



Chapter 11

chapter 10 복습

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\hat{i}(v_2 w_3 - v_3 w_2)}_{\text{Some number}} + \underbrace{\hat{j}(v_3 w_1 - v_1 w_3)}_{\text{Some number}} + \underbrace{\hat{k}(v_1 w_2 - v_2 w_1)}_{\text{Some number}}$$

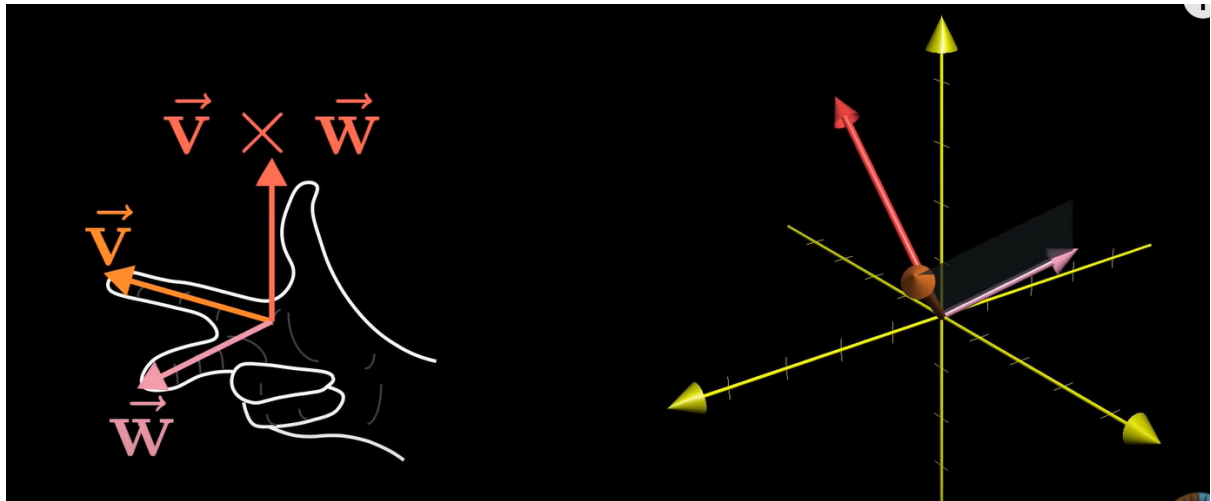
- 3차원 공간에서 평행사변형의 넓이는 두 벡터의 길이를 의미 방향은 아래 법칙을 통해 찾을 수 있음

$$\vec{v} \times \vec{w} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{vector}}$$


Length of \vec{p}
= (parallelogram's area)

Perpendicular to \vec{v} and \vec{w}

- <외적의 3차원 방향 오른손 법칙>



수치적 증명

Numerical formula	Facts you could (painfully)  verify computationally
$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$	$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ $\theta = \cos^{-1} (\vec{v} \cdot \vec{w} / (\vec{v} \cdot \vec{w}))$ $ (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v})(\vec{w}) \sin(\theta)$

기하학적 증명

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Dot product}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Transform}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\vec{v}}$$

우리는 해당 연산이 7장에서 dual 이라는 이중성으로 인해 성립됨을 살펴보았다.

방법(Plan)

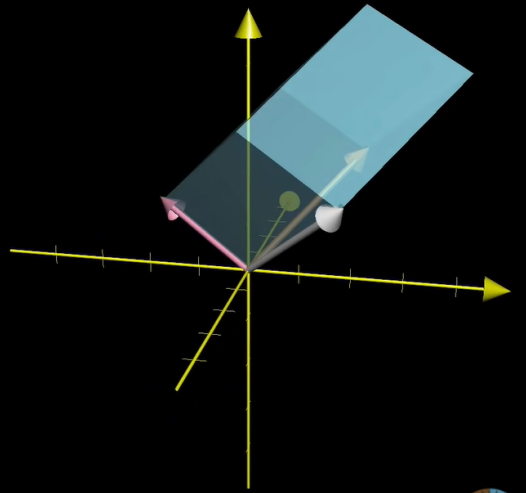
1. 3차원에서 수선으로의 선형변환을 정의 한다.(벡터 v, w 를 통해서)
2. 그 변환을 3D 공간에서의 “이중 벡터(Dual vector)로 연결시킨다.
3. dual 은 v 와 w 의 내적이 될것이다.

3차원 공간에서의 행렬 공간을 아래와 같이 파악할수 있음

What a student might think

$$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

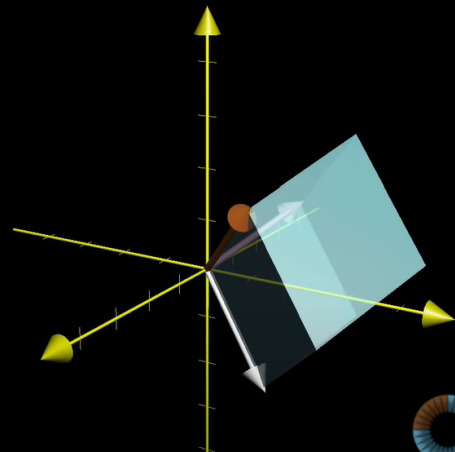
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$



- 위의 행렬식은 사실 외적이 아니다

$$f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} x & \overbrace{v_1}^{\vec{v}} & \overbrace{w_1}^{\vec{w}} \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Variable



- 외적은 위와 같이 하나의 벡터를 미지수로 놓으면 성립이 되고 이를 하나의 함수로 볼수 있음! → v와 w에 의해 정의된 평행육면체!

그런데 갑자기 이런식으로 외적을 정의하니 이상하게 느껴질것이다!(외적을 이해하는 열쇠)

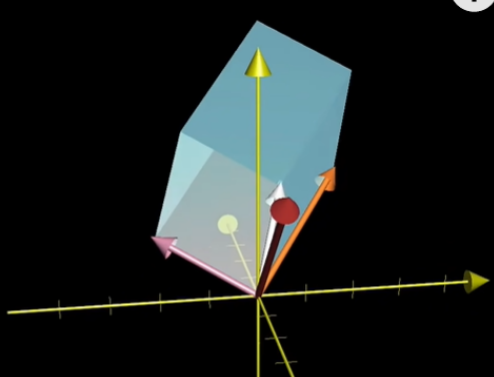
- **사실 위의 함수는 선형적이다!**

→ 따라서 이중성(dual)을 생각해볼수 있다.

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} x & \overrightarrow{v} & \overrightarrow{w} \\ y & v_1 & w_1 \\ z & v_2 & w_2 \\ & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right)$$

1×3 matrix encoding the
3d-to-1d linear transformation

- 듀얼의 성질에 의해 아래와 같이 ?는 p벡터로 변환이 될수 있음!(인코딩-기호화 됨)

$$\overrightarrow{p} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} x & \overrightarrow{v} & \overrightarrow{w} \\ y & v_1 & w_1 \\ z & v_2 & w_2 \\ & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right)$$


이를 조금더 일반화해보면 아래 그림과 같다

$$\begin{array}{c} \vec{p} \\ \left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \det \left(\begin{array}{ccc} x & \vec{v} & \vec{w} \\ y & v_1 & w_1 \\ z & v_2 & w_2 \\ & v_3 & w_3 \end{array} \right) \end{array}$$

↓

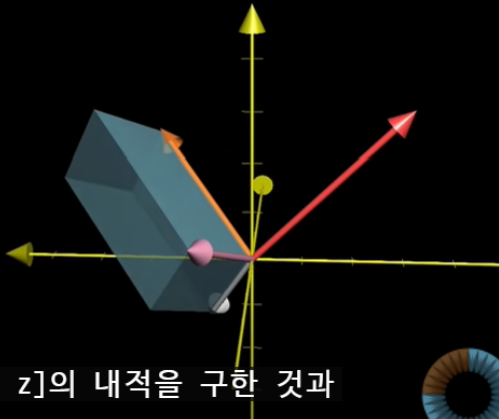
$$p_1 \cdot x + p_2 \cdot y + p_3 \cdot z = x(v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2) + y(v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3) + z(v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1)$$

또한 p 벡터 역시 아래와 같이 정의됨

$$\begin{aligned} p_1 &= v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ p_2 &= v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ p_3 &= v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{aligned}$$

Question

What vector \vec{p} has the property that

$$\underbrace{\vec{p}}_{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & \underbrace{\vec{v}}_{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}} & \underbrace{\vec{w}}_{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}} \end{pmatrix}$$


벡터 p 와 다른 어떤 벡터 $[x, y, z]$ 의 내적을 구한 것과

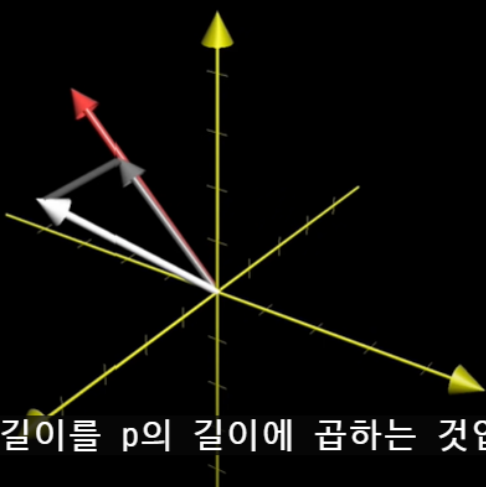
어떤 3D 벡터가 다음과 같은 속성을 가지는가?

벡터 p 와 다른 어떤 벡터 $[x, y, z]$ 의 내적을 구한 것과 벡터 v, w 로 정의된 평행육면체 부피와 같아지는 벡터 p 는 무엇인가?

(수치적이 아닌 기하학적으로 계산해보시오)

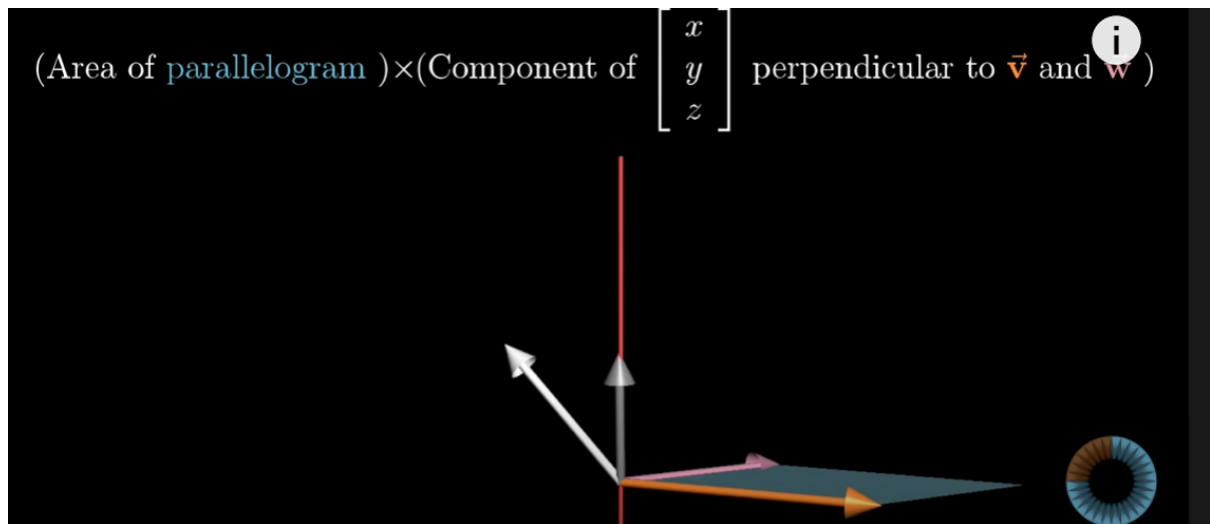
Answer

- 좌향의 의미인 내적은 아래와 같이 길이 투영을 의미

$$\vec{p} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (\text{Length of projection}) \times (\text{Length of } \vec{p})$$


그 투사된 길이를 p 의 길이에 곱하는 것입니다.

우향의 의미



- 우선적으로 평행육면체의 넓이를 구하기 위해 v 와 w 의 평행사변형의 넓이를 구하고 $[x, y, z]$ 의 길이를 곱하는 것이 아닌 v 와 w 의 수직인 벡터를 이용한다. (당연히 같은 길이)
- “[x, y, z], “ v, w 에 수직이면서 길이는 평행사변형의 면적인 벡터의 내적을 구하는 것과 같다.

