24 Συντομότατες διαδρομές κοινής αφετηρίας

Η Καθηγήτρια Patrick θέλει να βρει τη συντομότερη δυνατή διαδρομή από το Παρίσι μέχρι το Βερολίνο. Εάν διαθέτουμε έναν χάρτη της Ευρώπης ο οποίος αναγράφει τις αποστάσεις μεταξύ οδικών κόμβων για όλα τα ζεύγη άμεσα συνδεδεμένων κόμβων, πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συντομότερη διαδρομή;

Ένας δυνατός τρόπος είναι να απαριθμήσουμε όλες τις διαδρομές από το Παρίσι μέχρι το Βερολίνο, να αθροίσουμε τις σχετικές αποστάσεις σε κάθε διαδρομή, και να επιλέξουμε τη διαδρομή που δίνει το μικρότερο άθροισμα. Ωστόσο, όπως μπορούμε να αντιληφθούμε εύκολα, ακόμη και αν αποκλειστούν οι διαδρομές που περιλαμβάνουν κύκλους, η Καθηγήτρια Patrick θα πρέπει να εξετάσει εκατομμύρια δυνατότητες, οι περισσότερες από τις οποίες δεν αξίζει να ληφθούν υπ' όψιν. Παραδείγματος χάριν, μια διαδρομή από το Παρίσι μέχρι τη Μαδρίτη και από εκεί στο Βερολίνο είναι προφανώς εντελώς άστοχη, αφού η Μαδρίτη βρίσκεται περισσότερο από χίλια χιλιόμετρα εκτός πορείας.

Στο κεφάλαιο αυτό και στο Κεφάλαιο 25, θα μελετήσουμε τρόπους αποδοτικής επίλυσης τέτοιων προβλημάτων. Στο ***πρόβλημα των συντομότατων διαδρομών***, μας δίνεται ένα εμβαρές, κατευθυντό γράφημα $G = (V, E)$, με κάποια συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbf{R}$ η οποία απεικονίζει ακμές σε βάρη (τα οποία έχουν πραγματικές τιμές). Το ***βάρος*** $w(p)$ της διαδρομής $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ είναι το άθροισμα των βαρών των επιμέρους ακμών της:

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) .$$

Ορίζουμε ως ***βάρος συντομότατης διαδρομής*** $\delta(u, v)$ από τον κόμβο u μέχρι τον v την ποσότητα

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\leadsto} v\} & \text{εάν υπάρχει διαδρομή από τον } u \text{ μέχρι τον } v\,, \\ \infty & \text{διαφορετικά}\,. \end{cases}$$

Ορίζουμε επίσης ως ***συντομότατη διαδρομή*** από τον κόμβο u μέχρι τον κόμβο v οποιαδήποτε διαδρομή p με βάρος $w(p) = \delta(u, v)$.

Στο παράδειγμα της διαδρομής Παρίσι-Βερολίνο, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον οδικό χάρτη σαν ένα γράφημα: οι κόμβοι του γραφήματος αντιπροσωπεύουν οδικούς κόμβους, οι ακμές αντιπροσωπεύουν τμήματα αυτοκινητοδρόμων μεταξύ οδικών κόμβων, και τα βάρη των ακμών αντιπροσωπεύουν τις αντίστοιχες αποστάσεις. Ο στόχος μας είναι να βρούμε μια συντομότατη διαδρομή από τον οδικό κόμβο του Παρισιού μέχρι τον οδικό κόμβο του Βερολίνου.

Τα βάρη των ακμών είναι δυνατόν να αντιπροσωπεύουν όχι μόνο αποστάσεις, αλλά και άλλες ποσότητες, όπως π.χ. χρόνο, κόστος, ποινές, ζημίες και οποιαδήποτε άλλη ποσότητα η οποία συσσωρεύεται γραμμικά κατά μήκος κάποιας διαδρομής και την οποία θα θέλαμε να ελαχιστοποιήσουμε.

Ο αλγόριθμος της διερεύνησης κατά πλάτος που εξετάσαμε στην Ενότητα 22.2 είναι ένας αλγόριθμος συντομότατων διαδρομών για αβαρή γραφήματα, δηλαδή για γραφήματα στα οποία κάθε ακμή έχει μοναδιαίο βάρος. Επειδή πολλές από τις έννοιες της διερεύνησης κατά πλάτος ανακύπτουν και στη μελέτη των συντομότατων διαδρομών σε εμβαρή γραφήματα, συνιστούμε στον αναγνώστη προτού προχωρήσει να επαναλάβει τη μελέτη της Ενότητας 22.2.

Παραλλαγές

Στο κεφάλαιο αυτό, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο ***πρόβλημα των συντομότατων διαδρομών κοινής αφετηρίας***: μας δίνεται ένα γράφημα $G = (V, E)$, και μας ζητείται να προσδιορίσουμε μια συντομότατη διαδρομή από κάποιον δεδομένο ***αφετηριακό*** κόμβο $s \in V$ μέχρι κάθε κόμβο $v \in V$. Ο αλγόριθμος για το πρόβλημα κοινής αφετηρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την επίλυση πολλών άλλων προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων των ακόλουθων παραλλαγών.

Πρόβλημα των συντομότατων διαδρομών κοινού προορισμού: Να βρεθεί μια συντομότατη διαδρομή από κάθε κόμβο v μέχρι κάποιον δεδομένο κόμβο ***προορισμού*** t. Εάν αναστρέψουμε τη φορά όλων των ακμών του γραφήματος, το πρόβλημα αυτό ανάγεται στο πρόβλημα κοινής αφετηρίας.

Πρόβλημα της μεμονωμένης συντομότατης διαδρομής: Να βρεθεί μια συντομότατη διαδρομή από κάποιον δεδομένο κόμβο u μέχρι κάποιον δεδομένο κόμβο v. Η λύση αυτού του προβλήματος εμπεριέχεται στη λύση του προβλήματος κοινής αφετηρίας με αφετηριακό κόμβο τον u. Επιπλέον, όλοι οι γνωστοί αλγόριθμοι για αυτό το πρόβλημα έχουν τον ίδιο ασυμπτωτικό χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης με τους καλύτερους αλγορίθμους κοινής αφετηρίας.

Πρόβλημα των συντομότατων διαδρομών πλήρους σύζευξης: Να βρεθεί μια συντομότατη διαδρομή από τον κόμβο u μέχρι τον κόμβο v για κάθε ζεύγος κόμβων u και v. Αν και το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με επανειλημμένη εκτέλεση ενός αλγορίθμου κοινής αφετηρίας για όλους τους αφετηριακούς κόμβους, συνήθως μπορεί να επιλυθεί ταχύτερα. Επιπλέον, η δομή του προβλήματος είναι ενδιαφέρουσα αυτή καθ' εαυτή. Το πρόβλημα των διαδρομών πλήρους σύζευξης αναλύεται λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 25.

Βέλτιστη υποδομή συντομότατης διαδρομής

Οι αλγόριθμοι συντομότατων διαδρομών βασίζονται κατά κανόνα στην ιδιότητα ότι μια συντομότατη διαδρομή ανάμεσα σε δύο κόμβους εμπεριέχει άλλες συντομότατες διαδρομές. (Στην ίδια ιδιότητα βασίζεται και ο αλγόριθμος μέγιστης ροής των Edmonds-Karp, στο Κεφάλαιο 26.) Υπενθυμίζουμε ότι η ιδιότητα της βέλτιστης υποδομής αποτελεί μια από τις βασικές ενδείξεις για τη δυνατότητα εφαρμογής τόσο του δυναμικού προγραμματισμού (Κεφάλαιο 15) όσο και της άπληστης μεθόδου (Κεφάλαιο 16). Ο αλγόριθμος του Dijkstra, τον οποίο θα εξετάσουμε στην Ενότητα 24.3, ανήκει στην κατηγορία των άπληστων αλγορίθμων, ενώ ο αλγόριθμος των Floyd-Warshall, για την εύρεση συντομότατων διαδρομών πλήρους σύζευξης (βλ. Ενότητα 25.2), εμπίπτει στον δυναμικό προγραμματισμό. Η ιδιότητα της βέλτιστης υποδομής των συντομότατων διαδρομών διατυπώνεται ακριβέστερα στο ακόλουθο λήμμα.

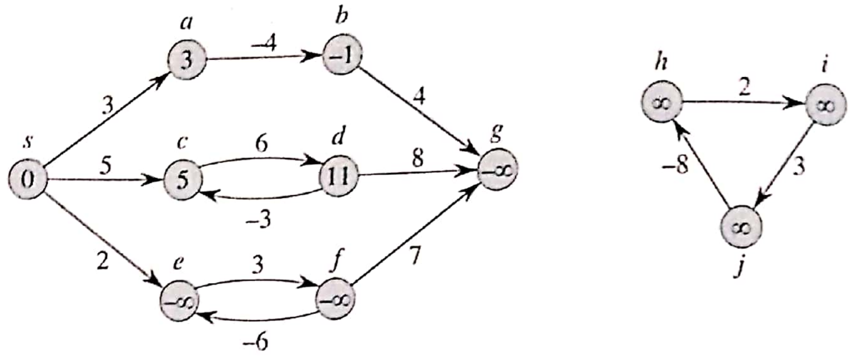
Λήμμα 24.1 (Οι υποδιαδρομές συντομότατων διαδρομών αποτελούν συντομότατες διαδρομές)
Δίνεται ένα κατευθυντό και εμβαρές γράφημα $G = (V, E)$ με συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbf{R}$, και έστω $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ μια συντομότατη διαδρομή από τον κόμβο v_0 μέχρι τον κόμβο v_k. Επιπλέον, για κάθε i και j τέτοια ώστε $0 \leq i \leq j \leq k$, έστω $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ η υποδιαδρομή της p από τον κόμβο v_i μέχρι τον κόμβο v_j. Στην περίπτωση αυτή, η p_{ij} αποτελεί συντομότατη διαδρομή από τον v_i μέχρι τον v_j.

Απόδειξη Αναλύοντας τη διαδρομή p στις υποδιαδρομές $v_0 \overset{p_{0i}}{\leadsto} v_i \overset{p_{ij}}{\leadsto} v_j \overset{p_{jk}}{\leadsto} v_k$, έχουμε ότι $w(p) = w(p_{0i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$. Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι υπάρχει κάποια διαδρομή p'_{ij} από τον v_i μέχρι τον v_j με βάρος $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$. Στην περίπτωση αυτή, η διαδρομή $v_0 \overset{p_{0i}}{\leadsto} v_i \overset{p'_{ij}}{\leadsto} v_j \overset{p_{jk}}{\leadsto} v_k$ είναι μια διαδρομή από τον v_0 μέχρι τον v_k της οποίας το βάρος $w(p_{0i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jk})$ είναι μικρότερο του $w(p)$, γεγονός που αντιβαίνει προς την υπόθεση ότι η p είναι μια συντομότατη διαδρομή από τον v_0 μέχρι τον v_k. ■

Ακμές αρνητικού βάρους

Σε ορισμένα στιγμιότυπα του προβλήματος των συντομότατων διαδρομών κοινής αφετηρίας, ενδέχεται να υπάρχουν ακμές με αρνητικό βάρος. Εάν το γράφημα $G = (V, E)$ δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους προσπελάσιμους από τον αφετηριακό κόμβο s, τότε για όλους τους κόμβους $v \in V$, το βάρος συντομότατης διαδρομής $\delta(s, v)$ παραμένει καλά καθορισμένο, παρ' όλο που πιθανόν να έχει αρνητική τιμή. Εάν, όμως, το γράφημα περιλαμβάνει κάποιον κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον s, δεν ορίζονται βάρη συντομότατων διαδρομών. Καμία διαδρομή από τον s μέχρι κάποιον κόμβο του κύκλου δεν είναι δυνατόν να είναι συντομότατη –καθώς μπορούμε πάντοτε να βρούμε μια διαδρομή μικρότερου βάρους ακολουθώντας την προτεινόμενη «συντομότατη» διαδρομή και κατόπιν διατρέχοντας τον κύκλο αρνητικού βάρους. Εάν σε κάποια διαδρομή από τον s μέχρι τον τυχόντα κόμβο v υπάρχει ένας κύκλος αρνητικού βάρους, ορίζουμε $\delta(s, v) = -\infty$.

Οι επιπτώσεις των αρνητικών βαρών και των κύκλων αρνητικού βάρους στα βάρη συντομότατων διαδρομών αναπαρίστανται στο Σχήμα 24.1. Μεταξύ του s και του a υπάρχει μία μόνο διαδρομή (η $\langle s, a \rangle$), οπότε έχουμε $\delta(s, a) = w(s, a) = 3$. Μεταξύ του s και του b υπάρχει επίσης μία μόνο διαδρομή, και επομένως έχουμε $\delta(s, b) = w(s, a) + w(a, b) = 3 + (-4) = -1$. Μεταξύ του s και του c υπάρχουν άπειρες διαδρομές: $\langle s, c \rangle$, $\langle s, c, d, c \rangle$, $\langle s, c, d, c, d, c \rangle$, κ.ο.κ. Δεδομένου ότι ο κύκλος $\langle c, d, c \rangle$ έχει βάρος $6 + (-3) = 3 > 0$, η συντομότατη διαδρομή από τον s μέχρι τον c είναι η $\langle s, c \rangle$, με βάρος $\delta(s, c) = w(s, c) = 5$. Ομοίως, η συντομότατη διαδρομή από τον s μέχρι τον d είναι η $\langle s, c, d \rangle$, με βάρος $\delta(s, d) = w(s, c) + w(c, d) = 11$. Κατά ανάλογο τρόπο, μεταξύ του s και του e υπάρχουν επίσης άπειρες διαδρομές: $\langle s, e \rangle$, $\langle s, e, f, e \rangle$, $\langle s, e, f, e, f, e \rangle$, κ.ο.κ. Δεδομένου, όμως, ότι ο κύκλος $\langle e, f, e \rangle$ έχει βάρος $3 + (-6) = -3 < 0$, δεν υπάρχει συντομότατη διαδρομή από τον s μέχρι τον e. Διατρέχοντας τον κύκλο αρνητικού βάρους $\langle e, f, e \rangle$ αρκετές φορές,



Σχήμα 24.1 Κατευθυντό γράφημα με αρνητικά βάρη ακμών. Εντός του κάθε κόμβου αναγράφεται το αντίστοιχο βάρος συντομότατης διαδρομής από τον αφετηριακό κόμβο s. Επειδή οι κόμβοι e και f σχηματίζουν έναν κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον s, τα βάρη συντομότατης διαδρομής για αυτούς είναι $-\infty$. Επειδή ο κόμβος g είναι προσπελάσιμος από έναν κόμβο με βάρος συντομότατης διαδρομής $-\infty$, το βάρος συντομότατης διαδρομής του g είναι επίσης $-\infty$. Οι κόμβοι h, i, και j δεν είναι προσπελάσιμοι από τον s, και επομένως τα βάρη συντομότατης διαδρομής για αυτούς είναι ∞, παρ' όλο που ανήκουν σε έναν κύκλο αρνητικού βάρους.

μπορούμε να βρούμε διαδρομές από τον s μέχρι τον e με αυθαίρετα μεγάλα αρνητικά βάρη, και επομένως $\delta(s, e) = -\infty$. Ομοίως, $\delta(s, f) = -\infty$. Δεδομένου ότι ο g είναι προσπελάσιμος από τον f, μπορούμε επίσης να βρούμε διαδρομές από τον s μέχρι τον g με αυθαίρετα μεγάλα αρνητικά βάρη, οπότε $\delta(s, g) = -\infty$. Οι κόμβοι h, i, και j σχηματίζουν επίσης κύκλο αρνητικού βάρους. Ωστόσο, επειδή δεν είναι προσπελάσιμοι από τον s, έχουμε $\delta(s, h) = \delta(s, i) = \delta(s, j) = \infty$.

Ορισμένοι αλγόριθμοι συντομότατων διαδρομών, όπως αυτός του Dijkstra, προϋποθέτουν ότι όλες οι ακμές του γραφήματος εισόδου έχουν μη αρνητικά βάρη, όπως στο παράδειγμα του οδικού χάρτη. Άλλοι, όπως ο αλγόριθμος των Bellman-Ford, επιτρέπουν αρνητικά βάρη ακμών στο γράφημα εισόδου και δίνουν σωστά αποτελέσματα εφόσον δεν υπάρχει κανένας κύκλος αρνητικού βάρους προσπελάσιμος από την αφετηρία. Κατά κανόνα, εάν υπάρχει κάποιος τέτοιος κύκλος, ο αλγόριθμος μπορεί να τον εντοπίσει και να αναφέρει την ύπαρξή του.

Κύκλοι

Είναι δυνατόν μια συντομότατη διαδρομή να περιέχει κάποιον κύκλο; Όπως είδαμε αμέσως παραπάνω, αποκλείεται να περιέχει κάποιον κύκλο αρνητικού βάρους. Ούτε είναι δυνατόν να περιέχει κάποιον κύκλο θετικού βάρους, αφού εάν αφαιρέσουμε τον κύκλο από την διαδρομή παίρνουμε μια διαδρομή με τους ίδιους κόμβους αφετηρίας και προορισμού και χαμηλότερο βάρος. Δηλαδή, εάν $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ είναι κάποια διαδρομή και $c = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ ένας κύκλος θετικού βάρους σε αυτήν τη διαδρομή (οπότε $v_i = v_j$ και $w(c) > 0$), έπεται ότι η διαδρομή $p' = \langle v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_k \rangle$ έχει βάρος $w(p') = w(p) - w(c) < w(p)$, και επομένως η p είναι αδύνατον να αποτελεί συντομότατη διαδρομή από τον κόμβο v_0 μέχρι τον κόμβο v_k.

Απομένουν οι κύκλοι μηδενικού βάρους. Εάν αφαιρέσουμε από κάποια διαδρομή έναν κύκλο μηδενικού βάρους, παίρνουμε μια άλλη διαδρομή ίδιου βάρους με την αρχική. Συνεπώς, εάν υπάρχει μια συντομότατη διαδρομή από κάποιον κόμβο αφετηρίας s προς κάποιον κόμβο προορισμού v η οποία περιλαμβάνει έναν κύκλο μηδενικού βάρους, έπεται ότι υπάρχει επίσης μια άλλη συντομότατη διαδρομή από τον s μέχρι τον v η οποία δεν περιλαμβάνει αυτόν τον κύκλο. Εφόσον μια συντομότατη διαδρομή περιλαμβάνει κύκλους μηδενικού βάρους, μπορούμε να αφαιρέσουμε τους κύκλους αυτούς από τη διαδρομή, τον ένα μετά τον άλλο, μέχρις ότου να πάρουμε μια συντομότατη διαδρομή χωρίς κύκλους. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι οι συντομότατες διαδρομές που βρίσκουμε δεν περιέχουν κύκλους, δηλ. είναι απλές διαδρομές. Δεδομένου ότι οποιαδήποτε άκυκλη διαδρομή σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ περιλαμβάνει το πολύ $|V|$ διαφορετικούς κόμβους, έπεται ότι περιλαμβάνει επίσης το πολύ $|V| - 1$ ακμές. Συνεπώς, μπορούμε να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε συντομότατες διαδρομές οι οποίες περιέχουν το πολύ $|V| - 1$ ακμές.

Αναπαράσταση συντομότατων διαδρομών

Σε πολλές περιπτώσεις, επιθυμούμε να υπολογίσουμε όχι μόνο τα βάρη των συντομότατων διαδρομών, αλλά και τους κόμβους από τους οποίους αποτελούνται αυτές οι διαδρομές. Η αναπαράσταση που χρησιμοποιούμε για τις συντομότατες διαδρομές είναι παρόμοια εκείνης που χρησιμοποιήσαμε για τα δένδρα κατά πλάτος στην Ενότητα 22.2. Για κάθε κόμβο $v \in V$ ενός γραφήματος $G = (V, E)$, τηρούμε ένα πεδίο ***προκατόχου*** $v.\pi$ το οποίο είτε παραπέμπει σε κάποιον άλλο κόμβο είτε έχει την τιμή ΚΕΝΟ. Στους αλγορίθμους συντομότατων διαδρομών αυτού του κεφαλαίου, τα πεδία π ορίζονται έτσι ώστε η αλληλουχία προκατόχων που ξεκινά από κάποιον κόμβο v να διατρέχει ανάδρομα μια συντομότατη διαδρομή από τον s μέχρι τον v. Συνεπώς, για οποιονδήποτε κόμβο v για τον οποίο $v.\pi \neq$ ΚΕΝΟ, η διαδικασία ΕΚΤΥΠΩΣΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ(G, s, v) της Ενότητας 22.2 θα εκτυπώσει μια συντομότατη διαδρομή από τον s μέχρι τον v.

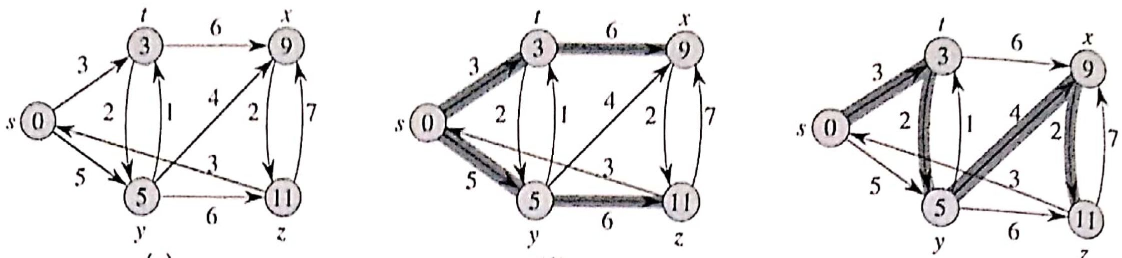
Κατά την εκτέλεση ενός αλγορίθμου συντομότατων διαδρομών, ωστόσο, οι τιμές των πεδίων π δεν υποδεικνύουν απαραιτήτως συντομότατες διαδρομές. Όπως και στη διερεύνηση κατά πλάτος, ενδιαφερόμαστε για το ***υπογράφημα προκατόχων*** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ το οποίο παράγεται από τις τιμές των πεδίων π. Και σε αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε το σύνολο V_π ως το σύνολο των κόμβων του γραφήματος G των οποίων τα πεδία προκατόχου έχουν τιμή διάφορη του ΚΕΝΟ, συν τον αφετηριακό κόμβο s:

$$V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq \text{ΚΕΝΟ}\} \cup \{s\} \ .$$

Το σύνολο κατευθυντών ακμών E_π είναι το σύνολο των ακμών που παράγεται από τις τιμές των πεδίων π για τους κόμβους του συνόλου V_π:

$$E_\pi = \{(v.\pi, v) \in E : v \in V_\pi - \{s\}\} \ .$$

Όπως θα αποδειχθεί, οι τιμές των πεδίων π που παράγουν οι αλγόριθμοι αυτού του κεφαλαίου έχουν την ιδιότητα ότι κατά τον τερματισμό των αλγορίθμων το γράφημα G_π συνιστά ένα «δένδρο συντομότατων διαδρομών» –σε περιγραφικό επίπεδο, ένα έρριζο δένδρο που περιλαμβάνει μια συντομότατη διαδρομή από τον αφετηριακό κόμβο s μέχρι οποιονδήποτε κόμβο προσπελάσιμο από τον s. Τα δένδρα συντομότατων διαδρομών είναι παρόμοια με τα δένδρα κατά πλάτος της Ενότητας 22.2, με τη διαφορά ότι περιέχουν συντομότατες διαδρομές από τον αφετηριακό κόμβο οι οποίες καθορίζονται με βάση τα βάρη των ακμών, αντί για το πλήθος των ακμών. Ακριβέστερα, έστω $G = (V, E)$ ένα εμβαρές, κατευθυντό γράφημα με



(α) (β) (γ)

Σχήμα 24.2 (α) Ένα εμβαρές, κατευθυντό γράφημα με βάρη συντομότατων διαδρομών από τον αφετηριακό κόμβο s. (β) Οι σκιασμένες ακμές σχηματίζουν ένα δένδρο συντομότατων διαδρομών με ρίζα τον αφετηριακό κόμβο. (γ) Ένα άλλο δένδρο συντομότατων διαδρομών με την ίδια ρίζα.

συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbf{R}$, και ας υποθέσουμε ότι το G δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον αφετηριακό κόμβο $s \in V$, οπότε οι συντομότατες διαδρομές είναι καλά καθορισμένες. Ένα ***δένδρο συντομότατων διαδρομών*** με ρίζα τον s είναι ένα κατευθυντό υπογράφημα $G' = (V', E')$, όπου $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$, τέτοιο ώστε

1. το V' είναι το σύνολο των κόμβων που είναι προσπελάσιμοι από τον s στο G,
2. το G' συνιστά ένα έρριζο δένδρο με ρίζα τον s, και
3. για όλους τους κόμβους $v \in V'$, η μοναδική απλή διαδρομή από τον s μέχρι τον v στο G' αποτελεί συντομότατη διαδρομή από τον s μέχρι τον v στο G.

Οι συντομότατες διαδρομές δεν είναι απαραιτήτως μοναδικές, και το ίδιο ισχύει και για τα δένδρα συντομότατων διαδρομών. Παραδείγματος χάριν, στο Σχήμα 24.2 βλέπουμε ένα εμβαρές, κατευθυντό γράφημα και δύο δένδρα συντομότατων διαδρομών με την ίδια ρίζα.

Χαλάρωση

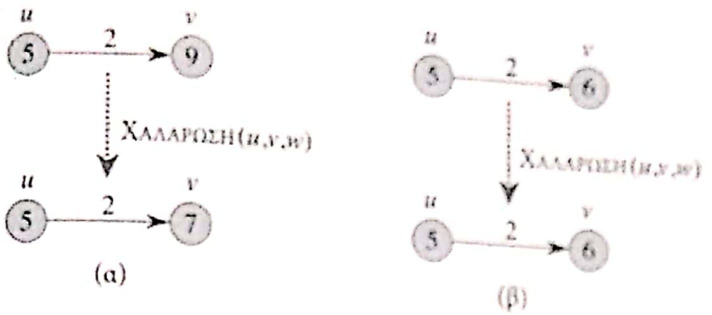
Οι αλγόριθμοι του κεφαλαίου αυτού βασίζονται στην τεχνική της ***χαλάρωσης***. Για κάθε κόμβο $v \in V$, τηρούμε ένα πεδίο $v.d$, το οποίο αντιπροσωπεύει ένα άνω φράγμα του βάρους μιας συντομότατης διαδρομής από τον αφετηριακό κόμβο s μέχρι τον v. Η ποσότητα $v.d$ ονομάζεται ***εκτίμηση συντομότατης διαδρομής***. Η απόδοση αρχικών τιμών στις εκτιμήσεις συντομότατων διαδρομών και στα πεδία των προκατόχων γίνεται μέσω της ακόλουθης διαδικασίας χρόνου $\Theta(V)$.

Αρχικες Τιμες Διαδρομων Κοινης Αφετηριας(G, s)

```
για κάθε κόμβο v ∈ G.V
        v.d = ∞
        v.π = ΚΕΝΟ
s.d = 0
```

Μετά την απόδοση αρχικών τιμών, έχουμε $v.\pi =$ ΚΕΝΟ για όλους τους κόμβους $v \in V$, $s.d = 0$, και $v.d = \infty$ για όλους τους κόμβους $v \in V - \{s\}$.

Η διαδικασία της ***χαλάρωσης*** μιας ακμής (u, v) έχει ως εξής: ελέγχουμε εάν μπορούμε να βελτιώσουμε την τρέχουσα συντομότατη διαδρομή για τον κόμβο v διερχόμενοι μέσω του u και, εάν πράγματι μπορούμε, ενημερώνουμε τα $v.d$ και $v.\pi$.



Σχήμα 24.3 Χαλάρωση μιας ακμής (u, v) με βάρος $w(u, v) = 2$. Εντός κάθε κόμβου αναγράφεται η αντίστοιχη εκτίμηση συντομότατης διαδρομής. (α) Δεδομένου ότι πριν από τη χαλάρωση έχουμε $v.d > u.d + w(u, v)$ η τιμή της $v.d$ μειώνεται. (β) Στην περίπτωση αυτή, πριν από την πράξη της χαλάρωσης έχουμε $v.d \leq u.d + w(u, v)$, και επομένως η χαλάρωση αφήνει την $v.d$ αμετάβλητη.

Μια πράξη χαλάρωσης[1] είναι πιθανό να μειώσει την τιμή της εκτίμησης συντομότατης διαδρομής $v.d$ και να μεταβάλει το πεδίο προκατόχου του v, $v.\pi$. Ο κώδικας που ακολουθεί εκτελεί μια πράξη χαλάρωσης στην ακμή (u, v) σε χρόνο $O(1)$.

```
Χαλαρωση(u, v, w)
αν v.d > u.d + w(u, v)
        v.d = u.d + w(u, v)
        v.π = u
```

Στο Σχήμα 24.3 βλέπουμε δύο παραδείγματα χαλάρωσης ακμής· στο ένα από αυτά έχουμε μείωση κάποιας εκτίμησης συντομότατης διαδρομής, ενώ στο άλλο δεν έχουμε καμία μεταβολή εκτίμησης.

Όλοι οι αλγόριθμοι αυτού του κεφαλαίου καλούν τη διαδικασία Αρχικες Τιμες Διαδρομων Κοινης Αφετηριας και εν συνεχεία εκτελούν μια αλληλουχία πράξεων χαλάρωσης. Επιπλέον, η διαδικασία της χαλάρωσης είναι ο μόνος τρόπος μεταβολής των εκτιμήσεων συντομότατης διαδρομής και των πεδίων προκατόχου. Οι αλγόριθμοι του κεφαλαίου αυτού διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το πόσες φορές εκτελούν την πράξη της χαλάρωσης σε κάθε ακμή και ως προς τη σειρά με την οποία διατρέχουν τις ακμές. Στον αλγόριθμο του Dijkstra και στον αλγόριθμο συντομότατων διαδρομών για κατευθυντά άκυκλα γραφήματα, κάθε ακμή υφίσταται μία και μόνο μία πράξη χαλάρωσης. Στον αλγόριθμο των Bellman-Ford, κάθε ακμή υφίσταται $|V| - 1$ τέτοιες πράξεις.

Ιδιότητες συντομότατων διαδρομών και χαλάρωσης

Για να αποδείξουμε την ορθότητα των αλγορίθμων του κεφαλαίου αυτού, θα βασιστούμε σε διάφορες ιδιότητες των συντομότατων διαδρομών και της χαλάρωσης.

---

[1] Ο όρος «χαλάρωση» πιθανόν να φαίνεται παράδοξος για μια πράξη που καθιστά ένα άνω φράγμα αυστηρότερο. Η χρήση του οφείλεται σε ιστορικούς λόγους. Το αποτέλεσμα μιας πράξης χαλάρωσης μπορεί να θεωρηθεί ως άρση του περιορισμού $v.d \leq u.d + w(u, v)$, ο οποίος, σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα (Λήμμα 24.10), θα πρέπει να ικανοποιείται όταν $u.d = \delta(s, u)$ και $v.d = \delta(s, v)$. Δηλαδή, εάν $v.d \leq u.d + w(u, v)$, δεν είναι πλέον «αναγκαίο» να ικανοποιηθεί ο περιορισμός αυτός, ο οποίος επομένως αίρεται (δηλαδή, «χαλαρώνει»).

Στην παρούσα υποενότητα, παραθέτουμε αυτές τις ιδιότητες, τις οποίες αποδεικνύουμε τυπικά στην Ενότητα 24.5. Για καθεμία από τις παρατιθέμενες ιδιότητες αναφέρεται το αντίστοιχο λήμμα ή πόρισμα της Ενότητας 24.5. Οι πέντε τελευταίες ιδιότητες, οι οποίες αναφέρονται στις εκτιμήσεις συντομότατων διαδρομών ή στο υπογράφημα προκατόχων, προϋποθέτουν σιωπηρά ότι έχουν αποδοθεί αρχικές τιμές στα σχετικά πεδία μέσω της κλήσης Αρχικες Τιμες Διαδρομων Κοινης Αφετηριας(G, s) και ότι ο μόνος τρόπος μεταβολής των εκτιμήσεων συντομότατων διαδρομών και του υπογραφήματος προκατόχων είναι μέσω κάποιας αλληλουχίας πράξεων χαλάρωσης.

Τριγωνική ανισότητα (Λήμμα 24.10)
Για οποιαδήποτε ακμή $(u, v) \in E$, ισχύει ότι $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$.

Ιδιότητα άνω φράγματος (Λήμμα 24.11)
Για όλους τους κόμβους $v \in V$, ισχύει πάντοτε ότι $v.d \geq \delta(s, v)$, και από τη στιγμή που η ποσότητα $v.d$ εξισωθεί με την τιμή $\delta(s, v)$, δεν μεταβάλλεται ποτέ.

Ιδιότητα ανυπαρξίας διαδρομής (Πόρισμα 24.12)
Εάν δεν υπάρχει διαδρομή από τον κόμβο s μέχρι τον v, ισχύει πάντοτε ότι $v.d = \delta(s, v) = \infty$.

Ιδιότητα σύγκλισης (Λήμμα 24.14)
Εάν η $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ είναι κάποια συντομότατη διαδρομή στο G για κάποιους κόμβους $u, v \in V$, και εάν $u.d = \delta(s, u)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από τη χαλάρωση της ακμής (u, v), τότε $v.d = \delta(s, v)$ σε όλες τις χρονικές στιγμές μετά τη χαλάρωση.

Ιδιότητα χαλάρωσης διαδρομής (Λήμμα 24.15)
Εάν η $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ είναι κάποια συντομότατη διαδρομή από τον κόμβο $s = v_0$ μέχρι τον κόμβο v_k, και οι ακμές της p υποστούν χαλάρωση με τη σειρά $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$, τότε $v_k.d = \delta(s, v_k)$. Η ιδιότητα αυτή ισχύει ανεξάρτητα από τις όποιες άλλες πράξεις χαλάρωσης λαμβάνουν χώρα, ακόμη και αν αυτές είναι αναμεμειγμένες με πράξεις χαλάρωσης των ακμών της p.

Ιδιότητα υπογραφήματος προκατόχων (Λήμμα 24.17)
Εάν $v.d = \delta(s, v)$ για όλους τους κόμβους $v \in V$, τότε το υπογράφημα προκατόχων αποτελεί δένδρο συντομότατων διαδρομών με ριζικό κόμβο τον s.

Σύνοψη κεφαλαίου

Στην Ενότητα 24.1 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος των Bellman-Ford, ο οποίος επιλύει το πρόβλημα των συντομότατων διαδρομών κοινής αφετηρίας στη γενική περίπτωση όπου οι ακμές είναι δυνατόν να έχουν αρνητικά βάρη. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι ιδιαίτερα απλός, και έχει το επιπλέον πλεονέκτημα ότι εντοπίζει εάν υπάρχει κάποιος κύκλος αρνητικού βάρους προσπελάσιμος από τον αφετηριακό κόμβο. Στην Ενότητα 24.2 παρατίθεται ένας αλγόριθμος γραμμικού χρόνου για τον υπολογισμό συντομότατων διαδρομών από κάποια κοινή αφετηρία σε ένα κατευθυντό άκυκλο γράφημα. Στην Ενότητα 24.3 αναλύεται ο αλγόριθμος του Dijkstra, ο οποίος έχει μικρότερο χρόνο εκτέλεσης από αυτόν των Bellman-Ford, αλλά προϋποθέτει ότι τα βάρη των ακμών είναι μη αρνητικά. Στην Ενότητα 24.4 περιγράφεται η χρήση του αλγορίθμου των Bellman-Ford για την επίλυση μιας ειδικής περίπτωσης γραμμικού προγραμματισμού. Τέλος, στην Ενότητα 24.5 αποδεικνύονται οι ιδιότητες των συντομότατων διαδρομών και της χαλάρωσης που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Η εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με άπειρες ποσότητες απαιτεί ορισμένες συμβάσεις. Δεχόμαστε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $a \neq -\infty$, ισχύει ότι $a+\infty = \infty+a = \infty$. Επίσης, προκειμένου οι αποδείξεις μας να ισχύουν παρουσία κύκλων αρνητικού βάρους, δεχόμαστε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $a \neq \infty$, ισχύει ότι $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$.

Όλοι οι αλγόριθμοι αυτού του κεφαλαίου προϋποθέτουν ότι το κατευθυντό γράφημα G είναι αποθηκευμένο στην αναπαράσταση μέσω λιστών γειτνίασης. Επιπλέον, σε κάθε ακμή είναι αποθηκευμένο και το βάρος της, ούτως ώστε καθώς διατρέχουμε κάθε λίστα γειτνίασης να μπορούμε να προσδιορίσουμε τα βάρη των ακμών σε χρόνο $O(1)$ ανά ακμή.

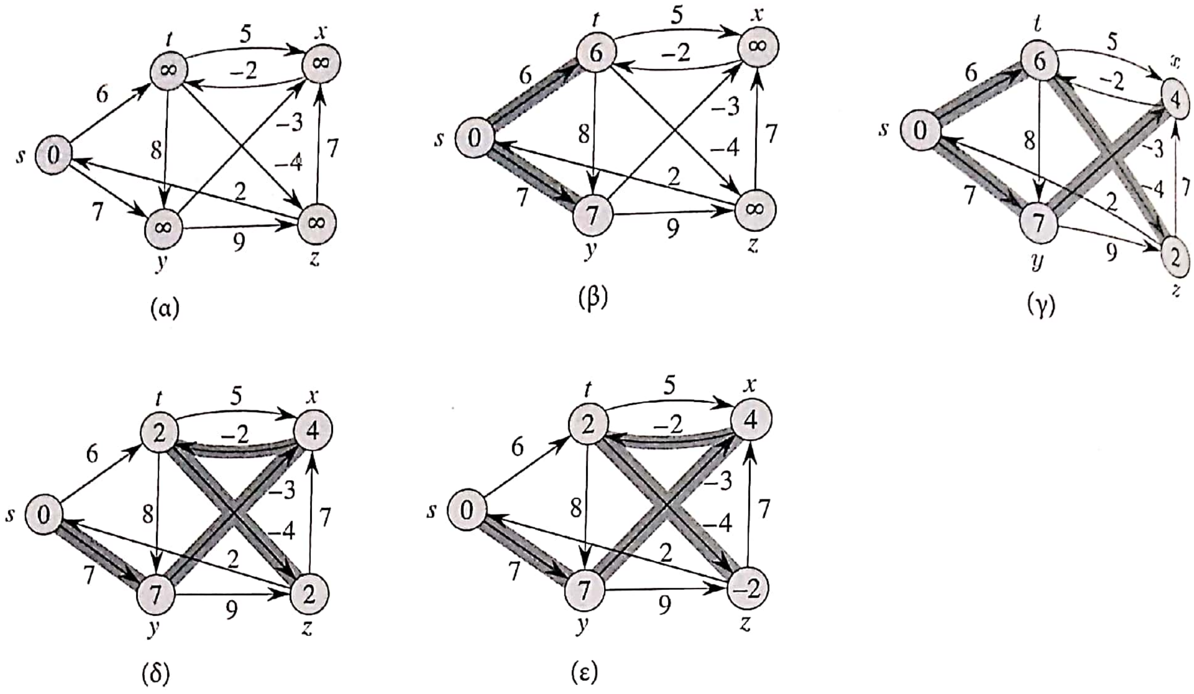
24.1 Ο αλγόριθμος των Bellman-Ford

Ο ***αλγόριθμος των Bellman-Ford*** επιλύει το πρόβλημα των συντομότατων διαδρομών κοινής αφετηρίας στη γενική περίπτωση όπου οι ακμές ενδέχεται να έχουν αρνητικά βάρη. Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα εμβαρές, κατευθυντό γράφημα $G = (V, E)$ με κάποιον αφετηριακό κόμβο s και κάποια συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbf{R}$, και επιστρέφει μια τιμή λογικού τύπου η οποία υποδεικνύει εάν υπάρχει ή δεν υπάρχει κύκλος αρνητικού βάρους προσπελάσιμος από τον αφετηριακό κόμβο. Εάν υπάρχει τέτοιος κύκλος, ο αλγόριθμος υποδεικνύει ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση. Εάν δεν υπάρχει, υπολογίζει τις συντομότατες διαδρομές και τα βάρη τους.

Ο αλγόριθμος εκτελεί πράξεις χαλάρωσης σε ακμές, μειώνοντας προοδευτικά την εκτίμηση $v.d$ για το βάρος μιας συντομότατης διαδρομής από τον αφετηριακό κόμβο s προς κάθε κόμβο $v \in V$ μέχρις ότου επιτύχει το πραγματικό βάρος της συντομότατης διαδρομής $\delta(s, v)$. Στην περίπτωση που το γράφημα δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους προσπελάσιμους από την αφετηρία (και μόνο σε αυτήν την περίπτωση), ο αλγόριθμος επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ.

```
Bellman-Ford(G, w, s)
1  Αρχικες Τιμες Διαδρομων Κοινης Αφετηριας(G, s)
2  για i = 1 έως |G.V| − 1
3          για κάθε ακμή (u, v) ∈ G.E
4                  Χαλαρωση(u, v, w)
5  για κάθε ακμή (u, v) ∈ G.E
6          αν v.d > u.d + w(u, v)
7                  επιστροφή ΨΕΥΔΕΣ
8  επιστροφή ΑΛΗΘΕΣ
```

Στο Σχήμα 24.4 βλέπουμε τη λειτουργία του αλγορίθμου σε ένα γράφημα με 5 κόμβους. Μετά την απόδοση αρχικών τιμών στα πεδία d και π όλων των κόμβων στη γραμμή 1, ο αλγόριθμος διατρέχει τις ακμές του γραφήματος $|V| - 1$ φορές. Κάθε τέτοια διέλευση αντιπροσωπεύει μία επανάληψη του βρόχου για στις γραμμές 2–4 και συνίσταται στην εκτέλεση μίας πράξης χαλάρωσης σε κάθε ακμή. Στα Σχήματα 24.4(β)–(ε) αναπαρίσταται η κατάσταση του αλγορίθμου μετά από καθε-



Σχήμα 24.4 Η λειτουργία του αλγορίθμου των Bellman-Ford. Ο αφετηριακός κόμβος είναι ο s. Εντός των κόμβων αναγράφονται οι τιμές των αντίστοιχων πεδίων d, ενώ οι σκιασμένες ακμές υποδεικνύουν τιμές του πεδίου προκατόχου: εάν η ακμή (u, v) είναι σκιασμένη, τότε $v.\pi = u$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η σειρά με την οποία εκτελούνται οι πράξεις χαλάρωσης στις ακμές είναι $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$. (α) Η κατάσταση του γραφήματος αμέσως πριν από την πρώτη διέλευση των ακμών. (β)–(ε) Η κατάσταση του γραφήματος μετά από κάθε διαδοχική διέλευση των ακμών. Οι τιμές των πεδίων d και π στο σχήμα (ε) είναι οι τελικές. Στο παράδειγμα αυτό, ο αλγόριθμος των Bellman-Ford επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ.

μία από τις τέσσερεις διελεύσεις των ακμών. Αφού ολοκληρωθούν οι $|V| - 1$ διελεύσεις, ο αλγόριθμος ελέγχει εάν υπάρχει κάποιος κύκλος αρνητικού βάρους στις γραμμές 5–8 και επιστρέφει την ενδεδειγμένη τιμή λογικού τύπου. (Η ορθότητα αυτού του ελέγχου αποδεικνύεται παρακάτω.)

Ο αλγόριθμος των Bellman-Ford έχει χρόνο εκτέλεσης $O(VE)$, δεδομένου ότι η απόδοση αρχικών τιμών στη γραμμή 1 απαιτεί χρόνο $\Theta(V)$, καθεμία από τις $|V|-1$ διελεύσεις των ακμών στις γραμμές 2–4 απαιτεί χρόνο $\Theta(E)$, και ο βρόχος για στις γραμμές 5–7 απαιτεί χρόνο $O(E)$.

Για να αποδείξουμε την ορθότητα του αλγορίθμου, θα δείξουμε κατ' αρχάς ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχουν κύκλοι αρνητικού βάρους, ο αλγόριθμος υπολογίζει τα σωστά βάρη συντομότατων διαδρομών για όλους τους κόμβους που είναι προσπελάσιμοι από την αφετηρία.

Λήμμα 24.2

Έστω $G = (V, E)$ εμβαρές, κατευθυντό γράφημα με αφετηριακό κόμβο s και συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbf{R}$, και ας υποθέσουμε ότι το G δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον s. Στην περίπτωση αυτή, μετά από $|V| - 1$ επαναλήψεις του βρόχου **για** στις γραμμές 2–4 της διαδικασίας BELLMAN-FORD, ισχύει ότι $v.d = \delta(s, v)$ για όλους τους κόμβους v που είναι προσπελάσιμοι από τον s.

Απόδειξη Η απόδειξη του λήμματος βασίζεται στην ιδιότητα χαλάρωσης διαδρομής. Θεωρήστε οποιονδήποτε κόμβο v που είναι προσπελάσιμος από τον s, και έστω $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, όπου $v_0 = s$ και $v_k = v$, οποιαδήποτε συντομότατη διαδρομή από τον s μέχρι τον v. Αφού οι συντομότατες διαδρομές είναι απλές, η p αποτελείται από το πολύ $|V| - 1$ ακμές, και επομένως $k \le |V| - 1$. Σε καθεμία από τις $|V| - 1$ επαναλήψεις του βρόχου για στις γραμμές 2–4 εκτελούνται πράξεις χαλάρωσης και στις $|E|$ ακμές. Μία εκ των ακμών που υφίστανται χαλάρωση στην i-οστή επανάληψη, για $i = 1, 2, \ldots, k$, είναι και η (v_{i-1}, v_i). Άρα, σύμφωνα με την ιδιότητα χαλάρωσης διαδρομής, έχουμε $v.d = v_k.d = \delta(s, v_k) = \delta(s, v)$. ■

Πόρισμα 24.3

Έστω $G = (V, E)$ εμβαρές, κατευθυντό γράφημα με αφετηριακό κόμβο s και συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbf{R}$. Στην περίπτωση αυτή, για κάθε κόμβο $v \in V$, υπάρχει μια διαδρομή από τον s μέχρι τον v εάν και μόνο εάν κατά τον τερματισμό της διαδικασίας BELLMAN-FORD με είσοδο το γράφημα G ισχύει ότι $v.d < \infty$.

Απόδειξη Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη (Άσκηση 24.1-2). Σημειωτέον ότι το πόρισμα αυτό επιτρέπει να υπάρχουν στο G κύκλοι αρνητικού βάρους προσπελάσιμοι από τον s, ενώ το Λήμμα 24.2 δεν το επιτρέπει. ■

Θεώρημα 24.4 (Ορθότητα του αλγορίθμου των Bellman-Ford)

Έστω ότι εκτελούμε τη διαδικασία BELLMAN-FORD σε εμβαρές, κατευθυντό γράφημα $G = (V, E)$ με αφετηριακό κόμβο s και συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbf{R}$. Εάν το G δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον κόμβο s, τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ, ενώ ισχύει επίσης ότι $v.d = \delta(s, v)$ για όλους τους κόμβους $v \in V$, και ότι το υπογράφημα προκατόχων G_π αποτελεί δένδρο συντομότατων διαδρομών με ρίζα τον s. Εάν το G περιέχει κάποιον κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον s, ο αλγόριθμος επιστρέφει ΨΕΥΔΕΣ.

Απόδειξη Έστω ότι το G δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον αφετηριακό κόμβο s. Θα αποδείξουμε κατ' αρχάς ότι κατά τον τερματισμό ισχύει ότι $v.d = \delta(s, v)$ για όλους τους κόμβους $v \in V$. Εάν ο κόμβος v είναι προσπελάσιμος από τον s, τότε ο ισχυρισμός αυτός έπεται από το Λήμμα 24.2. Εάν ο v δεν είναι προσπελάσιμος από τον s, τότε ο ισχυρισμός έπεται από την ιδιότητα ανυπαρξίας διαδρομής. Περαιτέρω, η ιδιότητα υπογραφήματος προκατόχων, σε συνδυασμό με την πρόταση που μόλις αποδείξαμε, συνεπάγεται ότι το G_π αποτελεί δένδρο συντομότατων διαδρομών. Στη συνέχεια, θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας και πάλι την παραπάνω πρόταση, ότι η διαδικασία BELLMAN-FORD επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ. Κατά τον τερματισμό της διαδικασίας, έχουμε για όλες τις ακμές $(u, v) \in E$ ότι

$$\begin{aligned} v.d &= \delta(s, v) \\ &\le \delta(s, u) + w(u, v) \quad \text{(από την τριγωνική ανισότητα)} \\ &= u.d + w(u, v)\,, \end{aligned}$$

και συνεπώς η συνθήκη ελέγχου της γραμμής 6 δεν ικανοποιείται για καμία ακμή. Επομένως, η διαδικασία BELLMAN-FORD είναι αδύνατον να επιστρέψει ΨΕΥΔΕΣ, και άρα επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το γράφημα G περιέχει κάποιον κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον αφετηριακό κόμβο s. Έστω $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ ο κύκλος αυτός, όπου $v_0 = v_k$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0 \,. \tag{24.1}$$

Ας υποθέσουμε, αντίθετα προς το αποδεικτέο, ότι ο αλγόριθμος των Bellman-Ford επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι $v_i.d \le v_{i-1}.d + w(v_{i-1}, v_i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Αθροίζοντας τις ανισότητες για όλους τους κόμβους κατά μήκος του κύκλου c έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} v_i.d &\le \sum_{i=1}^{k} (v_{i-1}.d + w(v_{i-1}, v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \,. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $v_0 = v_k$, κάθε κόμβος του κύκλου c εμφανίζεται ακριβώς μία φορά σε καθένα από τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{k} v_i.d$ και $\sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d$, και συνεπώς

$$\sum_{i=1}^{k} v_i.d = \sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d \,.$$

Επιπλέον, σύμφωνα με το Πόρισμα 24.3, η ποσότητα $v_i.d$ είναι πεπερασμένη για $i = 1, 2, \ldots, k$. Επομένως,

$$0 \le \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \,,$$

το οποίο αντιβαίνει προς την ανισότητα (24.1). Κατά συνέπεια, ο αλγόριθμος των Bellman-Ford επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ εάν το γράφημα G δεν περιέχει κανέναν κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον αφετηριακό κόμβο, και ΨΕΥΔΕΣ στην αντίθετη περίπτωση. ∎

Ασκήσεις

24.1-1

Εκτελέστε τον αλγόριθμο των Bellman-Ford στο κατευθυντό γράφημα του Σχήματος 24.4, χρησιμοποιώντας ως αφετηριακό κόμβο τον z. Σε όλες τις διελεύσεις, εκτελέστε τις πράξεις χαλάρωσης ακμών με τη σειρά που υποδεικνύεται στο σχήμα, και προσδιορίστε τις τιμές των πεδίων d και π μετά από κάθε διέλευση. Στη συνέχεια, θέστε το βάρος της ακμής (z, x) ίσο με 4 και επαναλάβετε την εκτέλεση του αλγορίθμου, χρησιμοποιώντας ως αφετηριακό κόμβο τον s.

24.1-2

Αποδείξτε το Πόρισμα 24.3.