习题课　函数零点问题

题型 1　求函数零点

例1　(1) 求函数 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ 的零点；

(2) 求函数 $f(x)=e^{2x}+x-1$ 的零点.

【解析】(1) 令 $f(x)=x^3-2x^2-x+2=(x-2)(x-1)(x+1)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=2$，故函数零点为-1，1，2.

(2) 因为 $f'(x)=2e^{2x}+1>0$，所以 $f(x)$在 R 上单调递增，而 $f(0)=0$，所以函数 $f(x)=e^{2x}+x-1$ 有且只有一个零点 0.

题型 2　判断零点个数

例2　已知函数 $f(x)=x^2+x-2-\ln x$，试确定该函数零点的个数.

【解析】函数 $f(x)=x^2+x-2-\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$，则 $f'(x)=2x+1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x}$

$=\frac{(2x-1)(x+1)}{x}$，

令 $f'(x)>0$ 冰 $x>\frac{1}{2}$，令 $f'(x)<0$ 冰 $0<x<\frac{1}{2}$，

即 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，

则当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$有极小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}+\ln 2$，无极大值，且 $f(x)$的极小值即为最小值.

又有 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)>0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}+\ln 2<0$，$f(e^2)>0$，

所以函数 $f(x)$在$\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},e^2\right)$内各有一零点，

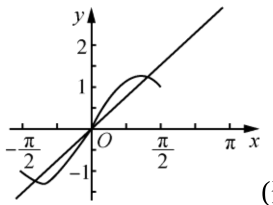
所以 $f(x)$有两个零点.

变式　已知定义在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的函数 $f(x)=\sin x\cdot(\cos x+1)-mx$，则该函数的零点个数最多为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 5

【答案】 C

【解析】令 $g(x)=\sin x(\cos x+1)$，则 $g'(x)=(2\cos x-1)(\cos x+1)$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数；当 $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$为增函数；当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数. 分别画出 $y=g(x)=\sin x(\cos x+1)$与 $y=mx$ 的图象，如图所示，则由图象知交点的个数最多为 3，故该函数的零点个数最多为 3.



(变式)

题型 3　根据零点个数求参数

例3　已知函数 $g(x)=\frac{2}{x}+\ln x+x-2-b(b\in R)$在区间$[e^{-1}，e]$上有两个零点，求实数 b 的取值范围.

【解析】因为 $g(x)=\frac{2}{x}+\ln x+x-2-b$，所以 $g'(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2}=\frac{(x+2)(x-1)}{x^2}$，所以 $g(x)$在$[e^{-1}，1]$上是减函数，在$(1，e]$上是增函数.

因为 $g(x)$在区间$[e^{-1}，e]$上有两个零点，

所以$\begin{cases} g(1)=2+0+1-2-b<0, \\ g(e^{-1})=2e-1+\frac{1}{e}-2-b\geqslant 0, \\ g(e)=\frac{2}{e}+1+e-2-b\geqslant 0, \end{cases}$

解得 $1<b\leqslant\frac{2}{e}+e-1$.

变式　已知函数 $f(x)=ax+x\ln x$ 在 $x=1$ 处取得极值.

(1) 求 $f(x)$的单调区间；

(2) 若 $y=f(x)-m-1$ 在定义域内有两个不同的零点，求实数 m 的取值范围.

【解析】(1) 函数 $f(x)=ax+x\ln x$ 的定义域为$(0，+\infty)$.$f'(x)=a+\ln x+1$.

因为 $f'(1)=a+1=0$，解得 $a=-1$.

当 $a=-1$ 时，$f(x)=-x+x\ln x$，

即 $f'(x)=\ln x$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>1$；

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<1$.

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值，$f(x)$的单调增区间为$(1，+\infty)$，单调减区间为$(0，1)$.

(2) $y=f(x)-m-1$ 在$(0，+\infty)$内有两个不同的零点，可转化为 $y=f(x)$与 $y=m+1$ 的图象有两个不同的交点.

由(1)知，$f(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，$f(x)_{min}=f(1)=-1$.

由题意得 $m+1>-1$，即 $m>-2$.①

当 $0<x<e$ 时，$f(x)=x(-1+\ln x)<0$；

当 $x>e$ 时，$f(x)>0$.

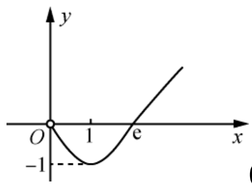
当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$；

当 $x\to+\infty$时，显然 $f(x)\to+\infty$.

由图象可知 $m+1<0$，即 $m<-1$，②

由①②可得 $-2<m<-1$，

所以 m 的取值范围是$(-2，-1)$.



(变式)

方法提炼：①研究函数零点情况，可以通过分析函数的单调性、最大值、最小值、变化规律等，明确函数图象的准确走势规律来获取；

②已知函数零点情况时，常通过分离参数法、分类讨论法等确定参数范围；

③确定函数零点具体范围时，需要依据零点存在性定理．

练习部分

一、　单项选择题(每个5分，共20分)

1. 已知函数 $f(x)=2^x+2x-5$，则函数 $f(x)$ 的零点所在区间为(　　)

A. (0，1)　　B. (1，2)　　C. (2，3)　　D. (3，4)

【答案】 B

【解析】 经计算可知 $f(1)=2+2-5=-1<0$，$f(2)=4+4-5=3>0$，根据零点存在性定理可得函数的零点所在区间为(1，2).

2. 已知函数 $f(x)=\sin x+x^3+3x$，则函数 $f(x)$ 的零点个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】 B

【解析】 易知 $f(x)=\sin x+x^3+3x$ 为奇函数，且 $f(0)=0$.当 $x>0$ 时，$f'(x)=\cos x+3x^2+3>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，根据奇函数的对称性可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty，0)$ 上单调递增，故函数 $f(x)$ 在R上单调递增，$f(0)=0$，即函数 $f(x)$ 只有一个零点．

3. 函数 $f(x)=x^2-6x+2e^x$ 的极值点所在的区间为(　　)

A. (0，1)　　B. (−1，0)　　C. (1，2)　　D. (−2，−1)

【答案】 A

【解析】 因为 $f(x)=x^2-6x+2e^x$，所以 $f'(x)=2x-6+2e^x$，且函数 $f'(x)$ 单调递增．又因为 $f'(0)=-6+2e^0=-4<0$，$f'(1)=-4+2e>0$，所以函数 $f'(x)$ 在区间(0，1)内存在唯一的零点，即函数 $f(x)$ 的极值点在区间(0，1)内．

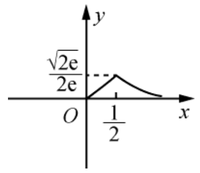
4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$，若关于 x 的方程 $f(x)-m+1=0$ 恰好有2个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围为(　　)

A. $\left(1，\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}+1\right)$　　B. $\left(0，\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}\right)$　　C. $\left(1，\dfrac{1}{e}+1\right)$　　D. $\left(\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}，1\right)$

【答案】 A

【解析】 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$，$f'(x)=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}$，则当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $\left(0，\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2}，+\infty\right)$ 上单调递减，$f(x)_{极大值}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2e}}{2e}$.函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，若关于 x 的方程 $f(x)-m+1=0$ 恰好有2个不相等的实数根，则 $0<m-$

$1<\frac{\sqrt{2e}}{2e}$ ，即 $1<m<1+\frac{\sqrt{2e}}{2e}$.



(第 4 题)

二、 多项选择题(每个 5 分，共 15 分)

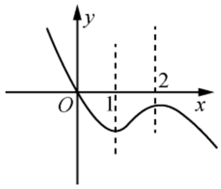
5. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx(a<0)$的导函数 $y=f'(x)$的两个零点为 1，2，则下列结论正确的有(　　)

A. abc<0　　　　　*B*. f(x)在区间[0，3]上的最大值为 0

C. f(x)只有一个零点　　*D*. f(x)的极大值是正数

【答案】 *BC*

【解析】 $f(x)=ax^3+bx^2+cx(a<0)$，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，由题意得 1，2 是方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的根，故 $b=-\frac{9}{2}a>0$，$c=6a<0$，故 abc>0，故 *A* 错误；$f(x)=ax^3-\frac{9}{2}ax^2+6ax$，显然 f(x)在(－∞，1)上单调递减，在(1，2)上单调递增，在(2，＋∞)上单调递减，故 f(x)在[0，1)上单调递减，在(1，2)上单调递增，在(2，3]上单调递减，而 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{5}{2}a<0$，$f(2)=2a<0$，$f(3)=\frac{9}{2}a<0$，故 f(x)在[0，3]上的最大值是 0，故 *B* 正确；函数 f(x)的大致图象如图所示，故函数 f(x)只有 1 个零点，故 *C* 正确，*D* 错误.



(第 5 题)

6. 满足 $h(x)=f(x)-g(x)$在(0，＋∞)上有唯一零点的有(　　)

A. $f(x)=e^x$，$g(x)=x+1$　　　　*B*. $f(x)=\ln x$，$g(x)=x-1$

C. $f(x)=\ln(x+1)$，$g(x)=x$　　　　*D*. $f(x)=\ln\frac{1}{x}$，$g(x)=\frac{1}{x}+1$

【答案】 *ABD*

7. 已知函数 $f(x)=\ln x-mx$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则(　　)

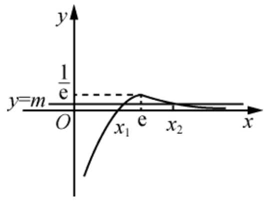
A. $0<x_1<1$　　　　*B*. $x_2>e$

C. $0<m<\frac{1}{e}$　　　　*D*. x_2-x_1 的值随 m 的增大而减小

【答案】 *BCD*

【解析】 由 $f(x)=\ln x-mx=0$，得 $\ln x=mx$，即 $m=\frac{\ln x}{x}(x>0)$.令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，则当 $x\in(0,e)$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)<0$，故 g(x)在(0，*e*)

上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，当$x=e$时，$g(x)$取得最大值为$g(e)=\frac{1}{e}$.又当$x\to0$时，$g(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$g(x)\to0$，作出函数$g(x)$的图象，如图所示，由图象可知：$x_2>e$，$0<m<\frac{1}{e}$，x_2-x_1的值随m的增大而变小.



(第7题)

三、 填空题(每个5分，共15分)

8. 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}\ln x+x-2$，则该函数的零点个数为________.

【答案】 1

【解析】由函数$f(x)=\frac{1}{2}\ln x+x-2$，$x>0$，得$f'(x)=\frac{1}{2x}+1>0$，故函数$f(x)$是增函数，又因为$f(1)=-1<0$，$f(e)>0$，所以函数$f(x)$的零点个数为1.

9. 若函数$f(x)=\frac{ax-a}{e^x}+1(a<0)$没有零点，则实数a的取值范围为________.

【答案】 $(-e^2,0)$

【解析】 $f'(x)=\frac{ae^x-(ax-a)e^x}{e^{2x}}=\frac{-a(x-2)}{e^x}$ $(a<0)$.当$x<2$时，$f'(x)<0$；当$x>2$时，$f'(x)>0$，所以当$x=2$时，$f(x)$有极小值$f(2)=\frac{a}{e^2}+1$.若使函数$f(x)$没有零点，当且仅当$f(2)=\frac{a}{e^2}+1>0$，解得$a>-e^2$，因此$-e^2<a<0$.

10. 若函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1-a}{2}x^2-ax-a(a>0)$在$(-2,0)$内含有两个零点，则a的取值范围是________.

【答案】 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

【解析】 因为$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1-a}{2}x^2-ax-a$，所以$f'(x)=x^2+(1-a)x-a=(x-a)(x+1)$，因为函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1-a}{2}x^2-ax-a(a>0)$在$(-2,0)$内含有两个零点，所以

$$\begin{cases}f(-2)=\frac{-8}{3}+2(1-a)+2a-a<0,\\ f(-1)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(1-a)+a-a>0,\\ f(0)=-a<0,\end{cases}$$

解得$0<a<\frac{1}{3}$.

四、 解答题(第 11，12 题各 15 分，第 13 题 20 分，共 50 分)

11. 已知函数 $f(x)=2x\ln x-x^2+1$.求证：函数 f(x)只有一个零点.

【解析】 因为函数 f(x)的定义域为(0，+∞)，

$f'(x)=2\ln x+2-2x$.令 $g(x)=f'(x)$，

则 $g'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$，令 $g'(x)=0$，

解得 x＝1.

所以易知 g(x)在(0，1)上单调递增，在(1，+∞)上单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(1)=0$，即 $f'(x)\leqslant 0$，

所以 f(x)在(0，+∞)上单调递减.

又因为 f(1)＝0，所以 f(x)有唯一的零点 1.

12. 已知函数 $f(x)=\frac{a}{6}x^3-\frac{a}{4}x^2-ax-2$ 的图象过点 $A\left(4,\frac{10}{3}\right)$.

(1) 求函数 f(x)的单调增区间；

(2) 若函数 $g(x)=f(x)-2m+3$ 有 3 个零点，求 m 的取值范围.

【解析】 (1) 因为函数 $f(x)=\frac{a}{6}x^3-\frac{a}{4}x^2-ax-2$ 的图象过点 $A\left(4,\frac{10}{3}\right)$，

所以 $\frac{32a}{3}-4a-4a-2=\frac{10}{3}$，解得 a＝2.

即 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-2$.

所以 $f'(x)=x^2-x-2$.

由 $f'(x)>0$，得 $x<-1$ 或 $x>2$.

所以函数 f(x)的单调增区间是(－∞，－1)，(2，+∞).

(2) 由(1)知 $f(x)_{极大值}=f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-2=-\frac{5}{6}$，$f(x)_{极小值}=f(2)=\frac{8}{3}-2-4-2=-\frac{16}{3}$，

由数形结合可知，要使函数 $g(x)=f(x)-2m+3$ 有三个零点，

则 $-\frac{16}{3}<2m-3<-\frac{5}{6}$，解得 $-\frac{7}{6}<m<\frac{13}{12}$.

所以 m 的取值范围为 $\left(-\frac{7}{6},\frac{13}{12}\right)$.

13. 已知函数 $f(x)=ax^2-1-2\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $a=1$ 时，求证：$f(x)\geqslant 0$；

(2) 若函数 $f(x)$有两个零点，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-1-2\ln x(x>0)$，

$f(1)=0$，$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在(0，1)上单调递减，在(1，+∞)上单调递增，所以当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$取得最小值，

所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即 $f(x)\geqslant 0$.

(2) 由 $f(x)=ax^2-1-2\ln x=0$，

得 $a=\frac{1+2\ln x}{x^2}$.

设 $h(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ ，

因为 $f(x)$有两个零点，所以 $a=h(x)$有两个解.

$h'(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\cdot x^2-(1+2\ln x)\cdot 2x}{x^4}=-\dfrac{4\ln x}{x^3}$ ，

由 $h'(x)>0$，得 $\ln x<0$，所以 $0<x<1$；

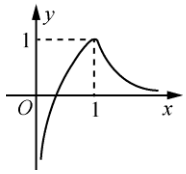
由 $h'(x)<0$，得 $\ln x>0$，所以 $x>1$，

所以函数 $h(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，

当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$时，$h(x)\to 0$.

作出 $h(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ 的草图，如图所示，

由 $a=h(x)$有两个解，可知 $0<a<1$，故实数 a 的取值范围是$(0，1)$.



(第 13 题)