

Tam metrik uzaylarda, sabit nokta teori üzerine ilk çalışmalar 1922 yılında Banach ile başlamıştır. Banach (1922), aşağıda verilen ve Banach büzülme prensibi olarak bilinen teoremi ispatlamıştır. Bu teorem, sabit noktanın varlığını kanıtladığı gibi tekliğini ve nasıl bulunacağını da ifade eder. Teorem (X, d) bir tam metrik uzay, $f: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve bir $\alpha \in [0,1[$ sayısı için $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğini sağlarsa f dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır ve her $x \in X$ için $yn = f^n x$ dizisi sabit noktaya yakınsar. Sabit nokta teori, matematikte olduğu kadar fizik, biyoloji, ekonomi, mühendislik, ve bilgisayar bilimleri gibi pek çok alanda uygulanmıştır. Zamanla, Banach büzülme prensibinin problemleri çözmek için yeterli olmadığı görülmüştür. Khan, Swaleh ve Sessa (1984), uzaklığı değiştiren fonksiyonları tanımlamıştır. Bu yardımcı fonksiyonlar aracılığıyla, Banach büzülme prensibinin bir genelleştirmesi olarak tam metrik uzaylarda zayıf büzülmeyi üretmiş ve zayıf büzülmeyi sağlayan bir dönüşümün sabit noktasının varlığını ve tekliğini ispatlamıştır. Ayrıca, araştırmacılar tarafından uzaklığı değiştiren fonksiyonlar kullanılarak gerek tek bir dönüşümün sabit noktasını kanıtlayan gerekse birden fazla dönüşümün ortak sabit noktasının varlığını ve tekliğini kanıtlayan daha genel sonuçlar verilmiştir.

$\psi: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ dönüşümü (a) $\psi(0) = 0$, (b) sürekli ve monoton azalmayan özelliklerini sağlarsa uzaklığı değiştiren fonksiyon olarak tanımlanır.

(X, d) bir tam metrik uzay, ψ uzaklığı değiştiren fonksiyon ve $f: X \rightarrow X$ dönüşüm olsun. f dönüşümü her $x, y \in X$ ve bir $c \in (0,1)$ sayısı için $\psi(d(fx, fy)) \leq c\psi(d(x, y))$ eşitsizliğini sağlarsa f dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır. Banach büzülme prensibinin diğer bir genelleştirmesi ise tam metrik uzaylarda Brianciari (2001) tarafından verilen integral tipli büzülmedir. 1.4. Teorem (X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ dönüşüm olsun. $\omega: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ Lebesgue integrallenebilir, toplanabilir ve her $\eta > 0$ için $\int \omega(t)dt \eta > 0$ özelliğini sağlayan fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in X$ ve bir $c \in]0,1[$ sayısı için $\int \omega(t)dt d(fx, fy) \leq c \int \omega(t)dt d(x, y)$ eşitsizliği sağlanırsa f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Son yıllarda, metrik uzayların sabit nokta teori için yeterli olmadığı ve metrik uzaylardan daha geniş uzayların olabileceği görülmüştür. Kısmi metrik uzaylar, metrik uzayların bir genelleştirmesi olarak Matthew tarafından tanımlanmış ve Banach büzülme prensibi bu uzaylara aktarılmıştır. Kısmi metrik uzayların en önemli özelliği bir noktanın kendisine olan uzaklığının sıfırdan farklı olabileceğidir. Bu özellikten dolayı yakınsaklık, süreklilik, tamlık gibi kavramlar metrik uzaylardakinden farklılık göstermekte ve en önemlisi de bir dizinin yakınsadığı nokta tek olmak zorunda değildir. Sabit noktanın varlığını ve tekliğini ispatlamak için yakınsaklığın tek olması önemlidir. Matthew (1992,1994) bu sorunu çözmek için kısmi metrik ile metrik arasında bir bağıntı vermiştir. Ayrıca, pek çok araştırmacı tarafından kısmi metrik uzaylarda çeşitli sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.