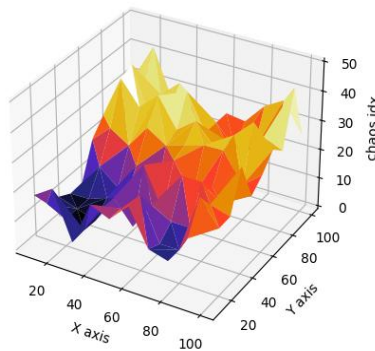


物理探究與實作  
期末書面報告

彈簧擺之  
釋放點、初速、擺錘質量、彈力常數  
對其軌跡渾沌程度之影響



組員：

211-11 林冠維

211-12 林勁博

211-17 范佑誠

211-24 梁亘念

# ~ 目錄 ~

1 摘要.....	- 1 -
2 基本知識.....	- 1 -
2.1 拉格朗日力學 (Lagrangian Mechanics).....	- 1 -
2.2 傅立葉轉換 (Fourier Transform).....	- 1 -
3 文獻回顧.....	- 2 -
3.1 NCTU 黃佳琪 碩論.....	- 2 -
3.2 中華人民共和國齊齊哈爾大學發明專利申請書.....	- 3 -
4 實驗.....	- 4 -
4.1 實驗假設.....	- 4 -
4.2 實驗器材.....	- 4 -
4.3 實驗裝置.....	- 4 -
4.4 實驗步驟.....	- 5 -
4.5 運動之加速度分析.....	- 5 -
4.6 實驗模擬.....	- 6 -
4.6.1 PSEUDO CODE.....	- 7 -
4.7 數據分析與討論.....	- 8 -
4.7.1 混沌指數.....	- 8 -
4.7.2 實際實驗.....	- 8 -
4.7.3 模擬實驗.....	- 8 -
4.7.4 模擬的正確性.....	- 8 -
4.7.5 數據分析.....	- 9 -
4.7.5.0 名詞定義.....	- 9 -
4.7.5.1 軌跡模式.....	- 9 -
4.7.5.2 初速為 0 的個別討論.....	- 11 -
4.7.5.3 不同初速.....	- 13 -
4.7.5.4 不同質量.....	- 15 -
4.7.5.5 不同彈力常數.....	- 16 -
4.7.6 討論.....	- 17 -
4.7.6.1 速度的影響.....	- 17 -
4.7.6.2 混沌指數的計算.....	- 17 -
5 結論.....	- 18 -
6 心得與反思.....	- 18 -
7 未來展望.....	- 18 -
8 參考資料.....	- 19 -
9 附件.....	- 19 -

# 1 摘要

本實驗主要探討釋放時的各種運動參數及擺錘、彈簧本身對彈簧擺運動軌跡的影響。由於我們都知道彈簧擺屬於混沌系統，即使可以透過一些方式寫出位置對時間的函數，但會過於複雜、不易直覺理解。

本次探究主要以軌跡模式的分類、整體軌跡亂度趨勢為目標。而在實際實驗證明模擬資料誤差夠低的狀況下使用模擬資料作為主要實驗數據（因為實際實驗有較多限制例如彈簧的阻尼、伸長的限制、角動量守恆使支架晃動等，導致會有資料不齊全的問題）。

實驗發現軌跡模式大致可分成渾沌與非渾沌，而混沌可細分成 2 種、非混沌則可再細分成 3 種。而軌跡亂度的整體趨勢實驗則發現釋放初速影響不大，彈力常數與質量則對於簡單軌跡的分布、混沌軌跡的分布有較大的影響。

## 2 基本知識

### 2.1 拉格朗日力學 (Lagrangian Mechanics)

相對於我們平常使用的牛頓力學，拉格朗日力學可以省略對力分析的依賴性，從能量的觀點下手，這對於複雜系統（例如雙擺、彈簧擺）的運算有很大的幫助。其計算式主要分為兩部分：

$$L \equiv T - V$$
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q$$

其中  $L$  為 lagrangian， $T$  為動能， $V$  為位能， $q$  為廣義座標， $Q$  為廣義力。而在這次實驗中由於系統假設只有彈力及重力兩保守力，無其他外力，因此  $Q = 0$ 。

### 2.2 傅立葉轉換 (Fourier Transform)

為傅立葉級數的推廣，其功能為分析一函數的組成，將原複雜的波以許多不同頻率的正弦波的疊加表示，輸出包含實數軸的頻譜及虛數軸的相位譜。與傅立葉級數的差異在於傅立葉級數的輸入是週期波，因此其輸出為不連續的；而傅立葉轉換則針對無週期或者週期無限大的波進行分析，輸出為連續的。

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt$$

$\xi$  為任意實數、定義域為頻域。

### 3 文獻回顧

#### 3.1 NCTU 黃佳琪 碩論

作者在裡面第五章有提到彈簧擺，大致先討論了有限差分法、二三維彈簧擺、傅立葉轉換、彈簧擺的混沌。

實驗方式為 Mathcad 模擬，並以能量比率 $u$ 、頻率比率為兩變因。實驗發現當對軌跡的  $x, y$  軸做傅立葉分析後如果其頻譜峰值成簡單整數比，則原始軌跡會較乾淨、規律，相反的，如果頻譜雜亂，或是峰值非簡單整數比，則原始軌跡雜亂，論文中稱之為渾沌。以下以論文 p.40 為例。

見 參考資料[2]

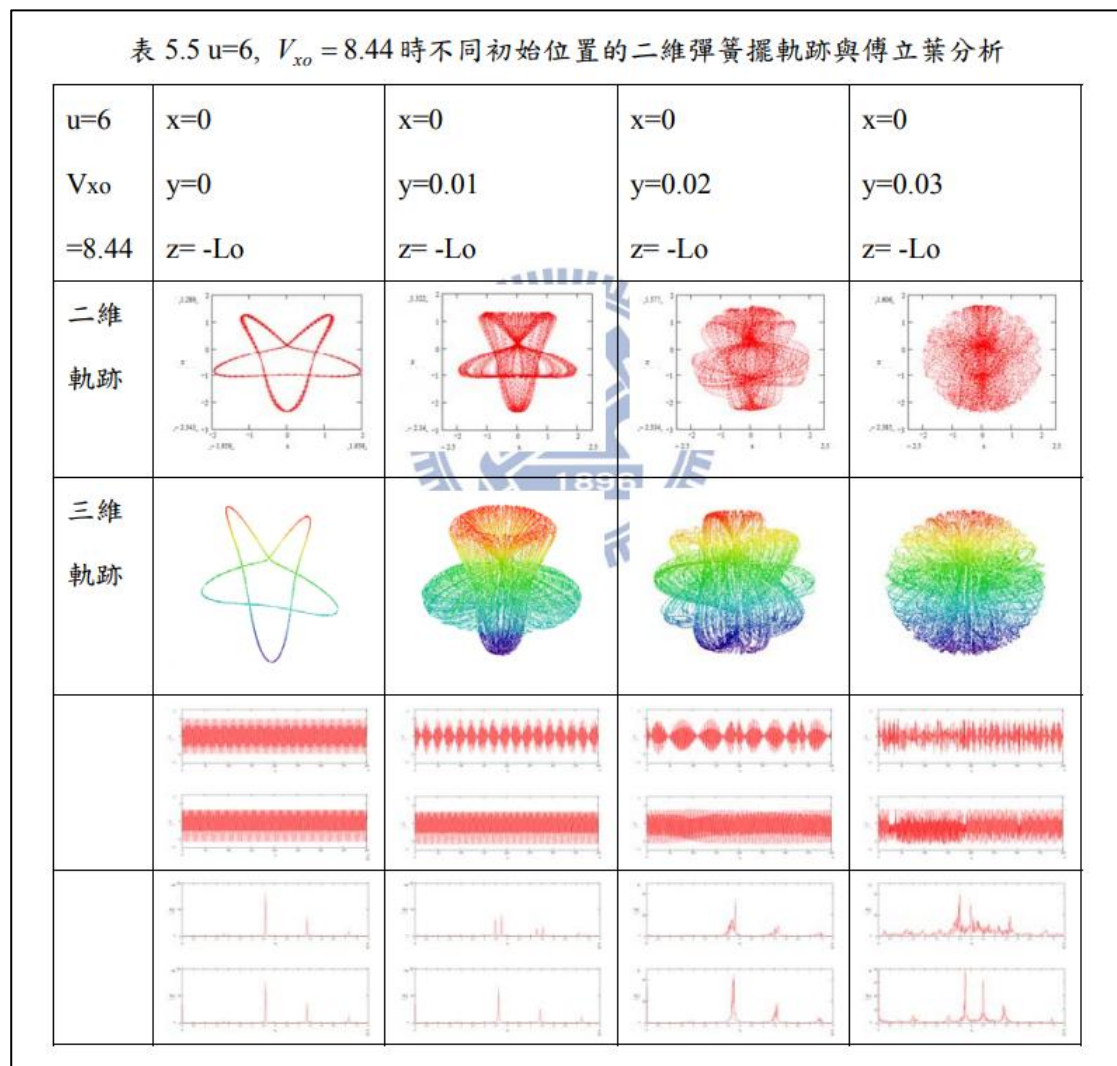


Figure 3.1-1

### 3.2 中華人民共和國齊齊哈爾大學發明專利申請書

在這部專利申請書中提到了利用彈簧的彈力來回推彈簧擺運動軌跡的方法，所利用的計算原理主要為牛頓第二運動定律與虎克定律。公式如下：

$$L(t) = \frac{F(t)}{K}$$

$$\theta(t) = \arcsin \left\{ \frac{K\Delta L(t)}{3mg} + \frac{\frac{d^2\Delta L(t)}{dt^2}}{3g} + \frac{2mgL \sin \theta_i + K\Delta L^2(t) + m\left[\frac{dL(t)}{dt}\right]^2}{3mg[L + \Delta L(t)]} \right\}$$

這兩條公式可藉由彈簧張力隨時間變化的函數 $F(t)$ ，計算出軌跡方程式隨時間變化的函數 $\begin{cases} \theta(t) \\ L(t) \end{cases}$ 。

見 參考資料[3]

CN 104835387 A	权 利 要 求 书	1/1 页
<p>1. 测绘弹簧摆运动轨迹的实验方法，其特征在于该方法包括以下步骤：            在弹簧摆的弹簧固定端设置拉力传感器；            以弹簧固定点为极点，以小球初始运动一侧的水平线为极轴，以小球初始绕固定点转动方向为正向，设初始状态弹簧与极轴夹角为<math>\theta_i</math>，建立极坐标系；            保持弹簧处于自由状态并释放小球，通过拉力传感器记录弹簧摆运动过程中弹簧固定端拉力时程<math>F(t)</math>，根据弹簧固定端拉力时程曲线，求得弹簧长度变化时程<math>\Delta L(t) = F(t)/K</math>；            根据机械能守恒建立关于小球速度时程<math>v(t)</math>、弹簧伸长量时程<math>\Delta L(t)</math>、弹簧与水平线夹角时程<math>\theta(t)</math>的关系式 1：</p> $\frac{1}{2}K\Delta L^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) = mg \sin \theta(t)[L + \Delta L(t)] - mg \sin \theta_i L ;$ <p>根据牛顿第二定律建立关于小球速度时程<math>v(t)</math>、弹簧伸长量时程<math>\Delta L(t)</math>、弹簧与水平线夹角时程<math>\theta(t)</math>的关系式 2：</p> $\frac{m\left\{v^2(t) - \left[\frac{d\Delta L(t)}{dt}\right]^2\right\}}{L + \Delta L(t)} = K\Delta L(t) - mg \sin \theta(t) + m \frac{d^2\Delta L(t)}{dt^2} ;$ <p>联立关系式 1 和关系式 2，求得弹簧与水平线夹角时程<math>\theta(t)</math>：</p> $\theta(t) = \arcsin \left\{ \frac{K\Delta L(t)}{3mg} + \frac{\frac{d^2\Delta L(t)}{dt^2}}{3g} + \frac{2mg \sin \theta_i L + K\Delta L^2(t) + m\left[\frac{d\Delta L(t)}{dt}\right]^2}{3mg[L + \Delta L(t)]} \right\} ;$ <p>建立小球运动轨迹的时间极坐标为<math>[L + \Delta L(t), \theta(t)]</math>，即<math>[L + F(t)/K, \theta(t)]</math>，据此绘制出小球的运动轨迹。</p>		

Figure 3.2-1

## 4 實驗

### 4.1 實驗假設

由於探討軌跡與其傅立葉轉換後的關係已經被清楚地做過，因此本實驗主要以動能、位能、擺錘質量、彈力常數之不同對於整體軌跡的影響進行探討。因為彈簧擺屬於混沌系統，所以也不好做出假設，實驗以分類、探討趨勢為主要方向。

### 4.2 實驗器材

- (1). 彈簧 ( $k = 27.84 \text{ N/m}$ ) (由於器材限制，此彈簧不可壓縮)
- (2). 擺錘 ( $m = 0.5\text{kg}, 1\text{kg}$ )
- (3). 相機 (紀錄座標及確定沒有  $z$  軸方向的運動)
- (4). 筆電
- (5). Tracker, Microsoft Office Excel (執行實際實驗)
- (6). Microsoft Visual Studio Code, Python 3.9.6 (執行模擬)

### 4.3 實驗裝置



Figure 4.3-1

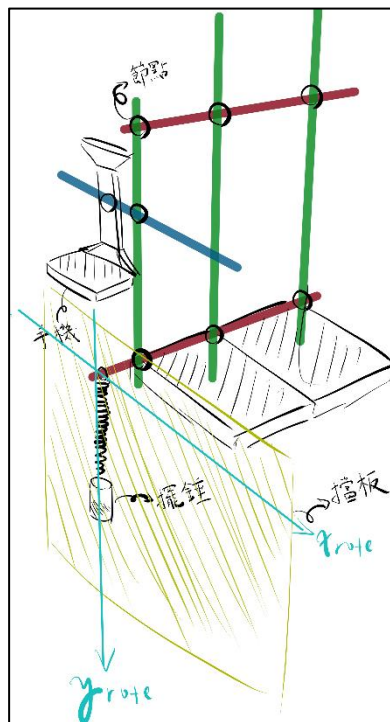


Figure 4.3-2

## 4.4 實驗步驟

基於我們對 Lagrangian mechanics 的了解，且我們知道其自由度為 2，因此在實體實驗時我們訂：

- (1). 操作變因為  $l, \theta$  或  $x, y$
- (2). 控制變因為  $m, k$
- (3). 應變變因為軌跡

實驗步驟下如下：

步驟 1：選擇釋放點、開啟錄影

步驟 2：釋放後使用 Tracker 追蹤物體移動軌跡，並將位置與時間的數據點匯出成 Excel 檔。

步驟 3：使用 Excel 對  $x(t)$  及  $y(t)$  做快速傅立葉分析(FFT)，觀察其頻譜及軌跡，與模擬數據做比較。

## 4.5 運動之加速度分析

這次實驗主要使用三種計算方式：

(以下  $\sqrt{x^2 + y^2}$  簡寫為  $l$ )

- (1). 二維直角坐標之牛頓力學

與我們在學校所學相同，分析受力可得：

$$\ddot{x} = \frac{k(l-l_0)(x_0-x)}{lm}$$

$$\ddot{y} = \frac{k(l-l_0)(y_0-y)}{lm} + g$$

- (2). 二維直角坐標之拉格朗日力學

$$L \equiv T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - \frac{k(l-l_0)^2}{2} + mgl \cos \theta$$

將兩廣義座標分別設為  $x, y$ ，整理、化簡後可得：

$$\ddot{x} = -\frac{kx(l-l_0)}{ml}$$

$$\ddot{y} = -\frac{ky(l-l_0)}{lm} + g$$

### (3). 極座標之拉格朗日力學

$$L \equiv T - V = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(l_0 + r)^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{kr^2}{2} + mg(l_0 + r)\cos\theta$$

將兩廣義座標分別設為  $r, \theta$ ，整理、化簡後可得：

$$\ddot{r} = (l_0 + r)\dot{\theta}^2 - \frac{kr}{m} + g\cos\theta$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{2r\dot{\theta} + g\sin\theta}{l_0 + r}$$

## 4.6 實驗模擬

程式使用遞迴來計算，每隔  $dt$  時刻使用 RK4 註[1] 計算並更新下一時刻的位置、速度： $[x, y, \dot{x}, \dot{y}]$ 或是 $[r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}]$ ，軌跡算法如上。

程式碼中的變數即為我們正常在使用的變數，只是變數沒有使用下標。因為目前此程式執行有先後順序，無法像實際運動過程中能量轉換或加速度對速度影響是同時進行的，所以為求真實、減少誤差， $dt$ 設定為越小越好，且總執行時間不可太長，否則會像之前使用 Phythox 做實驗相同，誤差被積分後放大至嚴重影響實驗結果。另外我們使用 `plt.cm.CMRmap` 對圖上色（如圖 4.7.5.2-11）。

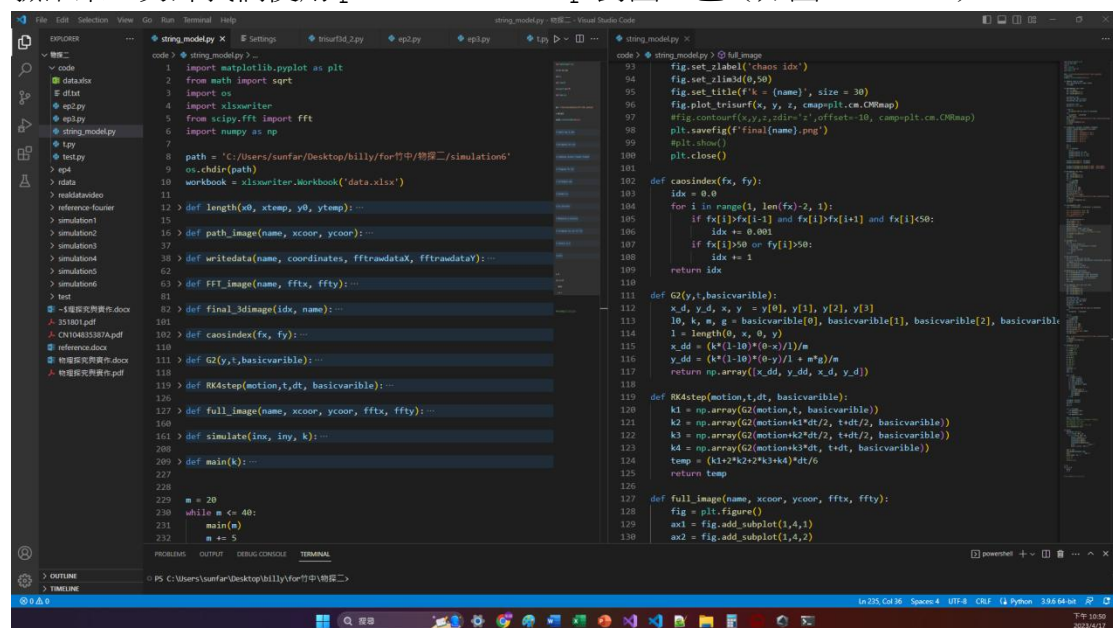


Figure 4.6-1

註[1]：

RK4 (FOURTH ORDER RUNGE-KUTTA) 是一種用直線求曲線近似時降低誤差的方式，有一點泰勒展開的感覺。以四個斜率進行加權平均去近似一小段曲線。而除了 RK4，還有 RK1，RK2，及更高階的 RUNGE-KUTTA method。

見 參考資料[7]



## 4.6.1 PSEUDO CODE

```
import numpy, matplotlib.pyplot, math, os, scipy.fft

void path_image()
void FFT_image()
void final_3d_image(){
    x,y label : x,y coord where we release the pendulum
    z label : chaosidx
}
void writedata()
float get_length()
float chaosidx()
float G(){
    calculate accelerate
    return [q1*dt, q2*dt, q1_d*dt, q2_d*dt]
}
float RK4_step(){
    k1, k2, k3, k4 = G(...)
    return (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
}
float simulate2(){
    //for only one point
    while t <= targettime{
        RK4_step()
        update motion value, time
    }
    path_image(), FFT_image(), writedata()
    return chaosidx()
}
void main(){
    simulate2()
    final_3d_image()
}
```

## 4.7 數據分析與討論

### 4.7.1 混沌指數

黃佳琪在論文中有提到軌跡的複雜程度會與頻譜的複雜程度有關，又頻譜的複雜程度與 noise 與兩頻譜的相關程度（峰值是否成簡單整數比）有關。而每組實驗我們紀錄的數據點相同，因此頻譜強度的放大倍率相同，因此我們定義混沌指數如下：

- (1). 如果強度 $<50$ ，判定為 noise，每有一個 peak 則  $\text{chaos\_idx}$  增加 0.01
- (2). 如果強度 $\geq 50$ ，判定為 dominant frequency， $\text{chaos\_idx}$  增加 1

藉此，我們可以大致看到混沌軌跡會出現的地方。

### 4.7.2 實際實驗

總共做了 22 個釋放點，但因為本實驗所用彈簧有不可壓縮的限制，所以有些在運動過程會撞到( $r = 0$ )導致能量大幅損失，視為無效數據。而其他則繼續做多次實驗直到可視為二維運動。因其主要目的為驗證模擬的準確性，此不多加贅述。

### 4.7.3 模擬實驗

礙於電腦效能與時間壓力，數據點沒辦法做到太細，因此只做 10cm 為單位的格子點的數據。且不做  $x, y$  軸上的點。可以用以下集合示之：

$$\{(x, y) | x = 10t, y = 10s, t \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}\}$$

### 4.7.4 模擬的正確性

此以最簡單且可輕易人工計算的彈簧簡諧震動實驗之

模擬實驗變因： $l_0 = 0.15$ ,  $r = 0.05$ ,  $m = 0.5$ ,  $k = 20$

由理論  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  可求得  $f$  等於  $\sqrt{\frac{10}{\pi^2}} \approx 1$ ，與模擬所得結果相同。

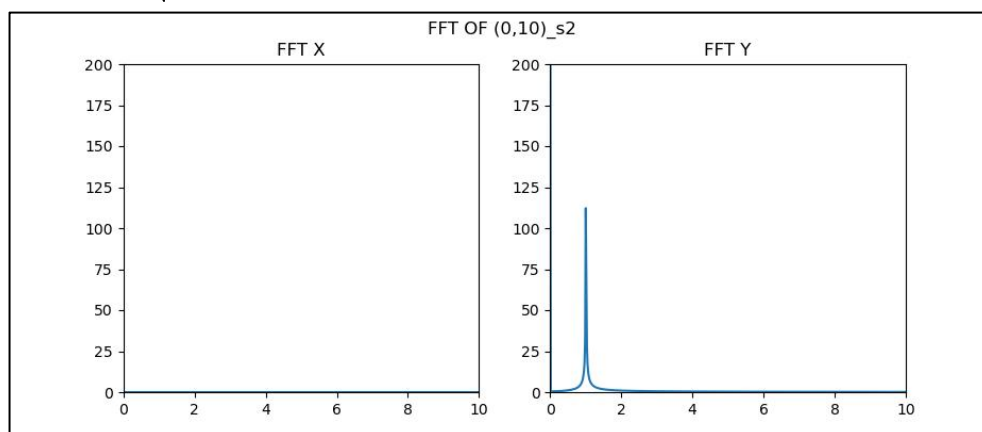


Figure 4.7.4-1

## 4.7.5 數據分析

### 4.7.5.0 名詞定義

- (1). ERROR OOR：擺錘超出實際實驗可達範圍  
(定義為擺錘座標 $y < 0$ )

### 4.7.5.1 軌跡模式

#### 4.7.5.1.1 混沌軌跡

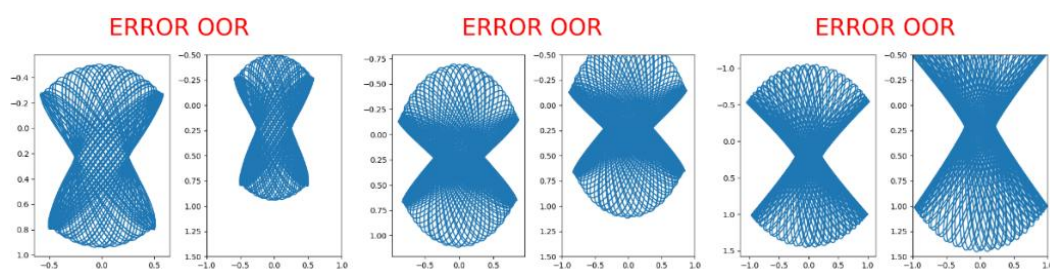


Figure 4.7.5.1-1 ~ Figure 4.7.5.1-3

這三個的是放點位在  $x, y$  軸較大的地方，因此彈簧儲存的位能較重力多，因此會來回擺盪，重力造成偏轉，且因彈力位能大，會衝到  $y$  軸負向。

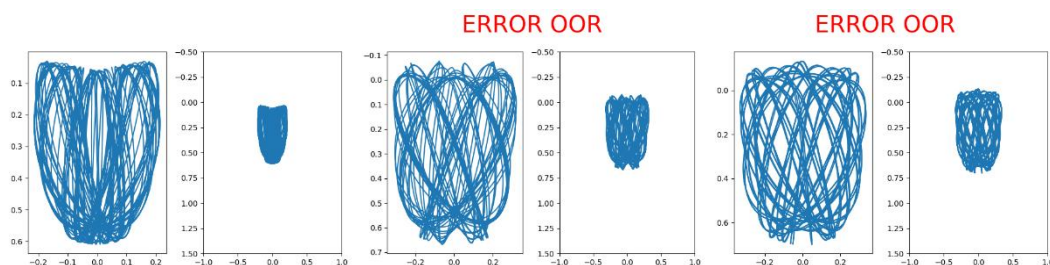


Figure 4.7.5.1-4 ~ Figure 4.7.5.1-6

這就是最明顯的混沌軌跡，出現在較接近平衡位置的地方。

#### 4.7.5.1.2 非混沌軌跡

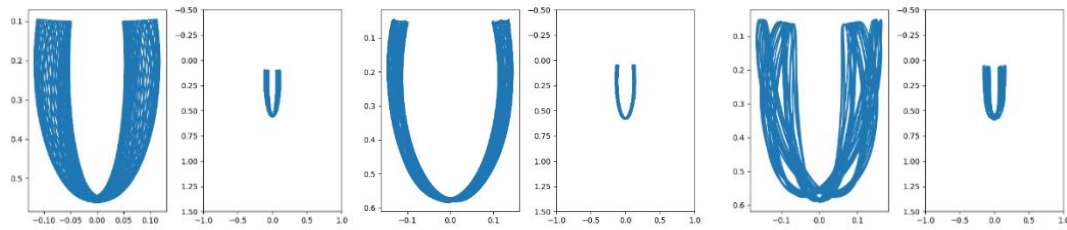


Figure 4.7.5.1-7 ~ Figure 4.7.5.1-9

這三個的釋放點都位在 y 軸較小的地方，軌跡像是常見的單擺，單因為此實驗含有彈簧，上下擺動的速度會比一般單擺還快，所以 U 型的開口不大。

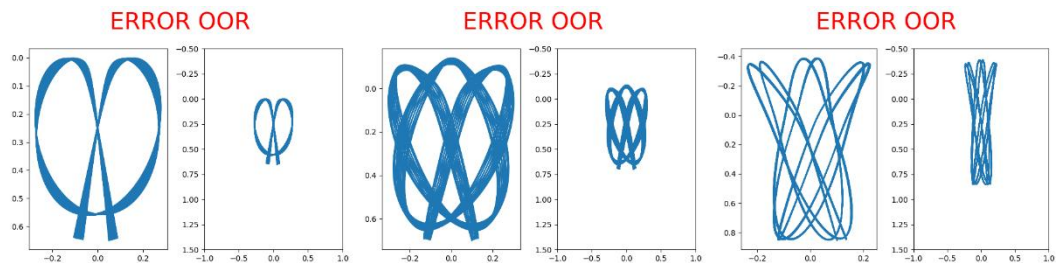


Figure 4.7.5.1-10 ~ Figure 4.7.5.1-12

這三個則是釋放點在 y 軸較大的地方，初始運動方向向上，而在接近原點時因為彈力而向外彈開。但因為釋放時彈力位能較大，常造成衝到 y 軸負向。

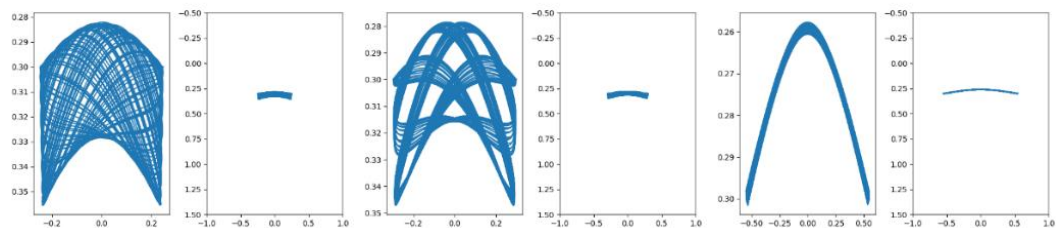


Figure 4.7.5.13-7 ~ Figure 4.7.5.1-15

這三個從等比例的圖可以看到它是左右來回晃動，上下不明顯，只是不等比放大後可以看到前兩個已經有偏轉的趨勢。

#### 4.7.5.2 初速為 0 的個別討論

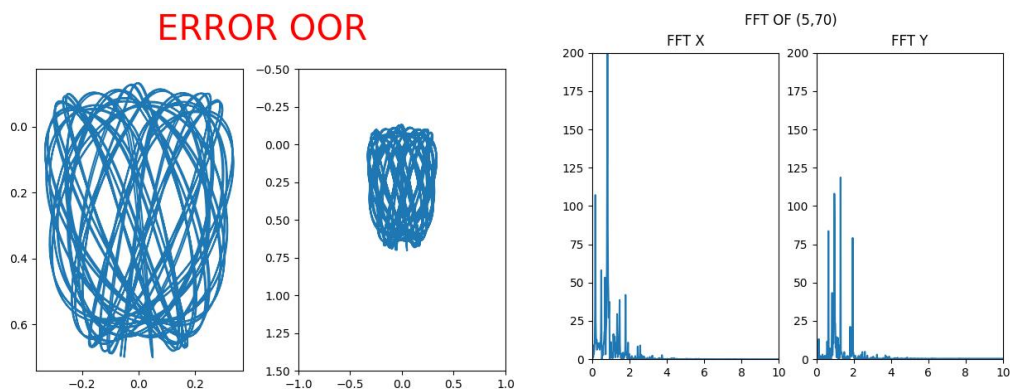


Figure 4.7.5.2-1 ~ Figure 4.7.5.2-2

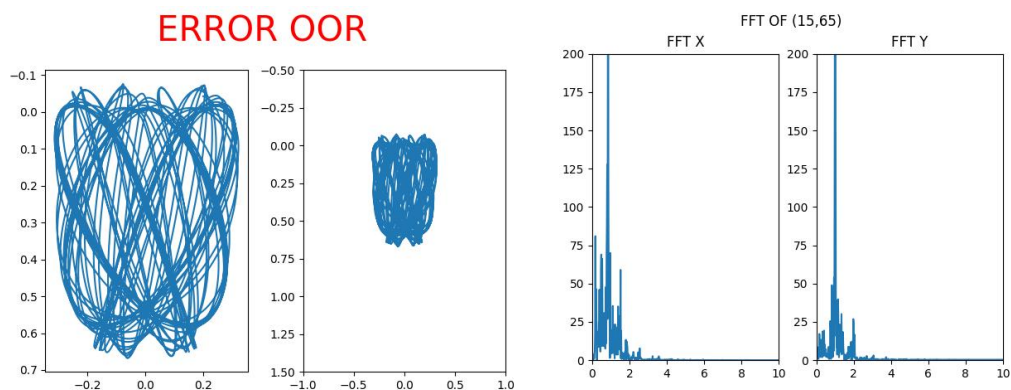


Figure 4.7.5.2-3 ~ Figure 4.7.5.2-4

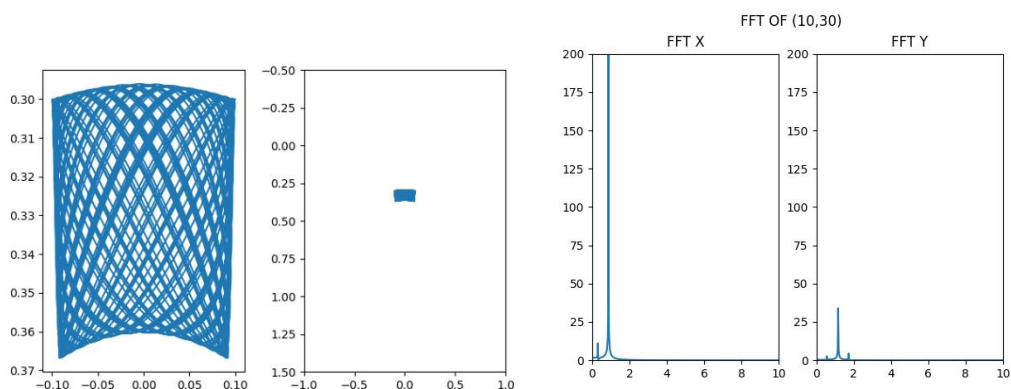


Figure 4.7.5.2-5 ~ Figure 4.7.5.2-6

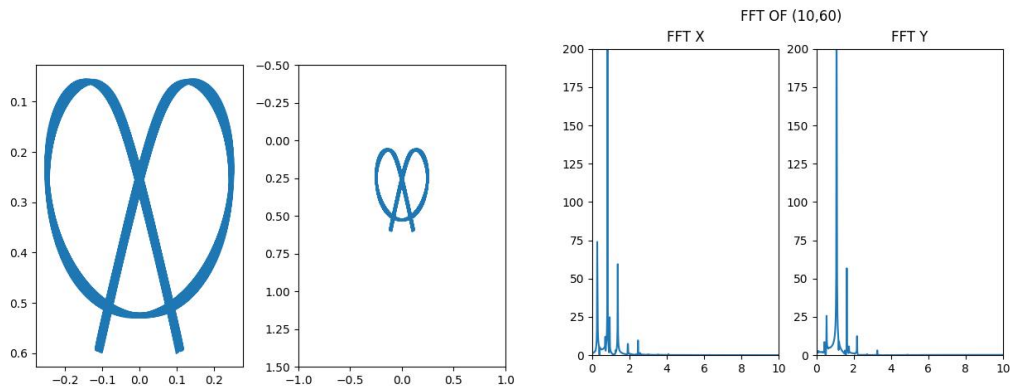


Figure 4.7.5.2-7 ~ Figure 4.7.5.2-8

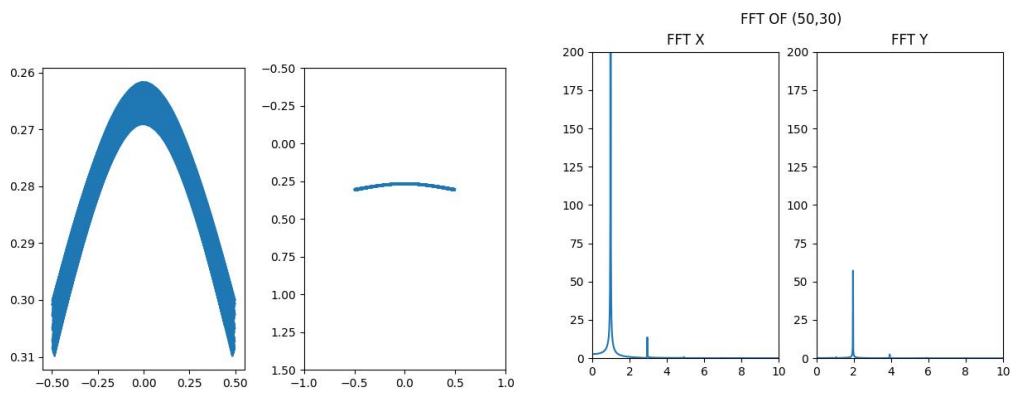


Figure 4.7.5.2-9 ~ Figure 4.7.5.2-10

上面 10 張圖左邊為不等比放大及等比放大的軌跡，右為 x,y 軸的 FFT 頻譜，同一行為同一釋放點。從這些圖不難發現軌跡越簡單，頻譜確實也越簡單。

而以 4.7.1 所提之 chaosidx 換算後我們可以將其繪成一立體圖示之，其中 x,y 軸為釋放點的 x,y 軸，z 軸則為 chaosidx。

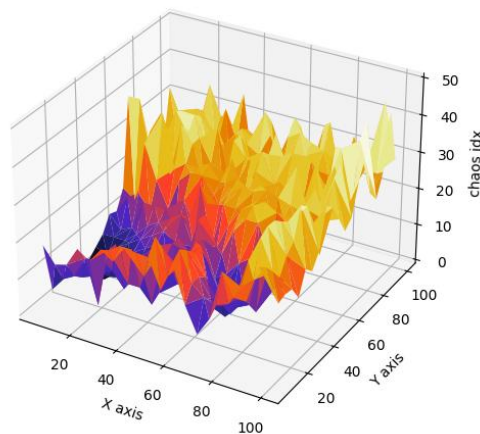


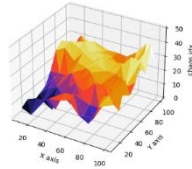
Figure 4.7.5.2-11

### 4.7.5.3 不同初速

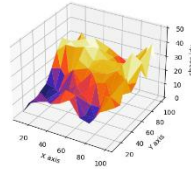
在可將同變因的平面濃縮到一張圖的狀況下，我們就可以更進一步的討論不同變因的平面。但為了加快計算速度，之後的數據將只做 10cm 為單位的格子點。（雖然會失真，但可節省 4 倍的時間且不致嚴重影響結果）

下圖中  $v = (\dot{x}, \dot{y})$ ，且特指為初始值。

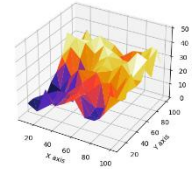
$v = (0.0, 0.0)$



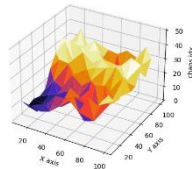
$v = (0.0, 0.2)$



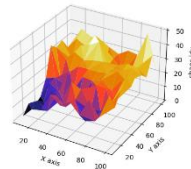
$v = (0.0, 0.4)$



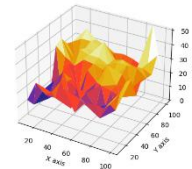
$v = (0.0, 0.6)$



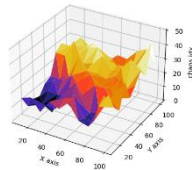
$v = (0.0, 0.8)$



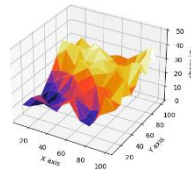
$v = (0.0, 1.0)$



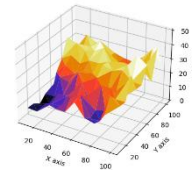
$v = (0.2, 0.0)$



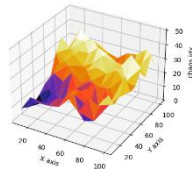
$v = (0.2, 0.2)$



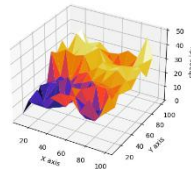
$v = (0.2, 0.4)$



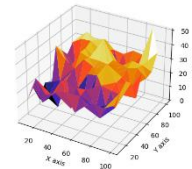
$v = (0.2, 0.6)$



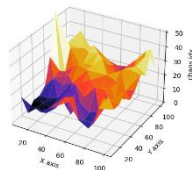
$v = (0.2, 0.8)$



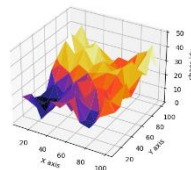
$v = (0.2, 1.0)$



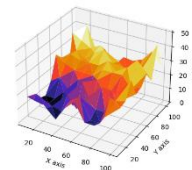
$v = (0.4, 0.0)$



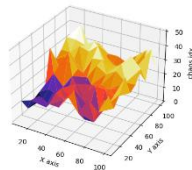
$v = (0.4, 0.2)$



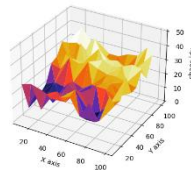
$v = (0.4, 0.4)$



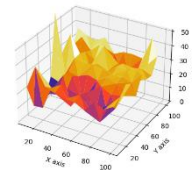
$v = (0.4, 0.6)$



$v = (0.4, 0.8)$



$v = (0.4, 1.0)$





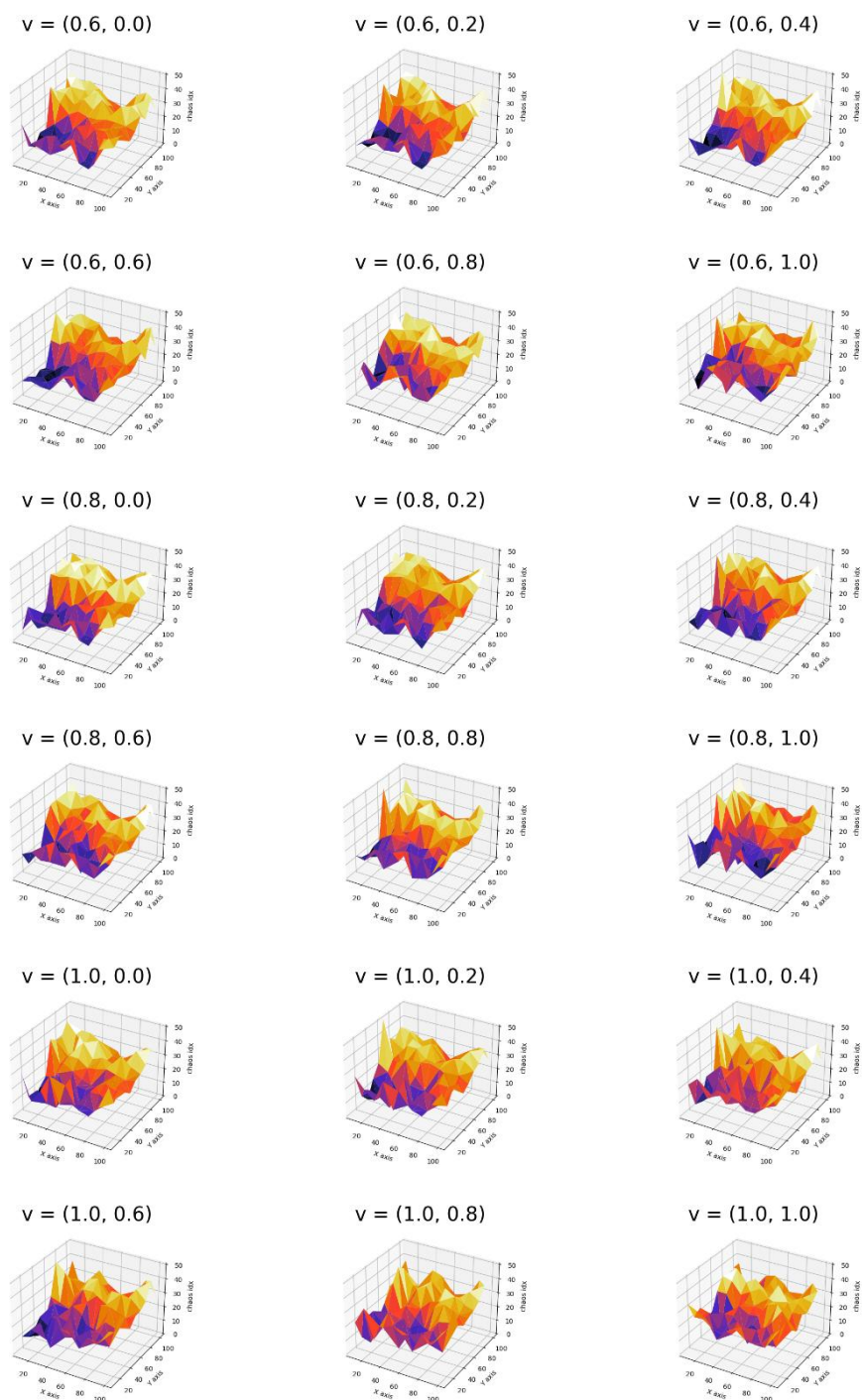


Figure 4.7.5.3-1 ~ Figure 4.7.5.3-36

由此 36 張圖我們可以看到大致上簡單的軌跡（因數值低，圖成紫色，之後稱紫色區塊）會集中在  $x$  軸值較小的時候，而隨著  $x, y$  軸增加，無論初始速度，軌跡都會越來越亂。對此，我們認為是因為當  $x_0$ ,  $y_0$  變大時，彈力未能也會隨之增加，且因為彈力位能正比於身長量的平方，在伸長量大的時候，彈力位能會遠大於重力位能，因此在運動過程會被彈簧主導，而重力則影響其偏轉，導致軌跡雜亂。

（圖十七~圖五十二 的座標軸方向、單位皆與圖二相同）



#### 4.7.5.4 不同質量

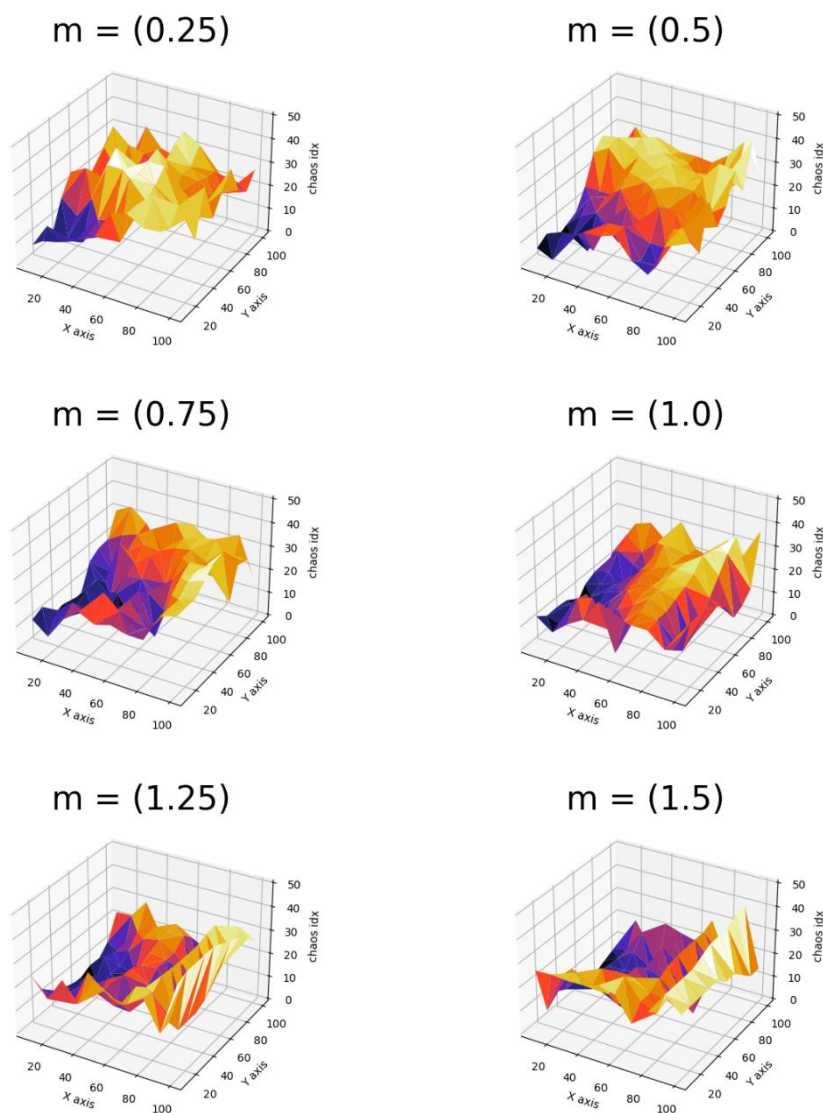


Figure 4.7.5.4-1 ~ Figure 4.7.5.4-6

從此我們可以看出當質量由小變大的時候，紫色區塊的分布由原點先向 x 軸正向擴張，接著向 y 軸正向擴張，最後 x 軸方向又回到較小的地方。

另外我們也發現：

$m = 0.5, 0.75$  的時候出現兩個凹陷的的方：座標(20,20)及(80,20)的位置。

$m = 1.0, 1.25, 1.75$  的圖中， $x = 90$  的位置有出現類似“海溝”的凹陷。

#### 4.7.5.5 不同彈力常數

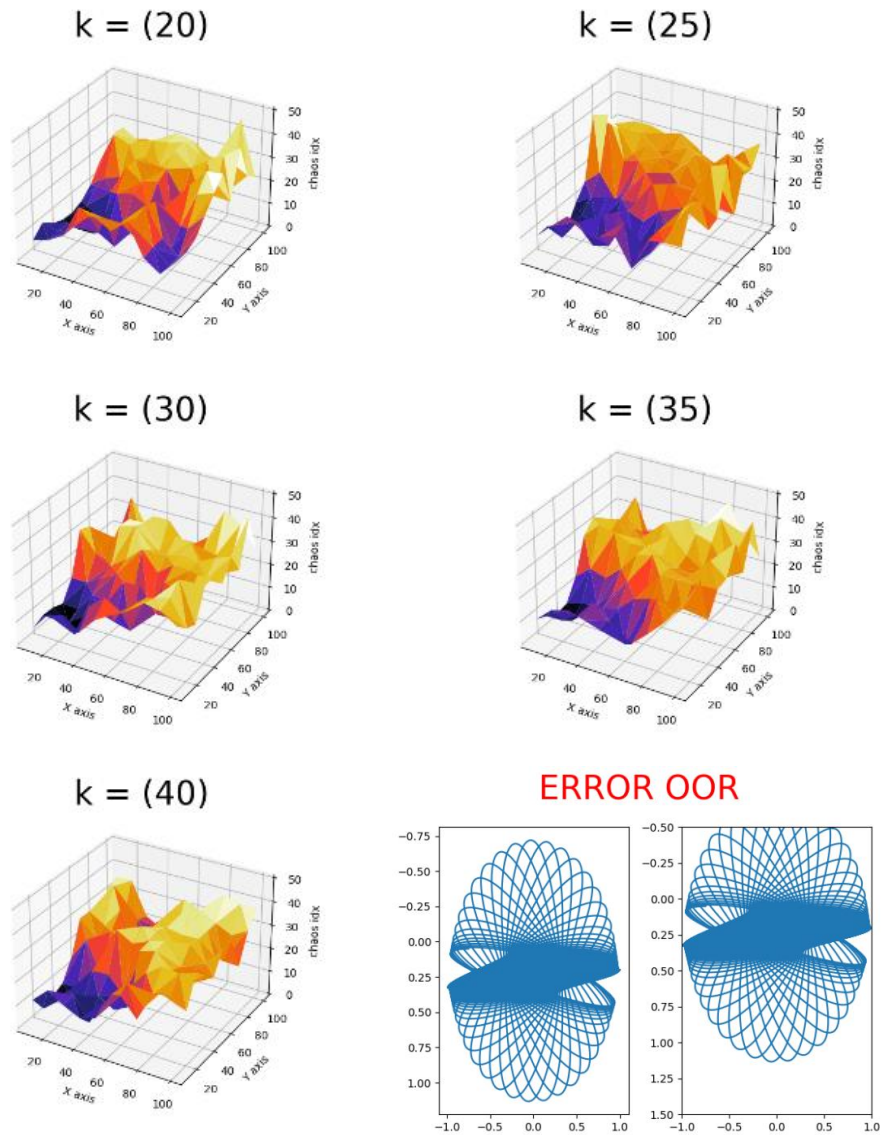


Figure 4.7.5.5-1 ~ Figure 4.7.5.5-6

當彈力常數  $k$  越大時，紫色區塊的分布往原點集中，而外圍的渾沌指數則更高，原因也與 4.7.4.2 相似，彈力常數越大，相同伸長量，彈力位能儲存的越多。且會造成快速的來回擺盪，擺錘甚至冲到  $y < 0$  的地方，因而渾沌。

## 4.7.6 討論

### 4.7.6.1 速度的影響

其中我們比較覺得不合理的是變因為速度的實驗。從其他兩個實驗可以看到能量會影響軌跡的複雜程度，但是動能卻看似沒有很大的影響。另外，紫色區塊沒有大幅度改變也是一個不和預期的地方。我們覺得任何有初速的釋放點都可以回推成其他沒有出速的釋放點。就像是一個最大速率 $v$ ，振幅 $R$ 的簡諧運動在平衡點以 $v$ 釋放會得到在端點靜止釋放一樣的結果。而此理論唯一的問題就是要找到速度為 0 的點。

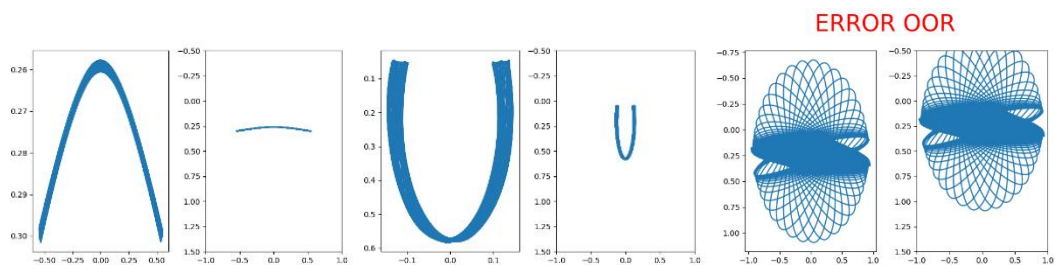


Figure 4.7.6.1-1 ~ Figure 4.7.6.1-3

從上圖我們可以明顯看到前兩張圖軌跡有折返，明顯有速度趨近於 0 的地方，但不見得所有釋放點都有這種轉角，有些可能全部都是曲線而沒有速度趨近於 0 的地方，例如最後一張圖。而且就算有也不一定統一在左下或右下，例如在前兩張圖就明顯不同，所以圖中的紫色區塊也不會往同一個分向平移。也就是說有速度的圖應該要與無速度的圖差異極大，而目前想到比較合理的解釋則是速度不夠大，理論偏移不夠明顯，而最後被失真。

### 4.7.6.2 渾沌指數的計算

另一個則是圖的問題，我們在計算 `chaos_idx` 時尚未找到相關參考資料（熱力學的亂度看似無關），因此沒辦法在短時間內確定 `noise` 與 `dominant frequency (DF)` 對於整個軌跡的影響程度，也就是說我們在 4.7.1 所使用的計算方式中的 0.01 與 1 還需要做調整。另外一個問題則是我們無法很清楚地從釋放點對渾沌程度圖中回推到每個釋放點的原始傅立葉頻譜。因其計算方式我們可以寫成以下數學式：

$$chaosidx = 0.01 * n(peak_{noise}) + n(peak_{DF})$$

而我們都知道無法由一條等式回推二元一次方程式的根。所以整個計算方式都調整的空間，又或是說可以再探討有沒有其他表示方法可以更精確且完整的表示他的混亂程度。另外，對 `peak` 的定義會影響到結果，這也是值得再探討的地方。

## 5 結論

由以上實驗可以發現彈簧擺的軌跡亂度可由幾個因素判斷：

- (1). 初速：雖然會改變軌跡形狀，但是依目前的數據在討論整個平面的時候不會有太大的影響。
- (2). 質量：會直接影響彈簧自然下垂時的平衡點，且由於數據是從(10,10)往上加，因此當釋放點越靠近鉛直平衡點時擺盪震幅越小，軌跡自然也會越簡單，不會能量高而發散。
- (3). 彈力常數：類似質量的影響，釋放時彈簧擁有的位能越大，軌跡通常越亂，因此也導致隨著  $k$  增加，簡單軌跡的分布的地方也往(0,0)集中。

## 6 心得與反思

這次的探究從一開始冷次定律的實驗設計到接下來改變主題成彈簧擺軌跡探究，至最後無數次的裝置改良，過程經歷許多挫折與困難。

而其中我們從原本對彈簧擺見都沒見過的陌生程度到後來從實驗中慢慢摸索出一些規律以及軌跡的特性，確實從中獲益良多。以往我們都只是從已知的知識中挑選主題進行探究，而這次卻跳出舒適圈，從零開始摸索一個完全未知的世界——彈簧擺與渾沌，一路上磕磕撞撞，邊做邊學。幸好擁有彼此使我們能夠一起快速成長。

另外真的很感謝程式輔助處理資料，使得我們不需要人工處理每一筆，只需要將格式固定，結果很快就會自動做好。

## 7 未來展望

未來若有機會繼續研究此主題，我們認為研究方向將會是：

- (1).  $r(t)$ 與 $\theta(t)$ 的關係（本次只討論 $x(t)$ ,  $y(t)$ ）
- (2). chaosidx 的計算方式
- (3). 4.7.6.1 速度的影響 所提到的證明
- (4). 是否可以透過統計的方式整理出一條公式以透果簡單的初始參數計算其渾沌指數

## 8 參考資料

- [1] 李漢光 民國五十五年 分析力學概論  
<https://taiwanebook.ncl.edu.tw/en/book/NCL-000142830/reader>
- [2] NCTU 黃佳琪 2012 利用擺動系統研究失真與混沌  
<https://ir.nctu.edu.tw/bitstream/11536/48773/1/351801.pdf>
- [3] 齊齊哈爾大學 2015 測繪彈簧擺運動軌跡的實驗方法  
<https://patentimages.storage.googleapis.com/a0/02/5e/74ebc0e6625bde/CN104835387A.pdf>
- [4] Simon J.A. Malham (2016) *An introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics*  
<http://www.macs.hw.ac.uk/~simonm/mechanics.pdf>
- [5] J. Kim Vandiver *AN INTRODUCTION TO LAGRANGE EQUATIONS*  
[https://ocw.mit.edu/courses/2-003sc-engineering-dynamics-fall-2011/d1984062464dcc3df68b5741fd37192b/MIT2\\_003SCF11\\_Lagrange.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/2-003sc-engineering-dynamics-fall-2011/d1984062464dcc3df68b5741fd37192b/MIT2_003SCF11_Lagrange.pdf)
- [6] *Notes on Analytical Mechanics*  
<https://www.vanderbilt.edu/AnS/physics/brau/P227a/Notes%20on%20Analytical%20Mechanics.pdf>
- [7] Erik Cheever *Fourth Order Runge-Kutta*  
<https://lpsa.swarthmore.edu/NumInt/NumIntFourth.html>

## 9 附件

### (1). 分工表

林冠維	實驗實作、攝影
林勁博	實驗實作、實驗日誌撰寫
范佑誠	寫程式、數據分析、書面報告撰寫
梁亘念	動畫、PPT 製作、攝影

Table 9-1

### (2). 全部模擬資料之圖檔

[https://drive.google.com/drive/folders/1mOp07x2fB4e8ZG12ont2skuWpFVplAC5?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1mOp07x2fB4e8ZG12ont2skuWpFVplAC5?usp=share_link)

### (3). 程式碼

<https://github.com/billllllllly/billllllllly.git>  
(folder: ElasticPendulumSimulation)