

Chapter 15

고유 벡터를 찾는 기존의 방법은 아래와 같았다.

Find the **eigenvalues** of $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

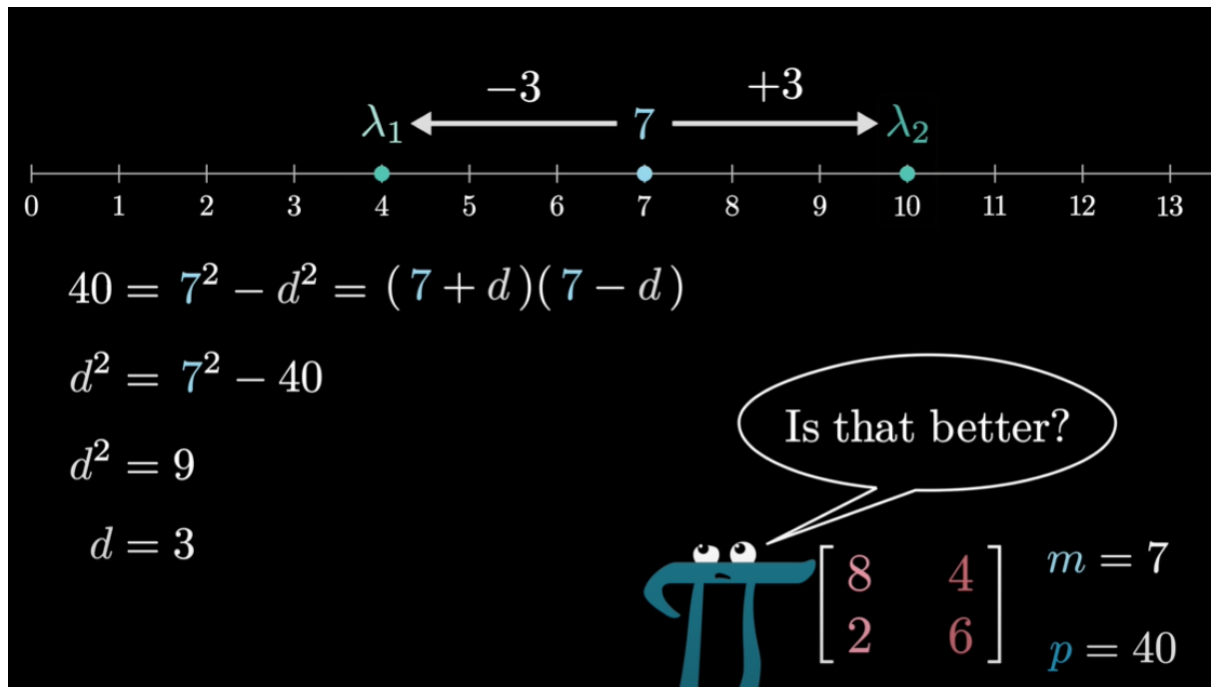
$$\begin{aligned}\det \left(\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) &= (3 - \lambda)(1 - \lambda) - (1)(4) \\ &= (3 - 4\lambda + \lambda^2) - 4 \\ &= \underbrace{\lambda^2 - 4\lambda - 1}_{= 0}\end{aligned}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

위로부터 얻을 수 있는 규칙이 3가지 정도 있다.

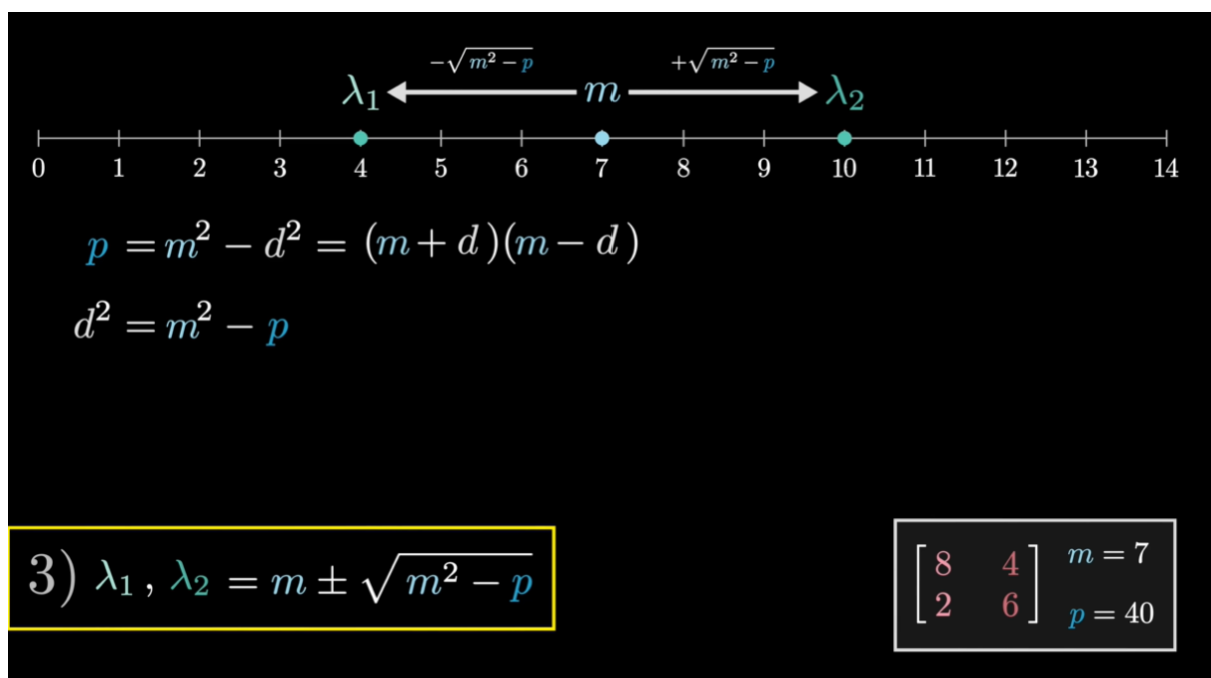
$$1) \quad \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{bmatrix} \boxed{a} & b \\ c & \boxed{d} \end{bmatrix} \right) = \frac{a + d}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = m \quad (\text{mean})$$

$$2) \quad \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 = p \quad (\text{product})$$



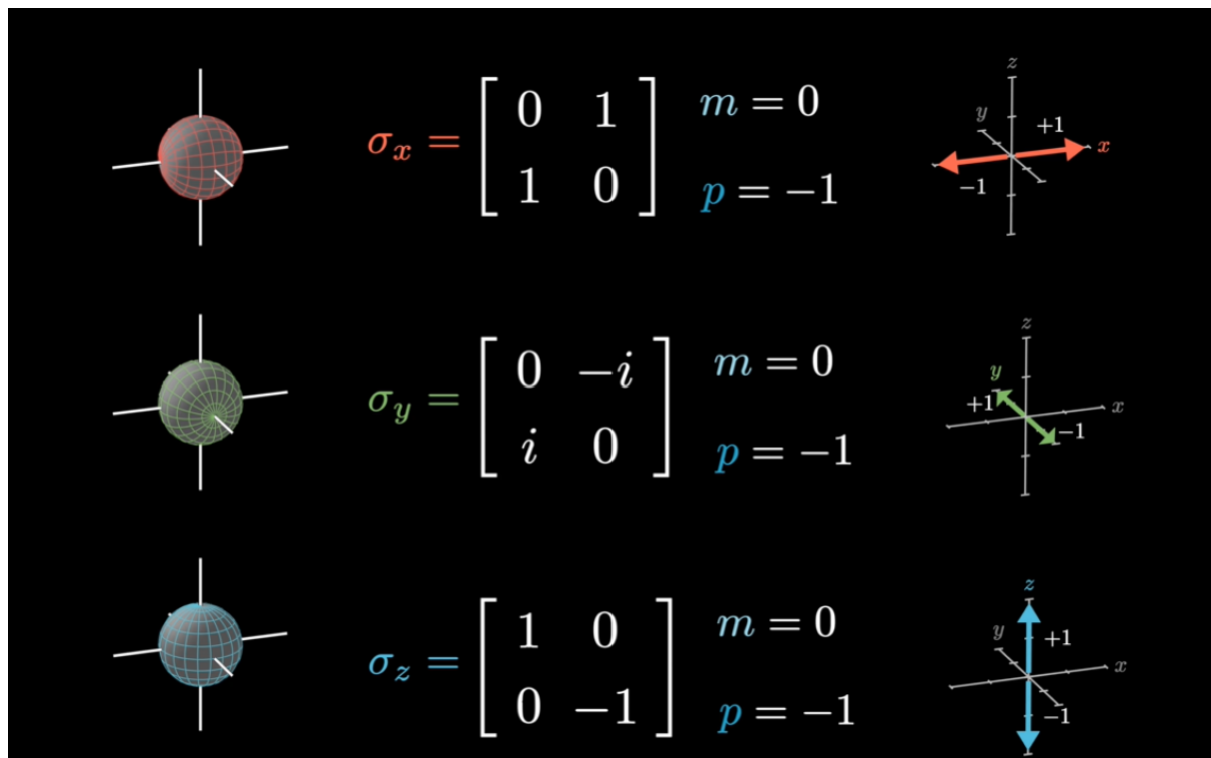
위와 같이 평균이 7이고 내적 값은 평균으로 부터 같은 거리 만큼 떨어진 두 수치의 곱이므로 이를 나타내면 위와 같다.

아래는 이를 일반화시킴!



3번공식으로 쉽게 고유 벡터를 구할수 있음 위의 근의 공식 안써도 됨~~(음악이 귀에 멤돈다)

물리학에서의 고유벡터와의 연관성 예시



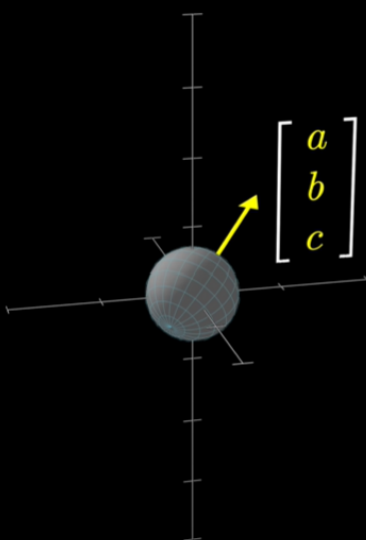
$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m = 0 \\ p = -1 \end{matrix} \quad \pm\sqrt{-p} = \pm 1$$

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m = 0 \\ p = -1 \end{matrix} \quad \pm\sqrt{-p} = \pm 1$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m = 0 \\ p = -1 \end{matrix} \quad \pm\sqrt{-p} = \pm 1$$


조금 더 어려운 예시

- 복잡한 벡터



$$a \sigma_x + b \sigma_y + c \sigma_z$$

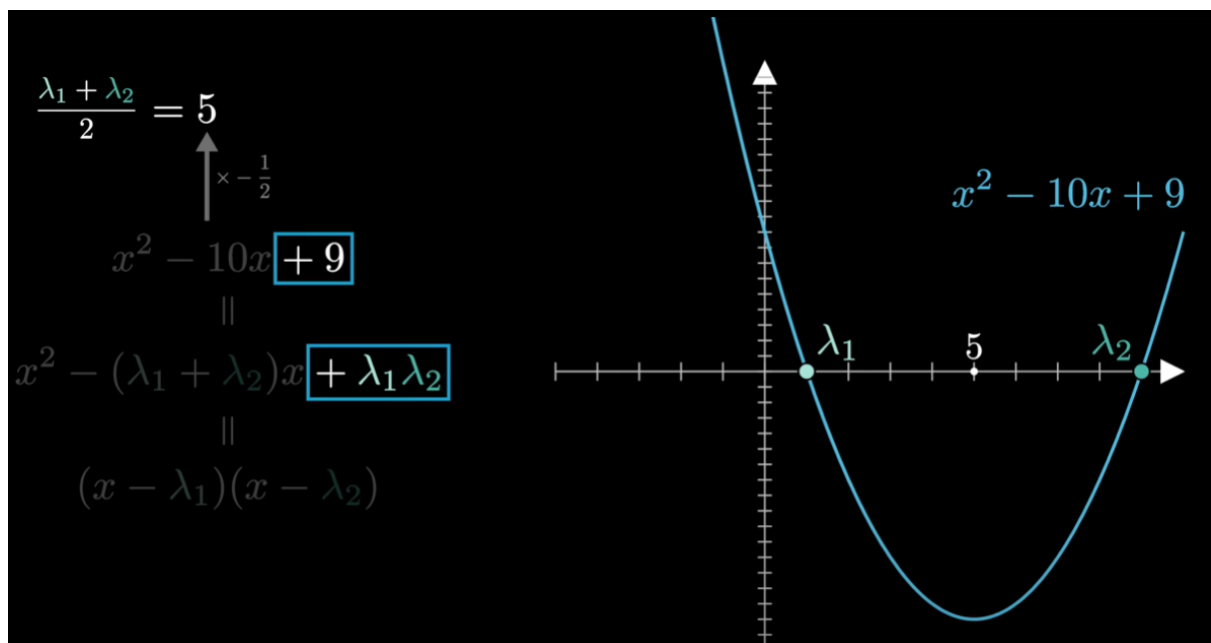
$$a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} c & a - bi \\ a + bi & -c \end{bmatrix} \begin{matrix} m = 0 \\ p = -1 \end{matrix}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$$

- 3차원 함수에서의 적용(고유벡터)



아래와 같이 굳이 근의 공식 사용할 이유가 없다~

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Never could have worked!

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\lambda^2 - 4\lambda - 1$	$2 \pm \sqrt{2^2 - (-1)}$
Matrix	Characteristic polynomial	Eigenvalues

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 \boxed{-(a + d)}\lambda + \boxed{(ad - bc)}$$