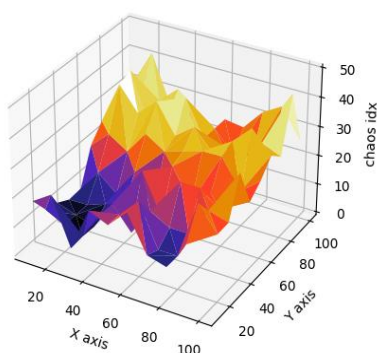


物理探究與實作 學習成果

彈簧擺之 釋放點、初速、擺錘質量、彈力常數 對其軌跡渾沌程度之影響



作者：

范佑誠

~ 目錄 ~

0 摘要	- 1 -
1 課程介紹	- 2 -
2 實驗摘要與成果	- 2 -
2.1 實體實驗數據取得與使用	- 2 -
2.2 模擬方式與步驟	- 3 -
2.3 實驗結論	- 3 -
2.3.1 不同出速	- 3 -
2.3.2 不同質量	- 3 -
2.3.3 不同彈力常數	- 3 -
2.4 實驗討論	- 4 -
2.4.1 速度的影響	- 4 -
2.5 實驗改進	- 4 -
2.5.1 混沌指數的計算	- 4 -
2.5.2 線性與非線性的預測	- 4 -
3 重要歷程	- 5 -
3.1 時程	- 5 -
3.2 拉格朗日力學的計算	- 5 -
3.3 傅立葉轉換的學習	- 6 -
3.4 程式改版	- 8 -
3.4 plt 的使用	- 9 -
5 心得	- 9 -
5.1 外語能力	- 9 -
5.2 跳級的知識	- 9 -
5.3 透過程式處理	- 9 -
5.4 組員很重要	- 10 -
6 附錄	- 10 -

0 摘要

課程介紹	名稱：探究與實作 方式：分組實作
實驗摘要與成果	<p>實驗主題：彈簧擺之各變因對其軌跡亂度之影響</p> <p>參考資料：拉格朗日理學、傅立葉轉換</p> <p>實體實驗：透過tracker追蹤擺錘，用excel的xy散佈圖描繪軌跡並對軌跡與時間函數做FFT</p> <p>模擬實驗：使用python中的numpy配合模擬擺錘運動，使用matplotlib繪製軌跡，使用scipy.fft進行FFT，最後一參考資料自行定義函數描述亂度</p> <p>實驗結論：能量在初始重力位能與初始彈力未能間的分配會影響軌跡簡單與否，初始動能則沒有明顯影響</p> <p>實驗討論：動能的影響並未被表現可能是因為亂度的計算方式</p> <p>實驗改進：速度實驗的結果顯示亂度函數的計算所考慮的因素可能不齊全</p> <p>實驗改進：使用線性回歸與非線性回歸分別進行亂度相關變因預測及亂度預測</p>
重要歷程	<p>時程：完成事件的時間點，程式碼部分同github更新日期</p> <p>歷程：拉格朗日力學的計算</p> <p>歷程：傅立葉轉換的學習與計算</p> <p>歷程：程式改版，從pil到plt，解決失真也對趨勢的探討打底</p> <p>歷程：plt的使用，透過parentheses中參數的format了解該function的用法</p>
心得反思	<p>一、查尋資料需要足夠的外語能力</p> <p>二、學習到許多跳級的知識</p> <p>三、透過程式去處理資料只需花一次的時間，後續只需做數據分析</p> <p>四、組員很重要</p>
附件	分工表、書面報告、模擬圖檔、程式碼、 拉格朗日力學計算掃描檔、FT計算學習過程掃描檔

1 課程介紹

一次由兩位老師共同教學，而這次分配到物理科及生物科。老師會在前幾周先解釋實驗要求及目的（本次為使用程式軟體），並且講解一些科學有關的基本知識（科學研究倫理）。在正式實驗後會有上台報告及小組互評，讓我們從同儕中學習自己的弱點。

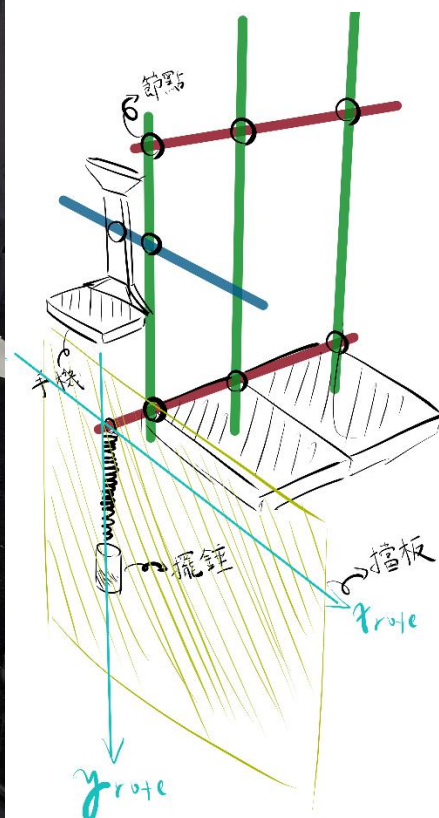
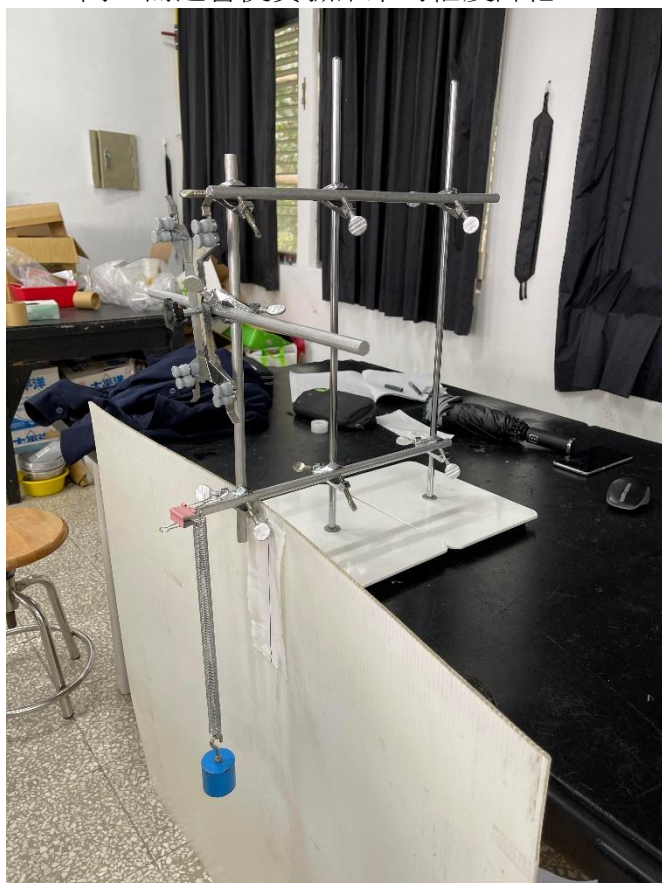
2 實驗摘要與成果

此實驗主要探討彈簧擺不同變因（釋放點、釋放出速、擺垂質量、彈力常數）對釋放後軌跡亂度的影響。由於我看到的參考資料都顯示彈簧擺屬於混沌系統，不利直接計算，且都使用程式模擬。所以我們的實驗是以模擬為主，取得實驗數據，再以實體實驗作為實驗誤差的參考。

2.1 實體實驗數據取得與使用

本次使用 Tracker 與 Microsoft365 Excel，在取得位置對時間的資料後進行 FFT 以對照實體實驗及模擬實驗的軌跡圖與兩軸頻譜。

預期誤差：Tracker 給的實驗數據為位置對時間的數據點，而每點時間間隔大約 0.033 秒，也就是說取樣頻率約 30Hz。而基於 FFT 的限制，頻譜有效頻率為 15Hz 內。而這會使實驗結果可信度降低。



2.2 模擬方式與步驟

- (1). 使用遞迴計算每一刻的座標，過程中使用 RK4 降低誤差。而“每一刻”也就是程式中的 dt ，我們預設是 10^{-4} 秒，也就是模擬出來的頻譜有效範圍將會大幅增加。計算方式見書面報告。
- (2). 將每一種釋放點透過 python matplotlib.pyplot (plt) 繪製軌跡（圖 2.1-1）
- (3). 透過 plt 繪製頻譜（圖 2.1-2）。將每一種釋放點的位置函數做 FFT。
圖中頻譜只到 10Hz 是裁切問題，見程式碼 `FFT_image()` (line 72,73)
- (4). 透過 plt 繪製整體趨勢（圖 2.1-3）。依據 NCTU 黃佳琪的碩論：軌跡亂度與頻譜亂度相關，可定義函數描述其亂度。因此我們可以將一個釋放點的亂度以一個數字描述（數值越大越亂，成黃色），進而綜合許多釋放點的結論在一張圖中。

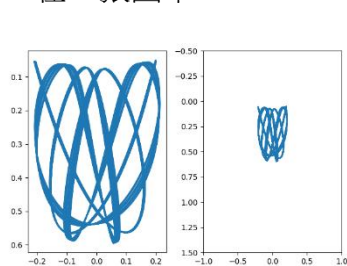


Figure 2.1-1

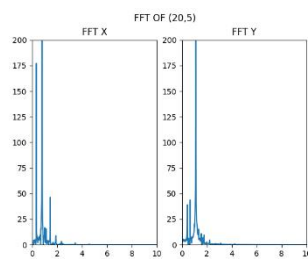


Figure 2.1-2

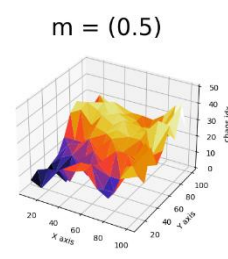


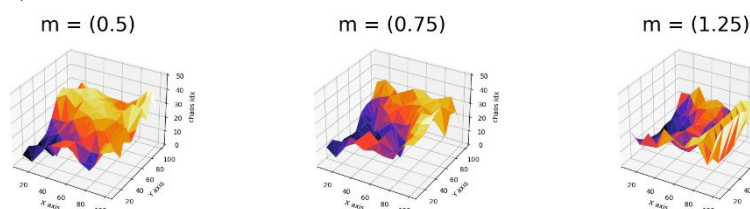
Figure 2.1-3

2.3 實驗結論

2.3.1 不同出速

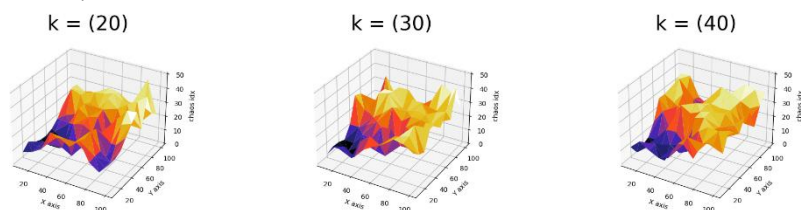
簡單軌跡大致分布在 x 軸附近，趨勢不隨初速不同改變太多

2.3.2 不同質量



會出現簡單軌跡的座標大致集中在 $x=20$ ，而隨著質量增加而 y 座標也增加，推測是因為較接近鉛質懸掛的平衡位置。

2.3.3 不同彈力常數



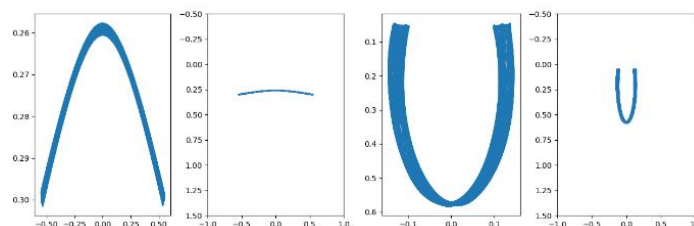
隨 k 變大而往原點更集中，推測也是跟平衡位置有關。

綜合地說，釋放時能量在重力位能與彈力位能間的分布會影響軌跡亂度。

2.4 實驗討論

2.4.1 速度的影響

圖中看起來增加動能對整體趨勢並未有顯著影響，但我們認為有初速的釋放可以當作其他無初速釋放的運動路程中的點最簡單的例子就是簡諧運動的平衡位置可回推到端點位置。而不同的釋放也會有不同的結果（如下圖），也就是說回推的過程並非一起平移，也因此每張圖的樣子應該要差異極大。而目前我們認為會不如預期是因為速率不夠快，導致各點移動的幅度不夠大，而我們的實驗釋放位置兼具為 0.1m，可能是被誤差吸收。



2.5 實驗改進

2.5.1 混沌指數的計算

在看速度實驗的結果後我們

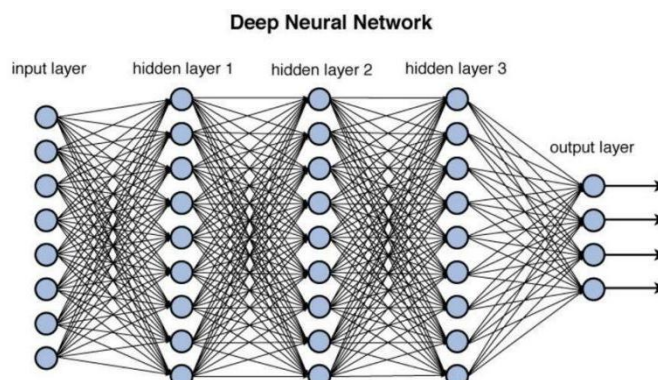
由於當時尚未查到適合的資料、對於混沌統的了解也不多，所以混沌指數的計算仍有很大的進步空間。第一，對 peak 的定義會很明顯改變指數算出來的結果。第二，對 noise, dominant frequency 的定義同樣會對數值造成很大的影響。還有論文中提到兩座標頻譜間的關係我們也並未做到很嚴謹的討論。而這也是未來可以再研究的地方。

2.5.2 線性與非線性的預測

我們可以透過線性回歸，又或是非線性回歸例如 neural network 進行更精確的運算。使用線性回歸也就是沒有 hidden layer 的 network，我們可以直接看到亂度與各參數之間的關係也就是他的權重。

對於 neural network 的 modeling，input layer 會是釋放點的各種參數，包括初速、擺錘質量、彈力常數等，output layer 則可以直接是 chaosidx。而 optimizer 則可以直接使用我們在做人工智慧常用的像是最基本的 Gradient Decent。這樣 chaosidx 會變成連續函數，會對作圖與實驗討論有很大的幫助。

在計算時間上，也很明顯會比原本模型快上許多。



（圖取自網路）

3 重要歷程

3.1 時程

前兩周	老師上課、講解
Mar 6	建立第一版程式並觀察出速為 0 的各式放點軌跡
Mar 17	標記釋放點
Mar 31	期中報告
Apr 3	大改版，程式從使用 PIL 到 plt 並且加了寫檔及 FFT 的功能
Apr 4	加上 chaosidx 的計算，並因為需要大量重複執行，建立 main() 及 simulation()，用途是把執行模擬的程式包起來，利於後續使用（因為最一開始使用 python 所以只顧及程式的執行、忽略可讀性及後續改版的難易）
Apr 5	計算方式中加上 RK4 以降低誤差
Apr 8	重新計算所有數據
Apr 14	期末報告

3.2 拉格朗日力學的計算

在做實驗前就已經在許多地方略有接觸微積分與複數的觀念，也稍有在清大人陪操作過相關題目，所以在拉格朗日力學的計算上沒有太大的問題，但也透過這次練習了偏微分及 chain rule。

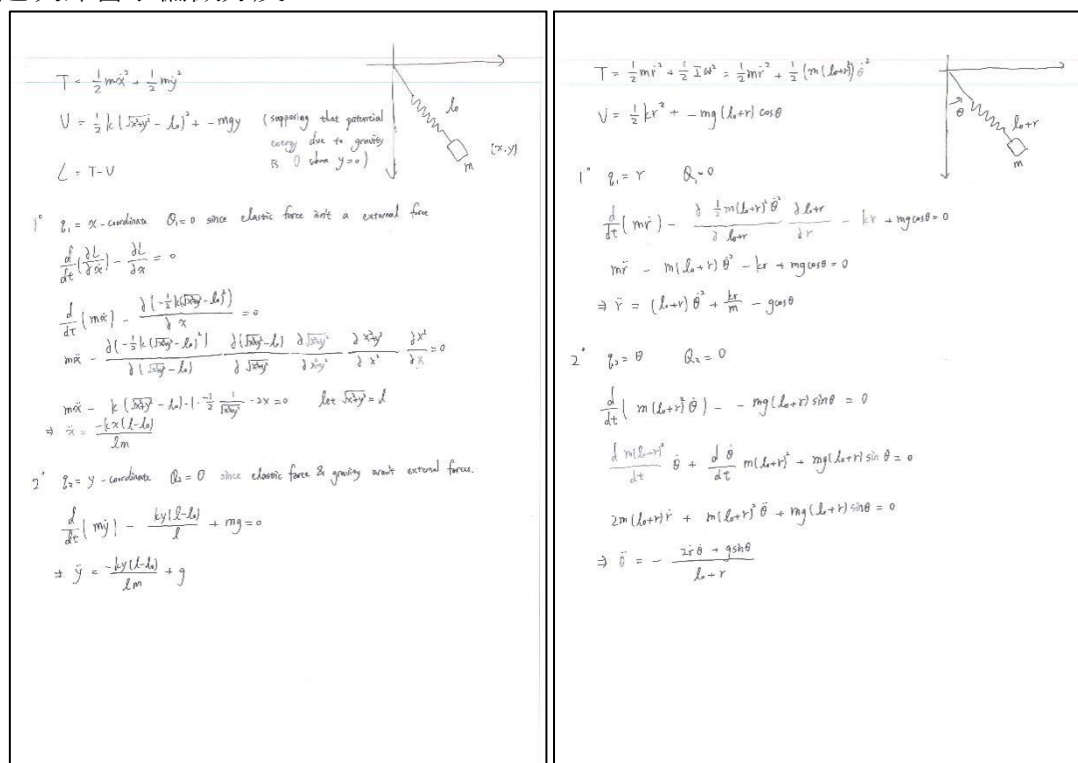


Figure 3.2-1 ~ Figure 3.2-2
(不同廣義座標設定對應的計算過程，見附件)

3.3 傅立葉轉換的學習

一開始我在看 FFT 的圖的時候有兩個大問題：

- (1). 有些文章寫頻域是複頻域的實部，有些文章在用 excel 做 FFT 時卻用 imabs() 而這兩件事聽起來就很矛盾，但一開始也不知道如何解釋。
- (2). 對 $\sin(t)$ 做 FFT 發現到最一開始的 frequency domain 會有兩個峰值，是到調整對應域（頻域）的時候才只出現一個峰值（最大有效頻率是取樣頻率的一半）。

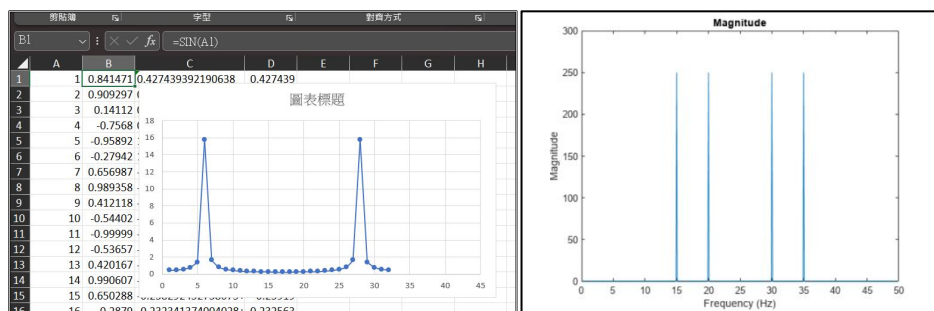


Figure 3.3-1 ~ Figure 3.3-2

（圖 3.3-1 為我用 excel 初次嘗試 FFT 的結果，圖 3.3-2 為 Mathworks 上的圖片）也就是這兩件事引發我對傅立葉轉換的好奇心，於是就開始看一些傅立葉轉換是如何計算的文章，其中一篇來自 University of Waterloo 的 Lecture 31 Fourier Transforms and the Dirac delta function 對我幫助最大。

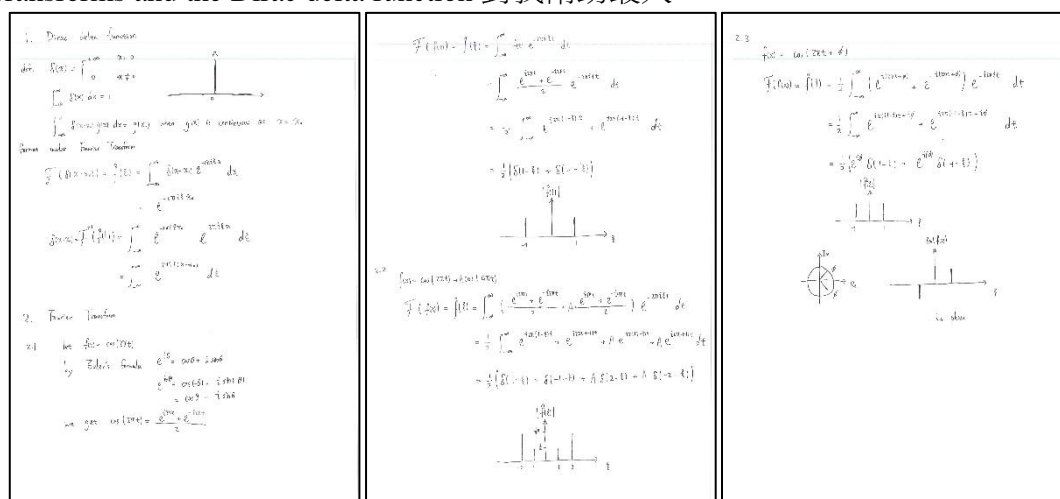


Figure 3.3-3 ~ Figure 3.3-5

（從 delta function 到 FT 計算的過程，見附件）

- (1). 圖 3.3-3 是 delta function 的定義、性質及積分形式，以及 $\cos(2\pi x)$ 的 FT，由此可看到 $\cos(\theta)$ 在換成以 $e^{i\theta}$ 表示時會出現兩項，也就導致頻譜會有兩個峰值。這回答了問題(2)，只是如果使用 FFT 計算的話需要再做一次 shift
- (2). 圖 3.3-4 是 $\cos(2\pi x) + A \cos(2\pi 2x)$ 的 FT，可以看到 FT 中強度（振幅）的轉換是線性的，也就是頻譜上看到的強度只需在乘上一常數即原強度。
- (3). 圖 3.3-5 是 $\cos(2\pi x + \phi_0)$ 的 FT，可以看到相位的不同須由虛部表示，但仍需再把強度約掉，而實部則無意義。這回答了問題(1)

因此不失一般性我們可以假設：

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi\xi_n t + \phi_n)$$

其中 A 為振幅， ξ 為頻率， ϕ 為起始相位

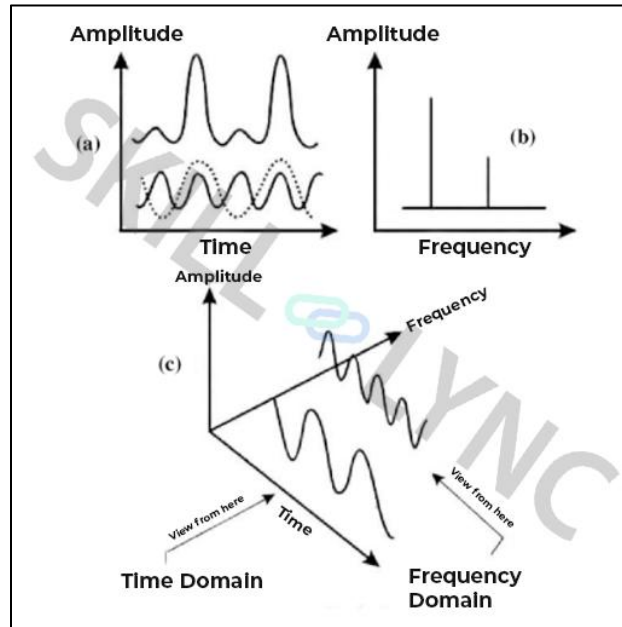
由尤拉公式及傅立葉轉換可以得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{e^{i(2\pi\xi_n t + \phi_n)} + e^{-i(2\pi\xi_n t + \phi_n)}}{2} \right) e^{-i2\pi\xi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{i2\pi(\xi_n - \xi)t + i\phi_n} + A_n e^{i2\pi(-\xi_n - \xi)t - i\phi_n}) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{i\phi_n} \delta(\xi_n - \xi) + A_n e^{-i\phi_n} \delta(-\xi_n - \xi)) \end{aligned}$$

由此我們就能輕鬆簡單的畫出我們的頻譜及相位譜。但按公式上寫的，

若 $\xi_0 = \xi$ ，則該部分的積分式會變成 $\int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$ 而這明顯與我們常見的頻譜矛盾，但也只是因為積分的上下限的問題，現實中上下限是有限，也就是積分出來的值會是有限的。所以在圖 3.3-3~圖 3.3-5 中為了說明頻譜意義，當作其值有限簡化之。而簡化的過程我們可以假設

雖然不確定未來會不會再用到 FT 的人工計算，但 FT 在通訊是很常見的工具，而藉由這次的機會我充分重頭了解了傅立葉轉換的計算原理，而剩下的一些性質（例如 convolution）可能等以後有機會在學。



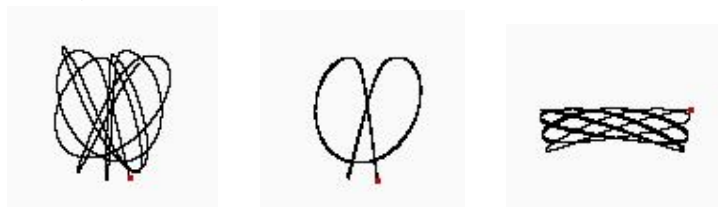
(圖取自網路)

3.4 程式改版

一開始我在做軌跡圖的時候想到的是在清大人陪數學組 3D 幾何課上聽到的 PIL image，於是就直接用最土的方法開始畫，也就有了實驗的第一版。

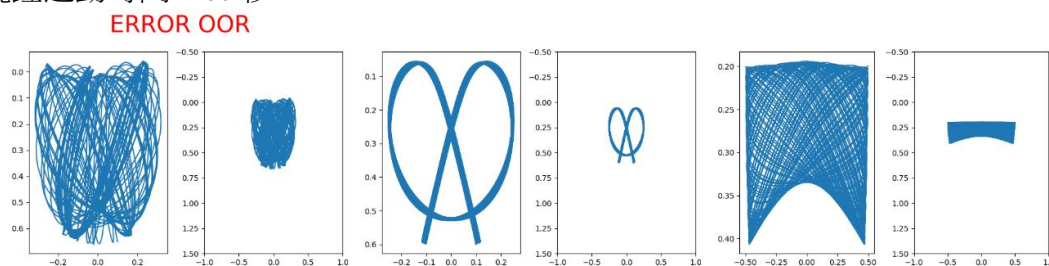
繪圖方式：底圖用 200*200 pixel，直接把位置座標向下取整然後將其用黑色標在圖上，釋放點用紅色標記。

擺錘運動時間：20 秒

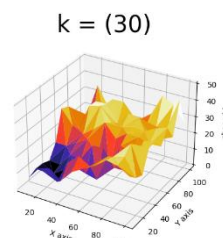
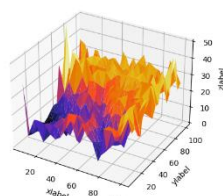
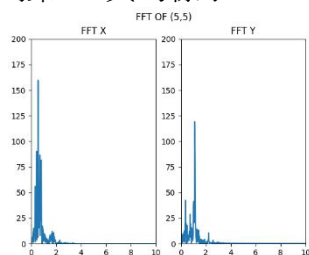


後來因為實在是失真很嚴重，又想到在社團聽到的 matplotlib，於是做了一次大更新，這次則是用別人寫好的 library，也因此我們可以到更多細節。而這次更新後的軌跡也避免了第一版的鋸齒、而也可以更著重在計算，因此也就同前面所述，dt 可以設定到 0.0001 秒，而這改善了 Tracker 的取樣頻率低的問題。

擺錘運動時間：60 秒



接著就是按照論文上的內容再去補上一些 function，開始討論其頻譜，到初速都為 0 的趨勢，接著再討論不同的初始狀態的影響。最後才變成書面報告第 10 頁到第 17 頁的樣子。



3.4 plt 的使用

由於之前只是聽過，這次也是第一次使用，雖然說以前寫 java, c++ 的時候也已經習慣直接查 syntax，但還是會花一點時間。且比較遺憾的是沒辦法做到我最想要的結果。plt 有 `plot_surface()` 及 `contourf()` (圖 4.3-1) 我覺得會更適合我們的實驗結果呈現，圖也較美觀，但最後因為資料格式不合暫時想不到方法解決，所以只能先用 `plot_trisurf()` (圖 4.3-2)

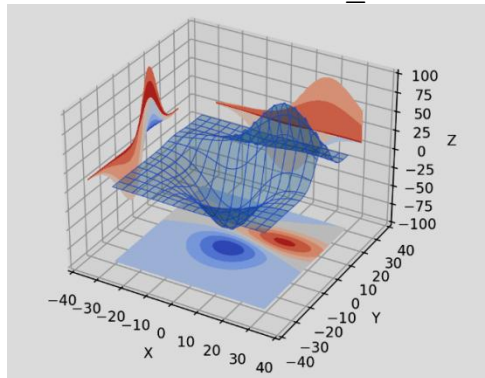


Figure 4.3-1

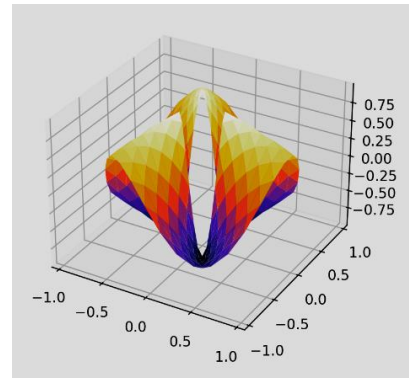


Figure 4.3-2

5 心得

5.1 外語能力

我自己認為資料查詢是這次實驗最困難的地方，用繁體中文查資料是一個非常錯誤的決定，不知道是 google 演算法、設定的問題還是真的無資料，每次查到的都不是想要的東西，最後只好用簡體跟英文查。而也因此文章的閱讀上花了一些時間，也發現學校學的英文完全不夠用，學術文章太多專有名詞只能一個一個查，但至少對拉格朗日力學及傅立葉轉換有更深層的認識、不單單只是學會結論然後坐使用，也希望經過這次的練習對以後在看大學原文書或是出國留學都會有一定的幫助。

5.2 跳級的知識

這次確實學到很多東西，一開始確定要做彈簧擺的亂度後，就開始看拉格朗日力學及傅立葉轉換光這兩個東西就已經花了一堆時間，後來是在詢問物理及數學科的老師及一些國外文章及 3B1B 的影片後才略有頭緒。後續也在看參考資料的參考資料時學會一點點關於偏微分、廣義座標、分析力學的虛位移、以及困擾我最久的 RK4。

5.3 透過程式處理

寫程式時，雖然寫 python 這種不用宣告變數的語言確實容易許多，但是會不習慣，但至少有了程式以後我們幾乎只需要休息聊天等結果再開始分析，過程中所有的雜事（像跑傅立葉、插入圖表）都直接寫在程式裡面，雖然一開始需要花不少時間 coding 但後面就不用和別組一樣等到書面報告繳交期限要截止了還在搞 excel，我們只需要繼續想新的變因然後微調參數，然後再去分析即可。

5.4 組員很重要

這次的探究在找組員的時候也是經過上個學期兩次探究的評估很用心在做的。但是畢竟這次的實驗內容是有點困難，所以有一個組員感覺在理論知識上跟不太上。但由於我們四個人所擅長的都有點差異，在整體的分工就很乾淨俐落，不會需要搶工作也都可以自由發揮。

6 附錄

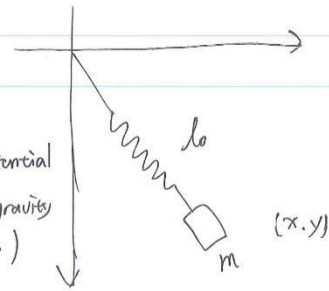
- (1). 為避免系統傳送中資料有誤，或其他特殊狀況，以下為 2 個資料備份連結
https://drive.google.com/drive/folders/13tSIPH37VxL2sehbljRZnTZyTsxV623z?usp=drive_link
<https://github.com/billllllllly/billllllllly.git>
(folder: 學習歷程備份資料夾)
- (2). 分工表

林冠維	實驗實作、攝影
林勁博	實驗實作、實驗日誌撰寫
范佑誠	寫程式、數據分析、書面報告撰寫
梁亘念	動畫、PPT 製作、攝影
- (3). 實驗書面報告
https://drive.google.com/file/d/16lohZ1V04vJeGuoolagY4BRE57TPpk/view?usp=drive_link
- (4). 模擬圖檔
<https://drive.google.com/drive/u/1/folders/1mOp07x2fB4e8ZG12ont2skuWpFVplAC5>
- (5). 程式碼
<https://github.com/billllllllly/billllllllly.git>
- (6). Figure 3.2-1, Figure 3.2-2, Figure 3.3-3 ~ Figure 3.3-5，見下頁

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)^2 + -mgy \quad \left(\begin{array}{l} \text{supposing that potential} \\ \text{energy due to gravity} \\ \text{is 0 when } y=0 \end{array} \right)$$

$$\mathcal{L} = T - V$$



1° $q_1 = x$ -coordinate $Q_1 = 0$ since elastic force isn't an external force

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - \frac{\partial \left(-\frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)^2 \right)}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} - \frac{\partial \left(-\frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)^2 \right)}{\partial (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)} \cdot \frac{\partial (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)}{\partial \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} - k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = 0 \quad \text{let } \sqrt{x^2 + y^2} = l$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-kx(l - l_0)}{lm}$$

2° $q_2 = y$ -coordinate $Q_2 = 0$ since elastic force & gravity aren't external forces.

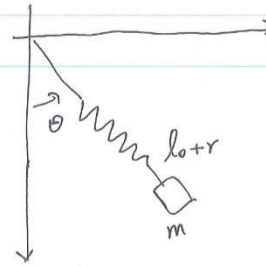
$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) - \frac{ky(l - l_0)}{l} + mg = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{-ky(l - l_0)}{lm} + g$$

Figure 3.2-1

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\omega}^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (m(l_0+r)^2) \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k r^2 + -mg(l_0+r) \cos \theta$$



$$1^\circ \quad q_1 = r \quad Q_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \dot{r} \right) - \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m (l_0+r)^2 \dot{\theta}^2 \right)}{\partial l_0+r} \frac{\partial l_0+r}{\partial r} - k r + mg \cos \theta = 0$$

$$m \ddot{r} - m(l_0+r) \dot{\theta}^2 - k r + mg \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = (l_0+r) \dot{\theta}^2 + \frac{k r}{m} - g \cos \theta$$

$$2^\circ \quad q_2 = \theta \quad Q_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(m(l_0+r)^2 \dot{\theta} \right) - -mg(l_0+r) \sin \theta = 0$$

$$\frac{d}{dt} m(l_0+r)^2 \dot{\theta} + \frac{d}{dt} m(l_0+r)^2 \dot{\theta} + mg(l_0+r) \sin \theta = 0$$

$$2m(l_0+r) \dot{r} \dot{\theta} + m(l_0+r)^2 \ddot{\theta} + mg(l_0+r) \sin \theta = 0$$

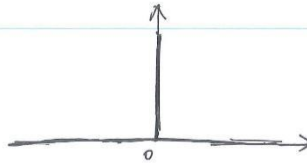
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = - \frac{2 \dot{r} \dot{\theta} + g \sin \theta}{l_0+r}$$

Figure 3.2-2

1. Dirac delta function

$$\text{def. } \delta(x) = \begin{cases} +\infty & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) g(x) dx = g(x_0) \text{ when } g(x) \text{ is continuous at } x=x_0$$

format under Fourier Transform

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta(x-x_0)) &= \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= e^{-2\pi i \xi x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(x-x_0) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x_0} \cdot e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi (x-x_0)} d\xi \end{aligned}$$

2. Fourier Transform

2.1 let $f(t) = \cos(2\pi t)$

by Euler's formula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

$$\text{we get } \cos(2\pi t) = \frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2}$$

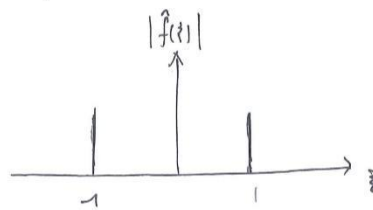
Figure 3.3-3

$$\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2} e^{-2\pi i \xi t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(1-\xi)t} + e^{i2\pi(-1-\xi)t} dt$$

$$= \frac{1}{2} (\delta(1-\xi) + \delta(-1-\xi))$$



2.2

$$f(x) = \cos(2\pi t) + A \cos(4\pi t)$$

$$\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2} + A \frac{e^{i4\pi t} + e^{-i4\pi t}}{2} \right) e^{-2\pi i \xi t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(1-\xi)t} + e^{i2\pi(-1-\xi)t} + A e^{i2\pi(2-\xi)t} + A e^{i2\pi(-2-\xi)t} dt$$

$$= \frac{1}{2} (\delta(1-\xi) + \delta(-1-\xi) + A \delta(2-\xi) + A \delta(-2-\xi))$$

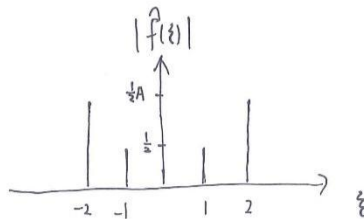


Figure 3.3-4

2.3

$$f(x) = \cos(2\pi t + \phi)$$

$$\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(2\pi t + \phi)} + e^{-i(2\pi t + \phi)}) e^{-i2\pi z t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(1-z)t + i\phi} + e^{i2\pi(-1-z)t - i\phi} dt$$

$$= \frac{1}{2} (e^{i\phi} \delta(1-z) + e^{-i\phi} \delta(-1-z))$$

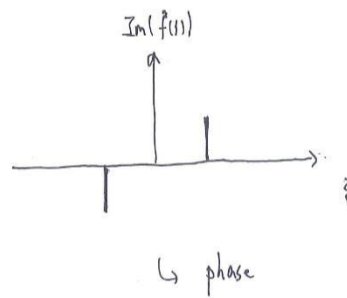
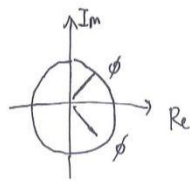
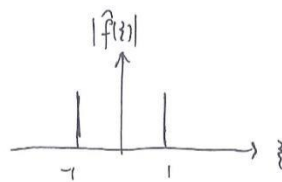


Figure 3.3-5