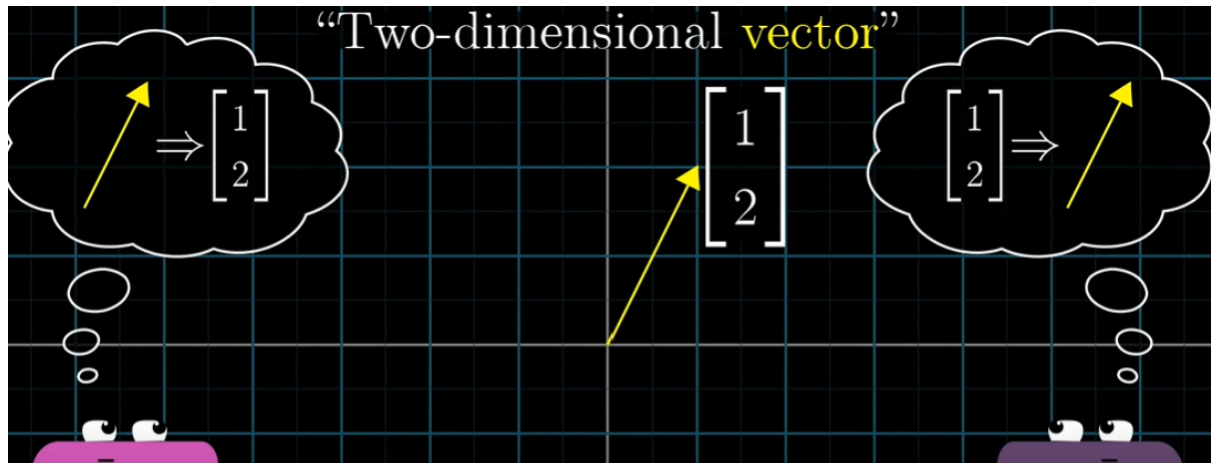


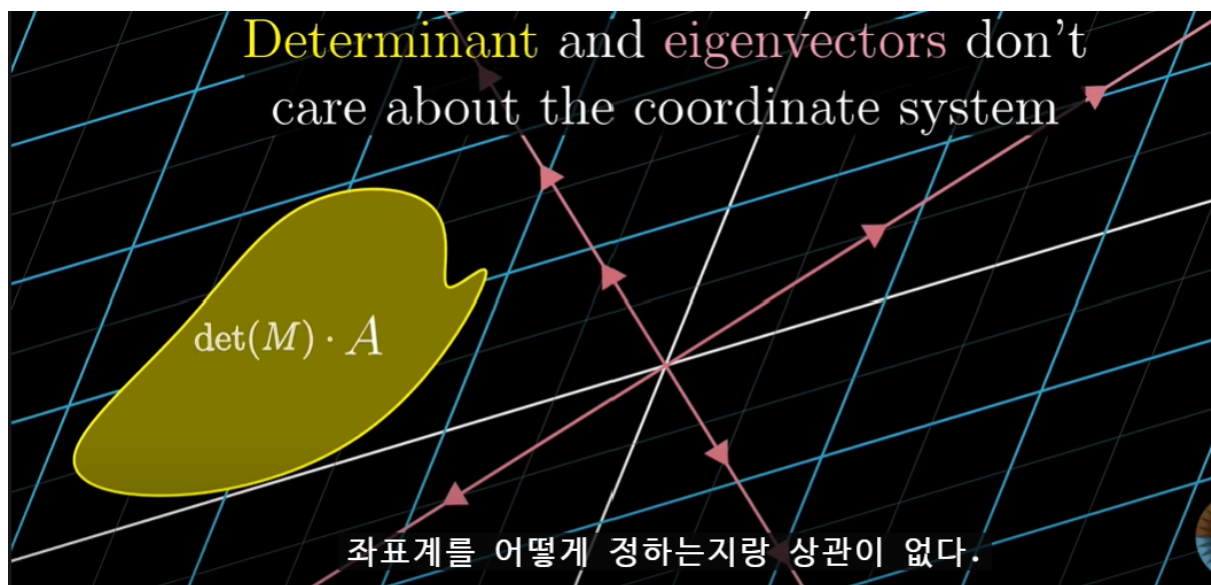
Chapter 16

Abstract vector spaces



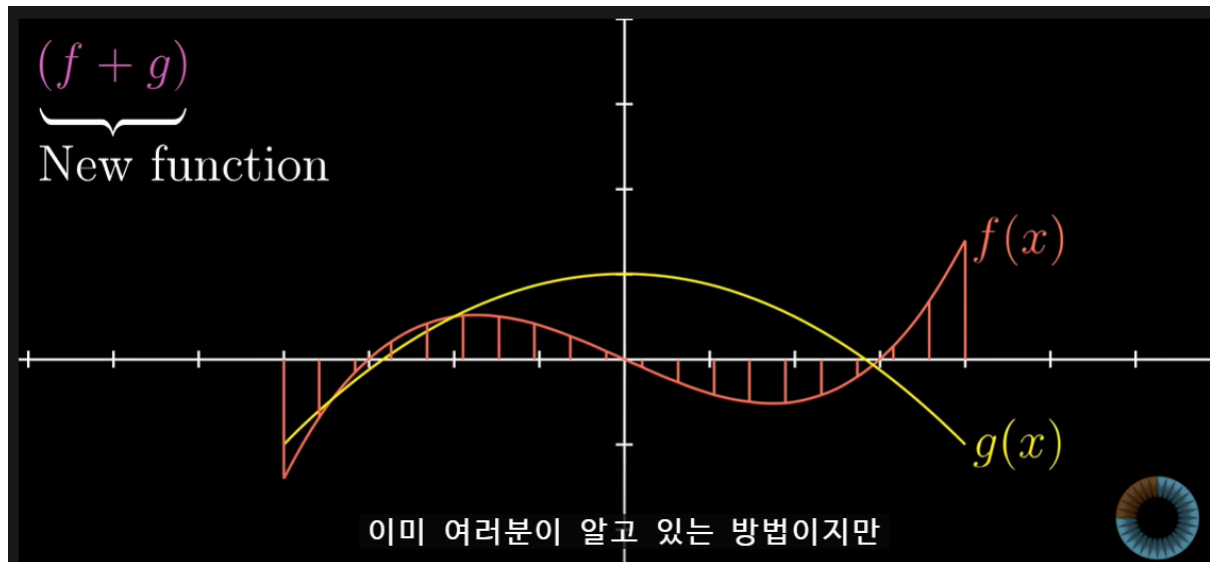
벡터를 화살표로 정의한것인지 화살표를 정의하기 위해 벡터를 사용한 것인지 명확하지 않다!

- determinant는 기저 벡터와 상관 없이 성립한다.(좌표계와 상관x)

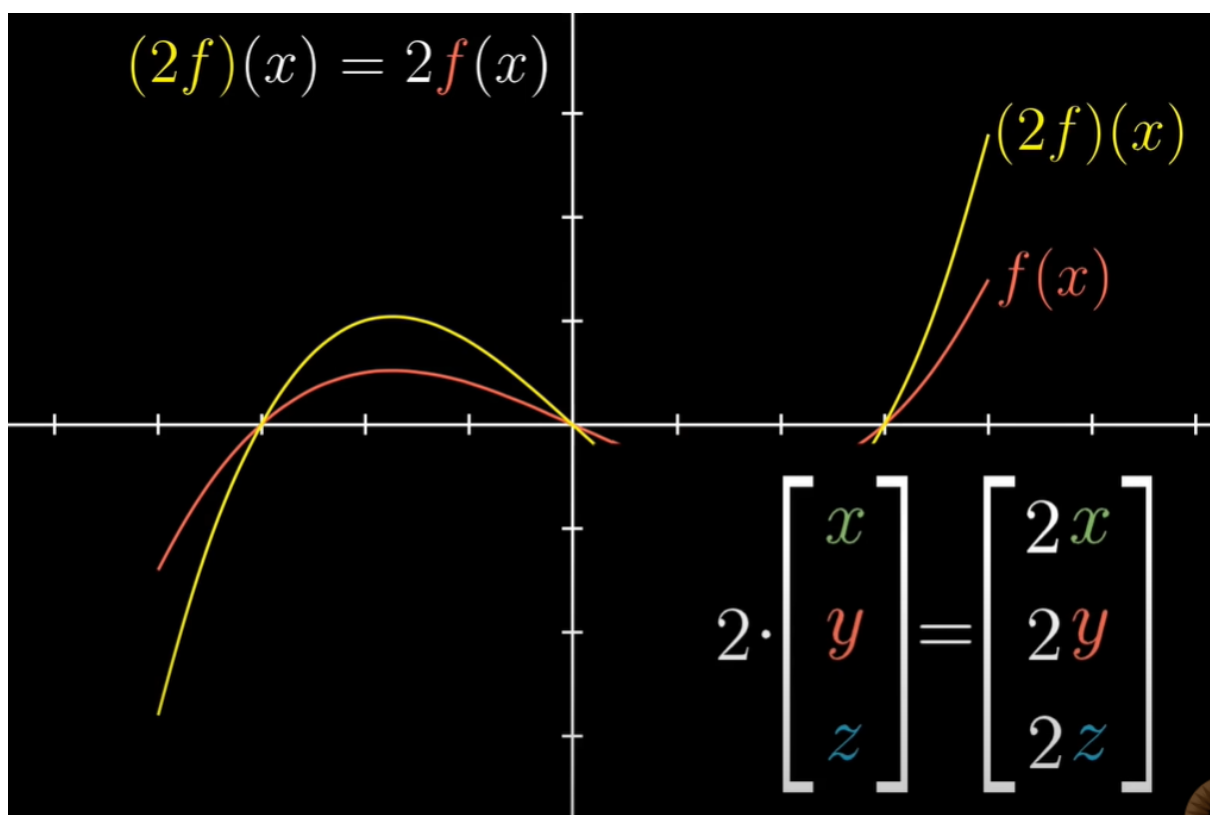


- determinant : 변환이 면적을 얼마나 스케일링하는지를 나타낸다.
- 고유벡터 : 변환이 일어나도 span을 벗어나지 않는 벡터

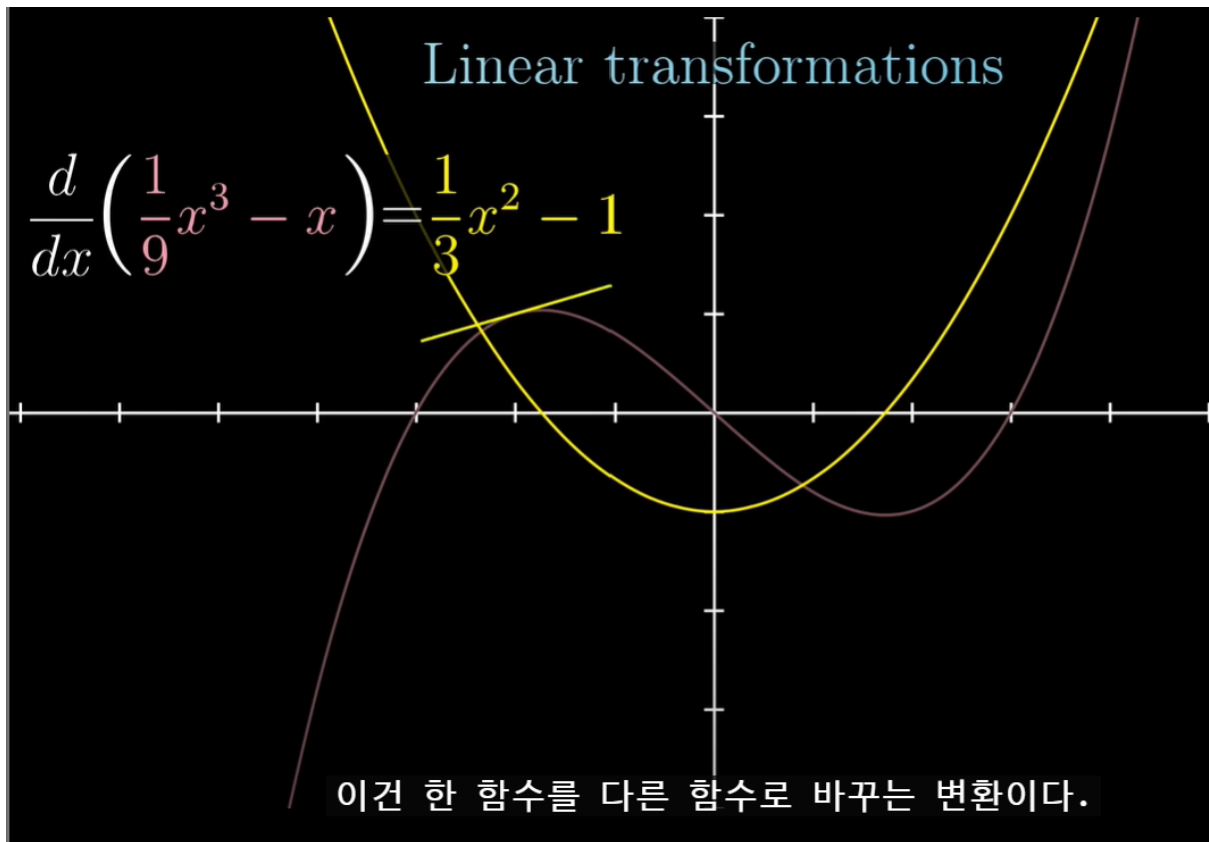
함수(function)에서의 벡터 관점을 생각해보자



- 함수의 실수배 표현

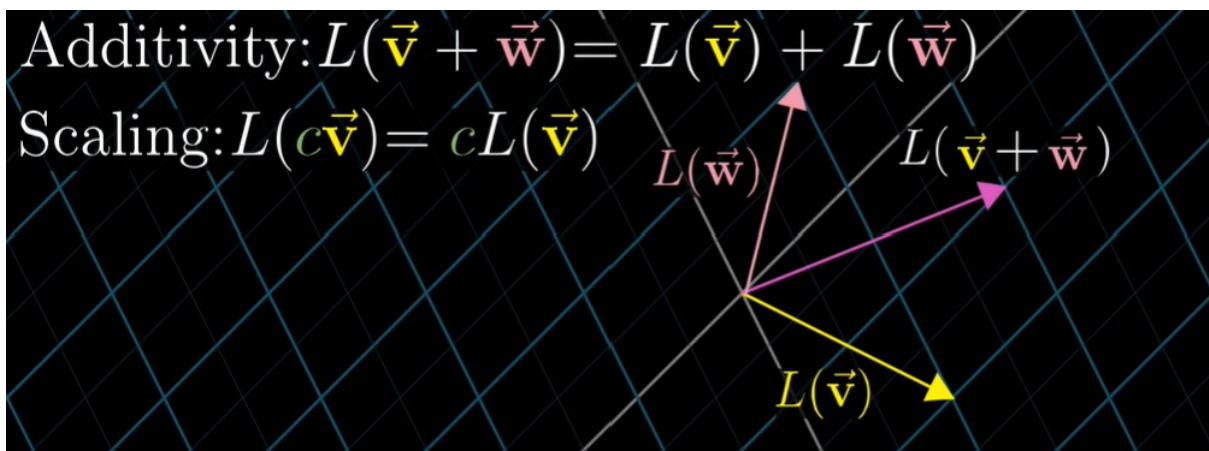


- 미적학에서 배운 선형 변환(linear transformation, operation)에 대해 다룬다.
- 우리가 흔히 배운 한 함수의 도함수가 선형 변환일 것이다!



선형성에 대한 수학적 정의는 아래와 같다.(일반적이라 함수에 대해서도 성립한다.)

- 벡터 표현은 Additivity에 대한 성질!



‘선형변환이 합과 실수배를 보존한다’

이러한 성질로 행렬과 벡터의 곱이 가능하다!(기저 벡터를 보존시킴)

함수에서도 이러한 선형 변환이 보존된다.

Derivative is linear

$$L(\vec{v} + \vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2)$$

Derivative is linear

$$L(c\vec{v}) = cL(\vec{v})$$

$$\frac{d}{dx}(4x^3) = 4\frac{d}{dx}(x^3)$$

미분을 행렬로 정의해서 살펴보자!

1. 기저벡터를 정의한다.

Our current space: All polynomials

Basis functions

$$b_0(x) = 1$$

$$b_1(x) = x$$

$$b_2(x) = x^2$$

$$b_3(x) = x^3$$
$$\vdots$$

$$\underbrace{1x^2 + 3x + 5 \cdot 1}$$

Already written as
a linear combination

- 다항식이 임의의 최고차항을 가지기 때문에 기적벡터는 무수히 많을 것이다!
- 아래 그림은 일반화

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Basis functions

$$\frac{d}{dx}(1x^3 + 5x^2 + 4x + 5) = \underbrace{3x^2 + 10x + 4}_{\text{Basis functions}}$$

$$b_0(x) = 1$$

$$b_1(x) = x$$

$$b_2(x) = x^2$$

$$b_3(x) = x^3$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- 왼쪽 행렬을 구하는 법은 아래에서 나오고 위와 같은 행렬식으로 다항식을 표현 가능하고 이는 미분한 결과와 동일한 결과를 나타낸다!

Linear transformations

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{df}{dx}$$

미분과 행렬곱이 같은 결과를 나타낸다!

| Linear algebra concepts | Alternate names when applied to functions |
|-------------------------|---|
| Linear transformations | Linear operators |
| Dot products | Inner products |
| Eigenvectors | Eigenfunctions |

- 이름만 다를뿐 같은 결과이다!

공리(Axioms) - 항상 성립

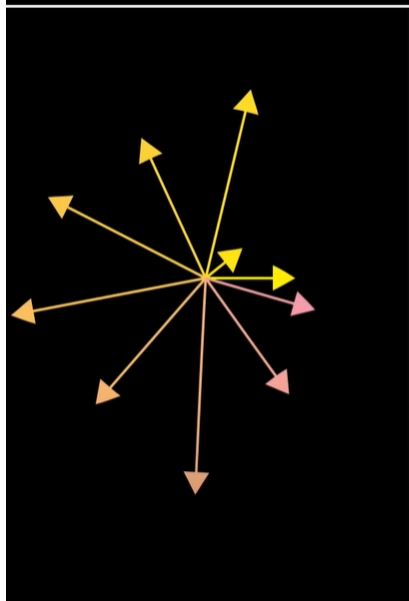
벡터 합과 실수배의 개념에서 나온 체크리스트

1. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
 2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
 3. There is a vector $\mathbf{0}$ such that $\mathbf{0} + \vec{v} = \vec{v}$ for all \vec{v}
 4. For every vector \vec{v} there is a vector $-\vec{v}$ so that $\vec{v} + (-\vec{v}) = \mathbf{0}$
 5. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
 6. $1\vec{v} = \vec{v}$
 7. $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$
 8. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
- “Axioms”

따라서 공리를 만족한다면 선형대수 결과를 적용가능하다!

- 격자가 평행하고 균등하게 → 요 정의가 힘들지만 사실 위의 공리를 만족한다면 벡터의 합과 실수배가 되고 모든 벡터가 가능하다

Vector spaces



$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

