# El problema de existencia y regularidad para las ecuaciones de Navier-Stokes: uno de los siete problemas del milenio

Nicols Bourbaki

Departamento de Matemticas
Universidad de Antioquia

# Contenido

# Qu son las ecuaciones de Navier-Stokes?

- Son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido (liquidos y gases).
- Modelan una gran variedad de fenmenos fsicos complejos:
  - clima

# Qu son las ecuaciones de Navier-Stokes?

- Son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido (liquidos y gases).
- Modelan una gran variedad de fenmenos fsicos complejos:
  - clima
  - corrientes ocenicas

# Qu son las ecuaciones de Navier-Stokes?

- Son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido (liquidos y gases).
- Modelan una gran variedad de fenmenos fsicos complejos:
  - clima
  - corrientes ocenicas
  - aerodinmica

# Qu son las ecuaciones de Navier-Stokes?

- Son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido (liquidos y gases).
- Modelan una gran variedad de fenmenos fsicos complejos:
  - clima
  - corrientes ocenicas
  - aerodinmica
  - movimiento de estrellas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Qu son las ecuaciones de Navier-Stokes?

- Son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido (liquidos y gases).
- Modelan una gran variedad de fenmenos fsicos complejos:
  - clima
  - corrientes ocenicas
  - aerodinmica
  - movimiento de estrellas
- No se conoce una frmula que resuelva las ecuaciones (solucin analtica) excepto en algunos tipos de flujos concretos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Qu son las ecuaciones de Navier-Stokes?

- Son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido (liquidos y gases).
- Modelan una gran variedad de fenmenos fsicos complejos:
  - clima
  - corrientes ocenicas
  - aerodinmica
  - movimiento de estrellas
- No se conoce una frmula que resuelva las ecuaciones (solucin analtica) excepto en algunos tipos de flujos concretos.
- Es necesario recurrir al anlisis numrico para determinar soluciones aproximadas.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Qu son las ecuaciones de Navier-Stokes?

- Son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido (liquidos y gases).
- Modelan una gran variedad de fenmenos fsicos complejos:
  - clima
  - corrientes ocenicas
  - aerodinmica
  - movimiento de estrellas
- No se conoce una frmula que resuelva las ecuaciones (solucin analtica) excepto en algunos tipos de flujos concretos.
- Es necesario recurrir al anlisis numrico para determinar soluciones aproximadas.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Cmo surgen?

## Daniel Bernoulli (1700 - 1782)

Durante la primera mitad del siglo XVIII el matemtico suizo Daniel Bernoulli muestra cmo adaptar los mtodos del clculo para analizar cmo fluyen los fluidos.

## Leonhard Euler (1707 - 1783)

Basado en el trabajo de Bernoulli, Leonhard Euler formula un conjunto de ecuaciones cuyas soluciones decriben precisamente el movimiento de un fluido hipottico no viscoso.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Cmo surgen?

## Daniel Bernoulli (1700 - 1782)

Durante la primera mitad del siglo XVIII el matemtico suizo Daniel Bernoulli muestra cmo adaptar los mtodos del clculo para analizar cmo fluyen los fluidos.

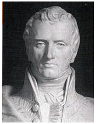
## Leonhard Euler (1707 - 1783)

Basado en el trabajo de Bernoulli, Leonhard Euler formula un conjunto de ecuaciones cuyas soluciones decriben precisamente el movimiento de un fluido hipottico no viscoso.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Cmo surgen?

## Claude-Louis Navier (1785 - 1836)



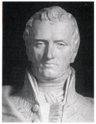
En 1822 Navier modifica las ecuaciones de Euler para abarcar el caso ms realista de un fluido con viscosidad. Aunque su razonamiento matemtico fue incorrecto, obtuvo las ecuaciones correctas.

## George Gabriel Stokes (1819 - 1903)

En 1842 Stokes deduce por medio de un razonamiento correcto las ecuaciones que 20 aos antes Navier haba obtenido y extendi la teora.

# Cmo surgen?

## Claude-Louis Navier (1785 - 1836)



En 1822 Navier modifica las ecuaciones de Euler para abarcar el caso ms realista de un fluido con viscosidad. Aunque su razonamiento matemtico fue incorrecto, obtuvo las ecuaciones correctas.

## George Gabriel Stokes (1819 - 1903)

En 1842 Stokes deduce por medio de un razonamiento correcto las ecuaciones que 20 aos antes Navier haba obtenido y extendi la teora.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Problema matemtico

- Los matemticos aun **no** consiguen demostrar si para el caso en tres dimensiones *siempre* existirn soluciones (*existencia*).
- En caso de existir, contendrn dichas soluciones discontinuidades o singularidades (regularidad)?

# Problema matemtico

- Los matemticos aun **no** consiguen demostrar si para el caso en tres dimensiones *siempre* existirn soluciones (*existencia*).
- En caso de existir, contendrn dichas soluciones discontinuidades o singularidades (regularidad)?
- El instituto Clay de Matemticas ha denominado a ste como uno de los siete problemas del milenio.

# Problema matemtico

- Los matemticos aun **no** consiguen demostrar si para el caso en tres dimensiones *siempre* existirn soluciones (*existencia*).
- En caso de existir, contendrn dichas soluciones discontinuidades o singularidades (regularidad)?
- El instituto Clay de Matemticas ha denominado a ste como uno de los siete problemas del milenio.
- El instituto Clay ofrece la suma de **un milln de dlares** a quien presente una solucin o un contraejemplo a este difcil problema.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Problema matemtico

- Los matemticos aun **no** consiguen demostrar si para el caso en tres dimensiones *siempre* existirn soluciones (*existencia*).
- En caso de existir, contendrn dichas soluciones discontinuidades o singularidades (regularidad)?
- El instituto Clay de Matemticas ha denominado a ste como uno de los siete problemas del milenio.
- El instituto Clay ofrece la suma de **un milln de dlares** a quien presente una solucin o un contraejemplo a este difcil problema.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Problema matemtico

## Anuncio del Instituto Clay de Matemticas

**Navier-Stokes Equation**

Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Las ecuaciones de Euler gobiernan el flujo de un fluido hipottico sin viscodidad que se extiende de manera infinita en todas las direcciones.
- Asumimos que cada punto $P = (x, y, z)$ en el fluido est sujeto a fuerzas que varan con el tiempo en cada direccin: $f_x(x, y, z, t)$, $f_y(x, y, z, t)$ y $f_z(x, y, z, t)$.

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Las ecuaciones de Euler gobiernan el flujo de un fluido hipottico sin viscodidad que se extiende de manera infinita en todas las direcciones.
- Asumimos que cada punto $P = (x, y, z)$ en el fluido est sujeto a fuerzas que varan con el tiempo en cada direccin: $f_x(x, y, z, t)$, $f_y(x, y, z, t)$ y $f_z(x, y, z, t)$.
- El fluido experimenta una presin $p(x, y, z, t)$ en el punto $P$ al tiempo $t$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Las ecuaciones de Euler gobiernan el flujo de un fluido hipottico sin viscodidad que se extiende de manera infinita en todas las direcciones.
- Asumimos que cada punto $P = (x, y, z)$ en el fluido est sujeto a fuerzas que varan con el tiempo en cada direccin: $f_x(x, y, z, t)$, $f_y(x, y, z, t)$ y $f_z(x, y, z, t)$.
- El fluido experimenta una presin $p(x, y, z, t)$ en el punto $P$ al tiempo $t$.
- El movimiento del fluido en el punto $P$ al tiempo $t$ queda determinado por la velocidad con que fluye en cada direccin: $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$ y $u_z(x, y, z, t)$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Las ecuaciones de Euler gobiernan el flujo de un fluido hipottico sin viscodidad que se extiende de manera infinita en todas las direcciones.
- Asumimos que cada punto $P = (x, y, z)$ en el fluido est sujeto a fuerzas que varan con el tiempo en cada direccin: $f_x(x, y, z, t)$, $f_y(x, y, z, t)$ y $f_z(x, y, z, t)$.
- El fluido experimenta una presin $p(x, y, z, t)$ en el punto $P$ al tiempo $t$.
- El movimiento del fluido en el punto $P$ al tiempo $t$ queda determinado por la velocidad con que fluye en cada direccin: $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$ y $u_z(x, y, z, t)$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Asumimos que el fluido es *incompresible*: no se puede “comprimir” o “expandir” cuando actan fuerzas sobre ste.
- La *incompresibilidad* se expresa matematicamente por medio de

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Asumimos que el fluido es *incompresible*: no se puede “comprimir” o “expandir” cuando actan fuerzas sobre ste.
- La *incompresibilidad* se expresa matematicamente por medio de

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

- El problema presupone que conocemos cmo es el movimiento del fluido al inicio cuando $t = 0$, i.e., $u_x(x, y, z, 0)$, $u_y(x, y, z, 0)$ y $u_z(x, y, z, 0)$ son conocidas (condiciones iniciales).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Asumimos que el fluido es *incompresible*: no se puede "comprimir" o "expandir" cuando actan fuerzas sobre ste.

- La *incompresibilidad* se expresa matematicamente por medio de

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

- El problema presupone que conocemos cmo es el movimiento del fluido al inicio cuando $t = 0$, i.e., $u_x(x, y, z, 0)$, $u_y(x, y, z, 0)$ y $u_z(x, y, z, 0)$ son conocidas (condiciones iniciales).

- Estas funciones iniciales deben satisfacer ciertas hiptesis de "suavidad" o regularidad que ms adelante en la seccin (**??**) precisaremos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Asumimos que el fluido es *incompresible*: no se puede “comprimir” o “expandir” cuando actan fuerzas sobre ste.

- La *incompresibilidad* se expresa matematicamente por medio de

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

- El problema presupone que conocemos cmo es el movimiento del fluido al inicio cuando $t = 0$, i.e., $u_x(x, y, z, 0)$, $u_y(x, y, z, 0)$ y $u_z(x, y, z, 0)$ son conocidas (condiciones iniciales).

- Estas funciones iniciales deben satisfacer ciertas hiptesis de “suavidad” o regularidad que ms adelante en la seccin (**??**) precisaremos.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Al aplicar las leyes de Newton a cada punto $P$ del fluido y la ecuacin de la incompresibilidad (**??**) Euler obtuvo

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} = f_x(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} = f_y(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = f_z(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial z} \tag{4}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Al aplicar las leyes de Newton a cada punto $P$ del fluido y la ecuacin de la incompresibilidad (**??**) Euler obtuvo

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = f_x(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = f_y(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = f_z(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial z} \tag{4}$$

- Las ecuaciones diferenciales parciales (**??**) – (**??**) son conocidas como las *ecuaciones de Euler* para el movimiento de un fluido.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos

- Al aplicar las leyes de Newton a cada punto $P$ del fluido y la ecuacin de la incompresibilidad (**??**) Euler obtuvo

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = f_x(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = f_y(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = f_z(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial z} \tag{4}$$

- Las ecuaciones diferenciales parciales (**??**) – (**??**) son conocidas como las *ecuaciones de Euler* para el movimiento de un fluido.

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Navier y Stokes modifican las ecuaciones de Euler para abarcar el caso ms realista de un fluido con viscosidad..
- Introducen una constante positiva $\nu$ que mide las fuerzas de friccin en el interior del fluido.

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Navier y Stokes modifican las ecuaciones de Euler para abarcar el caso ms realista de un fluido con viscosidad..
- Introducen una constante positiva $\nu$ que mide las fuerzas de friccin en el interior del fluido.
- Agregan al lado derecho de las ecuciones de Euler (**??**) – (**??**) una fuerza adicional (debido a la viscosidad), dada en el caso de (**??**) por

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Navier y Stokes modifican las ecuaciones de Euler para abarcar el caso ms realista de un fluido con viscosidad..
- Introducen una constante positiva $\nu$ que mide las fuerzas de friccin en el interior del fluido.
- Agregan al lado derecho de las ecuciones de Euler (**??**) – (**??**) una fuerza adicional (debido a la viscosidad), dada en el caso de (**??**) por

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

- Para (**??**) y (**??**) el trmino a agregar es el mismo pero sustituyendo a $u_x$ por $u_y$ y $u_z$ respectivamente.

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Navier y Stokes modifican las ecuaciones de Euler para abarcar el caso ms realista de un fluido con viscosidad..
- Introducen una constante positiva $\nu$ que mide las fuerzas de friccin en el interior del fluido.
- Agregan al lado derecho de las ecuciones de Euler (**??**) – (**??**) una fuerza adicional (debido a la viscosidad), dada en el caso de (**??**) por

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

- Para (**??**) y (**??**) el trmino a agregar es el mismo pero sustituyendo a $u_x$ por $u_y$ y $u_z$ respectivamente.

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Las ecuaciones que Navier y Stokes obtienen son

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + f_x(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + f_y(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + f_z(x,y,z,t) - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (7)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Las ecuaciones que Navier y Stokes obtienen son

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + f_x(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + f_y(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + f_z(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial z} \tag{7}$$

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Durante el siglo XIX los matemticos desarrollan una notacin y un mtodo para analizar cantidades que cambian en cada direccin llamado *clculo vectorial*.
- Utilizando la notacin del clculo vectorial las ecuaciones de Navier-Stokes (**??**)–(**??**) se pueden escribir de forma ms compacta como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{8}$$

donde

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Durante el siglo XIX los matemticos desarrollan una notacin y un mtodo para analizar cantidades que cambian en cada direccin llamado *clculo vectorial*.
- Utilizando la notacin del clculo vectorial las ecuaciones de Navier-Stokes (**??**)–(**??**) se pueden escribir de forma ms compacta como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{8}$$

donde

$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \;=\;$ campo de velocidades del fluido

$p =$ presin que acta sobre el fluido

$\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) \;=\;$ campo de fuerzas que actan sobre el fluido

# Las Ecuaciones de Navier-Stokes

- Durante el siglo XIX los matemticos desarrollan una notacin y un mtodo para analizar cantidades que cambian en cada direccin llamado *clculo vectorial*.
- Utilizando la notacin del clculo vectorial las ecuaciones de Navier-Stokes (**??**)–(**??**) se pueden escribir de forma ms compacta como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{8}$$

donde

$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \;=\;$ campo de velocidades del fluido

$p =$ presin que acta sobre el fluido

$\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) \;=\;$ campo de fuerzas que actan sobre el fluido

# El desafo

En ausencia de fuerzas externas ($f_x = f_y = f_z = 0$), las ecuaciones de Navier-Stokes (**??**) quedan as:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{9}$$

El instituto Clay ofrece un milln de dlares a quien responda:

# El desafo

En ausencia de fuerzas externas ($f_x = f_y = f_z = 0$), las ecuaciones de Navier-Stokes (**??**) quedan as:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{9}$$

El instituto Clay ofrece un milln de dlares a quien responda:

**Problema del milenio para las ecuaciones de Navier-Stokes**

Es posible encontrar funciones $u_x(x,y,z,t)$, $u_y(x,y,z,t)$, $u_z(x,y,z,t)$ y $p(x,y,z,t)$ que satisfagan (**??**) y que se comporten lo suficientemente "bien" para corresponder con la realidad fsica?

# El desafo

En ausencia de fuerzas externas ($f_x = f_y = f_z = 0$), las ecuaciones de Navier-Stokes (**??**) quedan as:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{9}$$

El instituto Clay ofrece un milln de dlares a quien responda:

**Problema del milenio para las ecuaciones de Navier-Stokes**

Es posible encontrar funciones $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$ y $p(x, y, z, t)$ que satisfagan (**??**) y que se comporten lo suficientemente “bien” para corresponder con la realidad fsica?

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# El desafo

- Hasta el momento los avances para resolver el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes han sido escasos [?].
- El problema anlogo para el caso de viscosidad nula $\nu = 0$ (ecuaciones de Euler) tampoco ha sido hasta ahora resuelto.

# El desafo

- Hasta el momento los avances para resolver el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes han sido escasos [**?**].
- El problema anlogo para el caso de viscosidad nula $\nu = 0$ (ecuaciones de Euler) tampoco ha sido hasta ahora resuelto.
- Para el caso de dos dimensiones ($\mathbf{u} = (u_x, u_y)$), el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes fue resuelto hace muchos aos aunque su solucin no ha ayudado a resolver el caso en tres dimensiones

# El desafo

- Hasta el momento los avances para resolver el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes han sido escasos [**?**].
- El problema anlogo para el caso de viscosidad nula $\nu = 0$ (ecuaciones de Euler) tampoco ha sido hasta ahora resuelto.
- Para el caso de dos dimensiones ($\mathbf{u} = (u_x, u_y)$), el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes fue resuelto hace muchos aos aunque su solucin no ha ayudado a resolver el caso en tres dimensiones
- El problema de las ecuaciones de Navier-Stokes admite solucin bajo algunas restricciones.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# El desafo

- Hasta el momento los avances para resolver el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes han sido escasos [**?**].
- El problema anlogo para el caso de viscosidad nula $\nu = 0$ (ecuaciones de Euler) tampoco ha sido hasta ahora resuelto.
- Para el caso de dos dimensiones ($\mathbf{u} = (u_x, u_y)$), el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes fue resuelto hace muchos aos aunque su solucin no ha ayudado a resolver el caso en tres dimensiones
- El problema de las ecuaciones de Navier-Stokes admite solucin bajo algunas restricciones.
  - Dadas las condiciones iniciales, es posible encontrar un nmero $T > 0$ tal que las ecuaciones pueden ser resueltas para todo tiempo $0 \leq t \leq T$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# El desafo

- Hasta el momento los avances para resolver el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes han sido escasos [**?**].
- El problema anlogo para el caso de viscosidad nula $\nu = 0$ (ecuaciones de Euler) tampoco ha sido hasta ahora resuelto.
- Para el caso de dos dimensiones ($\mathbf{u} = (u_x, u_y)$), el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes fue resuelto hace muchos aos aunque su solucin no ha ayudado a resolver el caso en tres dimensiones
- El problema de las ecuaciones de Navier-Stokes admite solucin bajo algunas restricciones.
    - Dadas las condiciones iniciales, es posible encontrar un nmero $T > 0$ tal que las ecuaciones pueden ser resueltas para todo tiempo $0 \leq t \leq T$.
    - Esta constante $T$ (tiempo de "blowup") es muy pequea y por tanto dicha solucin no es muy til en aplicaciones reales.

# El desafo

- Hasta el momento los avances para resolver el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes han sido escasos [**?**].
- El problema anlogo para el caso de viscosidad nula $\nu = 0$ (ecuaciones de Euler) tampoco ha sido hasta ahora resuelto.
- Para el caso de dos dimensiones ($\mathbf{u} = (u_x, u_y)$), el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes fue resuelto hace muchos aos aunque su solucin no ha ayudado a resolver el caso en tres dimensiones
- El problema de las ecuaciones de Navier-Stokes admite solucin bajo algunas restricciones.
  - Dadas las condiciones iniciales, es posible encontrar un nmero $T > 0$ tal que las ecuaciones pueden ser resueltas para todo tiempo $0 \leq t \leq T$.
  - Esta constante $T$ (tiempo de “blowup”) es muy pequea y por tanto dicha solucin no es muy til en aplicaciones reales.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Enunciado del problema

Las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes describen el movimiento de un fluido en $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. Las incgnitas del problema vienen dadas por el vector de velocidades $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ y la presin $p(x,t) \in \mathbb{R}$, definidas para toda posicin $x \in \mathbb{R}^n$ y todo tiempo $t \geq 0$.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0), \tag{10}$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0) \tag{11}$$

con condiciones iniciales

$$u(x,0) = u^0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{12}$$

# Enunciado del problema

Se asume que $u^0(x)$ es un campo de clase $C^\infty$ y de divergencia nula en $\mathbb{R}^n$, $f_i(x,t)$ son las componentes de la fuerza externa aplicada (e.g. la gravedad), $\nu$ es el coeficiente de viscocidad y $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el laplaciano en las variables espaciales. Las ecuaciones de Euler son las ecuaciones (**??**), (**??**), (**??**) con $\nu = 0$.

Se espera que las soluciones satisfagan ciertas propiedades de regularidad que las hagan lo suficientemente "suaves" para que sean soluciones fsicamente plausibles y por tanto se establecen las siguientes restricciones sobre las condiciones iniciales y las fuerzas aplicadas:

$$|\partial_x^\alpha u^0(x)| < C_{\alpha K} \left(1 + |x|\right)^{-K} \tag{13}$$

en $\mathbb{R}^n$ para todo $\alpha$ y $K$,

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Enunciado del problema

y tambin

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)\right| < C_{\alpha m K}\left(1+|x|+t\right)^{-K} \tag{14}$$

en $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ para todo $\alpha, m, K$. Una solucin de (**??**), (**??**), (**??**) es fsicamente plausible slo si se satisfacen las propiedades de regularidad

$$p, u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right) \tag{15}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2\, dx < C \qquad \text{para todo} \quad t \geq 0 \tag{16}$$

# Enunciado del problema

El problema fundamental consiste en determinar si las ecuaciones de Navier-Stokes admiten o no soluciones suaves, fsicamente plausibles:

### Problema de existencia y regularidad en $\mathbb{R}^3$

Considere $\nu > 0$ y $n = 3$. Suponga que el dato inicial $u^0(x)$ es suave, de divergencia nula y satisface la propiedad de decaimiento rpido (**??**) y asuma $f(x,t) = 0$. Entonces existen funciones suaves $p(x,t)$ y $u_i(x,t)$ definidas en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ que satisfacen (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**).

### Problema de colapso de la solucin en $\mathbb{R}^3$

Considere $\nu > 0$ y $n = 3$. Entonces existe un campo vectorial suave de divergencia nula $u^0(x) \in \mathbb{R}^3$ y una funcin suave $f(x,t)$ en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ que satisfacen (**??**), (**??**) para las cuales **no** existen soluciones $(p,u)$ de (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (**??**).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Referencias


A.J. Chorin, J.E. Marsden.
*A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*
Springer-Verlag, 1980.

K. Devlin.
*The Millenium Problems. The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time*
Basic Books, 2002.

C. Fefferman.
*Clay Mathematics Institute, Millenium Problems. Official problem description.*
http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equation

Wikipedia contributors
*Navier-Stokes equations*
Wikipedia, The Free Encyclopedia., 2008.
http://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes_equations


UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA