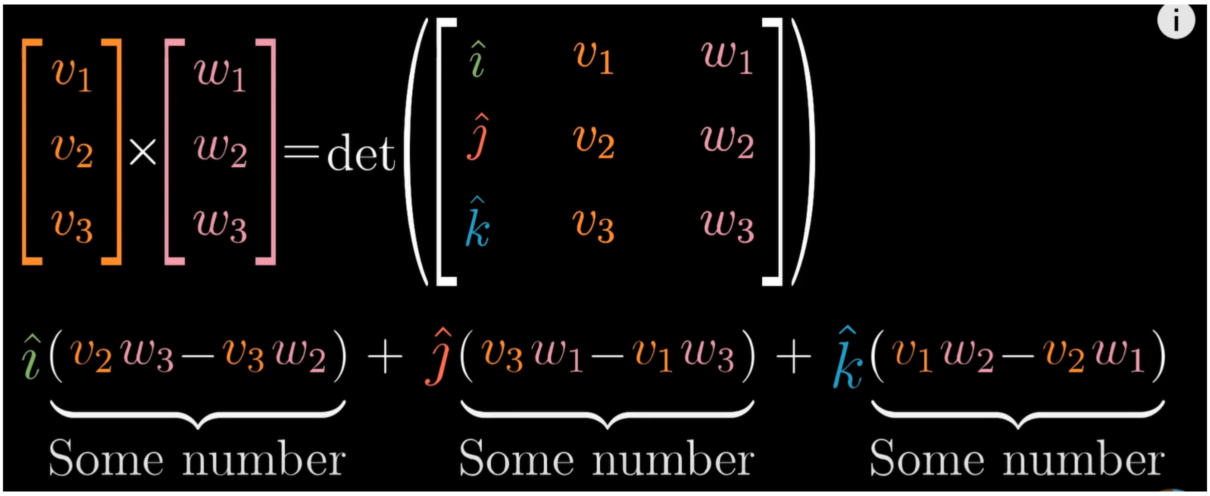
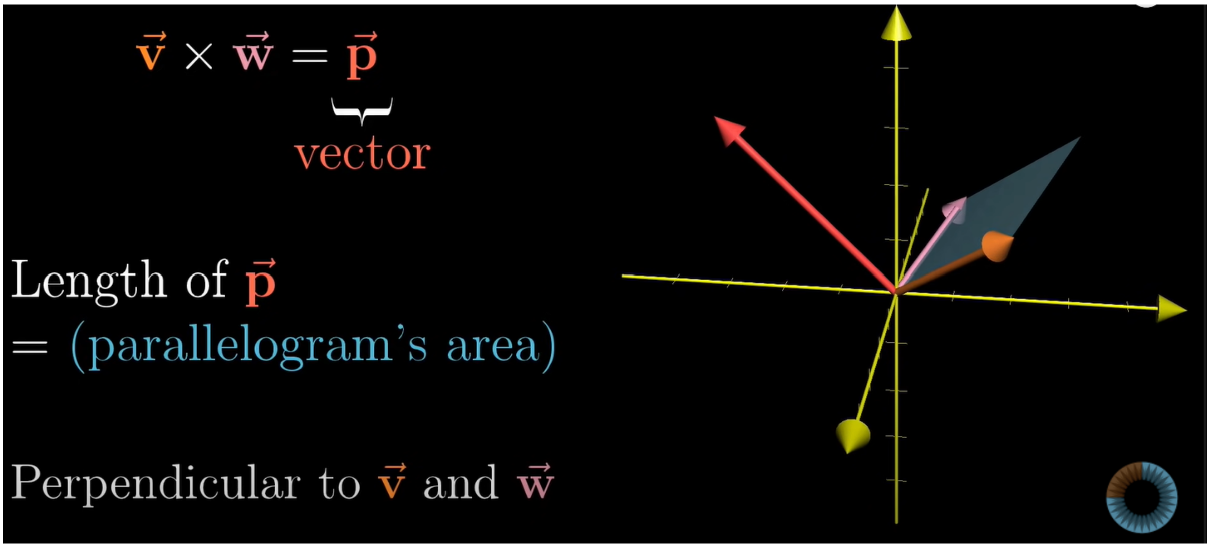
Chapter 11

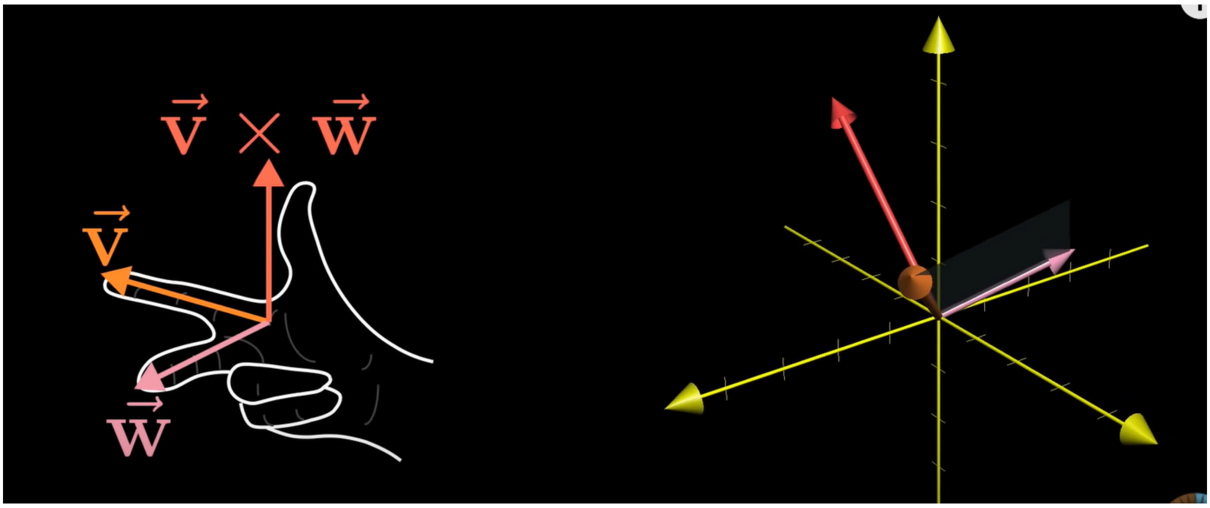
chapter 10 복습



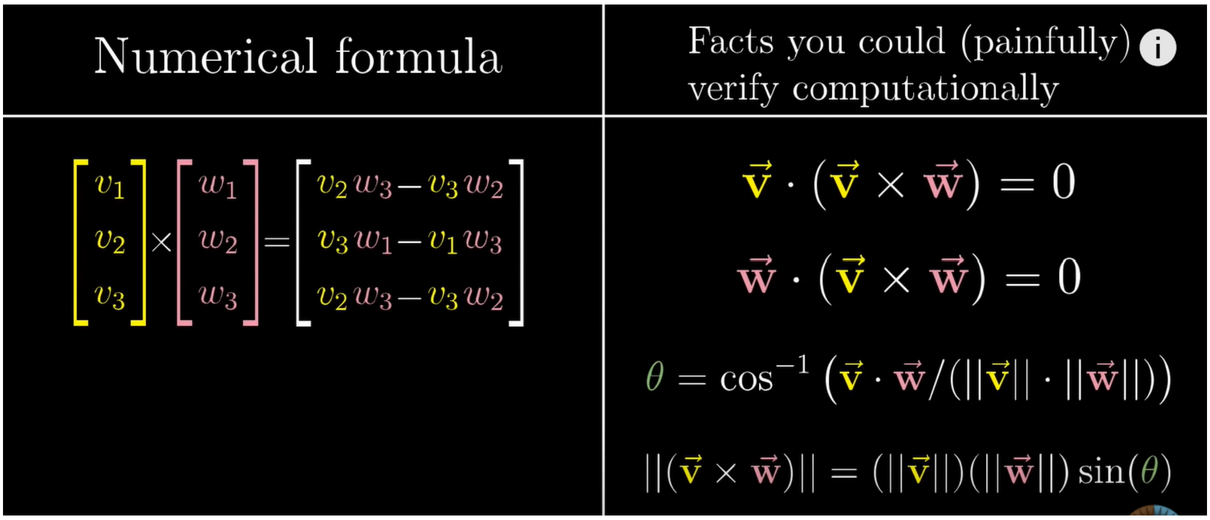
- 3차원 공간에서 평행사변형의 넓이는 두 벡터의 길이를 의미 방향은 아래 법칙을 통해 찾을 수 있음



- <외적의 3차원 방향 오른손 법칙>

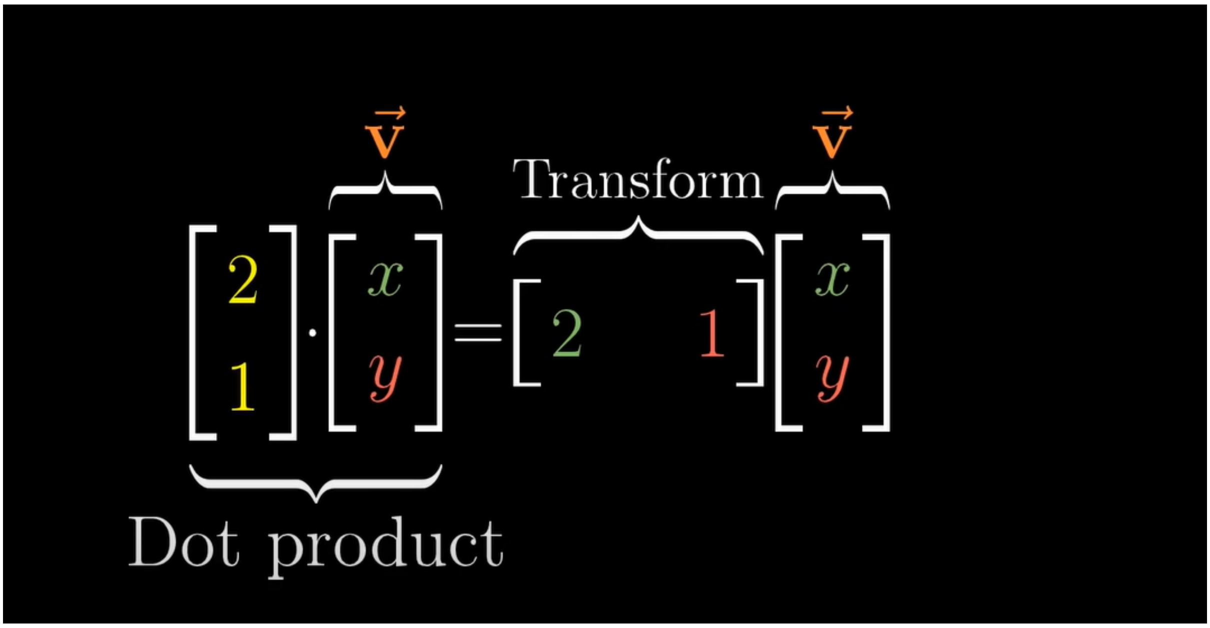


수치적 증명



Numerical formula	Facts you could (painfully) verify computationally
$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_2 w_3 - v_3 w_2 \end{bmatrix}$	$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ $\theta = \cos^{-1}\left(\vec{v} \cdot \vec{w} / (\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|)\right)$ $\|(\vec{v} \times \vec{w})\| = (\|\vec{v}\|)(\|\vec{w}\|)\sin(\theta)$

기하학적 증명

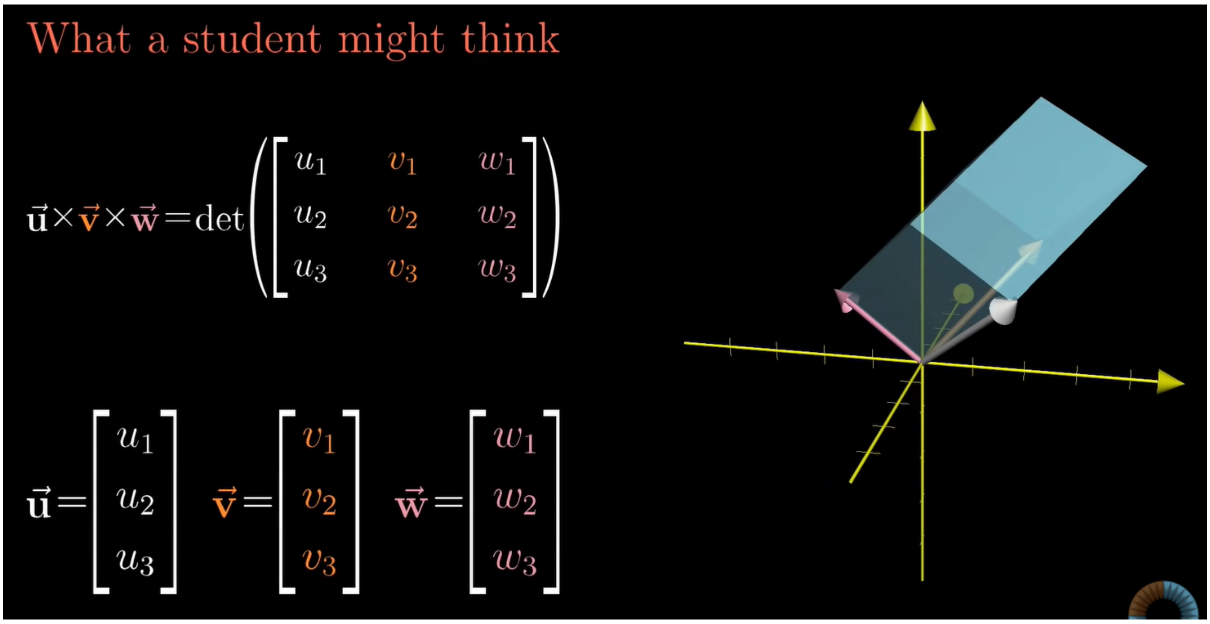


우리는 해당 연산이 7장에서 dual 이라는 이중성으로 인해 성립됨을 살펴보았다.

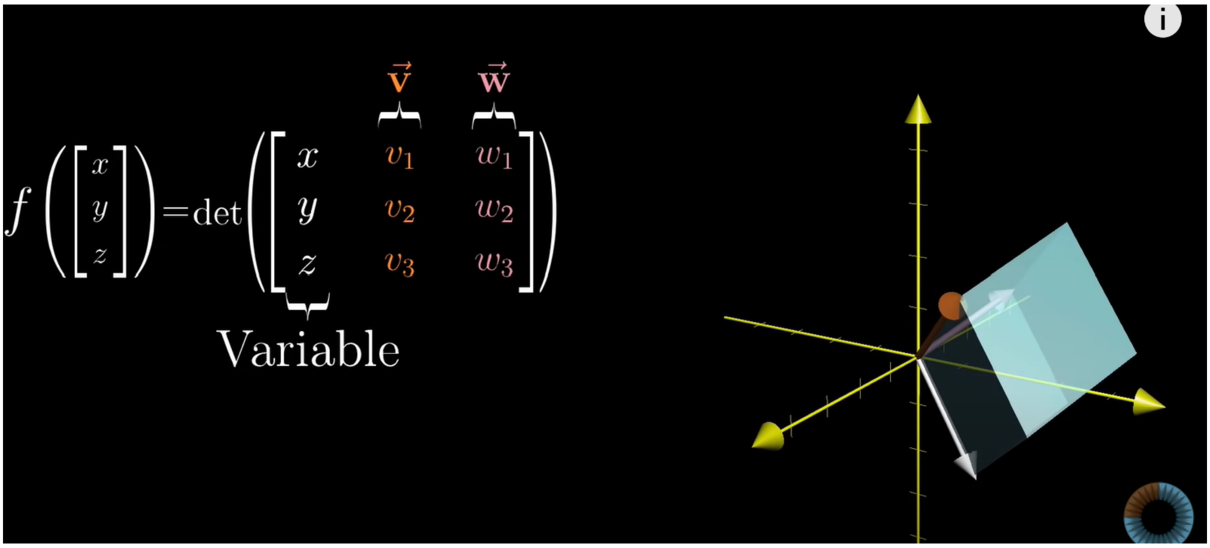
방법(Plan)

1. 3차원에서 수선으로의 선형변환을 정의 한다.(벡터 v, w를 통해서)
2. 그 변환을 3D 공간에서의 "이중 벡터(Dual vector)로 연결시킨다.
3. dual 은 v와w의 내적이 될것이다.

3차원 공간에서의 행렬 공간을 아래와 같이 파악할수 있음



- 위의 행렬식은 사실 외적이 아니다

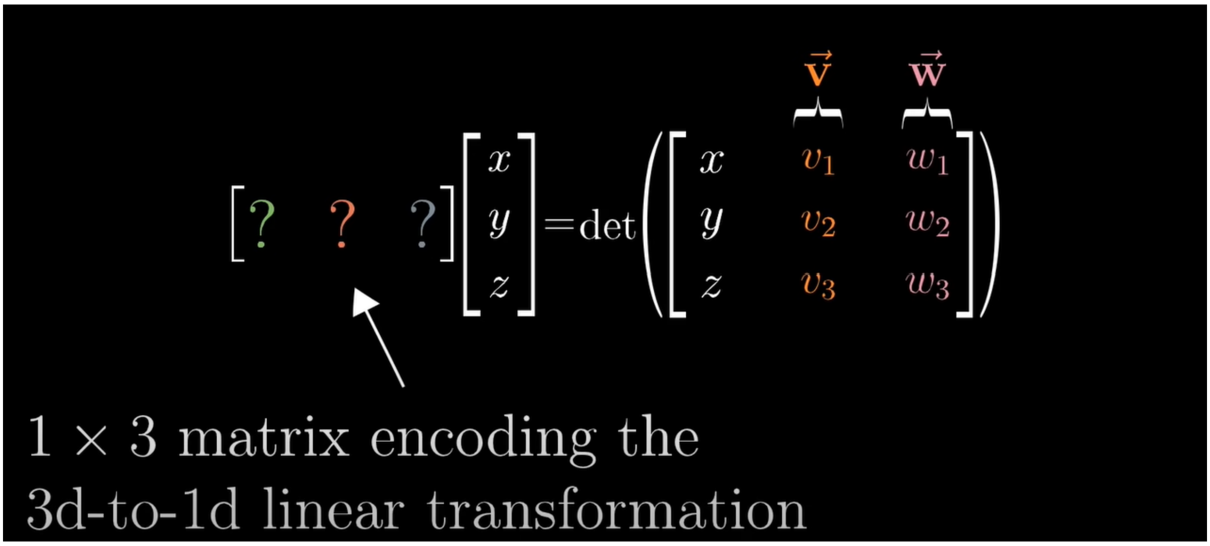


- 외적은 위와 같이 하나의 벡터를 미지수로 놓으면 성립이 되고 이를 하나의 함수로 볼수 있음! → v와 w에 의해 정의된 평행육면체!

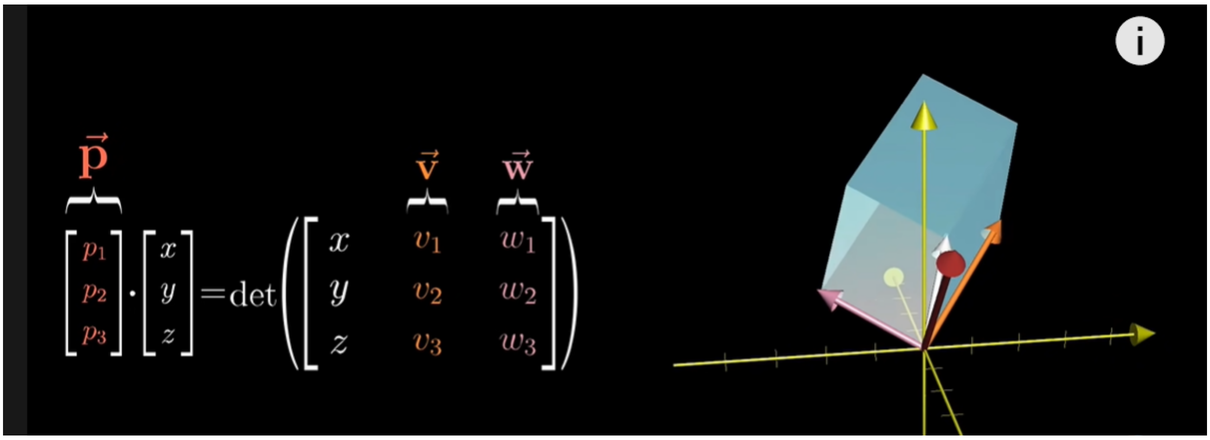
그런데 갑자기 이런식으로 외적을 정의하니 이상하게 느껴질것이다!(외적을 이해하는 열쇠)

- **사실 위의 함수는 선형적이다!**

→ 따라서 이중성(dual)을 생각해볼수 있다.



- 듀얼의 성질에 의해 아래와 같이 ?는 p벡터로 변환이 될수 있음!(인코딩-기호화 됨)



이를 조금더 일반화해보면 아래 그림과 같다

$$\overbrace{\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}}^{\vec{\mathbf{p}}}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\det\left(\begin{bmatrix}x & \overbrace{v_1}^{\vec{\mathbf{v}}} & \overbrace{w_1}^{\vec{\mathbf{w}}}\\ y & v_2 & w_2\\ z & v_3 & w_3\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} & x(v_2\cdot w_3-v_3\cdot w_2)+\\ p_1\cdot x+p_2\cdot y+p_3\cdot z= & \ y(v_3\cdot w_1-v_1\cdot w_3)+\\ & z(v_1\cdot w_2-v_2\cdot w_1)\end{aligned}$$

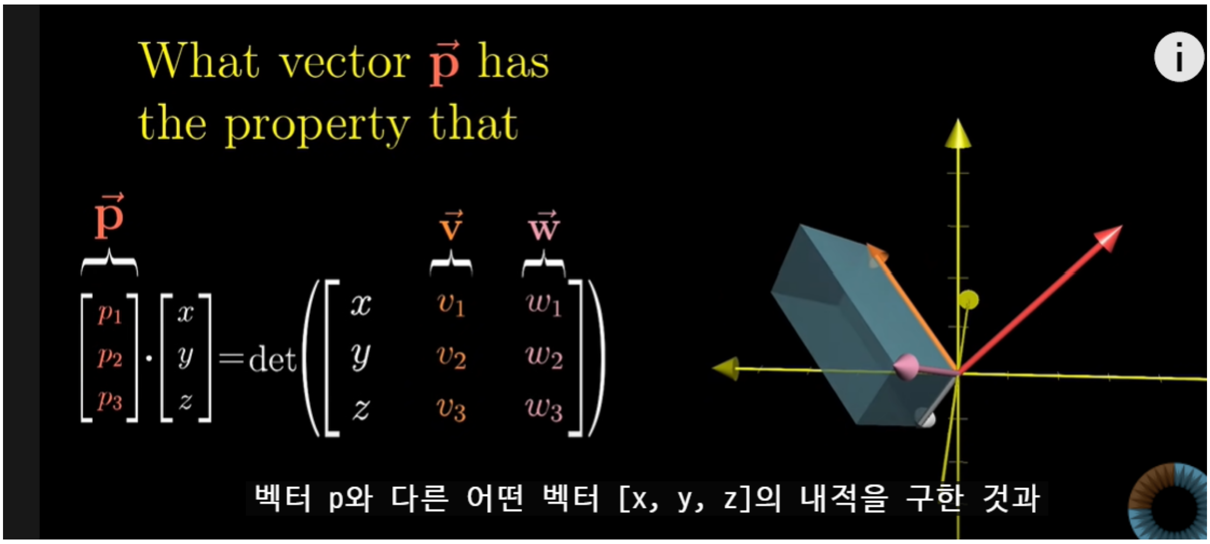
또한 p 벡터 역시 아래와 같이 정의됨

$$p_1=v_2\cdot w_3-v_3\cdot w_2$$

$$p_2=v_3\cdot w_1-v_1\cdot w_3$$

$$p_3=v_1\cdot w_2-v_2\cdot w_1$$

Question



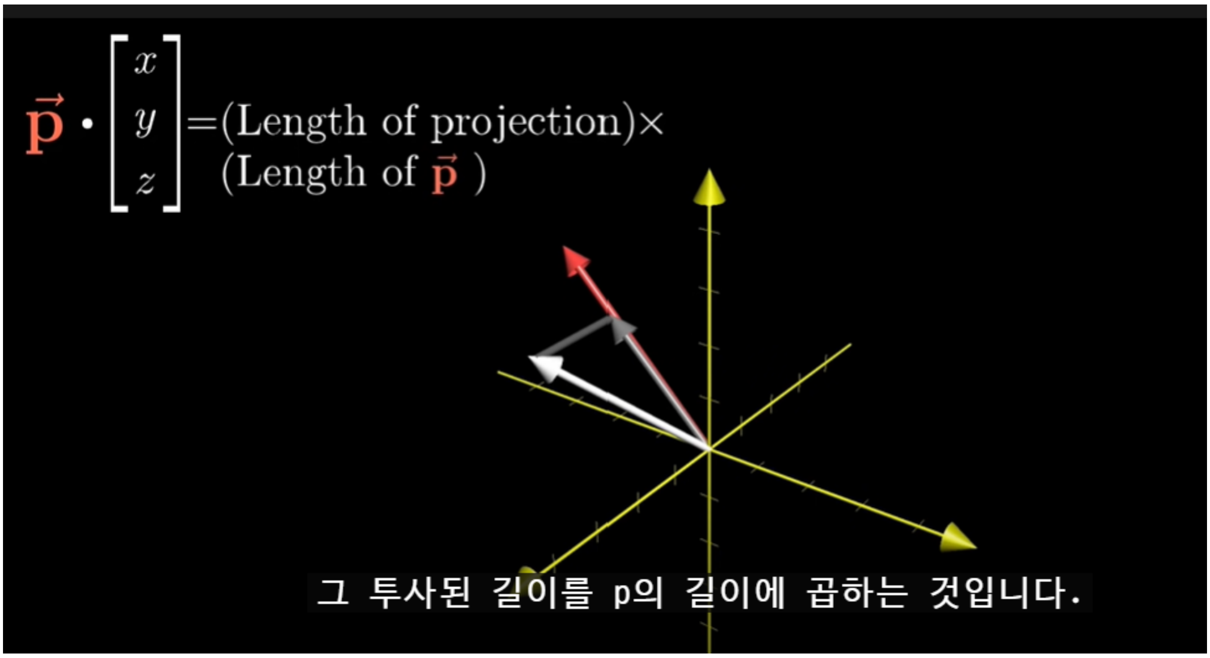
어떤 3D 벡터가 다음과 같은 속성을 가지는가?

벡터 p와 다른 어떤 벡터 [x, y, z]의 내적을 구한 것과 벡터 v, x [x,y,z]로 정의된 평행육면체 부피와 같아지는 벡터 p는 무엇인가?

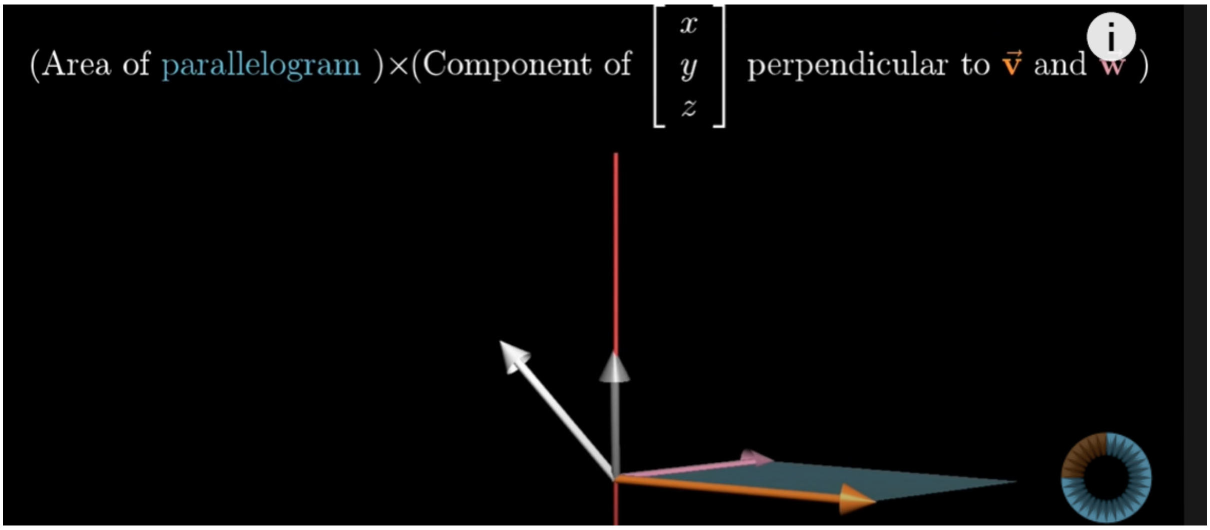
(수치적이 아닌 기하학적으로 계산해보시오)

Answer

- 좌항의 의미인 내적은 아래와 같이 길이 투영을 의미



우항의 의미



- 우선적으로 평행육면체의 넓이를 구하기 위해 v와 w의 평행사변형의 넓이를 구하고 [x,y,z]의 길이를 곱하는 것이 아닌 v와w의 수직인 벡터를 이용한다.(당연히 같은 길이)
- “[x, y, z], “v, w에 수직이면서 길이는 평행사변형의 면적인 벡터의 내적을 구하는 것과 같다.