_id = "DFF",
             observation_start = start_date,
             observation_end = end_date,
             frequency = "q")
GDPDEF <- fredr(series_id = "GDPDEF",
                observation_start = start_date,
                observation_end = end_date,
                frequency = "q")
```

Stationarité – visuelle



Stationarité – test

```r
adf_unrate <- tseries::adf.test(UNRATE$value)
adf_dff <- tseries::adf.test(DFF$value)
adf_gdpdef <- tseries::adf.test(GDPDEF$value)

adf_values <- data.frame(
  Série = c("UNRATE", "DFF", "GDPDEF"),
  `Statistique ADF` = c(adf_unrate$statistic, adf_dff$statistic, adf_gdpdef$sta
  `p-value` = c(adf_unrate$p.value, adf_dff$p.value, adf_gdpdef$p.value)
)
adf_values
```

```
##    Série Statistique.ADF    p.value
## 1 UNRATE       -2.355513 0.42780874
## 2    DFF       -3.150157 0.09839603
## 3 GDPDEF       -2.630979 0.31277964
```

Différenciation des séries

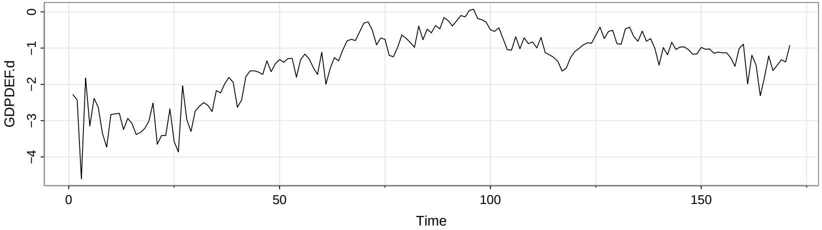
```r
# on différencie avec des méthodes qui maintiennent
# une "cohérence" des nouvelles variables
UNRATE.d <- na.omit(diff(UNRATE$value))
DFF.d <- na.omit(diff(DFF$value))
GDPDEF.d <- na.omit((log(diff(GDPDEF$value))))
# test stationarité
adf_unrate_d <- tseries::adf.test(UNRATE.d)
adf_dff_d <- tseries::adf.test(DFF.d)
adf_gdpdef_d <- tseries::adf.test(GDPDEF.d)

adf_values_d <- data.frame(
  Série = c("UNRATE", "DFF", "GDPDEF"),
  `Statistique ADF` = c(adf_unrate_d$statistic,
                        adf_dff_d$statistic,
                        adf_gdpdef_d$statistic),
  `p-value` = c(adf_unrate_d$p.value,
                adf_dff_d$p.value,
                adf_gdpdef_d$p.value)
)
adf_values_d
```

```
##    Série Statistique.ADF   p.value
## 1 UNRATE       -5.218266 0.0100000
## 2    DFF       -5.207432 0.0100000
## 3 GDPDEF       -1.165658 0.9093566
```

Graph de la série $I(2) \rightarrow I(1) \rightarrow I(0)$

```r
tsplot(GDPDEF.d)
```

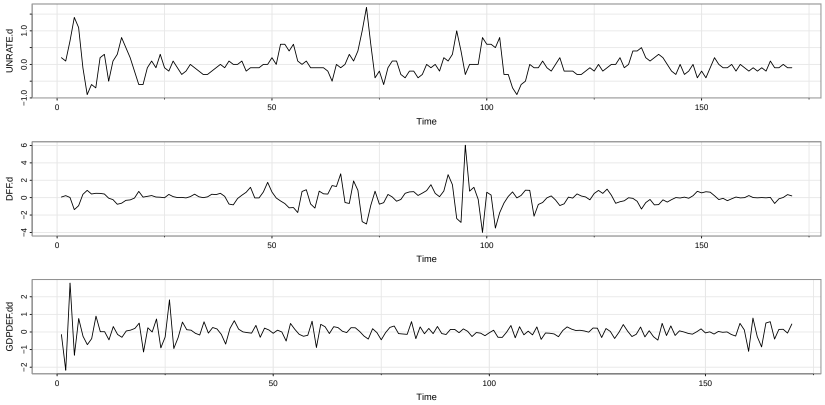



```r
# GDPDEF.d n'est toujours pas stationnaire : on différencie une seconde fois
GDPDEF.dd <- na.omit(diff((log(diff(GDPDEF$value)))))
# test stationarité
tseries::adf.test(diff(GDPDEF.dd))
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  diff(GDPDEF.dd)
## Dickey-Fuller = -10.4, Lag order = 5, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

Graph des séries stationnaires

```r
par(mfrow=c(3,1))
tsplot(UNRATE.d)
tsplot(DFF.d)
tsplot(GDPDEF.dd)
```



Estimation VAR(1) – UNRATE, FF, INF

```
PolMon <- VAR(cbind(UNRATE.d, DFF.d, GDPDEF.dd), type = "none")

#summary(PolMon)
coef(PolMon)
```

```
## $UNRATE.d
##                 Estimate Std. Error  t value     Pr(>|t|)
## UNRATE.d.l1  0.65596501 0.06919730 9.479633 2.512014e-17
## DFF.d.l1     0.03234603 0.02530148 1.278424 2.028737e-01
## GDPDEF.dd.l1 0.05270480 0.04886464 1.078588 2.823270e-01
##
## $DFF.d
##                  Estimate Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## UNRATE.d.l1  -0.79875010 0.22816004 -3.5008325 0.0005949147
## DFF.d.l1      0.06938984 0.08342504  0.8317628 0.4067305799
## GDPDEF.dd.l1  0.02928980 0.16111840  0.1817905 0.8559675801
##
## $GDPDEF.dd
##                   Estimate Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## UNRATE.d.l1  -0.055376927 0.09655546 -0.5735245 5.670611e-01
## DFF.d.l1      0.003746848 0.03530479  0.1061286 9.156077e-01
## GDPDEF.dd.l1 -0.479475102 0.06818399 -7.0320779 4.973776e-11
```

Modèle trivarié VAR(1) estimé

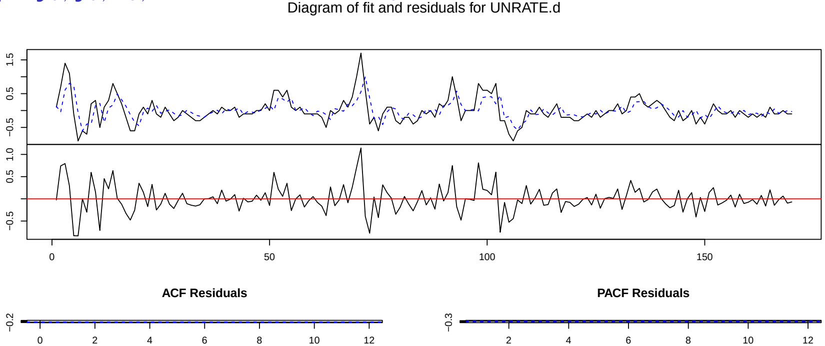
$$UNRATE_t = 0.656^{\star\star\star} UNRATE_{t-1} + 0.032 FF_{t-1} + 0.053 INF_{t-1} + \varepsilon_{UNRATE,t}$$

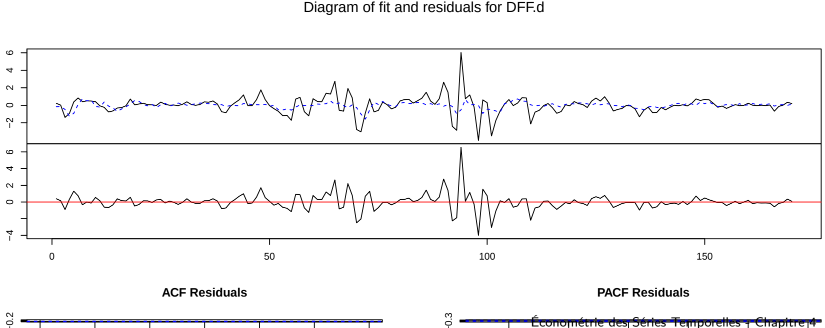
$$FF_t = -0.799^{\star\star\star} UNRATE_{t-1} + 0.069 FF_{t-1} + 0.029 INF_{t-1} + \varepsilon_{FF,t}$$

$$INF_t = -0.055 UNRATE_{t-1} + 0.004 FF_{t-1} - 0.479^{\star\star\star} INF_{t-1} + \varepsilon_{INF,t}$$

En pratique, pour vérifier la Taylor Rule on applique un VAR structurel (SVAR) afin d'imposer une relation ***structurelle***

Graph $\mathbf{y}_t, \widehat{\mathbf{y}}_t, \widehat{\varepsilon}_t$, ACF et $PACF$ de $\widehat{\varepsilon}_t$





VAR(P) est en réalité un VAR(1)

Forme compagnon :

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{y}_{t-2} + \ldots + \Phi_P \mathbf{y}_{t-P} + \varepsilon_t$$

Reformuler en un seul VAR(1) où $\mu = E[\mathbf{y}_t] = (I - \Phi_1 - \ldots - \Phi_P)^{-1}\Phi_0$

$$\mathbf{z}_t = \Upsilon \mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\xi}_t$$

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-P+1} - \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}, \Upsilon = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \ldots & \Phi_{P-1} & \Phi_P \\ I_k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I_k & 0 \end{pmatrix}$$

- Tous les résultats peuvent être directement appliqués à la forme compagnon.
- Peut également être utilisé pour transformer AR(P) en VAR(1)

Revisiter les prévisions univariées

- Considérons l'AR(1) standard

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Prévision optimale à 1 étape :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t\left[y_{t+1}\right] &= \mathrm{E}_t\left[\phi_0\right] + \mathrm{E}_t\left[\phi_1 y_t\right] + \mathrm{E}_t\left[\varepsilon_{t+1}\right] \\ &= \phi_0 + \phi_1 y_t + 0 \end{aligned}$$

- Prévision optimale à 2 étapes :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t\left[y_{t+2}\right] &= \mathrm{E}_t\left[\phi_0\right] + \mathrm{E}_t\left[\phi_1 y_{t+1}\right] + \mathrm{E}_t\left[\varepsilon_{t+2}\right] \\ &= \phi_0 + \phi_1 \mathrm{E}_t\left[y_{t+1}\right] + 0 \\ &= \phi_0 + \phi_1\left(\phi_0 + \phi_1 y_t\right) \\ &= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2 y_t \end{aligned}$$

- Prévision optimale à h étapes :

$$\mathrm{E}_t\left[y_{t+h}\right] = \sum_{i=0}^{h-1} \phi_1^i \phi_0 + \phi_1^h y_t$$

Prévisions avec VAR

- Identique au cas univarié

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Prévision optimale à 1 étape :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t[\mathbf{y}_{t+1}] &= \mathrm{E}_t[\mathbf{\Phi}_0] + \mathrm{E}_t[\mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_t] + \mathrm{E}_t[\varepsilon_{t+1}] \\ &= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_t + \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Prévision optimale à h étapes :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t[y_{t+h}] &= \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_0 + \ldots + \mathbf{\Phi}_1^{h-1} \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1^h \mathbf{y}_t \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} \mathbf{\Phi}_1^i \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1^h \mathbf{y}_t \end{aligned}$$

- Prévision de plus haut ordre peut être calculée de manière récursive

$$\mathrm{E}_t[\mathbf{y}_{t+h}] = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathrm{E}_t[\mathbf{y}_{t+h-1}] + \ldots + \mathbf{\Phi}_P \mathrm{E}_t[\mathbf{y}_{t+h-P}]$$

Qu'est-ce qui fait une bonne prévision ?

- Résidus de prévision

$$\hat{e}_{t+h|t} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t}$$

- Les résidus *ne sont pas* un bruit blanc
- Peut contenir une composante MA$(h-1)$
  - Erreur de prévision pour $y_{t+1} - \widehat{y}_{t+1|t-h+1}$ n'était pas connue au moment t.
- Tracez vos résidus
- ACF des résidus
- Régressions de Mincer-Zarnowitz
- Procédure à trois périodes
  - Échantillon d'entraînement : Utilisé pour construire le modèle
  - Échantillon de validation : Utilisé pour affiner le modèle
  - Échantillon d'évaluation : Test ultime, idéalement en une seule fois

Prévision multi-étapes

Deux méthodes

- Méthode itérative
  - Construire un modèle pour les prévisions à 1 étape

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

  - Itérer la prévision jusqu'à la période h

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+h|t} = \sum_{i=0}^{h-1} \Phi_1^i \Phi_0 + \Phi_1^h \mathbf{y}_t$$

  - Utilise efficacement les informations
  - Impose beaucoup de structure au problème
- Méthode directe
  - Construire un modèle pour les prévisions à h étapes

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi_h \mathbf{y}_{t-h} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

  - Prévision directe en utilisant une méthode pseudo à 1 étape

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+h|t} = \Phi_0 + \Phi_h \mathbf{y}_t$$

  - Robuste à certaines non-linéarités

Évaluation des prévisions multi-étapes

- L'évaluation des prévisions multi-étapes est identique à l'évaluation des prévisions à une étape avec une réserve
- Les erreurs de prévision à h étapes peuvent être corrélées avec toute erreur de prévision non connue au moment t

$$\hat{e}_{t+1|t-h+1}, \hat{e}_{t+2|t-h+2}, \ldots, \hat{e}_{t+h-1|t-1}$$

- Conduit à une structure MA$(h-1)$ dans les erreurs de prévision
- Solutions :
  - Utiliser une régression GMZ régulière avec un estimateur de covariance Newey-West
    $$y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t} = \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t+h|t} + \gamma \mathbf{x}_t + \eta_t$$
    $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \gamma = 0$, $H_1 : \beta_1 \neq 0 \cup \beta_2 \neq 0 \cup \gamma_j \neq 0 \exists j$
  - Modéliser explicitement le MA$(h-1)$ et utiliser un estimateur de covariance standard
    $$y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t} = \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t+h|t} + \gamma \mathbf{x}_t + \eta_t + \sum_{i=1}^{h-1} \theta_i \eta_{t-i}$$
    Note : Nulle est la même ; n'impose pas de restriction sur θ

Exemple : VAR de Politique Monétaire

- Prévisions produites de manière itérative pour 1 à 8 trimestres à l'avance
- Benchmark (*bm*) de marche aléatoire (*Fixed Forecast*) ou de moyenne constante
- AR et VAR sélectionnent la longueur de décalage en utilisant BIC
- Forcer la réversion à la moyenne dans l'échantillon en utilisant un estimateur à 2 étapes
  1. Estimer la moyenne de l'échantillon, et soustraire pour produire $\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}$
  2. Estimer VAR *sans* constante
  $$\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{\Phi}_1 \tilde{\mathbf{y}}_{t-1} + \ldots + \mathbf{\Phi}_P \tilde{\mathbf{y}}_{t-P} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$
  3. Prévision puis ajouter la moyenne dans l'échantillon
  $$\mathrm{E}_t \left[\tilde{\mathbf{y}}_{t+h}\right] + \hat{\boldsymbol{\mu}}$$
- Évaluation basée sur MSE relatif :

$$\text{Rel. MSE} = \frac{\mathrm{MSE}}{\mathrm{MSE}_{bm}}, \mathrm{MSE} = 1/(T-h-R) \sum_{t=R}^{T-h} \left(y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t}\right)^2$$

Exemple : VAR de Politique Monétaire

Horizon	Série	VAR		AR	
		Restreinte	Non restreinte	Restreinte	Non restreinte
1	Chômage	0.522	0.520	0.507	0.507
	Taux des fonds fédéraux	0.887	0.903	0.923	0.933
	Inflation	0.869	0.868	0.839	0.840
2	Chômage	0.716	0.710	0.717	0.718
	Taux des fonds fédéraux	0.923	0.943	1.112	1.130
	Inflation	1.082	1.081	1.031	1.030
4	Chômage	0.872	0.861	0.937	0.940
	Taux des fonds fédéraux	0.952	0.976	1.082	1.109
	Inflation	1.000	0.999	0.998	0.998
8	Chômage	0.820	0.806	0.973	0.979
	Taux des fonds fédéraux	0.974	1.007	1.062	1.110
	Inflation	1.001	1.000	0.998	0.997

Performances de prévision VAR vs AR

1. Le taux de chômage,
2. Le taux des Fed Funds,
3. L'inflation.

Les prévisions sont réalisées à partir de **50 % de l'échantillon disponible**, et les paramètres du modèle sont réestimés à chaque itération.

La précision des prévisions est mesurée par la **Mean Squared Error (MSE) hors échantillon**, comparée à celle d'un **modèle de référence** (random walk pour le Fed Funds rate et moyenne historique pour les autres variables).

Deux variantes du VAR sont testées :

- **Modèle restreint** : Forcé à converger vers la moyenne historique.
- **Modèle non restreint** : Estime librement les paramètres, y compris l'intercept.

Le VAR intègre des interactions entre plusieurs séries temporelles, offrant des prévisions plus précises que les modèles univariés dans 7 cas sur 12. Lorsqu'il n'est pas optimal, il reste compétitif.

En **politique monétaire** et plus généralement en macroéconomie, permet d'anticiper l'impact des chocs et améliorer la prise de décision.

Estimation et Identification

- Identification univariée : Box-Jenkins
  - Utiliser ACF et PACF pour déterminer l'ordre de décalage AR et MA
  - Examiner les résidus
  - Principe de parcimonie
- L'autocorrélation d'un processus scalaire est définie

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

où γ_s est la $s^{\text{ème}}$ autocovariance

  - Coefficient de régression :

$$y_t = \mu + \rho_s y_{t-s} + \varepsilon_t$$

- Autocorrélation partielle ψ_s
  - Interprétation de régression de la $s^{\text{ème}}$ autocorrélation partielle :

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_{s-1} y_{t-s+1} + \psi_s y_{t-s} + \varepsilon_t$$

  - ψ est la $s^{\text{ème}}$ autocorrélation partielle

CCF et PCCF

(Fonction Cross Correlation) et (Fonction Cross Correlation Partielle)

- Équivalents multivariés
  - ACF et PACF ont les mêmes définitions de régression
  - Fonction de corrélation croisée

$$\rho_{xy,s} = \frac{\mathsf{E}\left[(x_t - \mu_x)(y_{t-s} - \mu_y)\right]}{\sqrt{\mathrm{V}[x_t]\,\mathrm{V}[y_t]}}$$

$$\rho_{yx,s} = \frac{\mathsf{E}\left[(y_t - \mu_y)(x_{t-s} - \mu_x)\right]}{\sqrt{\mathrm{V}[x_t]\,\mathrm{V}[y_t]}}$$

  - Généralement différent
  - Fonction de corrélation partielle croisée $\psi_{xy,s}$

$$\begin{aligned} x_t =& \phi_0 + \phi_{x1} x_{t-1} + \ldots + \phi_{xs-1} x_{t-(s-1)} \\ & + \phi_{y1} y_{t-1} + \ldots + \phi_{ys-1} y_{t-(s-1)} + \varphi_{xy,s} y_{t-s} + \varepsilon_{x,t} \end{aligned}$$

    - Peut aider à identifier l'ordre VAR
- Problème plus profond : trop nombreux et trop compliqués
- Solution simple : Sélection de modèle

Interprétation des CCF et PCCF

- y a une dynamique (Hétérogène) HAR et se "déverse" dans x

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ .0 & 0.47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \sum_{i=2}^{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-i} \\ y_{t-i} \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_{j=6}^{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-j} \\ y_{t-j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{x,t} \\ \varepsilon_{y,t} \end{bmatrix}$$

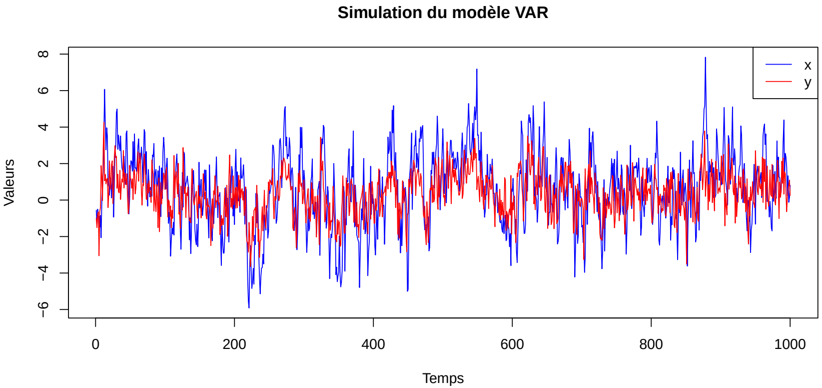
détaillée par

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0 & 0.47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}}_{\text{Dépendance immédiate sur } t-1} + \underbrace{\sum_{i=2}^{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-i} \\ y_{t-i} \end{bmatrix}}_{\text{Effet de mémoire moyen terme (lags 2-5) sur } y_t}$$

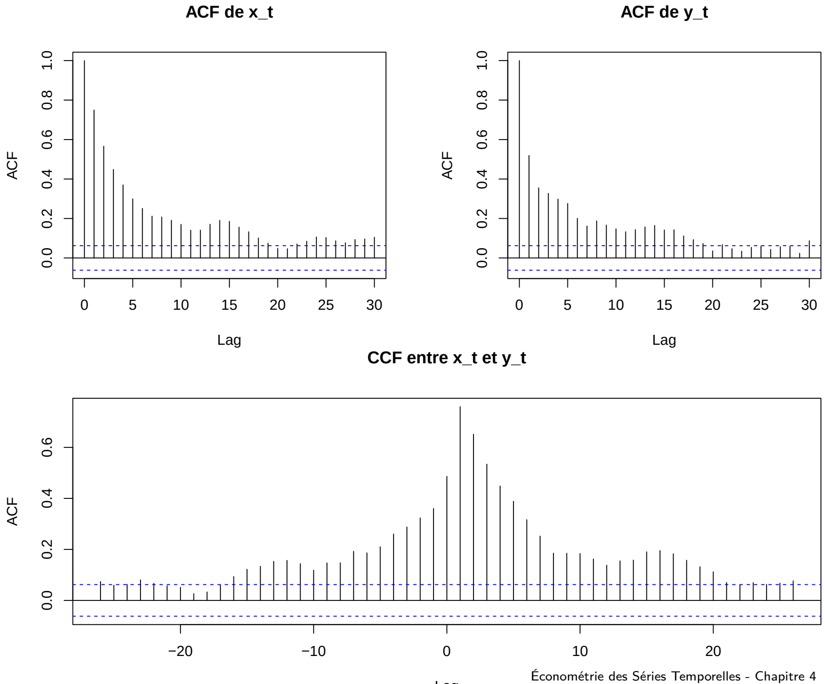
$$+ \underbrace{\sum_{j=6}^{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-j} \\ y_{t-j} \end{bmatrix}}_{\text{Effet de mémoire long terme (lags 6-22) sur } y_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{x,t} \\ \varepsilon_{y,t} \end{bmatrix}}_{\text{Innovations}}$$

Graph des séries

- Données simulées



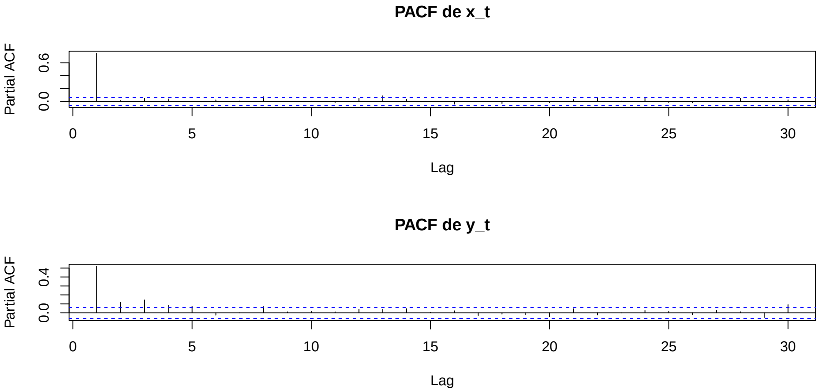
ACF et CCFS



ACF de x_t
ACF de y_t
ACF
Lag
0
5
10
15
20
25
30
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
CCF entre x_t et y_t
−20
−10

Fonctions PACF

PACF



Sélection de modèle

- Étape 1 : Choisir la longueur de décalage maximale
  - Critères d'information

$$\begin{array}{ll} \text{AIC:} & \ln|\boldsymbol{\Sigma}(P)| + k^2 P \frac{2}{T} \\ \text{Hannan-Quinn IC (HQIC):} & \ln|\boldsymbol{\Sigma}(P)| + k^2 P \frac{\ln \ln T}{T} \\ \text{SIC:} & \ln|\boldsymbol{\Sigma}(P)| + k^2 P \frac{\ln T}{T} \end{array}$$

    - $\Sigma(P)$ est la covariance des résidus en utilisant P décalages
    - $|\cdot|$ est le déterminant
  - Basé sur l'hypothèse de test
    - Général à Spécifique
    - Spécifique à Général
  - Rapport de vraisemblance

$$\left(T - P_2 k^2\right)\left(\ln|\boldsymbol{\Sigma}(P_1)| - \ln|\boldsymbol{\Sigma}(P_2)|\right) \overset{A}{\sim} \chi^2_{(P_2-P_1)k^2}$$

Sélection de la longueur de décalage dans le VAR de la Politique Monétaire

- Décalage maximal : 12 (1 an)

Longueur de décalage	AIC	HQIC	BIC	LR	P-val
0	4.014	3.762	3.605	925	0.000
1	0.279	0.079	$0.000^{\triangledown\vartriangle}$	39.6	0.000
2	0.190	0.042	0.041	40.9	0.000
3	0.096	$0.000^{\triangledown}$	0.076	29.0	0.001
4	$0.050^{\triangledown}$	0.007	0.160	7.34	$0.602^{\triangledown}$
5	0.094	0.103	0.333	29.5	0.001
6	0.047	0.108	0.415	13.2	0.155
7	0.067	0.180	0.564	32.4	0.000
8	0.007	$0.172^{\vartriangle}$	0.634	19.8	0.019
9	$0.000^{\vartriangle}$	0.217	0.756	7.68	$0.566^{\vartriangle}$
10	0.042	0.312	0.928	13.5	0.141
11	0.061	0.382	1.076	13.5	0.141
12	0.079	0.453	1.224	-	-

Causalité de Granger

- Premier concept fondamentalement nouveau
- Examine si les décalages d'une variable sont utiles pour prédire une autre

Définition (Causalité de Granger)

Une variable aléatoire scalaire $\{x_t\}$ est dite **ne pas** causer au sens de Granger $\{y_t\}$ si $\mathrm{E}\left[y_t \mid x_{t-1}, y_{t-1}, x_{t-2}, y_{t-2}, \ldots\right] = \mathrm{E}\left[y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\right]$. C'est-à-dire, $\{x_t\}$ ne cause pas au sens de Granger si la prévision de y_t est la même que l'on conditionne ou non sur les valeurs passées de x_t.

Causalité de Granger

- Se traduit directement en une restriction dans un VAR
- Non restreint

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

- Restreint de sorte que x_t ne GC pas y_t

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

$$x_t = \phi_{01} + \phi_{11} x_{t-1} + \phi_{12} y_{t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$y_t = \phi_{02} + \phi_{22} y_{t-1} + \varepsilon_{2,t} \Leftarrow \text{ Pas de } x_t!$$

Plus de causalité de Granger

- Dans le modèle de décalage P

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \ldots + \mathbf{\Phi}_P \mathbf{y}_{t-P} + \varepsilon_t$$

l'hypothèse nulle est

$$H_0 : \phi_{ij,1} = \phi_{ij,2} = \ldots = \phi_{ij,P} = 0$$

- Alternative est

$$H_0 : \phi_{ij,1} \neq 0 \text{ ou } \phi_{ij,2} \neq 0 \text{ ou } \ldots \text{ ou } \phi_{ij,P} \neq 0$$

- Test du rapport de vraisemblance

$$\left(T - Pk^2\right) \left(\ln |\mathbf{\Sigma}_r| - \ln |\mathbf{\Sigma}_u|\right) \overset{A}{\sim} \chi^2_P$$

- Σ_u est la covariance des erreurs à partir du modèle non restreint
- Σ_r est la covariance des erreurs à partir du modèle restreint
- $T - Pk^2$ est le nombre d'observations moins le nombre de paramètres libres dans le modèle non restreint
  - Pourquoi χ^2_P ?

VAR de Politique Monétaire – Campbell

- Outil standard dans l'analyse de la politique monétaire
  - Taux de chômage (différencié)
  - Taux des fonds fédéraux
  - Taux d'inflation (différencié)

$$\begin{bmatrix} \Delta\text{UNEMP}_t \\ \text{FF}_t \\ \Delta\text{INF}_t \end{bmatrix} = \Phi_0 + \Phi_1 \begin{bmatrix} \Delta\text{UNEMP}_{t-1} \\ \text{FF}_{t-1} \\ \Delta\text{INF}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{bmatrix}$$

Causalité de Granger dans le VAR de Campbell

- Utiliser le modèle avec 3 décalages (HQIC)
- $H_0 : \phi_{ij,1} = \phi_{ij,2} = \phi_{ij,3} = 0$
- $H_1 : \phi_{ij,1} \neq 0$ ou $\phi_{ij,2} \neq 0$ ou $\phi_{ij,3} \neq 0$
- i représente la série affectée par les décalages de la série j

	Taux des fonds fédéraux		Inflation		Chômage	
Exclusion	P-val	Stat	P-val	Stat	P-val	Stat
Taux des fonds fédéraux	-	-	0.001	13.068	0.014	8.560
Inflation	0.001	14.756	-	-	0.375	1.963
Chômage	0.000	19.586	0.775	0.509	-	-
Tous	0.000	33.139	0.000	18.630	0.005	10.472

Fonctions de réponse impulsionnelle

- Deuxième concept fondamentalement nouveau
- La dynamique complexe d'un VAR rend l'interprétation directe des coefficients difficile
- La solution est d'examiner les réponses impulsionnelles
- La fonction de réponse impulsionnelle de y_i par rapport à un choc dans ε_j, pour tout j et i, est définie comme le changement dans $y_{it+s}, s \geq 0$ pour un choc unitaire dans ε_{jt}
  - Difficile à déchiffrer
- Tant que $\mathbf{y}_t$ est stationnaire en covariance, il doit avoir une représentation VMA,

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \varepsilon_t + \mathbf{\Xi}_1 \varepsilon_{t-1} + \mathbf{\Xi}_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

- $\mathbf{\Xi}_j$ sont les réponses impulsionnelles !
- Pourquoi ?
  - Mesurent directement l'effet dans la période j de tout choc

AP(P) et MA(∞)

- Tout AR(P) stationnaire

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_P y_{t-P} + \varepsilon_t$$

peut être représenté comme un MA(∞)

$$y_t = \phi_0 / \left(1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_P\right) + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

- AR(1)

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

devient

$$y_t = \phi_0 / \left(1 - \phi_1\right) + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i}$$

- Les VAR(P) stationnaires ont la même relation avec VMA(∞)

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \ldots + \mathbf{\Phi}_P \mathbf{y}_{t-P} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{\Xi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \mathbf{\Xi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \ldots$$

Résolution IR

- Facile dans VAR(1)

$$y_t = (\mathbf{I}_K - \Phi_1)^{-1}\Phi_0 + \varepsilon_t + \Phi_1\varepsilon_{t-1} + \Phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

- $\Xi_j = \Phi_1^j$
- Dans le VAR(P) général,

$$\Xi_j = \Phi_1\Xi_{j-1} + \Phi_2\Xi_{j-2} + \ldots + \Phi_P\Xi_{j-P}$$

où $\Xi_0 = \mathbf{I}_k$ et $\Xi_m = 0$ pour $m < 0$.

- Dans un VAR(2),

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$
$$-\Xi_0 = \mathbf{I}_k, \Xi_1 = \Phi_1, \Xi_2 = \Phi_1^2 + \Phi_2, \text{ et } \Xi_3 = \Phi_1^3 + \Phi_1\Phi_2 + \Phi_2\Phi_1$$

- Les intervalles de confiance sont également assez compliqués

Considérations pour les chocs

- VAR bivariée simple d'ordre 1

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

- La manière dont vous choquez importe
- Dépend de la corrélation entre $\varepsilon_{1,t}$ et $\varepsilon_{2,t}$
- 3 méthodes
  - Ignorer la corrélation et choquer simplement $\varepsilon_{j,t}$ avec un choc d'écart-type unitaire
  - Utiliser Cholesky pour factoriser Σ et utiliser $\Sigma^{1/2}\mathbf{e}_j$ où $\mathbf{e}_j$ est un vecteur de zéros avec 1 dans la $j^{\text{ème}}$ position

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & .5 \\ .5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Sigma}_C^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .5 & .866 \end{bmatrix}$$

    - L'ordre des variables importe
  - "Réponse impulsionnelle généralisée" qui utilise une méthode de projection

Exemple des différents chocs

- Définir la covariance des erreurs

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y \rho \\ \sigma_x \sigma_y \rho & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

- Standardisé

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_y \end{bmatrix}$$

- Cholesky

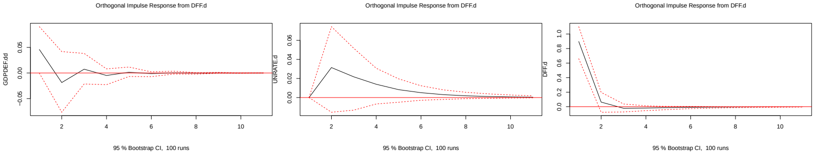
$$\mathbf{\Sigma}_C^{1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ \sigma_y \rho & \sigma_y \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_y \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ \sigma_y \rho & \sigma_y \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \rho \end{bmatrix}, \text{ autre est } \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_y \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

Réponses impulsionnelles

- Taux des fonds fédéraux ordonné en premier
- Réponse à un choc des fonds fédéraux
- Factorisation de Cholesky

```
irf_var_FF_INF <- irf(PolMon, impulse = "DFF.d", response = "GDPDEF.dd")
irf_var_FF_UNRATE <- irf(PolMon, impulse = "DFF.d", response = "UNRATE.d")
irf_var_FF_FF <- irf(PolMon, impulse = "DFF.d", response = "DFF.d")
par(mfrow=c(1,3))
plot(irf_var_FF_INF)
plot(irf_var_FF_UNRATE)
plot(irf_var_FF_FF)
par(mfrow=c(1,1))
```



Cointégration

- La cointégration est la version VAR des racines unitaires
- Établit des relations à long terme entre deux variables à racine unitaire
  - La consommation a une racine unitaire, le revenu a une racine unitaire
  - Consommation - Revenu : ????

Définition (Intégré d'Ordre 1)

Une variable y_t est intégrée d'ordre 1, ou I(1), si y_t est non stationnaire et $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ est stationnaire.

Cointégration

Définition (Cointégration Bivariée)

Si x_t et y_t sont cointégrés si les deux sont I(1) et il existe un vecteur β avec les deux éléments non nuls tels que

$$\beta_1 x_t - \beta_2 y_t \sim I(0)$$

- Lien fort entre x_t et y_t
- Les deux sont des marches aléatoires mais la différence est à retour moyen
- Retour moyen à la tendance (tendance stochastique)

À quoi ressemble la cointégration ?

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Phi}_{ij}\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\mathbf{\Phi}_{11} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = 1, 0.6$$

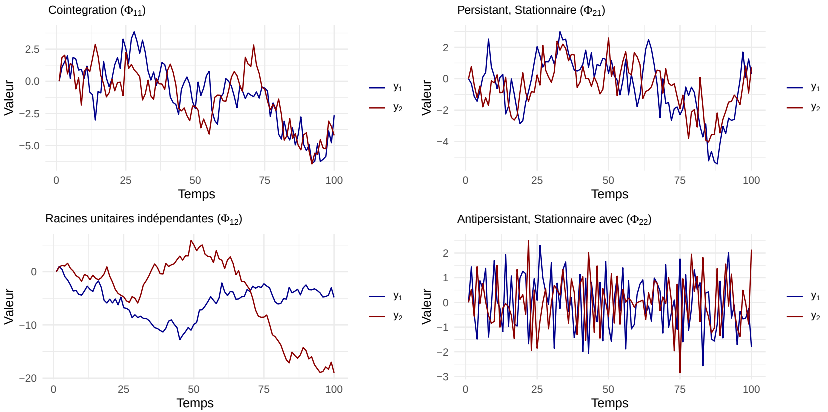
$$\mathbf{\Phi}_{21} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = 0.9, 0.5$$

$$\mathbf{\Phi}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = 1, 1$$

$$\mathbf{\Phi}_{22} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = -0.43, -0.06$$

—

Persistance, Anti-persistance et Cointégration



Comment savons-nous quand un VAR est cointégré ?

- La condition des valeurs propres détermine si un VAR(1) est cointégré

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .2 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

- Cointégré si une seule valeur propre est unitaire.
- Si tous inférieurs à 1 : ??
- Si les deux 1 : deux racines unitaires indépendantes

$$\mathbf{\Phi}_{11} = \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .2 & .8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Phi}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_i = 1, 0.6 \qquad \lambda_i = 1, 1$$

$$\mathbf{\Phi}_{21} = \begin{bmatrix} .7 & .2 \\ .2 & .7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Phi}_{22} = \begin{bmatrix} -.3 & .3 \\ .1 & -.2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_i = 0.9, 0.5 \qquad \lambda_i = -0.43, -0.06$$

Modèles de Correction d'Erreur

- Point majeur de la cointégration
  - Cointégré $\Leftrightarrow$ Modèle de correction d'erreur
- Qu'est-ce qu'un modèle de correction d'erreur ?
  - VAR cointégré :

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .2 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

  - Modèle de correction d'erreur :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.2 & .2 \\ .2 & -.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

  - Forme normalisée

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.2 \\ .2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

- $[1 \quad -1]$ est le vecteur de cointégration
- $[-.2 \quad .2]'$ mesure la vitesse d'ajustement

De VAR à VECM

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .2 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

Soustraire $[y_{t-1} x_{t-1}]'$ des deux côtés

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .2 & .8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} .8 & .2 \\ .2 & .8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.2 & .2 \\ .2 & -.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.2 \\ .2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

Vecteurs de cointégration

- La relation de cointégration peut toujours être décomposée

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\pi} \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$$

- α mesure la vitesse de convergence
- β contiennent les vecteurs de cointégration
- Le nombre de vecteurs de cointégration est rank $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')$

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & -0.36 \\ 0.2 & 0.5 & -0.35 \\ -0.3 & -0.3 & 0.39 \end{bmatrix}$$

- Combien ?

Détermination des vecteurs de cointégration

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\pi} \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & -0.36 \\ 0.2 & 0.5 & -0.35 \\ -0.3 & -0.3 & 0.39 \end{bmatrix}$$

- Mettre $\boldsymbol{\pi}$ sous forme échelonnée par ligne

$$\text{Forme Échelonnée par Ligne } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Rappel $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -.3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} .3 & .2 \\ .2 & .5 \\ -.3 & -.3 \end{bmatrix}$$

Résolution des vecteurs de cointégration

$$\boldsymbol{\alpha\beta}' = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & -0.36 \\ 0.2 & 0.5 & -0.35 \\ -0.3 & -0.3 & 0.39 \end{bmatrix}$$

$$\text{Forme Échelonnée par Ligne } \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

et $\boldsymbol{\alpha}$ a 6 paramètres inconnus. $\boldsymbol{\alpha\beta}'$ peut être combiné pour produire

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{31}\beta_1 + \alpha_{32}\beta_2 \end{bmatrix}$$

Tester la cointégration

- Deux tests pour la cointégration
  - Engle-Granger
  - Johansen
- Nous allons nous concentrer sur Engle-Granger
  - Simple et intuitif
  - Seulement applicable avec 1 relation de cointégration
- Tester la propriété clé de la cointégration : la différence est I(0)
- La plupart du travail est une simple OLS

$$y_t = \delta_0 + \beta x_t + \varepsilon_t$$

- Reste du travail est de tester $\hat{\varepsilon}_t$ pour une racine unitaire
- Johansen teste les valeurs propres de $\pi = \alpha\beta'$ directement.

Procédure Engle-Granger

Algorithme (Test Engle-Granger)

1. Commencer par analyser x_t et y_t isolément. Les deux doivent être des racines unitaires pour envisager la cointégration.
2. Estimer la relation à long terme

$$y_t = \delta_0 + \beta x_t + \varepsilon_t$$

et tester $H_0 : \gamma = 0$ contre $H_0 : \gamma < 0$ dans la régression ADF

$$\Delta\hat{\varepsilon}_t = \gamma\hat{\varepsilon}_{t-1} + \delta_1\Delta\hat{\varepsilon}_{t-1} + \ldots + \delta_p\Delta\hat{\varepsilon}_{t-P} + \eta_t$$

3. En utilisant les paramètres estimés, spécifier et estimer la forme de correction d'erreur de la relation,

$$\begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \begin{matrix} \pi_{01} \\ \pi_{02} \end{matrix} + \begin{matrix} \alpha_1\hat{\varepsilon}_t \\ \alpha_2\hat{\varepsilon}_t \end{matrix} + \boldsymbol{\pi}_1 \begin{bmatrix} \Delta x_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} + \ldots + \boldsymbol{\pi}_P \begin{bmatrix} \Delta x_{t-P} \\ \Delta y_{t-P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \end{bmatrix}$$

4. Évaluer le modèle

Considérations Engle-Granger

- Termes déterministes
  - Pas de termes déterministes : seulement dans des circonstances spéciales

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$$

  - Constante : cas standard

$$y_t = \delta_0 + \beta x_t + \varepsilon_t$$

  - Constante et tendance temporelle : permettre différents taux de croissance/tendances temporelles dans les variables

$$y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \beta x_t + \varepsilon_t$$

Valeurs Critiques

- Les valeurs critiques dépendent des déterministes dans la régression CI
  - Les modèles avec plus de déterministes ont des valeurs critiques plus basses (plus négatives)
- Les valeurs critiques dépendent du nombre de variables I(1) du côté droit
  - Les modèles plus grands ont des valeurs critiques plus basses

Exemple : cay

- La relation consommation-richesse agrégée a été une série cointégrée intéressante dans la littérature financière récente
- A relancé le CCAPM
- Trois composantes :
  - Consommation (c)
  - Richesse en actifs (a)
  - Revenu du travail (richesse humaine) (y)
- Écart par rapport à la relation à long terme lié au rendement attendu
- Relation de cointégration : $c_t + 0.643 - 0.249a_t - 0.785y_t$

Tests de racine unitaire			
Série	T-stat	P-val	Décalages ADF
c	-1.198	0.674	5
a	-0.205	0.938	3
y	-2.302	0.171	0
$\hat{\varepsilon}_t^c$	-2.706	0.383	1
$\hat{\varepsilon}_t^a$	-2.573	0.455	0
$\hat{\varepsilon}_t^y$	-2.679	0.398	1

Modèle Vectoriel de Correction d'Erreur

- VECM estimé en utilisant les résidus de la régression de cointégration

$$\begin{bmatrix} \Delta c_t \\ \Delta a_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003 \\ (0.000) \\ 0.004 \\ (0.014) \\ 0.003 \\ (0.000) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.000 \\ (0.281) \\ 0.002 \\ (0.037) \\ 0.000 \\ (0.515) \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0.192 & 0.102 & 0.139 \\ 0.005) & (0.000) & (0.004) \\ 0.282 & 0.220 & -0.149 \\ (0.116) & (0.006) & (0.414) \\ 0.369 & 0.061 & -0.139 \\ (0.000) & (0.088) & (0.140) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_{t-1} \\ \Delta a_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\eta}_t$$

- Valeurs p entre parenthèses
- Estimation de la relation de cointégration n'a aucun effet sur les erreurs standard
  - Converge rapidement (T)
  - Les paramètres VECM convergent à la racine $\sqrt{T}$

Régression Fallacieuse et Équilibre

- La prudence est nécessaire lorsqu'on travaille avec des données I(1)
  - I(0) sur I(0) : Le cas habituel. Les arguments asymptotiques standards s'appliquent.
  - I(1) sur I(0) : Cette régression est déséquilibrée.
  - I(1) sur I(1) : Cointégration ou régression fallacieuse.
  - I(0) sur I(1) : Cette régression est déséquilibrée.
- La régression fallacieuse peut conduire à de grandes statistiques t lorsque les séries sont indépendantes.
  - Deux processus I(1) non liés, x_t et y_t :

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = y_{t-1} + \eta_t$$

  - Lorsque $T = 50$, environ 80% des statistiques t sont significatives
  - Toujours vérifier pour I(1) lors de l'utilisation de données de séries temporelles
  - Si les deux sont I(1), assurez-vous qu'ils sont cointégrés.