习题课　构造法处理不等关系

题型 1　根据式子结构特征构造

例1　设函数 $f'(x)$是奇函数 $f(x)(x\in R)$的导数，$f(1)=1$，当 $x<0$ 时，$xf'(x)+f(x)<0$，则使 $xf(x)>1$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A. $(-1, 0)\cup(1, +\infty)$　　B. $(-1, 1)$

C. $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$　　D. $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$

【答案】 C

【解析】 设 $F(x)=xf(x)$，易知函数 $F(x)$为偶函数，且当 $x<0$ 时，$F'(x)=xf'(x)+f(x)<0$，故函数 $F(x)$在$(-\infty, 0)$上单调递减，由对称性知，函数 $F(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增．将目标不等式转化为 $F(x)>F(1)=1$，结合函数的单调性得$|x|>1$，解得 $x<-1$ 或 $x>1$，故所求不等式的解集是$(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

例2　已知函数 $f(x)=x\ln x$，若对任意 $x_1>x_2>0$，$\frac{\lambda}{2}(x_1^2-x_2^2)>f(x_1)-f(x_2)$恒成立，则实数 λ 的取值范围为(　　)

A. $[1, e]$　　B. $(-\infty, 1]$　　C. $[e, +\infty)$　　D. $[1, +\infty)$

【答案】 D

【解析】由$\frac{\lambda}{2}(x_1^2-x_2^2)>f(x_1)-f(x_2)$，得$\frac{\lambda}{2}x_1^2-x_1\ln x_1>\frac{\lambda}{2}x_2^2-x_2\ln x_2$.令 $g(x)=\frac{\lambda}{2}x^2-x\ln x$，则问题可以转化为对任意 $x_1>x_2>0$，$g(x_1)>g(x_2)$恒成立，即函数 $g(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增．因为 $g'(x)=\lambda x-\ln x-1$，故问题转化为 $g'(x)\geqslant 0$ 在$(0, +\infty)$上恒成立，所以 $\lambda\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$在$(0, +\infty)$上恒成立，即转化为 $\lambda\geqslant\left[\frac{\ln x+1}{x}\right]_{\max}$.令 $h(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则 $h'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，所以当 $x\in(0, 1)$时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1, +\infty)$时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$在$(0, 1)$上单调递增，在$(1, +\infty)$上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，所以 $\lambda\geqslant 1$.

题型 2　作差构造

例3　求证：$\frac{xe^x}{e}\geqslant\ln x+x$.

【解析】 令 $f(x)=\frac{xe^x}{e}-x-\ln x$，$x>0$，

则 $f'(x)=\frac{xe^x+e^x}{e}-1-\frac{1}{x}=(x+1)\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)$.

令 $F(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，则 $F'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，

故函数 $F(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增，$F(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$F(x)<0$，从而 $f'(x)<0$；

当 $x>1$ 时，$F(x)>0$，从而 $f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$在$(0, 1)$上单调递减，在$(1, +\infty)$上单调递增，所以 $f(x)$的最小值为 $f(1)=0$，

所以当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=0$，即$\frac{xe^x}{e}-\ln x-x\geqslant 0$，

从而$\frac{xe^x}{e}\geqslant \ln x+x$，即得证.

题型 3　分离参数构造

例4　已知关于 x 的不等式 $x^2+1\geqslant\frac{ax^3+x^2+ax}{e^x}$ 在$(0，+\infty)$上恒成立，则实数 a 的取值范围为(　　)

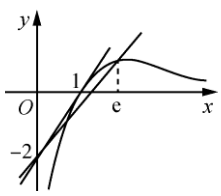
A. $(-\infty，e]$　　B. $\left(-\infty，e-\frac{1}{2}\right]$　　C. $(-\infty，e-1]$　　D. $(-\infty，e-2]$

【答案】 B

【解析】 由题意知 $x>0$，问题转化为 $a\leqslant\frac{(x^2+1)e^x-x^2}{x^3+x}=\frac{e^x}{x}-\frac{x}{x^2+1}$.令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{x}{x^2+1}$，故 $a\leqslant[g(x)]_{\min}$，而 $g'(x)=(x-1)\left[\frac{e^x}{x^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\right]$.令 $g'(x)>0$，解得 $x>1$；令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<1$，故 $g(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，故 $g(x)_{\min}=g(1)=e-\frac{1}{2}$，故 $a\leqslant e-\frac{1}{2}$.

变式　设函数 $f(x)=\ln x-mx^2+2x$，若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)>0$，求实数 m 的取值范围.

【解析】$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$.当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-2mx+2>0$，$f(x)$单调递增，存在无数个整数 x_0，使得 $f(x_0)>0$，不符合题意．当 $m>0$ 时，由于 $x>0$，所以$\frac{\ln x}{x}>mx-2$.令 $y=\frac{\ln x}{x}$，$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$y'>0$；当 $x>e$ 时，$y'<0$，所以函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在$(0，e)$上单调递增，在$(e，+\infty)$上单调递减，所以 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的极大值$\frac{1}{e}$也是最大值，且 $x\to 0$ 时，$y\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$y\to 0$.作出函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 和 $y=mx-2$ 的大致图象，如图，过点$(0，-2)$的直线 $y=mx-2$ 介于$(1，0)$，$\left(2，\frac{\ln 2}{2}\right)$之间时满足条件，直线 $y=mx-2$ 过点$(1，0)$时，m 的值为 2，直线 $y=mx-2$ 过点$(2，f(2))$时，m 的值为$\frac{\ln 2}{4}+1$，由图象可知，m 的取值范围是$\left[\frac{\ln 2}{4}+1，2\right)$.



(变式)

方法提炼：

构造函数是解决导数问题的基本方法.

①作差或变形作差构造函数 f(x)＝g(x)－h(x)，转化为求证 f(x)最值；

②分离参数或分离函数构造函数 g(a)≥f(x)(或 g(a)≤f(x))，转化为求解 f(x)最值；

③根据式子特征构造函数，主要依靠条件或问题中“显然”的特征构造相应函数.

练习部分

一、 单项选择题(每个 5 分，共 20 分)

1. 已知函数 $y=f(x)$在 R 上可导且满足不等式 $xf'(x)+f(x)>0$ 恒成立，对任意正数 a，b，若 $a<b$，则必有(　　)

A. $af(b)<bf(a)$　B. $bf(a)<af(b)$　C. $af(a)<bf(b)$　D. $bf(b)<af(a)$

【答案】 C

【解析】 构造函数 $F(x)=xf(x)$，则 $F'(x)=xf'(x)+f(x)>0$，从而 $F(x)$在 R 上单调递增．因为 $a<b$，所以 $F(a)<F(b)$，即 $af(a)<bf(b)$.故选 C.

2. 已知关于 x 的不等式 $x^3-ax^2\geqslant \ln x$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $(-\infty，1]$　B. $(0，1]$　C. $\left(0，\dfrac{1}{e}\right)$　D. $(-\infty，0]$

【答案】 A

【解析】 由关于 x 的不等式 $x^3-ax^2\geqslant \ln x$ 对 $x>0$ 恒成立，可得 $a\leqslant\dfrac{x^3-\ln x}{x^2}$ 恒成立．设 $f(x)=\dfrac{x^3-\ln x}{x^2}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^3-1+2\ln x}{x^3}$，令 $g(x)=x^3-1+2\ln x$，$g'(x)=3x^2+\dfrac{1}{x}>0$，可得 $g(x)=x^3-1+2\ln x$ 在$(0，+\infty)$上单调递增，且 $g(1)=0$，当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，可得 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值 1，且为最小值，则 $a\leqslant 1$，即 a 的取值范围是$(-\infty，1]$.

3. 已知 $f(x)=a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-2\ln x(a>0)$在$[2，+\infty)$上为单调增函数，则 a 的取值范围为(　　)

A. $\left[\dfrac{4}{5}，+\infty\right)$　B. $\left(\dfrac{4}{5}，+\infty\right)$　C. $[1，+\infty)$　D. $(1，+\infty)$

【答案】 A

【解析】 由题意知 $f'(x)=a\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x}=\dfrac{ax^2-2x+a}{x^2}\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[2，+\infty)$恒成立，即 $ax^2-2x+a\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[2，+\infty)$恒成立，所以 $a\geqslant\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}$.令 $y=x+\dfrac{1}{x}$，则 $y'=1-\dfrac{1}{x^2}>0$，故 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在$[2，+\infty)$上单调递增，所以 $y=x+\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{5}{2}$，则 $0<\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}\leqslant\dfrac{4}{5}$，所以 a 的取值范围为$\left\{a\middle|a\geqslant\dfrac{4}{5}\right\}$.

4. 已知定义在$(0，+\infty)$上的函数 $f(x)$，$f'(x)$是 $f(x)$的导函数，满足 $xf'(x)-f(x)<0$，且 $f(2)=2$，则 $f(e^x)-e^x>0$ 的解集是(　　)

A. $(0，e^2)$　　B. $(\ln 2，+\infty)$　　C. $(-\infty，\ln 2)$　　D. $(e^2，+\infty)$

【答案】 C

【解析】 设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，所以 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减. 因为$f(2)=2$，所以$g(2)=\dfrac{f(2)}{2}=1$，不等式$f(e^x)-e^x>0$等价于$g(e^x)=\dfrac{f(e^x)}{e^x}>1=g(2)$，所以$0<e^x<2$，解得 $x<\ln 2$，所以原不等式的解集为$(-\infty，\ln 2)$.

二、 多项选择题(每个 5 分，共 15 分)

5. 设 $f'(x)$是函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$的导函数，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $2f(x)+xf'(x)>0$，则下列判断一定正确的是(　　)

A. $4f(2)>f(1)$　　B. $f(x)$为增函数　C. $f(x)$没有零点　　D. $f(x)$没有极值点

【答案】 AC

【解析】 令 $g(x)=x^2f(x)$，则 $g'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]$，由题意知 $g(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增，所以 $g(2)>g(1)$冰 $4f(2)>f(1)$，所以选项 A 正确．因为 $g(0)=0$，所以当 $x\neq 0$ 时，$g(x)>0$，即 $f(x)>0$.又由 $2f(x)+xf'(x)>0$ 知 $f(0)>0$，所以对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)>0$，所以选项 C 正确．取 $f(x)=x^2+1$，则 $f(x)$满足题设条件，所以选项 B，D 错误.

6. 下列判断正确的是(　　)

A. $2e^3>3e^2$　　B. $\dfrac{5}{3}e^3>e^5$　　C. $2e^{\frac{1}{2}}<3e^{\frac{1}{3}}$　　D. $3e^{\frac{1}{3}}<e$

【答案】 AC

【解析】 构造函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，当 $x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$是增函数，当$x\in(-\infty，1)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$是减函数. 对于 A，$2e^3>3e^2$宂$\dfrac{e^3}{3}>\dfrac{e^2}{2}$，故 A 正确；对于 B，$\dfrac{5}{3}e^3>e^5$宂$\dfrac{e^3}{3}>\dfrac{e^5}{5}$，故 B 错误；对于 C，$2e^{\frac{1}{2}}<3e^{\frac{1}{3}}$宂$\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}<\dfrac{e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}$，故 C 正确；对于 D，$3e^{\frac{1}{3}}<e$宂$\dfrac{e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}<\dfrac{e}{1}$，故 D 错误.

7. 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{m}{8x}$，若挩 $x_1，x_2\in(1，+\infty)$，且 $x_1<x_2$，都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0.5$，则实数 m 的值可以为(　　)

A. e　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】 CD

【解析】 因为挩 $x_1，x_2\in(1，+\infty)$，且 $x_1<x_2$，都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0.5$，所以当$x_1<x_2$时，$2f(x_1)-x_1>2f(x_2)-x_2$对挩 $x_1，x_2\in(1，+\infty)$恒成立，令 $g(x)=2f(x)-x=2\ln x+\dfrac{m}{4x}-x(x>1)$，则 $g(x)$在$(1，+\infty)$上单调递减，所以 $g'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{m}{4x^2}-1\leqslant 0$ 在$(1，+\infty)$上恒成立，所以 $m\geqslant 8x-4x^2$在$(1，+\infty)$上恒成立，所以只需 $m\geqslant[(8x-4x^2)]_{\max}$.又当 $x>1$ 时，$[(8x-4x^2)]_{\max}<4$，所以 $m\geqslant 4$，所以 m 的取值范围为$[4，+\infty)$，由选项可知，只有 C，D 符合条

件．

三、 填空题(每个5分，共15分)

8. 已知定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(1)=2$，且当$x>0$时，恒有$f'(x)>2$，则$f(x)>2x$的解集是________.

【答案】 $(-1，0)\cup(1，+\infty)$

【解析】 设$g(x)=f(x)-2x$，易知$g(x)$是奇函数，因为$g'(x)=f'(x)-2>0$，所以$g(x)$单调递增，结合函数图象可知所求解集为$(-1，0)\cup(1，+\infty)$.

9. 已知不等式$x-2-ae^{-x}\geqslant 0$对任意的$x\in R$恒成立，则满足条件的实数a的取值集合是________.

【答案】 $(-\infty，-e]$

【解析】 $x-2-ae^{-x}\geqslant 0$，即$a\leqslant(x-2)e^{x}$对任意的$x\in R$恒成立．令$f(x)=(x-2)e^{x}$，则$f'(x)=(x-1)e^{x}$，易得当$x>1$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；当$x<1$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，故当$x=1$时，函数$f(x)$取得最小值$f(1)=-e$，故$a\leqslant -e$.

10. 已知函数$f(x)=\ln x$，若$af(x)\leqslant e^{x-1}-1$恒成立，则实数a的取值集合是________.

【答案】 $\{1\}$

【解析】设$g(x)=af(x)-e^{x-1}+1=a\ln x-e^{x-1}+1$，$g'(x)=\dfrac{a}{x}-e^{x-1}$.又$g(x)\leqslant g(1)=0$，故$x=1$是$y=g(x)$的极大值点，所以$g'(1)=a-1=0$，$a=1$.另一方面，当$a=1$时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-e^{x-1}$，$g'(1)=0$，$g'(x)$在区间$(0，+\infty)$上单调递减，故$g(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，所以$g(x)\leqslant g(1)=0$，$f(x)\leqslant e^{x-1}-1$恒成立．

四、 解答题(第11，12题各15分，第13题20分，共50分)

11. 求证：$e^{x}>x>\ln x$.

【解析】 令$g(x)=e^{x}-x$，所以$g'(x)=e^{x}-1$，

又因为$x>0$，

所以$e^{x}>e^{0}=1$，即$g'(x)>0$，$g(x)$在区间$(0，+\infty)$上单调递增；

所以$g(x)=e^{x}-x>g(0)=1>0$，所以$e^{x}>x$.①

令$h(x)=x-\ln x$，则$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，

当$x\in(0，1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在区间$(0，1)$上单调递减；

当$x\in(1，+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在区间$(1，+\infty)$上单调递增；

所以当$x=1$时，$h(x)$取得极小值，也是最小值，

且$h(1)=1>0$，

所以$h(x)=x-\ln x\geqslant h(1)=1>0$，所以$x>\ln x$.②

由①②得$x>0$时，$e^{x}>x>\ln x$成立．

12. 已知函数$f(x)=x-\ln x$，$g(x)=ae^{x}$.

(1) 求函数$f(x)$的单调区间；

(2) 求证：当$a\geqslant\dfrac{1}{e}$时，$xf(x)\leqslant g(x)$.

【解析】 (1) 函数$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$.

由$f(x)=x-\ln x$，得$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

当$x\in(0，1)$时，$f'(x)<0$；

当$x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$的单调减区间是(0，1)，单调增区间是(1，$+\infty$).

(2) 要证 $xf(x)\leqslant g(x)$，

即证 $x(x-\ln x)\leqslant ae^{x}$，即证 $a\geqslant\dfrac{x^{2}-x\ln x}{e^{x}}$.

设 $h(x)=\dfrac{x^{2}-x\ln x}{e^{x}}$ ，

则 $h'(x)=\dfrac{-x^{2}+2x-1+x\ln x-\ln x}{e^{x}}$

$=\dfrac{(\ln x-x+1)(x-1)}{e^{x}}$ ，

由(1)可知 $f(x)\geqslant f(1)=1$，即 $\ln x-(x-1)\leqslant 0$，

于是，当 $x\in(0，1)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

当 $x\in(1，+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减.

所以当 $x=1$ 时，$h(x)$取得最大值，

$h(x)_{\max}=\dfrac{1-0}{e}=\dfrac{1}{e}$ ，

所以当 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$ 时，$xf(x)\leqslant g(x)$.

13. 已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+x^{2}+1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2) 若对任意不相等的 x_1，$x_2\in(0，+\infty)$，恒有$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$成立，求非负实数 a 的取值范围.

【解析】 (1) 因为 $f(x)$的定义域为(0，$+\infty$)，$f'(x)=\dfrac{a+1}{x}+2x$.

所以当 $a+1\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以当 $a\geqslant -1$ 时，函数 $f(x)$在区间(0，$+\infty$)上单调递增.

当 $a+1<0$，即 $a<-1$ 时，函数 $f(x)$在区间$\left(0，\sqrt{\dfrac{-a-1}{2}}\right)$上单调递减，在区间$\left(\sqrt{\dfrac{-a-1}{2}}，+\infty\right)$上单调递增.

(2) 不妨设 $x_1>x_2$，又因为 $a\geqslant 0$，

所以函数 $f(x)$在区间(0，$+\infty$)上单调递增，

$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$恒成立等价于 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant 4x_1-4x_2$ 恒成立，

即 $f(x_1)-4x_1\geqslant f(x_2)-4x_2$ 恒成立.

令 $g(x)=f(x)-4x$，$x\in(0，+\infty)$，

则函数 $g(x)$为单调增函数，即 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立.

$g'(x)=\dfrac{a+1}{x}+2x-4=\dfrac{2x^{2}-4x+(a+1)}{x}$ ，

令 $h(x)=2x^{2}-4x+a+1$，$x\in(0，+\infty)$，

因为 $h(x)_{\min}=h(1)=a-1$，所以 $a\geqslant 1$，

故 a 的取值范围为[1，$+\infty$).