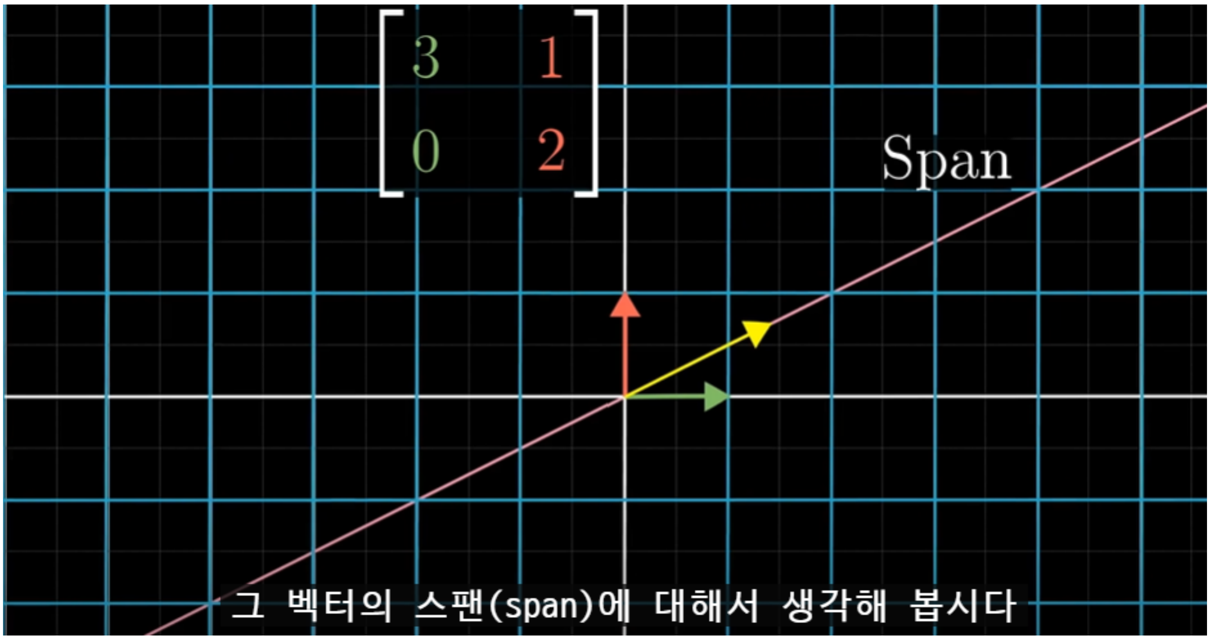
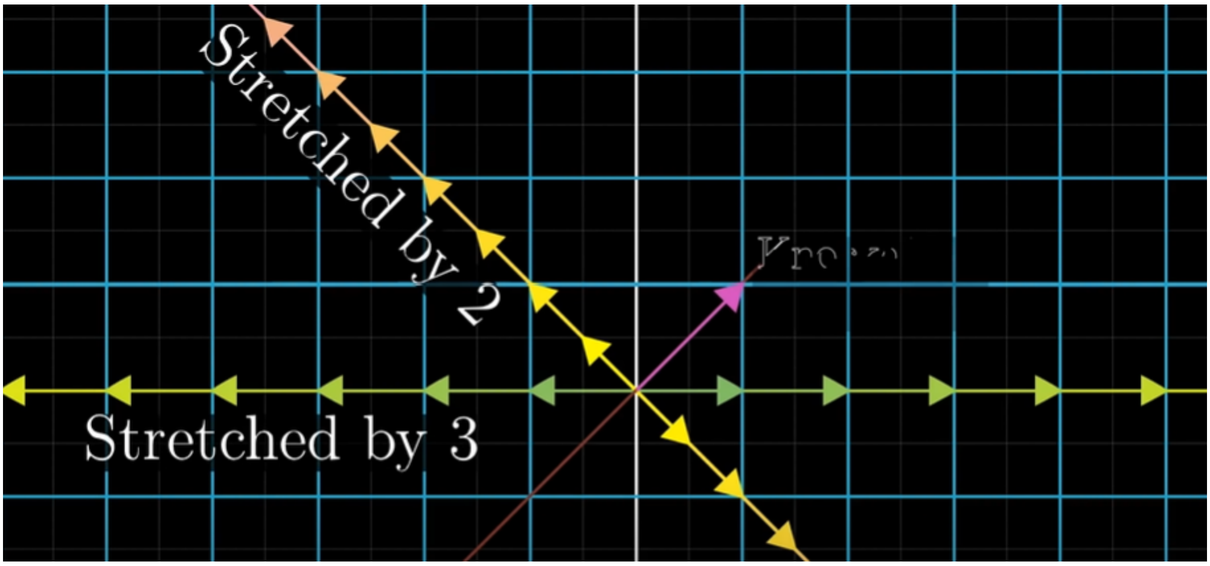
chapter 14

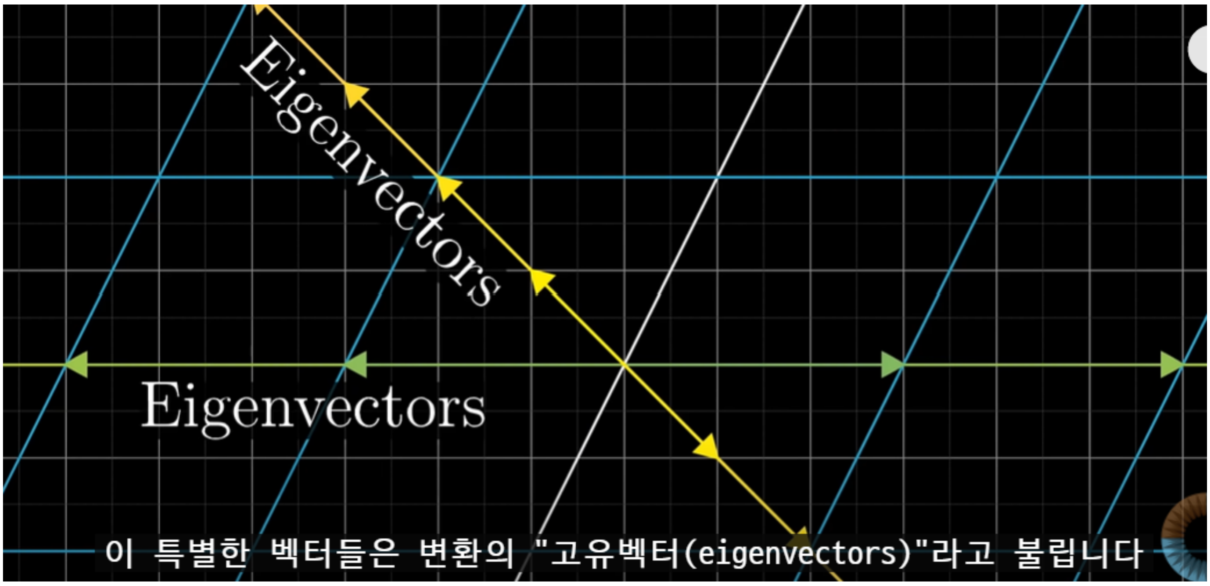
고유벡터와 고유값(Eigenvectors and Eigenvalues)



- 보통 선형변환을 진행시에 특정 벡터의 스팬을 벗어난다!

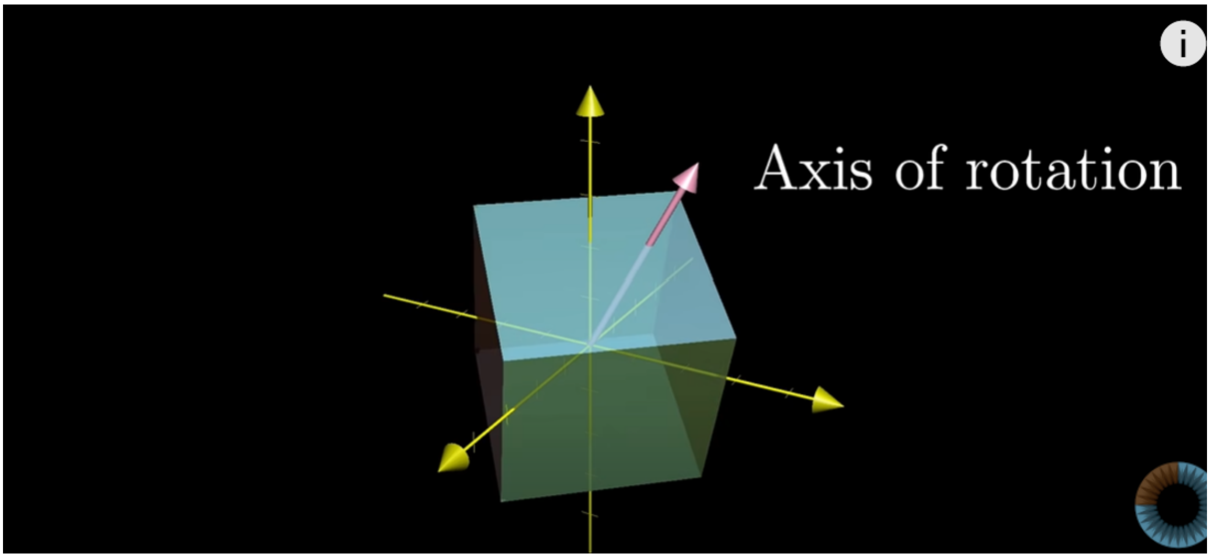


- 그림의 노란 선과 초록 선을 제외하고는 변환 도중 다른 벡터로 변환하고 스팬하는 선위를 벗어난다!



따라서 이러한 독특한 벡터들을 고유 벡터라 부른다.

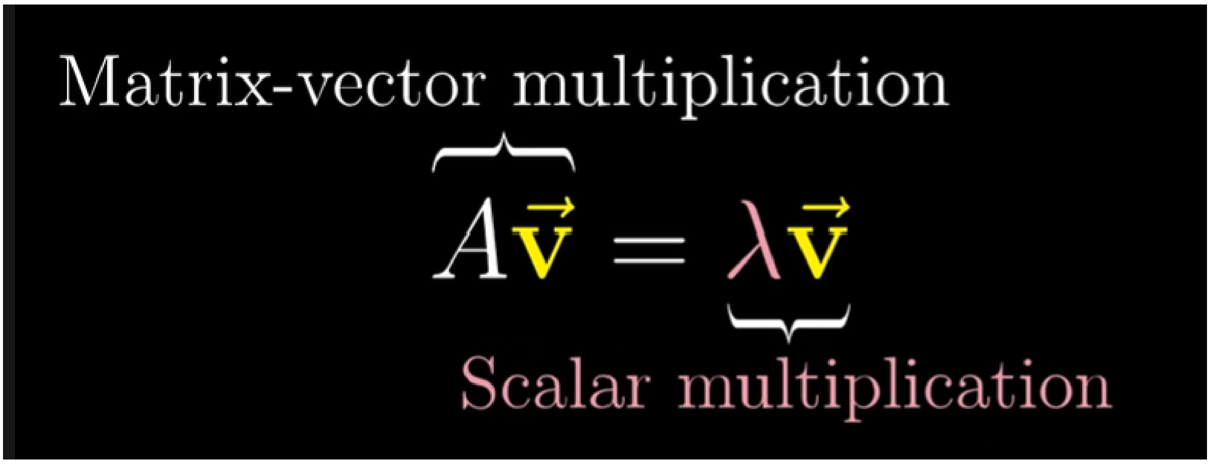
3차원 공간에서의 스팬은 무슨 의미를 가질까?



2차원 공간에서의 스팬 → 3차원 공간에서의 회전축을 의미한다.

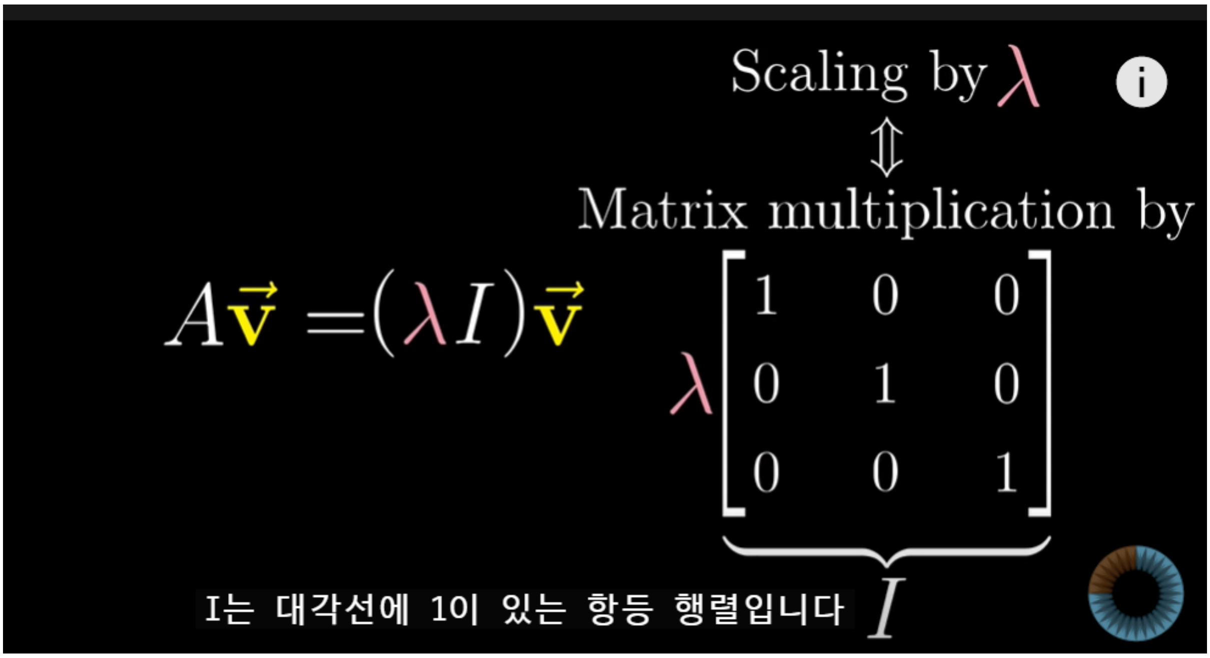
이러한 상황에서 고유값은 벡터의 크기는 변하지 않고 회전만 하므로 Eigenvalue = 1이다.

고유값과 고유벡터의 의미에 대해 살펴보자!

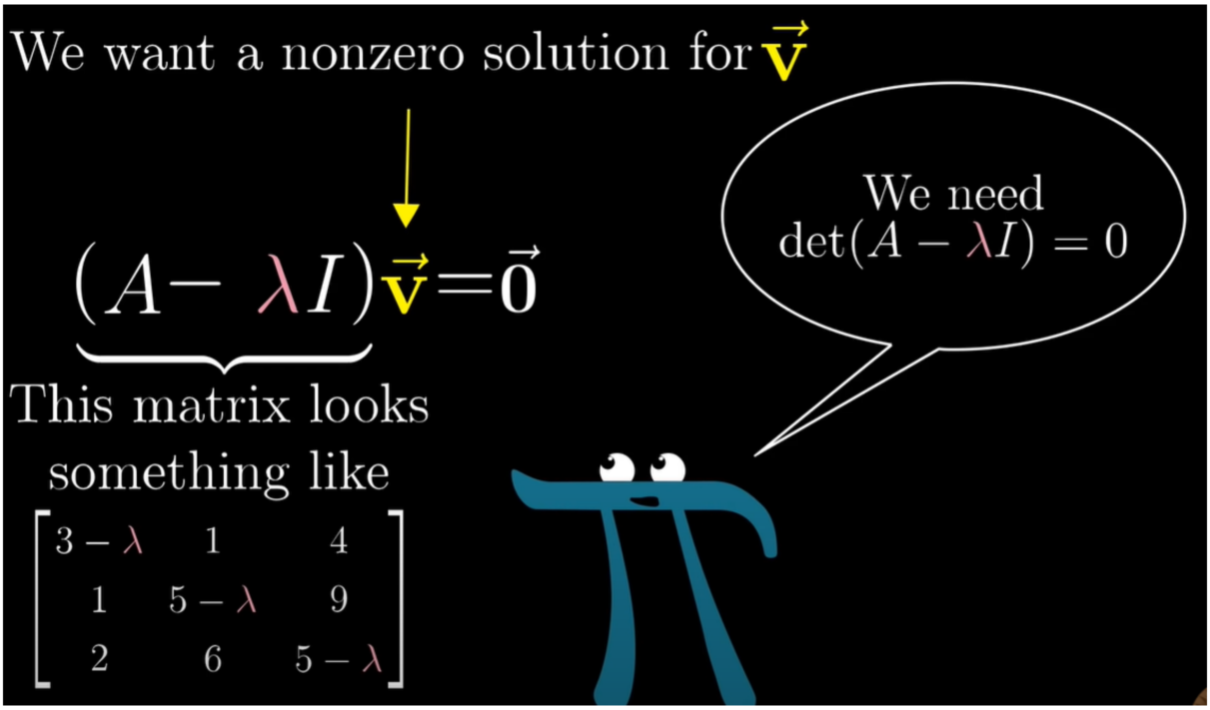


- 고유벡터 v를 임의의 상수 람다로 스케일링한 결과와 A벡터와 고유벡터 v의 곱이 같다.
- 즉 이는 고유벡터와 고유값을 구한다는 의미는 이 공식이 참이되는 값을 찾는다는 의미이다

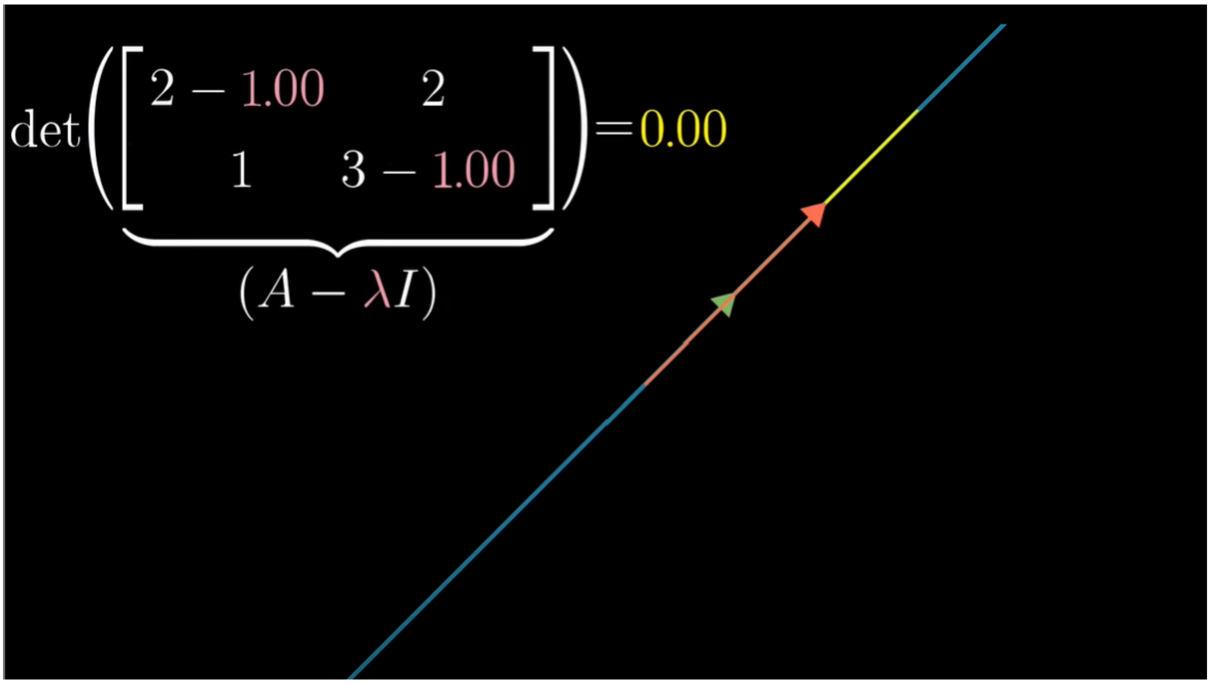
계산해보자!



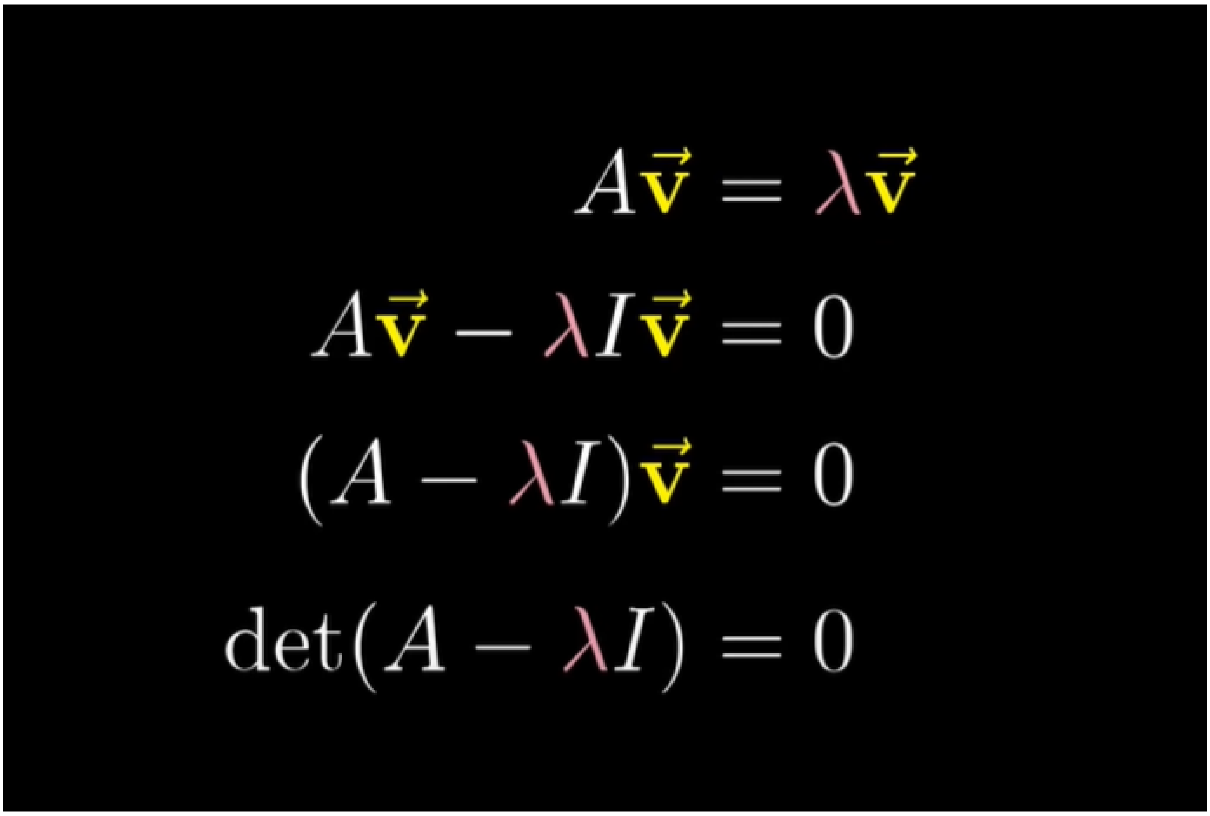
- 우항의 스칼라 값은 해당 항등 행렬의 정수 스칼라배로 나타낼수 있다.
- 이제 모든 항이 벡터의 꼴로 나타내어졌으므로 간단하게 정리가 가능하다.



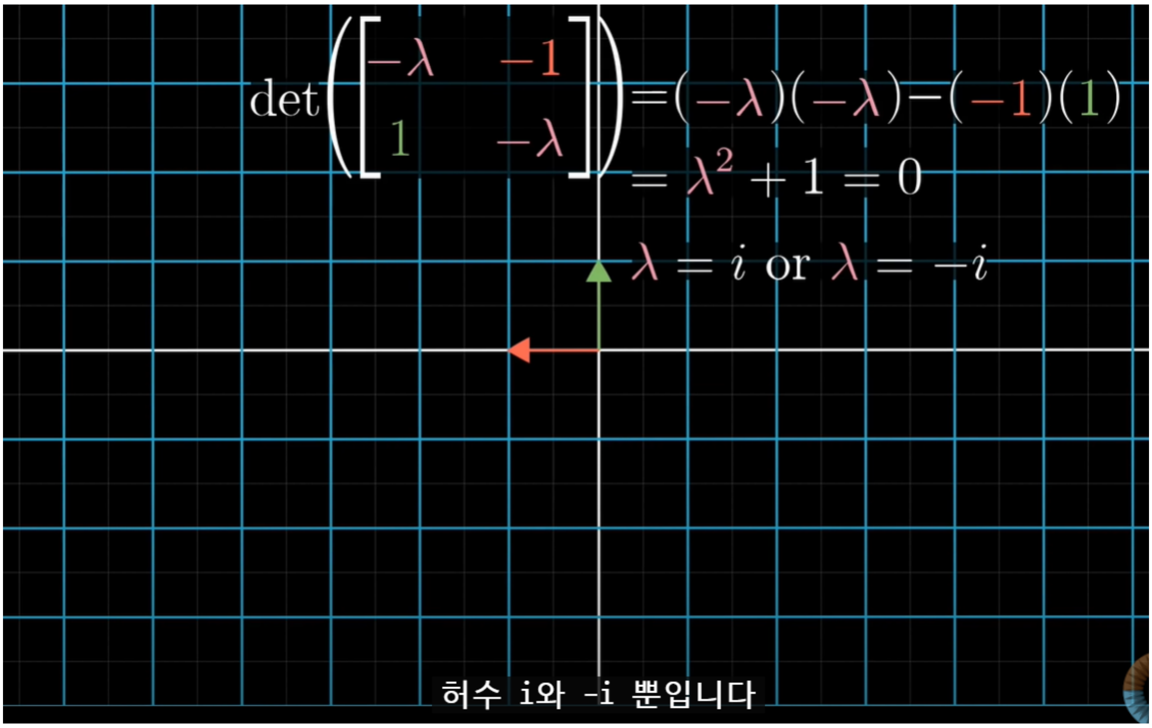
- DET를 이용하여 구하는데 람다값의 따라 행렬이 변환되는데 공간의 차수를 낮추는 람다를 구한다 생각하면 편하다!(왜냐면 DET가 0이면 차원을 낮춘다는 의미이기 때문이다!)
- EX) DET() = 0의 의미



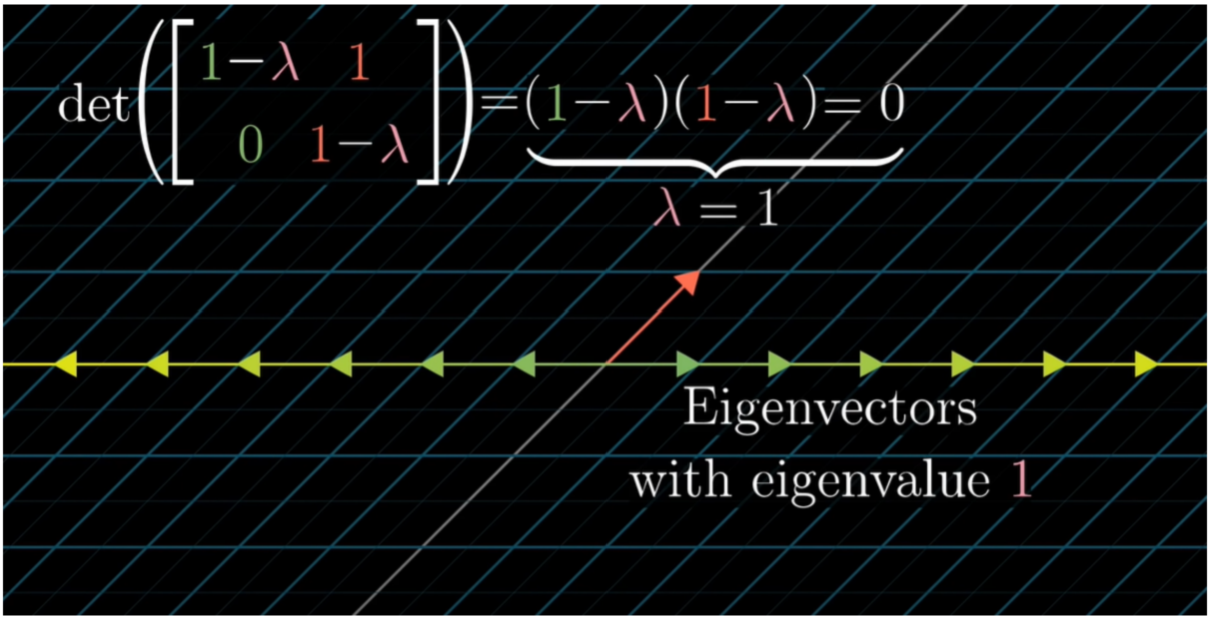
- 요약하자면 아래와 같다!(고유값과 고유벡터란 행렬A의 스팬을 변화시키지 않는 특정 행렬과 스칼라값이다!)



- 2D 변환은 고유벡터가 무조건 존재하지 않습니다.
- EX) **90도 변환은** 모든 벡터가 자기 스팬을 벗어납니다!

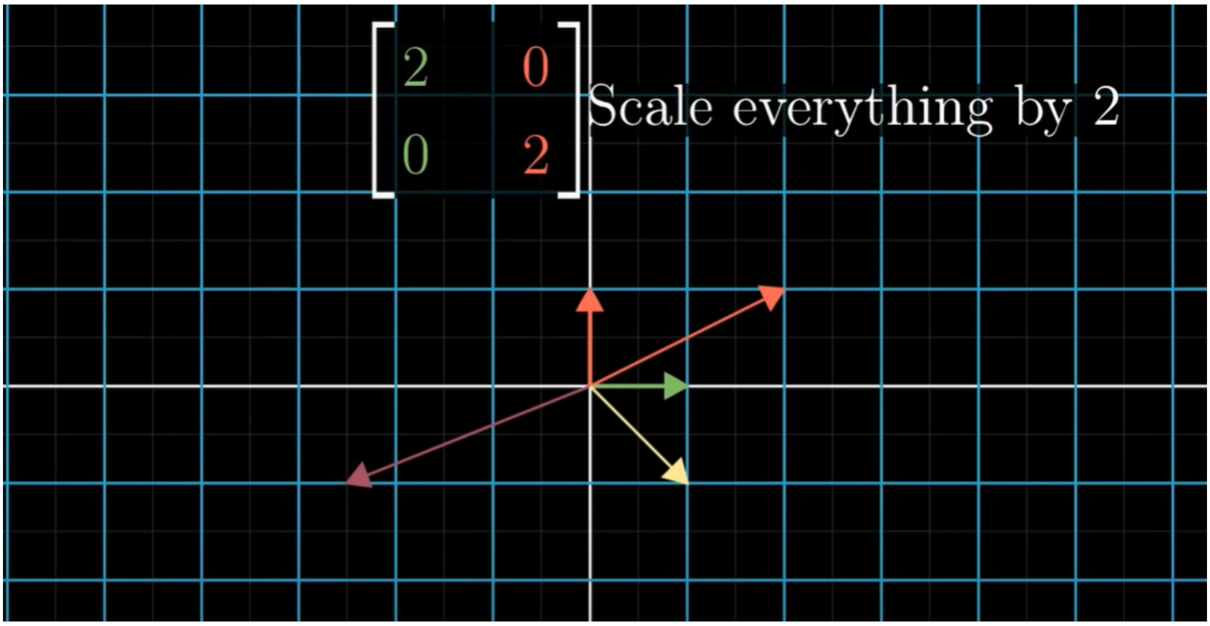


- SHEAR 벡터 변환



- 무조건 고유값 1을 가진다
- 즉 모든 고유벡터는 고유값 1을 가진다는 것을 알아낸 사실과 일치함!

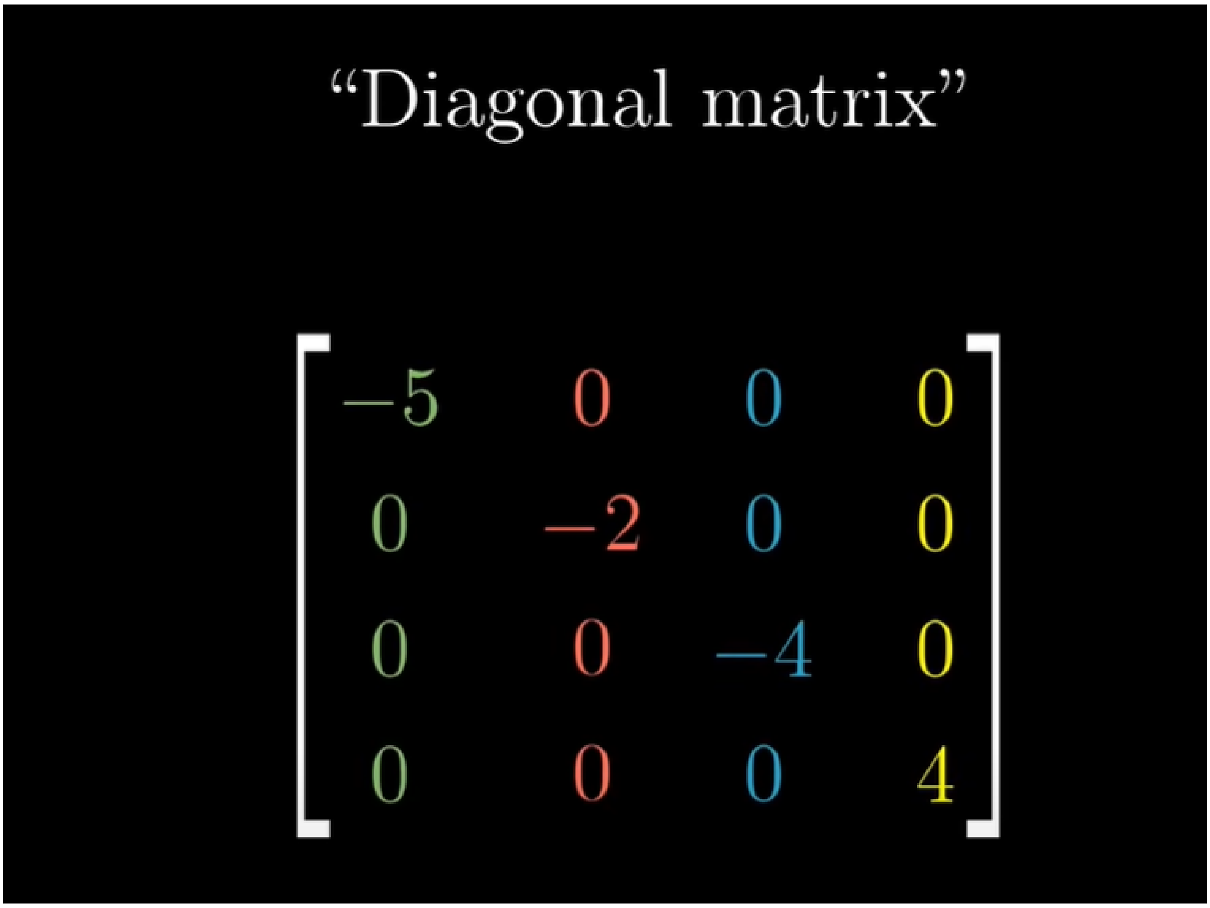
하나의 고유값을 가지면서 다양한 고유벡터들을 가질 수 있음!!



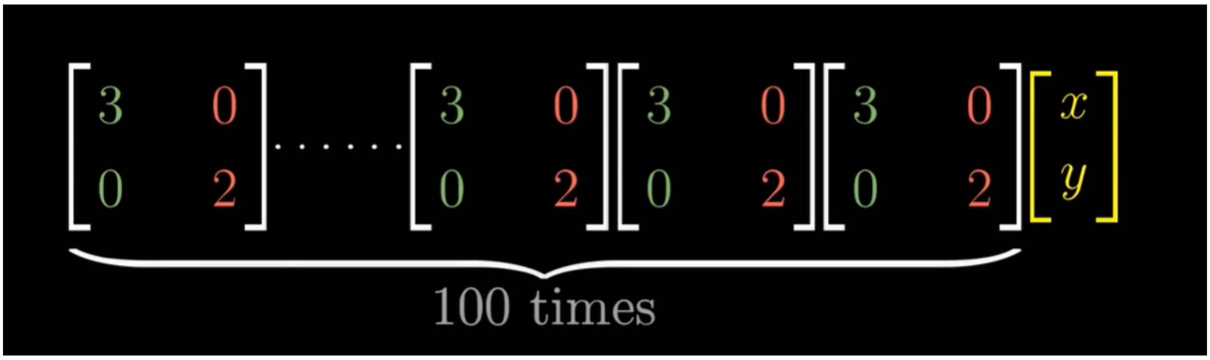
위와 같은 스칼라배 벡터의 경우 고유값은 2뿐이지만 평면 상의 모든 벡터는 고유벡터가 된다!

Eigen basis(고유 기저)

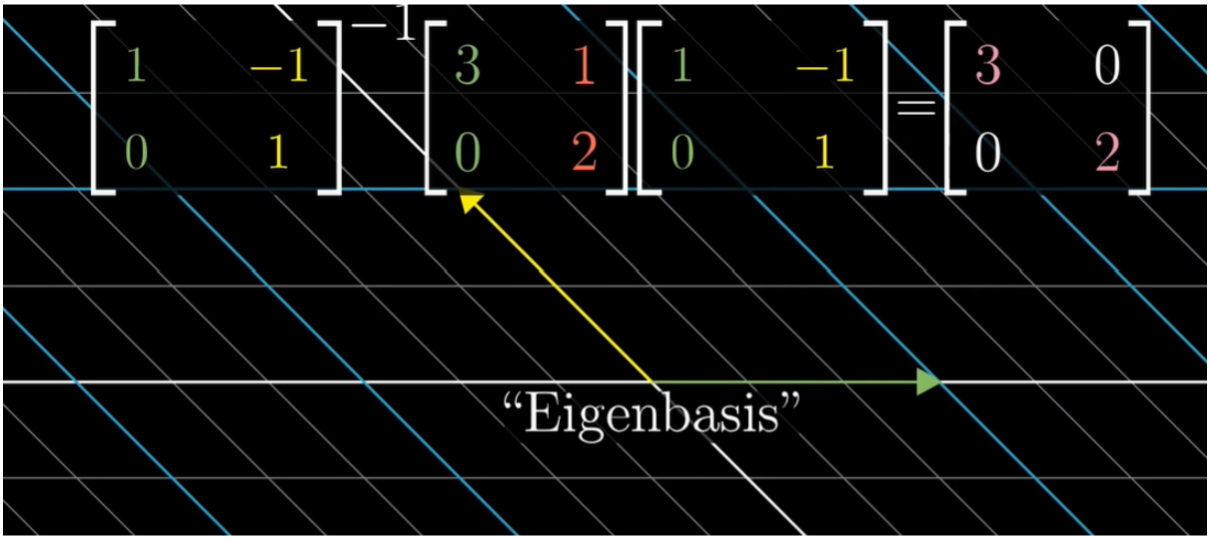
- 대각 행렬의 특징



1. 모든 기저벡터는 고유벡터이다.
2. 대각선의 값들은 고유값이 된다.
3. 여러번 계산시 계산하기가 편함!



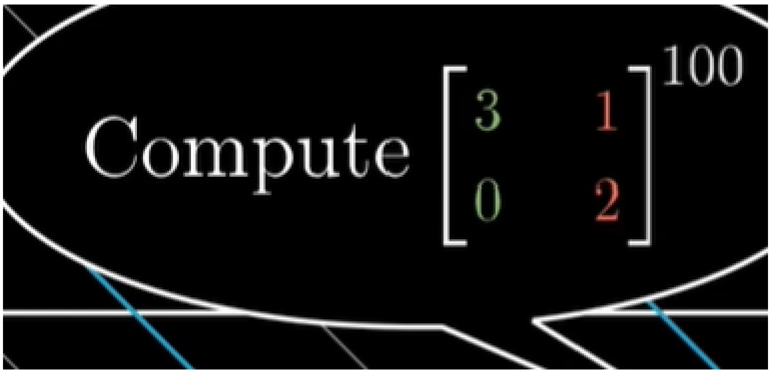
- 그렇다면 위와 같은 상황은 예외라 편하고 일반적인 행렬상황에서 고유벡터를 기저벡터로 변환시키면 어떨까?(그전의 챕터에서 변환하는법을 배움)



위와 같은 변환을 거쳐 오른쪽의 고유 기저를 얻을수 있음!

그렇다면 이게 무슨 의미를 가질까?

→ 계산식을 간편하게 해줌



해당 식을 계산시에 우선 기저 기저의 곱을 계산하고 이를 다시 변환하면 쉬움!

- 하지만 모든 벡터가 고유 기저를 가지진 않음!

QUIZ

Take the following matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Start computing its first few powers by hand: A^2, A^3, etc. What pattern do you see? Can you explain why this pattern shows up? This might make you curious to know if there's an efficient way to compute arbitrary powers of this matrix, A^n for any number n.

Given that two eigenvectors of this matrix are

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

see if you can figure out a way to compute A^n by first changing to an eigenbasis, compute the new representation of A^n in that basis, then converting back to our standard basis. What does this formula tell you?