



# “华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

学 校 北京邮电大学

参赛队号 10013035

1.卫学渊

队员姓名 2.曹 灿

3.王 耀

参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)



## “华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题 目      面向下一代光通信的 VCSEL 激光器仿真模型

---

### 摘                      要：

近年来，由于人们对于超长距离、超高速千兆比特/秒（Gbit/s）及至兆兆比特/秒（Tbit/s）光纤网络的需求，对于高性能、低成本光互联网的需求以及对于光学存储密度的不断提高的要求，使一种性能优异的异型半导体激光器——垂直腔面发射激光器（VCSEL）应运而生。

我们针对题目中给出的四个问题，分别利用数学方法提出我们自己的解决方案，并在 matlab 仿真环境下求解验证。

针对问题一，我们的主要目标就是利用附件提供的 1402 组测试数据，来对题中给出的 L-I 模型中各个未知参数进行求解，并根据求出的数学模型，画出不同温度下的 L-I 曲线，再对激光器在直流输出时平均光功率为 2mW 这样的临界条件下求解用户正常使用网络的临界温度值。我们的基本思路是：对附件中给出的经验公式进行联立移项，构造出一个残差  $r$ 。由于附件中给出的数据  $I$ ,  $V$ ,  $P$  均为向量数据，所以可以构造一个线性回归方程中的成本函数 (Cost function) 来求出使系统稳定的未知参数。该成本函数设为  $J$ , 这样问题就转换成求解  $J$  的极小值。我们便可以使用基于 Nelder-Mead 的 `fminsearch` 函数，带入初值，便可以在系统收敛的情况下求出模型中各个参数。在求出模型之后，我

们还需要对其稳定性进行检验。检验的方法就是对 $P_0$ 进行循环迭代，如果系统是稳定的，那么在给 $P_0$ 赋一个初值后，经过有限步的循环迭代，就可以得到一个稳定收敛的值。假设系统是稳定的，我们便可以利用模型，通过输入不同的 $T$ 值，就可以描绘出不同温度下的 L-I 曲线。

针对问题二，我们的目标是对问题一求出的模型进行评估并对其进行优化。我们可以通过将模型在 20°C 情况下的 L-I 曲线与实测画出的 L-I 曲线进行比对分析。如果二者存在误差，那么可以判断我们求出的模型还不够优化，就可以通过调整模型参数值来继续观察其 L-I 曲线与实测曲线的差异性。如果调参之后的曲线与实际更加接近，那么这样的模型就是我们想要的优化模型。

针对问题三，我们分别针对四个小问题给出我们的解决方案：

- a) 问题三主要是建立带宽模型，也称作小信号响应模型。题目中的幅度(dB)首先要转换成响应  $H(f)$ ，根据公式  $dB = 20 * \log_{10} H(f)$ ，将其进行归一化。然后根据附录中的公式进行推导，求出频率  $f$  与  $H(f)$  之间的关系，代入公式，通过 matlab 进行非线性拟合，最后求出所需要的参数。然后画出仿真输出曲线；
- b) 从带宽模型中可以得知 3dB 带宽的频率以及 10dB 带宽的频率，之后通过改变初试电流以及初始温度，测出不同的环境温度以及不同偏置电流的曲线，从画出的曲线中就能看出两者对 VCSEL 带宽的影响；
- c) 首先通过 b 中以及后面的分析，可以通过改变模型参数的方法获得更大的带宽；其次可以考虑对谐振腔的腔长进行优化的方案，也就是除了温度和电流之外的影响，通过查阅资料，该方案可以提升带宽 60%；
- d) 首先通过 a) 中得出的模型参数分别进行敏捷度测试，检验哪些参数会对高于 0 的位置产生影响，通过增大模型参数以及减小参数并且和原图像对比的方式，我们可以分析参数对其影响；

针对问题四，我们通过对问题三的分析，已知了某些参数会对曲线的带宽产生较大影响，对所有的参数进行敏捷度测试即可发现参数的调节上对于带宽的影响，增大参数与减小参数如何才能获得更宽的带宽。

关键词：光通信，VCSEL，激光器，光纤传输，L-I 模型，小信号响应模型

## 目 录

一、问题重述 .....	5
1.1 问题背景 .....	5
1.2 需要解决的问题 .....	6
1.2.1 VCSEL 的 L-I 模型 .....	6
1.2.2 L-I 模型的改进 .....	7
1.2.3 VCSEL 的带宽模型（小信号响应模型） .....	7
1.2.4 VCSEL 带宽模型的改进 .....	8
二、模型假设 .....	9
三、符号说明 .....	10
四、问题一模型的建立与求解 .....	12
4.1 VCSEL 的 L-I 模型 .....	12
4.1.1 L-I 模型参数的求解 .....	12
4.1.2 各温度情况下 L-I 曲线的绘制 .....	15
4.1.3 输出功率为 2mW 下临界温度值的求解 .....	15
五、问题二模型的建立与求解 .....	18
5.1 L-I 模型的改进 .....	18
六、问题三模型的建立与求解 .....	21
6.1 问题分析 .....	21
6.2 模型建立思路 .....	21
6.3 问题的求解 .....	21
6.3.1 模型的建立 .....	21
6.3.2 对于问题三 a) 的求解 .....	22
6.3.3 对于问题三 b) 的求解 .....	25
6.3.4 对于问题三 c) 的求解 .....	26
6.3.5 对于问题三 d) 的求解 .....	27
七、问题四模型的建立与求解 .....	29
7.1 VCSEL 带宽模型的改进 .....	29
八、参考文献 .....	30

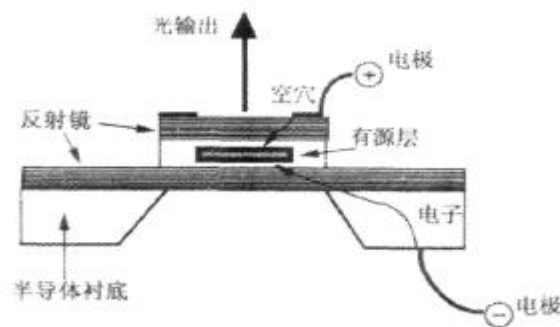
# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

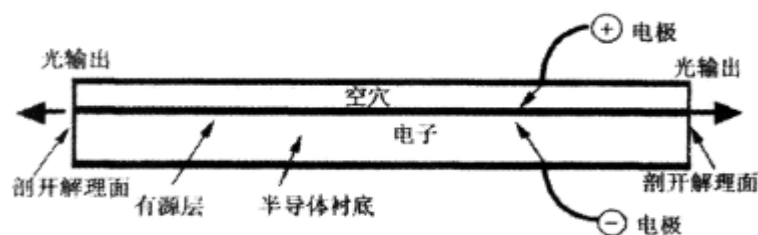
近年来，由于人们对于超长距离、超高速千兆比特/秒（Gbit/s）及至兆兆比特/秒（Tbit/s）光纤网络的需求，对于高性能、低成本光互联网的需求以及对于光学存储密度的不断提高的要求，使一种性能优异的异型半导体激光器——垂直腔面发射激光器（VCSEL）应运而生<sup>[1]</sup>。1979 年，东京工业大学的 Iga 提出了垂直腔面发射激光器的思想，并于 1988 年研制出首枚 VCSEL 器件。自诞生之日起，其优异的性能就获得了人们的青睐。2000 年，圣巴巴拉加州大学研究小组发展了第一个室温运转、输出波长为 1550nm 的电抽动，全晶格匹配、砷锑化合物单块垂直腔面发射激光器，室温下阈值电流为 7mA，高温时（45℃）阈值电流 1.55mA。在未来的几年里，随着宽带隙材料（如 GaN，ZnSe）的研究，垂直腔面发射激光器将会得到很大的发展。

VCSEL 结构如图 1.1 所示，它的激光腔方向垂直于半导体有源层。和传统的边发射激光器相比，光束沿着垂直于衬底的方向出射。与传统的边发射激光器相比，VCSEL 在原理上有如下优点：（1）谐振腔体积很小，易于产生微腔效应，有可能形成极低阈值电流激射；（2）极短的谐振腔导致纵模间隔增大、易实现动态单模工作（这与谐振腔长与波长接近有关）；（3）VCSEL 由于有源区内置而导致很长寿命；（4）光束质量高，容易与光纤耦合（从细单模光纤到 1mm 左右的塑料光纤都可以）；（5）可载片测试，极大降低成本，并且容易模块化和封装；

（6）可形成高密度二维阵列（可以做成密集排列的二维激光阵列）；（7）与大规模集成电路（LSI）集成兼容（结合起来使用时采用纵向的光耦合），可调性好<sup>[2]</sup>。



（a）垂直腔面发射激光器



(b) 边发射激光器

图 1.1 面激光发射器与边发射器比较

VCSEL 的众多优点赋予了它很大的发展潜力，在自由空间光互连，光交换，光通信，光信息处理以及各种高速并行网络应用中占有十分重要的地位，而且也非常适合在激光打印、气体检测、高密度光存储、显示和照明方面应用<sup>[3]</sup>，与不同的光电子器件集成，可以实现很多功能，如调谐，放大和滤波等。在短短几十年时间内，VCSEL 取得了巨大的进展，并展现很好的应用前景。其波长从紫外到  $2.5 \mu\text{m}$  较宽波长范围内，各种应用目的 VCSELs 正在被开发，其中  $0.85\text{-}0.98 \mu\text{m}$  的 GaAs, InGaAs 系列的 VCSELs 较为成熟，已被用于简易光互连中，其模块化，系统化的工作正在进行，已经实现了商品化。用于长距离光纤通讯的长波长 VCSELs 仍然处于研制阶段。

激光器输出的光功率强度与器件的温度相关，当器件温度（受激光器自身发热和环境温度的共同影响）改变后，激光器输出的光功率强度也会相应发生变化。为了准确反映 VCSEL 激光器特性，建模时不仅需要考虑（1）激光器输出的功率强度与温度的关系，即该激光器可以在多大的外界环境温度范围内使用；（2）如何设计激光器参数可以使激光器具有更大的传输带宽（即 S21 曲线上纵坐标-10dB 位置对应的横坐标频率值更大），即可以实现更快的传输速率。

## 1.2 需要解决的问题

### 1.2.1 VCSEL 的 L-I 模型

L-I 模型，即激光器的工作电流与输出光功率强度关系模型（L: light, 表示光功率强度，也可以表示为 P; I: Intensity of current, 表示工作电流）。激光器是将电能转换成光能的半导体器件，能量转换的过程，也是电子的电能转换为光子的光能的过程，在转换过程中，伴随着电子的运动，半导体器件会产生一定的热量。从能量守恒的角度看，转化为热能的能量越多（发热导致能量浪费了），器件温度越高，那么转化为光能的能量越少（输出光功率越低），可以利用的能量就越少。

国际上很多研究机构对 VCSEL 的 L-I 建模问题做了大量研究，目前有一个 L-I 经验公式获得了大多数人的认可。附录 1 给出了该公式及其一种参数化表达，请你们根据附件提供的文件名为“L-I-20C.mat”的 L-I 实测数据（数据在室温  $20^\circ\text{C}$  下采集，载入 matlab 后将获得 4 个变量：P:光功率，I:实测驱动电

流,  $U$ : 实测电压,  $T_a$ : 实测温度) 和附录 1 中的表 1 给出的一组经验值, 完成如下工作:

a) 确定模型参数, 根据模型画出  $10^{\circ}\text{C}$ ,  $20^{\circ}\text{C}$ ,  $30^{\circ}\text{C}$ , …… ,  $90^{\circ}\text{C}$  等温度下的 L-I 曲线 (横坐标是电流强度, 纵坐标是光功率)。

b) 假定当电信机房里 VCSEL 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于  $2\text{mW}$  时, 用户的光猫无法检测到信号。那么, 根据建立的 L-I 模型推测: 电信机房里 VCSEL 激光器工作的环境温度最多不能高于多少摄氏度, 才能保证用户可以正常使用网络?

### 1.2.2 L-I 模型的改进

分析问题 1 中模型的精度和误差产生的原因, 提出改进, 根据改进模型画出  $10^{\circ}\text{C}$ ,  $20^{\circ}\text{C}$ ,  $30^{\circ}\text{C}$ , …… ,  $90^{\circ}\text{C}$  等温度下的 L-I 曲线, 并与问题 1 中 L-I 曲线进行比较。也可以采用完全不同的方法得到更好的 L-I 模型。

### 1.2.3 VCSEL 的带宽模型 (小信号响应模型)

VCSEL 的传输带宽越宽, 用户上网的网速也就越快。为了适应未来的高速传输网络需求, 期望设计出具有更宽带宽的激光器。带宽模型, 通常也称为小信号响应模型, 就是给器件输入不同频率的幅度非常小的信号 (注意与 L-I 模型不同, 这里幅度小, 而且含多个频率, 对应 S21 曲线横坐标是频率, 纵坐标是光功率幅度), 获得对应频率点输出信号的幅度 (功率); 这里 “不同频率” 是从 0 频到指定频率按一定步长进行扫描, 例如从 0 开始以  $0.5\text{GHz}$  为步长, 扫描到  $30\text{GHz}$ 。在无线通信中, 器件带宽通常采用幅度  $3\text{dB}$  衰减位置的信号带宽来衡量——即  $3\text{dB}$  带宽。在光纤通信中, 由于系统可用幅度衰减范围更大, 通常采用幅度  $10\text{dB}$  衰减位置的信号带宽进行衡量—— $10\text{dB}$  带宽。附件中名为 “S21\_5.mat” 的文件给出了一组 VCSEL 激光器小信号幅频响应曲线数据和相应的驱动电流、输出光功率数据, 将数据载入 MATLAB 将获得 4 个变量:

$I_b=7.5$ , 表示偏置电流为  $7.5\text{mA}$ ;  $T_a=20$  表示测试的环境温度是  $20^{\circ}\text{C}$ ;  $f$  表示 S21 曲线的频率, 单位为  $\text{Hz}$ ; S21 表示 S21 曲线的幅度, 单位为  $\text{dB}$ , 请你们:

a) 建立恰当的激光器小信号幅频响应参数模型, 给出参数构成及其确定方法, 画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线 (即 S21 曲线), 其中一条必须是  $20^{\circ}\text{C}$  下  $7.5\text{mA}$  偏置电流的仿真输出曲线。

b) 利用你们的带宽模型, 分析激光器的温度和激光器的偏置电流对器件带宽曲线的影响。

c) 假定激光器工作环境温度可以采用某些措施让它固定在  $20^{\circ}\text{C}$  (例如, 通信设备商通常的做法是将激光器放到精密的恒温箱中进行测试。若将激光器放在室内环境测试, 随着测试时间的变成, 激光器本身会发热导致激光器表面及其周边环境温度升高, 而恒温箱则可以保证其表面和周边环境温度恒定不变), 偏置电流固定在  $7.5\text{mA}$ , 那么, 如果要获得更宽带宽的激光器设计方案, 还可以通过什么手段实现?

d) 改变激光器的某些参数可以发现一些有趣的问题, 比如激光器在  $3\text{dB}$  范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置。请问, 改变哪些参数会有这种现

象？在实际应用中，我们希望这部分带宽曲线越平坦越好，那么如何设计这些参数可以实现我们的目的？

#### 1.2.4 VCSEL 带宽模型的改进

开放性探索问题：是否有更好的带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快？或者在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的 3dB（或 10dB）带宽？如果有，请给出建模方案，包括可能的数学公式，不同温度和偏置电流下的带宽响应曲线，并与问题 3 的模型进行比较。



## 二、模型假设

- (1) 假设室外温度维持在一个相对稳定的数值，即可以认为是在同一温度下进行测量；
- (2) 数据测试均是在理想环境下进行的；
- (3) 激光器自身的温度变化不对外界温度产生影响；
- (4) 激光器的电流和电压不会产生突变；
- (5) 该模型上所有数据均是在激光器稳定情况下测得；
- (6) 模型中涉及的单位均进行过归一化处理，电流为 mA，电压为 mV，功率为 mW。

### 三、符号说明

符号	符号说明	单位
$P_0$	激光器输出的光功率，在 L-I 中光功率也用 L 来表示，即 L-I 也可以写成 P-I	mW
$\eta(T)$	L-I 曲线的斜率，从能量转换角度看，斜率对应于转换效率 (L-I 曲线横坐标是电流 I，纵坐标是出光功率 P，斜率越高，相同电流 I 对应的输出光功率越高，相同电能转换为的光能越多，即转换效率越高)；与温度相关	
$I_{th}(N, T)$	阈值电流：激光器电流超过该值则激光发光；与载流子数和温度相关	mA
$N$	载流子数	
$R_{th}$	VCSEL 热阻抗	°C/W
$\tau_{thl}$	热时间常数	
$T_0$	环境温度	°C
$V$	输入电流	mV
$t$	时间	s
$\eta_i$	注入效率；或转换效率	
$q$	物理常量，电子电量， $1.6 \times 10^{-19}$ 库伦	C
$N_0$	透明载流子数，当载流子数 $N$ 大于透明载流子数的时候，激光器有源区发生粒子束反转，满足产生激光的其中一个条件	
$I_{off}(T)$	与温度相关的偏置电流	mA
$\tau_n$	载流子复合寿命	s

$\tau_p$	光子寿命 (p: Photon, 光子)	s
$G_0$	增益系数, 激光产生的阈值条件, 增益大于总损耗;	$s^{-1}$
$S$	光子数	
$\beta$	受激辐射耦合系数	
$\varepsilon$	增益压缩因子	

## 四、问题一模型的建立与求解

### 4.1 VCSEL 的 L-I 模型

#### 4.1.1 L-I 模型参数的求解

首先我们来分析一下题目中所给的 L-I 模型。L-I 模型，即激光器的工作电流与输出光功率强度关系模型（L: light，表示光功率强度，也可以表示为 P；I: Intensity of current，表示工作电流）。国际上很多研究机构对 VCSEL 的 L-I 建模问题做了大量研究，题中所给的经验公式获得了大多数人的认可，该经验公式如下：

$$P_0 = \eta(T)(I - I_{th}(N, T)) \quad (4-1)$$

假设：

1. 转换效率 $\eta(T)$ 受温度影响较小，即 $\eta(T)$ 近似于常数 $\eta$ ；
2.  $I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T)$

其中 $I_{th0}$ 为常数， $I_{off}(T)$ 是与温度相关的经验热偏执电流（即激光器内部的偏置电流，随激光器温度的变化而变化，有别于外部人为加载的激光器偏置电流 $I_b$ ）。

这样(4-1)式可以简化为

$$P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (4-2)$$

将 $I_{off}(T)$ 表示为：

$$I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad (4-3)$$

式(4-3)中的温度 $T$ 受外界环境温度 $T_0$ 和自身的温度影响，自身的温度与器件产生的瞬时功率 $VI$ 相关，即受 V-I 特性（电压-电流特性）影响受外界环境温度 $T_0$ 和自身的温度影响，自身的温度与器件产生的瞬时功率 $VI$ 相关，即受 V-I 特性（电压-电流特性）影响：

$$T = T_0 + (IV - P_0)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \quad (4-4)$$

上式中的 $I$ 就是偏置电流 $I_b$ （输入电流），其他参数均在文章第三章“符号说明”中解释。

在考虑某个“瞬时”情况下，可以认为这个很短的时间内温度几乎不会变化（时间太短），即此时的温度 $T$ =常数， $dT/dt$ 的值就等于 0。所以(4-4)式就可以简化为：

$$T = T_0 + (IV - P_0)R_{th} \quad (4-5)$$

将(4-2) (4-3) (4-5)式联立并移项, 可得:

$$\eta(I - I_{th0} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n [T_0 + (IV - P_0)R_{th}]^n) - P_0 = 0 \quad (4-6)$$

由此我们可以构造一个残差 $r$  (residuals):

$$r = f(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1 \dots a_n) = \eta(I - I_{th0} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n [T_0 + (IV - P_0)R_{th}]^n) - P_0 \quad (4-7)$$

由于附件中给出的数据  $I, V, P$  均为向量数据, 所以可以使用回归方程中的成本函数 (Cost function) 来求出使系统稳定的未知参数。构造成本函数如下:

$$J = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \{[\eta(I_i - I_{th0} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n [T_0 + (I_i V_i - P_0)R_{th}]^n) - P_0] - P_i\}^2 \quad (4-8)$$

题目中附件 L-I-20C.mat 给出了室温 20°C情况下的 1402 个测试用例, 所以(4-8)式中的  $m$  就等于 1402,  $T_0$ 就等于 20, 原问题就转换成求在 20°C的室温情况下, 各个未知参数等于多少才能使 $J$ 达到极小值。由于该问题是一个多维函数极值问题, 这里我们使用 matlab 中的 **fminsearch**<sup>[4]</sup>函数来对问题进行求解。**fminsearch** 函数基于的方法是 **Nelder-Mead** 单纯形法, 该方法求解过程中未利用任何求导运算, 算法比较简单。其基本思想就是先去找出一个可行解, 对这个可行解进行鉴别, 看看是否为最优解。如果不是, 就按照一定法则转换到另一改进后的更优的基本可行解, 再次鉴别; 若仍不是, 则继续转换, 按照算法重复进行。由于基本可行解的个数有限, 因此经过有限次的转换必然能得出问题的最优解。即使问题没有最优解也可以用这个方法判别。

利用 **fminsearch** 求解时, 我们采用题目中附件所给出的初值进行计算。这组经验初值如下:

表 4-1 L-I 模型初值设置即模型参数提取

参数	参考初值	单位
$\eta$	0.5	-
$I_{th0}$	0.3E-3	A
$R_{th}$	2.6E3	°C/mW
$a_0$	1.246E-3	A
$a_1$	-2.545E-5	A/K
$a_2$	2.908E-7	A/K <sup>2</sup>
$a_3$	-2.531E-10	A/K <sup>3</sup>
$a_4$	1.022E-12	A/K <sup>4</sup>

如果在理想状况下该系统是收敛的, 那么我们在 $n \rightarrow \infty$ 的求解过程中会逐渐趋于一个稳定的数学模型。我们从  $n=0$  开始, 将 L-I-20C.mat 数据导入到 matlab

中利用 *fminsearch* 函数对其模型各参数求解，发现当  $n=4$  时，目标模型参数已经非常接近经验值，求解完整代码在附件中的 *VcselLISolve.m* 给出。在 matlab 环境下的我们解出的模型参数值如下：

表 4-2 模型中的各参数求解值

参数	值
$\eta$	0.268336106994999
$I_{th0}$	0.547138656804399
$R_{th}$	0.268336106994999
$a_0$	0.356906136489843
$a_1$	-0.0352315474139664
$a_2$	0.000379261857334904
$a_3$	$-2.58234715197809e - 7$
$a_4$	$9.82267038927155e - 10$

虽然该模型各个参数已经被我们解出，但是模型在真实情况下是否稳定还需要我们进一步验证。为了验证该模型的正确性，我们将 (8) 式右侧的  $P_0$  看做系统输入（激励），设为  $P_{i-1}$ ；将左侧的  $P_0$  看做系统输出（响应），设为  $P_i$ 。当我们给右侧输入  $P_{i-1}$  一个初值之后，通过模型计算就可以在左侧得到一个输出值  $P_i$ ；然后再将  $P_i$  带入右式输入后可以继续得到一个输出值  $P_{i+1}$ 。如果系统是稳定的，可靠的，那么通过不断的迭代计算，我们最终可以得到一个趋于稳定的值。基于这样的思路，我们可以设置初始值  $P_0 = 0$ ，在 L-I-20C.mat 中给出的每一个测试情况下，经过循环迭代计算（计算程序我们在附件中的 *VcselLIteration.m* 中给出），都可以得出一个基于样例给出的特定 I、V 情况下的稳定值  $P_0$ 。这样我们就可以得到一个长度为 1402 的稳定值向量。我们在 matlab 中将其绘成图像如下：

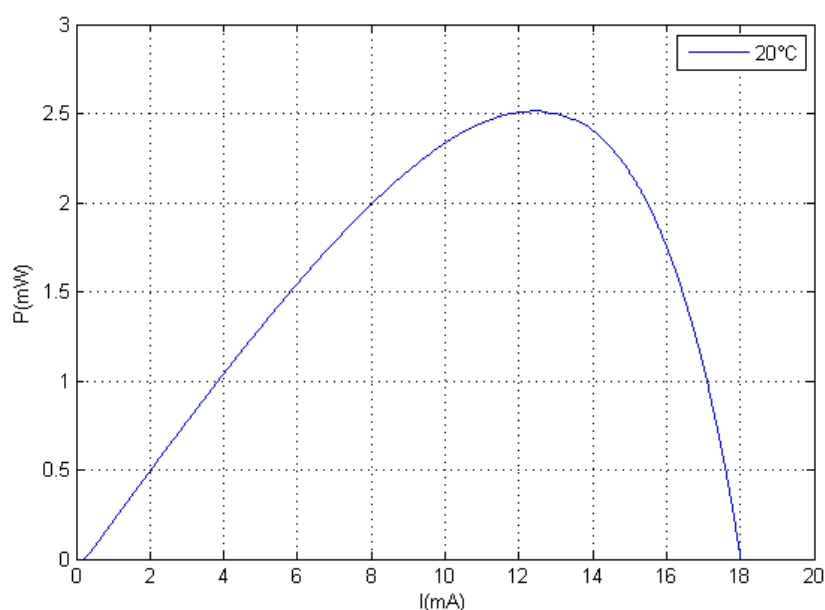


图 4-1 20°C下的 L-I 模型曲线

由此可以判断我们的模型是稳定的，可靠的。

#### 4.1.2 各温度情况下 L-I 曲线的绘制

根据我们求出的模型，我们继续对 10℃，20℃，30℃，……，90℃等温度绘制 L-I 曲线（横坐标是电流强度，纵坐标是功率）：

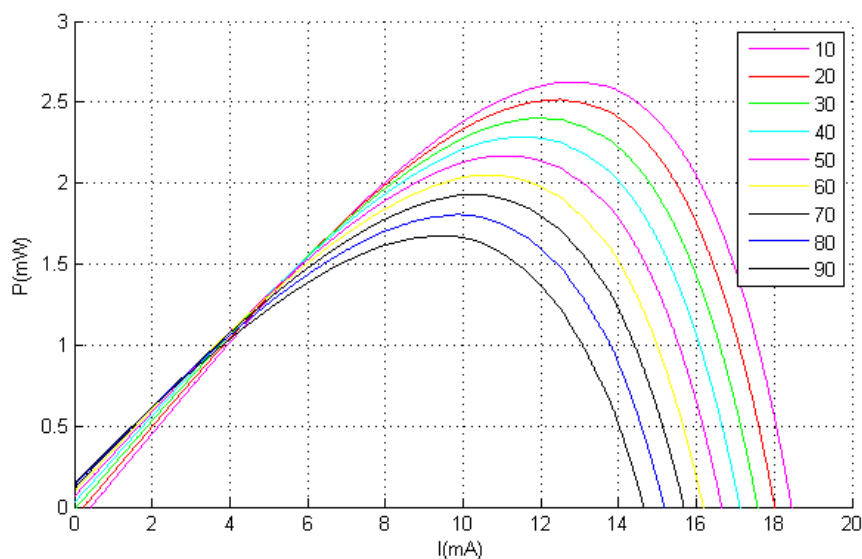


图 4-2 20℃到 90℃下的 L-I 模型曲线

#### 4.1.3 输出功率为 2mW 下临界温度值的求解

根据上图，我们可以对问题一中的第二问求解。问题中提到直流输入时输出功率低于 2mW 时，用户的光猫无法检测到信号。因此我们可以在  $P=2\text{mW}$  的地方画一条红色水平线，如下图所示：

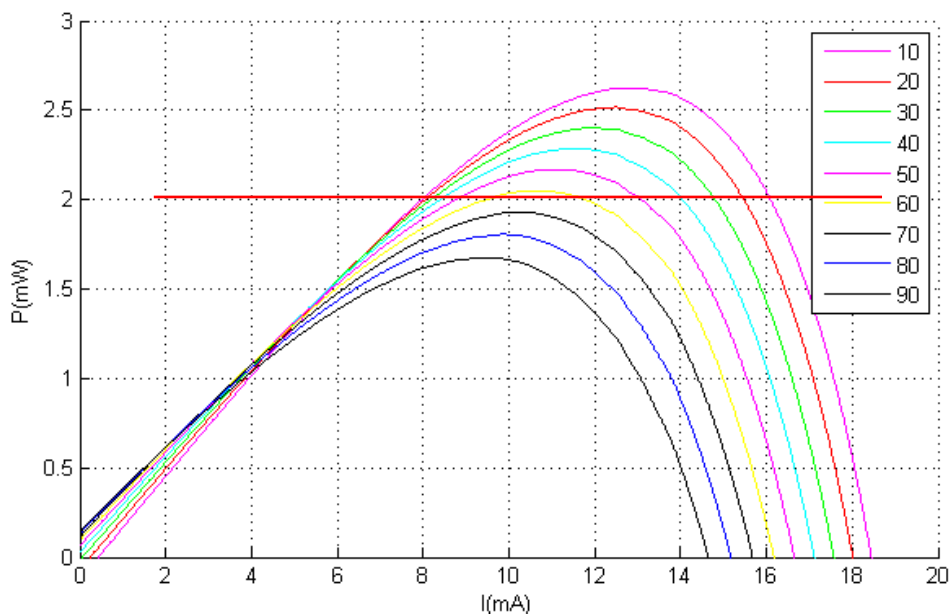


图 4-3 输出功率为 2mW 时用户能正常检测到信号的温度(°C)区间

由上图我们可以看到，当用户的光猫刚刚好能检测到信号的时候，其环境温度是介于 60°C到 70°C的。为了求解到检测到信号的温度临界值，也就是那条与红色水平线相切的 L-I 温度曲线，我们需要继续在 60°C到 70°C之间来迭代求解。

迭代求解温度临界值的思路如下：我们以 0.1°C为基本步数，以 60.1°C、60.2°C……69.9°C这样的序列依次来描画出其 L-I 曲线并求其 P 值的最高点，如果该值刚刚好大于等于 2，那么这个温度就是我们要找的临界温度值。温度临界值的求解程序我们在 *computeTemp.m* 中给出。

最终经过程序计算，我们绘出了在 2mW 情况下的临界温度值的 L-I 曲线，如下图所示：



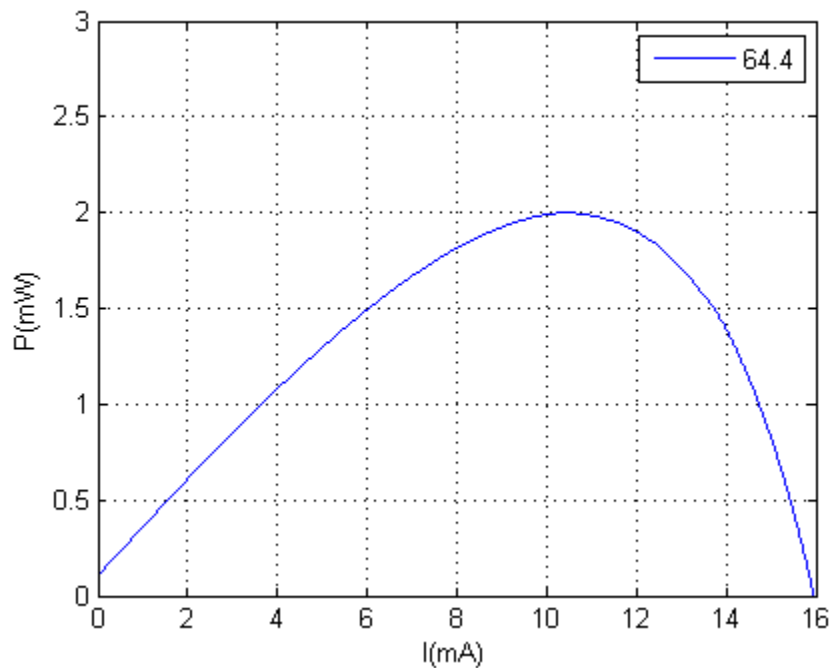


图 4-4 输出功率为 2mW 时临界温度状况下的 L-I 曲线

由上图我们可以看到，当温度为 64.4℃时，该 L-I 曲线的最高点正好与  $P=2\text{mW}$  的水平直线相切，即可推测出，当电信机房的 VCSEL 激光器工作温度不高于 64.4℃时，用户可以正常使用网络。

## 五、问题二模型的建立与求解

### 5.1 L-I 模型的改进

对于我们上面求出的模型，我们需要对其性能进行多方位的评估。由于模型的 L-I 曲线可以直观的表现模型的性能，我们将我们的模型在 20°C 情况下的 L-I 曲线与实际测量值绘出的 L-I 曲线放在同一张图下进行比对，如下所示：

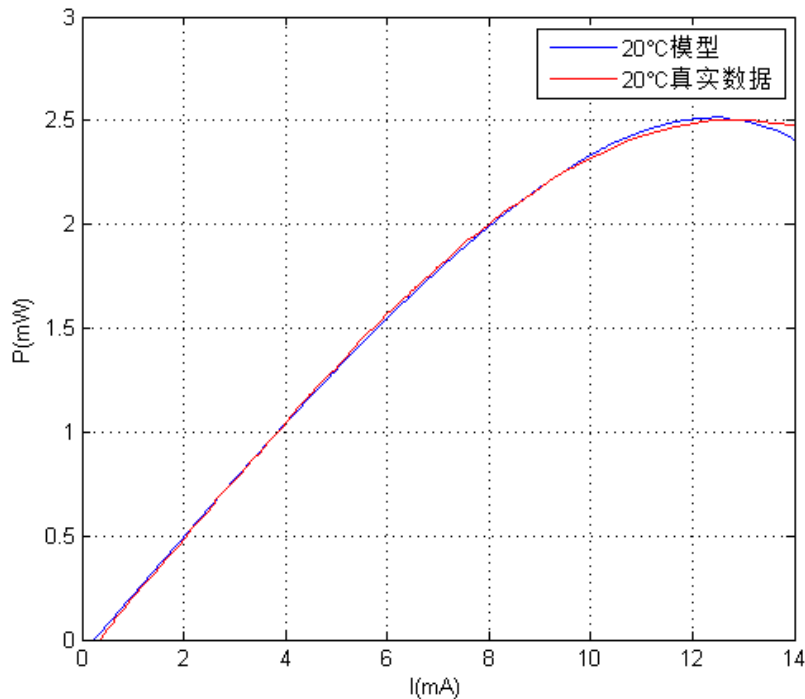


图 5-1 20°C 情况下未优化模型与真实数据的 L-I 曲线对比

由图 5-1 我们看到，在相同温度，相同电流强度(I)的情况下，模型输出的 P 和实际测得的 P 还是存在小量的误差。我们通过对模型的参数值进行修正这样的方法，来使得模型 L-I 曲线更加接近于实测曲线。由于时间的原因，我们没有对所有参数修正来优化模型，在我们调整的几个参数中，发现参数 $\eta$ 对模型的拟合度起到关键性的作用。当 $\eta = 1$ 的时候，我们算出其成本函数值为 $fval\_good = 6.753600790802055 \times 10^{-5}$ ，而我们之前模型求出的成本函数值 $fval\_bad = 1.446434733319854 \times 10^{-4}$ 。由于成本函数值越小曲线拟合度越高，模型的 L-I 曲线也就一定会更加地接近与实测值绘出的曲线。我们还是利用之前的方法，

将优化后模型 L-I 曲线与真实数据的 L-I 曲线进行对比，结果如下：

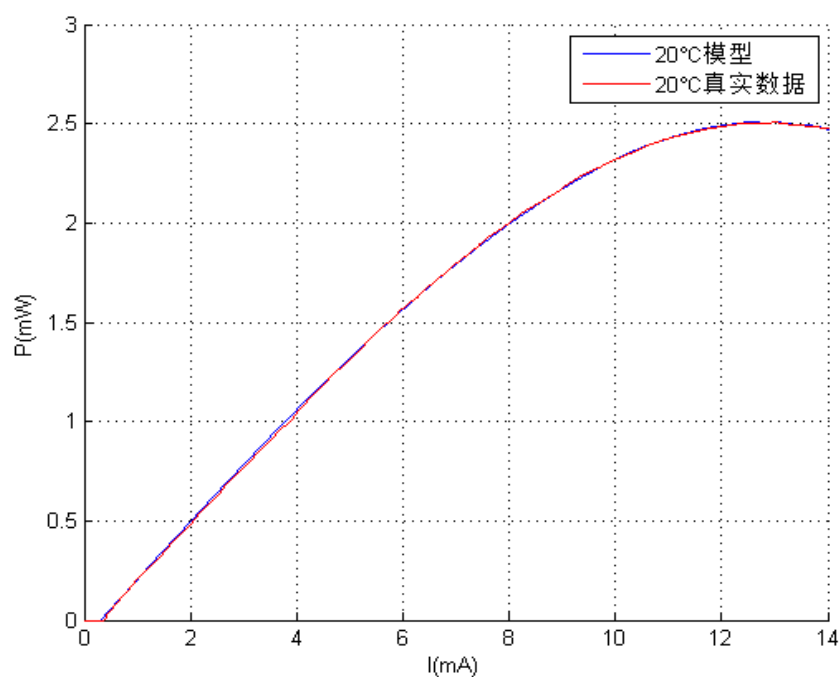


图 5-2 20°C情况下优化模型与真实数据的 L-I 曲线对比

由图中我们可以直观地看到，当 $\eta = 1$ 时，模型得出的 L-I 曲线更接近于真实情况。这时我们在修正过的模型上对温度临界值进行求解，求解方法和之前的相同。最终通过对温度区间的求解以及在温度区间中的不断迭代，最终得到在优化模型下的温度临界值的 L-I 曲线：

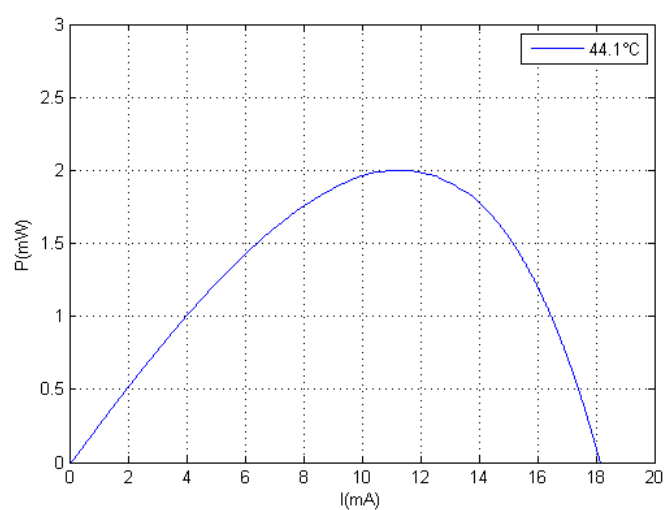


图 5-3 优化模型下输出功率为 2mW 时临界温度状况的 L-I 曲线

所以优化模型下的温度临界值为 44.1℃。这个值是更加接近真实的临界温度值，所以经过模型优化我们得出，当电信机房的 VCSEL 激光器工作温度不高于 44.1℃时，用户可以正常使用网络。

## 六、问题三模型的建立与求解

### 6.1 问题分析

问题三要求求解 VCSEL 的带宽模型，由于 VCSEL 作为多模链路的主要光源，具有带宽大、损耗低、抗电磁干扰性能好、成本低廉等优势，是良好的光纤发光原材料。由于 VCSEL 是可以作为光纤通信的重要媒介，因此，分析他的带宽模型是必要的。尤其是分析环境以及电流对他的通信速率的影响，以便在最佳的状态下达到最快的通信速率。

分析 VCSEL 的带宽模型时采用小信号激励法，也就是给该系统一个非常小的信号，检验他在稳定状态下能达到的带宽。通常采用 10dB 带宽模型进行测量，也就是在 10dB 衰减位置查看他所达到的带宽宽度。在该问题中，采取从 0 频率扫描以 0.5GHz 为步长，扫描到 30GHz。检测其能达到的最大带宽。

该问题中，已知电流为 7.5mA，温度为 20°C，相应频率的幅度是已知的，建立 VCSEL 带宽模型并进行拟合即可求出问题。

### 6.2 模型建立思路

VCSEL 带宽模型思路为：

- 1、 求出稳态下的电流、载流子数、光子数；稳态，即无驱动信号情况下，激光器中的电流为直流信号，此时电流是稳定的，载流子数、光子数也都是稳定的；
- 2、 加载小信号（小信号为信号幅度非常小的信号，不同频率处的信号幅度不同，因此小信号是与频率相关的小幅度信号），可以假定小信号引入了与频率相关的电流、载流子数、光子数，数学表达可以写成：
- 3、 给 VCSEL 加载上小信号后，原来速率方程中的电流、载流子数、光子数则表示为稳态下的值与小信号下引入信号变化的值的和。

### 6.3 问题的求解

#### 6.3.1 模型的建立

根据题目中附录二给出的基于速率方程的建模方法推导过程，得出以下几个公式：

$$N_s = \frac{\frac{P_0}{(k\tau_p)} + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\frac{\beta}{\tau_n} + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \quad (6-1)$$

$$S_s = \frac{\frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0)} \quad (6-2)$$

$$N_s = \frac{\frac{P_0}{(k\tau_p)} + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\frac{\beta}{\tau_n} + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \quad (6-3)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n \left(1 + \frac{\varepsilon P_s}{k}\right)^2} \quad (6-4)$$

$$H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (6-5)$$

其中,  $P_s = kS_s$ , 已知第一问中几个公式:

$$I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad (6-6)$$

将上述几个公式相互带入, 即可求出最终模型。

### 6.3.2 对于问题三 a) 的求解

根据 6.3.1 得出的模型进行拟合  $(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta)$ , 拟合方案采用最小二乘法进行非线性曲线拟合。其中的程序在 **fit\_2.m** 当中。

在进行拟合的时候, 我们采用 **lsqcurvefit** 函数, 其中初始参考数值如下:

表 6-1 **lsqcurvefit** 函数初始参考值

参数	参考初值	单位
$\eta_i$	0.7	
$\beta$	1e-5	
$\tau_n$	9.6e-9	s
$k$	1.5e-5	mW
$G_0$	1.8e6	$s^{-1}$
$N_0$	4.97e5	
$\tau_p$	3.8e-12	s
$\varepsilon$	4.7e-8	

由于拟合的该函数中调用 **lsqcurvefit** 函数进行多次迭代, 方案为:

- 1、设定初始参数向量值 A 并将其赋值给一个矩阵 B 的第 i 行 (第 i 列);
- 2、将矩阵 B 的第 i 行 (第 i 列) 作为参数传递到 **lsqcurvefit** 中进行迭代, 求出参数, 并将参数赋值给矩阵 B 的第 i+1 行 (第 i+1 列);
- 3、 $i=i+1$ ;
- 4、重复 2 到 3 的过程, 直到矩阵的第 i+1 行, 或 i+1 列稳定;

上述过程的迭代是由于该方程当中参数较多, 在迭代的时候经常出现超过最大函数计算次数的问题, 导致一次迭代出现的参数不是稳定的, 因此通过多次迭代的方法最终达到一个稳定的参数值;

由于 **lsqcurvefit** 采用最小二乘法进行拟合, 因此拟合效果较好, 速度相对较

快<sup>[5]</sup>

经过最小二乘法非线性拟合之后得到的参数如下：

表 6-2 模型各参数求解值

参数	参考终值	单位
$\eta_i$	0.2520	
$\beta$	-2.698	
$\tau_n$	81.146	s
$k$	-2.651	mW
$G_0$	1.237e6	$s^{-1}$
$N_0$	2.7e13	
$\tau_p$	8.1e-3	s
$\varepsilon$	1.35e4	

经过拟合数据之后得到的图像与原始图像对比如下：

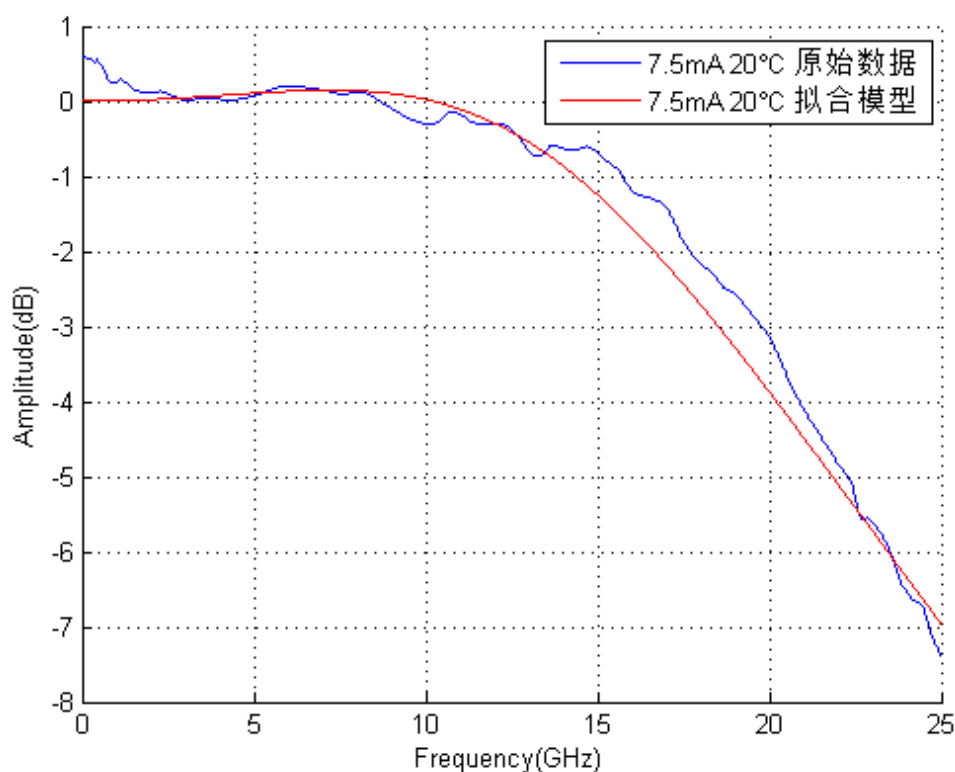


图 6-1 7.5mA 20°C拟合结果

经过对比可以看出原始图像与真实数据在频率低于 13GHz 和高于 22GHz 的时候相对差距较小，在 13GHz 到 22GHz 之间差距较大。

下面是两种不同环境的幅频特性曲线对比，其中我们采用了两种对比方案：

- 1、在相同的温度条件下（20°C），测量不同的电流对于幅频特性曲线的影响；

- 2、在相同的电流情况下（7.5mA），测量不同的温度对于幅频特性曲线的影响；

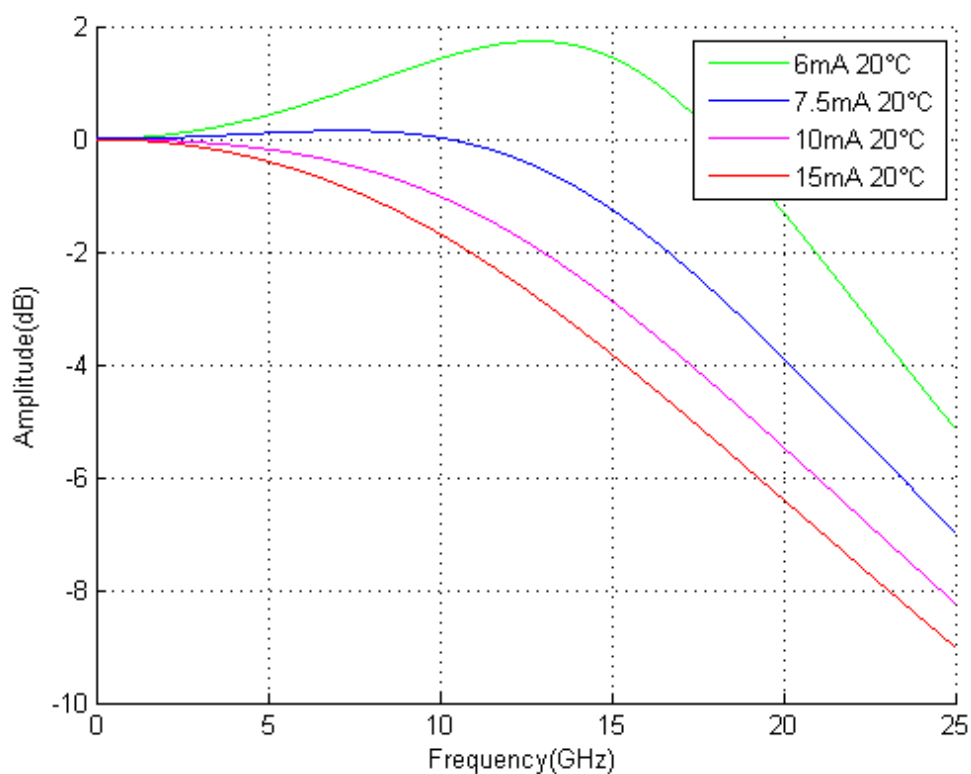


图 6-2 20°C情况下不同电流幅频特性曲线

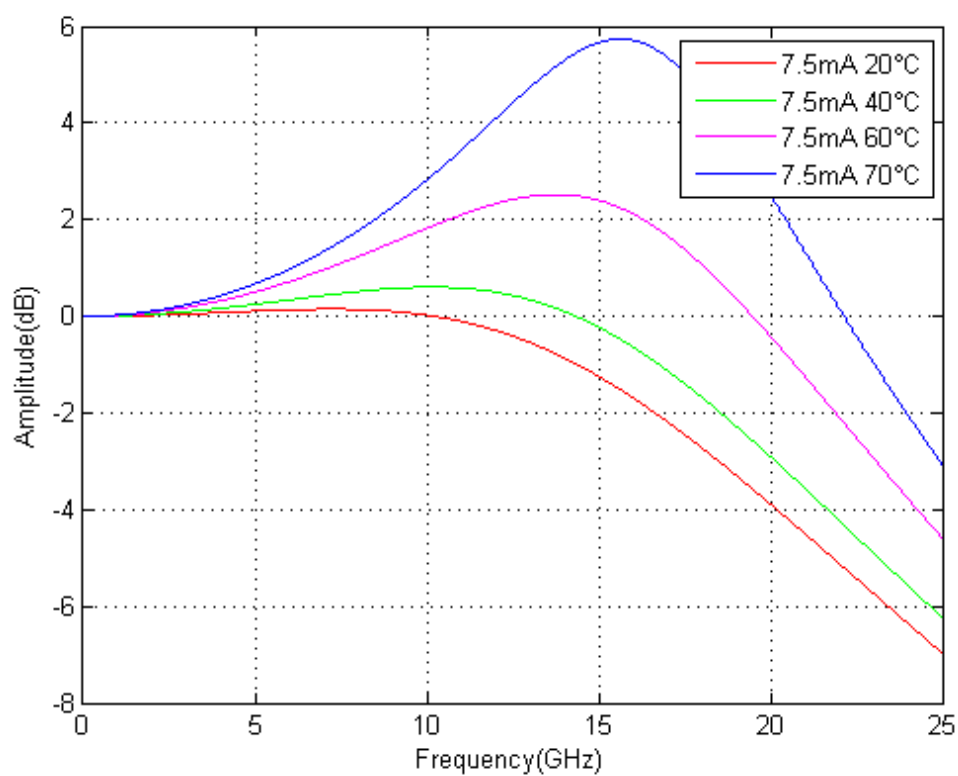


图 6-3 7.5mA 电流时不同温度幅频特性曲线



通过在图 6-2 以及图 6-3，我们可以对比出来温度与电流对于器件带宽的影响。

### 6.3.3 对于问题三 b)的求解

根据上一题的图像我们可以看到激光器的温度和激光器偏置电流对于器件带宽曲线的影响。由于在光纤通信中，系统可用的幅度衰减范围更大，因此我们通常选择 10dB 衰减位置的信号带宽进行衡量；也就是我们常说的 10dB 带宽。

由于图 6-2 并不能很好的看出偏置电流对于带宽的影响因此我们从新取值做了下图：

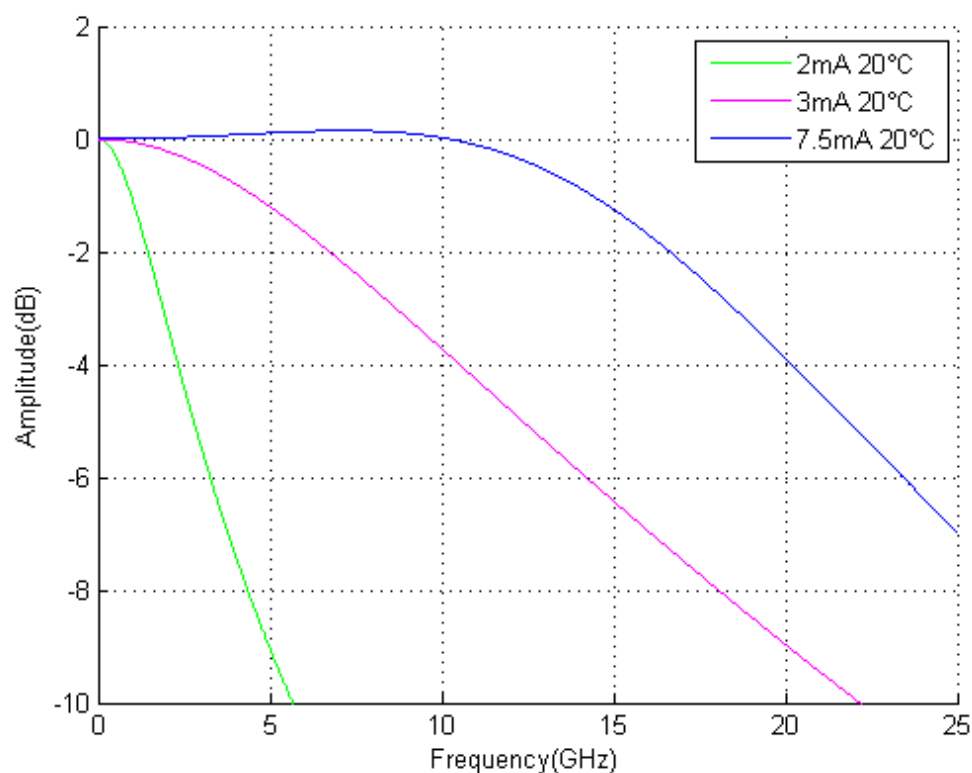


图 6-4 20°C时不同电流的幅频特性曲线

从图 6-4 中我们可以看到，在 20°C时，随着电流的增加，在-10dB 处的频率也相应的增加，也就是带宽也相应的增加；根据我们调研的一些资料来看情况也确实是这样<sup>[6]</sup>因此，在相同的温度下，随着电流的增加，VCSEL 的带宽会逐渐增加。

由于图 6-3 中同样不能看出带宽状况，因此我们选取新参数（3mA）绘制幅频特性曲线：

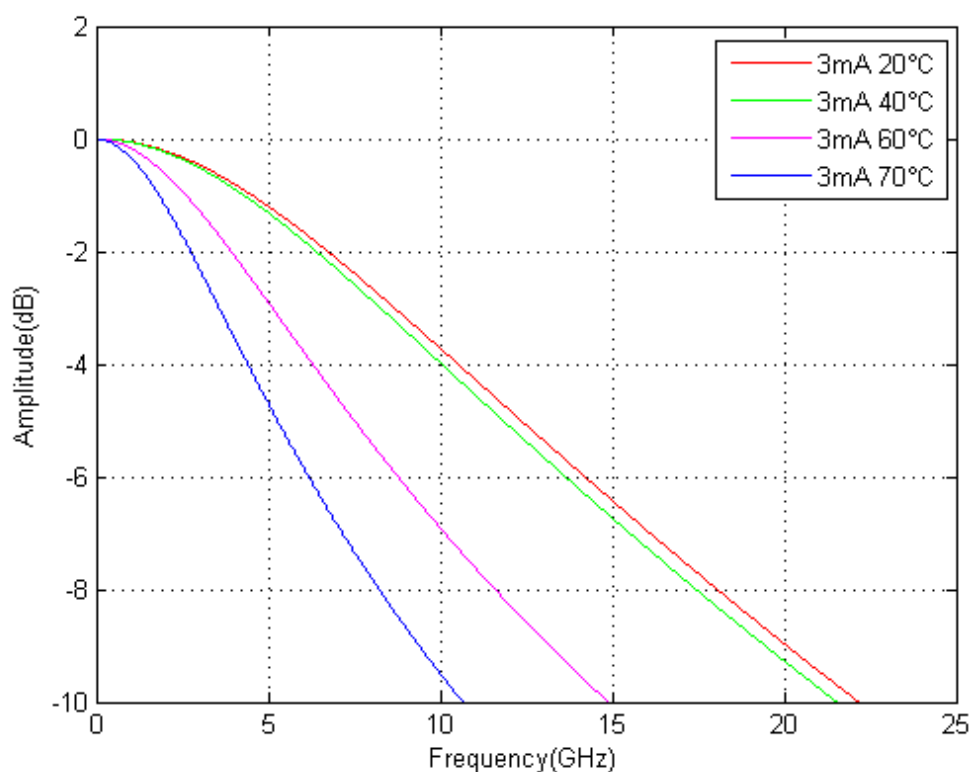


图 6-5 3mA 不同温度下的幅频特性曲线

我们可以看出，在 3mA 的偏置电流下面，出现了这样的特性，温度越高，在 -10dB 处的频率越低，也就是带宽越窄，从我们查到的相关资料来看也同样符合这样的特性<sup>[7]</sup>。得出结论：在相同的电流情况下，温度越高，VCSEL 的频率越低，也就是带宽逐渐变窄。

#### 6.3.4 对于问题三 c)的求解

由前面的带宽模型分析我们得知激光器的温度和偏置电流都会对器件的带宽产生影响。问题三中的 c)问主要是想探求除了上面提到的两个因素之外，还有什么其他的因素会影响到激光器的带宽。通过查阅相关资料，我们找到了几个限制 VCSEL 带宽的主要因素：

- (1) 严格的单模工作范围决定了模式最大光子密度，从而决定了最大共振频率；
- (2) 接触电极电容和外封装带来的电路寄生效应以及大电流注入时器件结稳的升高都会使增益和带宽下降；
- (3) 外延结构没有进行充分优化，难以得到最佳的微分增益等。

通过网络搜索，我们找到了一篇关于激光器的优化设计的论文，该论文在结构上对 VCSEL 中的上下反光镜进行了优化设计，然后重点对谐振腔的腔长进行了优化，他们在实验中采用了  $1\lambda$  的短腔结构，并用 matlab 在基于 InP 衬底  $1.55\mu\text{m}$  的短腔 VCSEL 的情况下进行了仿真，结果表明最大 -3dB 带宽为 30.5GHz，与之前此波段的最大带宽（19GHz）相比，提高了约 60%。所以我们通过这样的实验与论文描述，基本可以得到结论：我们可以通过改进激光器的物理结构来获得更

大的带宽，除此之外，我们也可以对几个影响带宽的因素进行优化，从而达到获取更大带宽的目的。

### 6.3.5 对于问题三 d)的求解

对参数进行 20%的敏感度测试：

- 1、对于  $n$  个参数依次取出一个参数；
- 2、将该参数的数值乘上 1.2，也就是改变其绝对值 20%的数据量；
- 3、重新将改变后的参数代入到原始方程中计算新的幅度值；
- 4、将该参数乘上 0.8，也就是改变其绝对值 20%的数据量；
- 5、重新将改变后的参数代入到原始方程中计算新的幅度值；

得到如下对比图像（所有图像均为 7.5mA 20°C测量）：

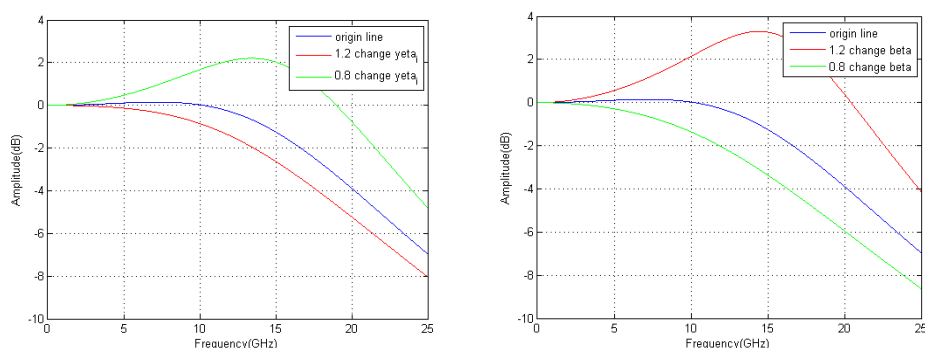


图 6-6 左边为 $\eta_i$ ，右边为 $\beta$ ，红线为乘 1.2，绿线为乘 0.8

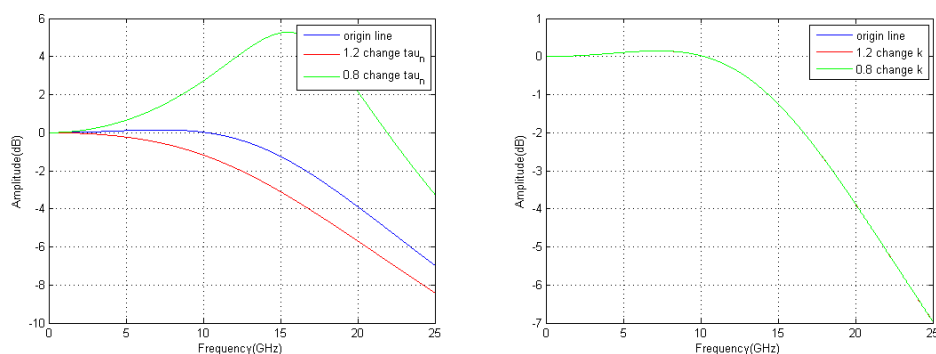


图 6-7 左边为 $\tau_n$ ，右边为 $k$ ，红线为乘 1.2，绿线为乘 0.8

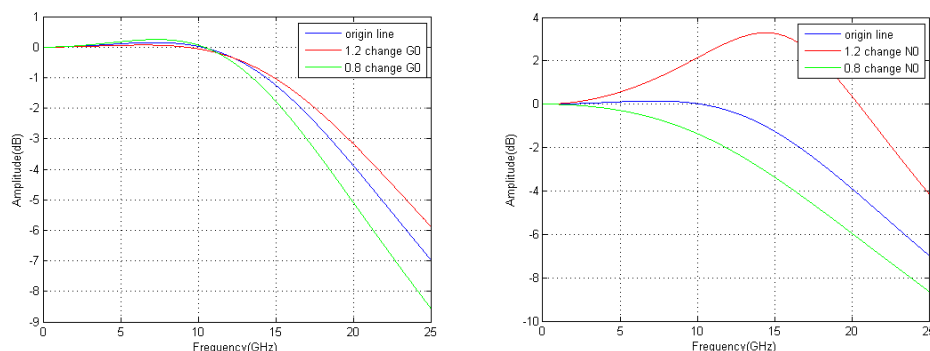


图 6-8 左边为 $G_0$ ，右边为 $N_0$ ，红线为乘 1.2，绿线为乘 0.8

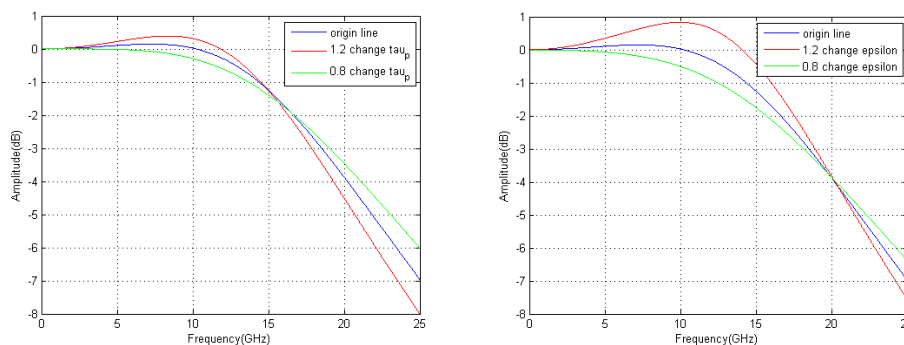


图 6-9 左边为 $\tau_p$ ，右边为 $\epsilon$ ，红线为乘 1.2，绿线为乘 0.8

发现，除了  $k$  以外，其他几个参数都会影响在 3dB 范围内的部分频率使其高于 0，其中，由于这几个参数当中除  $\beta$  以外均为正数，因此：

- $\eta_i, \tau_n, G_0, \beta$  这几个参数适当增大会使其更趋向于平坦，反之减小他们的数值会使 3dB 范围内频率高于 0；
- $N_0, \tau_p, \epsilon$  这几个参数适当减小会使其更趋向于平坦，反之增大他们的数值会使 3dB 范围内频率高于 0；
- $k$  的变化对其影响很小，可以忽略不计；

经相关资料查证，这个高于 0 频率位置的凸起是激光器的弛豫振荡频率产生的峰值。峰值频率随着阈值电流的降低而增加，峰值频率和高度均随自发辐射因子的增大而增加<sup>[8]</sup>，至于整体的参数影响还需要进一步拟合。

## 七、问题四模型的建立与求解

### 7.1 VCSEL 带宽模型的改进

从问题三中的图像即可看出，修改某些参数可以获得更大的带宽，例如，从图 6-8 中的 $G_0$ 来看，根据图像的走势，增大 $G_0$ 可以获得更大的带宽。通过增大 $G_0$ 并画出不同图像的方式来测试，下面用增大 $G_0$ 不同倍数的方法来做测试：

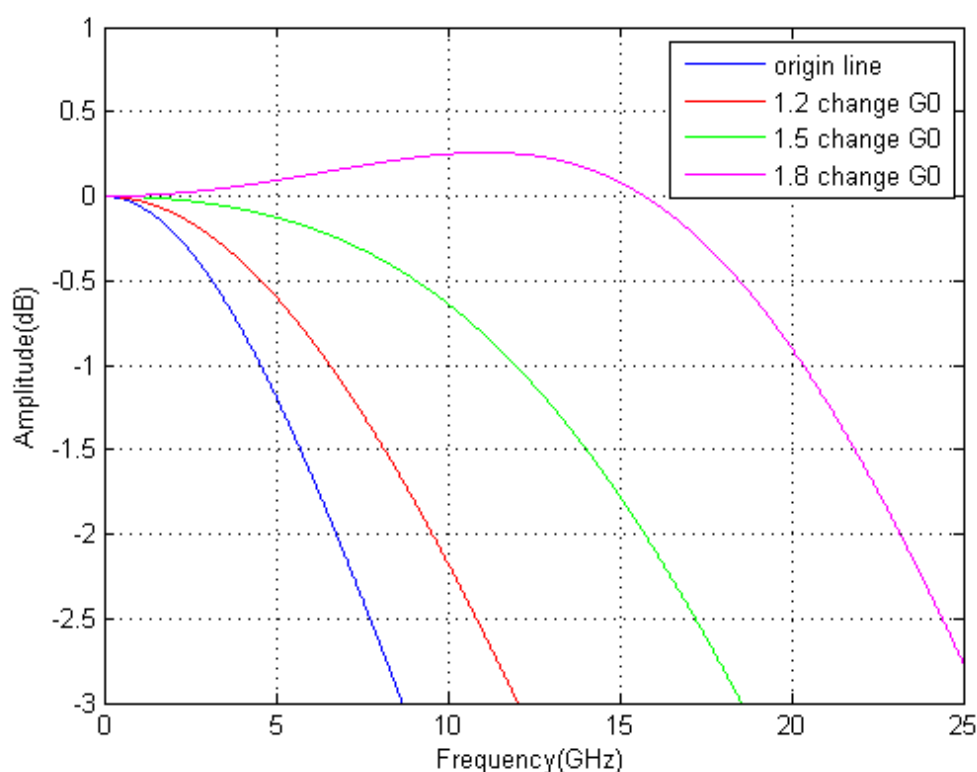


图 7-1  $G_0$ 分别乘以 1.2、1.5、1.8 之后的曲线图

在图 7-1 中，可以看到当 $G_0$ 分别增大为原来的 1.2 倍，1.5 倍，1.8 倍时（依次从左到右，最左边是原始 $G_0$ ），他们的 3dB 带宽就会依次增加。因此，对于 $G_0$ 来说可以通过适当增大的方式获得更高的带宽，但是过高的增大 $G_0$ 又会因为弛豫振荡频率产生峰值，因此，适当增大是可行的。相同的，其他参数也可按照该方法来检验，由于时间关系在这里就不一一验证了。

## 八、参考文献

- [1]王志燕,贾护军,毛周等. 1.55  $\mu\text{m}$  短腔垂直腔面发射激光器的优化设计[J]. 半导体光电, 2014, 35(1):39-42.
- [2]马建立. 垂直腔面发射激光器的驱动与温度特性自动测试系统[D]. 长春理工大学, 2006. DOI:10.7666/d.y1041360.
- [3]侯立峰,钟景昌,孙俘等. 808nm 垂直腔面发射激光器湿法氧化工艺的研究[J]. 兵工学报, 2010, 31(2):209-213.
- [4]The MathWorks, Inc., Find minimum of unconstrained multivariable function using derivative-free method - MATLAB fminsearch, <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fminsearch.html?requestedDomain=www.mathworks.com>, 2017.9.20.
- [5]The MathWorks, Inc., Solve nonlinear curve-fitting (data-fitting) problems in least-squares sense - MATLAB lsqcurvefit - MathWorks 中国, <https://cn.mathworks.com/help/optim/ug/lsqcurvefit.html>, 2017/09/20
- [6]冯雪丰. 10Gbps 多模光纤链路的仿真与实验研究[D]. 东南大学, 2011.
- [7]梁锋,高建军,田学农. 垂直腔面发射激光器的温度模型[J]. 半导体学报, 2007, (07):1125-1129. 2007.
- [8]潘炜,张晓霞,罗斌. 垂直腔激光器中弛豫振荡频率的优化控制[J]. 激光与红外, 2002, (01):27-29. 2002.
- [9]Koyama F. Recent advances in VCSEL photonics[C]// Opto-Electronics and Communications Conference. IEEE, 2011:473-476.
- [10]Kitching J, Knappe S, Vukićević N, et al. Microwave frequency reference based on VCSEL-driven dark-line resonances in Cs vapor[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 2000, 49(6):1313-1317.
- [11]Steinle G, Riechert H, Egorov A Y. Monolithic VCSEL with InGaAsN active region emitting at 1.28  $\mu\text{m}$  and CW output power exceeding 500  $\mu\text{W}$  at room temperature[J]. Electronics Letters, 2001, 37(2):93-95.
- [12]王倩. 垂直腔面发射激光器热效应与光电特性的研究[D]. 北京邮电大学, 2008.