第3课时　简单复合函数的导数

对点练 ▶ 先练透基础

类型1　简单复合函数的导数

例1　求下列各函数的导数：

(1) $y=\ln(3x-2)$；

(2) $f(x)=e^{-2x+1}+e^{x}+e^{2}$；

(3) $y=\sqrt{1-2x^{2}}$；

(4) $f(x)=\ln^{2}x-2\ln x+3$.

【解析】(1) $y'=\frac{1}{(3x-2)}\cdot(3x-2)'=\frac{3}{3x-2}$；

(2) $f'(x)=e^{-2x+1}\cdot(-2x+1)'+e^{x}=-2e^{-2x+1}+e^{x}$.

(3) $y'=\frac{1}{2\sqrt{1-2x^{2}}}\cdot(1-2x^{2})'=-\frac{2x}{\sqrt{1-2x^{2}}}$.

(4) $f(x)=\ln^{2}x-2\ln x+3=(\ln x-1)^{2}+2$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}\times2(\ln x-1)=\frac{-2+2\ln x}{x}$.

规律总结：某些较复杂的函数可以先进行整理，比如化为简单的复合函数，利用复合函数的求导法则求其导数.

类型2　利用复合函数的导数求曲线在某点处的切线

例2　(1) 若曲线 $y=e^{2x+1}$ 在点(x_0，e2x_0＋1)处的切线方程为 $2ex-y+e=0$，则 $x_0=$________.

【答案】 0

【解析】 $y'=2e^{2x+1}$，所以 2e2x_0＋1＝2e，得 $x_0=0$.

(2) 设曲线 $y=e^{-x}(x\geqslant0)$在点 $M(t，e^{-t})(t\geqslant0)$处的切线 l 与 x 轴、y 轴所围成的三角形面积为 $S(t)$，则 $S(t)$的解析式为________.

【答案】 $S(t)=\frac{1}{2}(t+1)^{2}e^{-t}(t\geqslant0)$

【解析】 对 $y=e^{-x}$ 求导可得 $y'=f'(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}$，

故切线 l 在点 $M(t，e^{-t})$处的斜率为 $f'(t)=-e^{-t}$，

故切线 l 的方程为 $y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$，即 $e^{-t}x+y-e^{-t}(t+1)=0$.

令 $y=0$，得 $x=t+1$；令 $x=0$，得 $y=e^{-t}(t+1)$,

所以 $S(t)=\frac{1}{2}(t+1)\cdot e^{-t}(t+1)=\frac{1}{2}(t+1)^{2}e^{-t}(t\geqslant0)$.

类型3　复合函数导数的实际应用

例3　某港口在一天 24h 内潮水的高度近似满足函数关系 $S(t)=3\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{5\pi}{6}\right)$ $(0\leqslant t\leqslant24)$，其中 S 的单位是 m，t 的单位是 h，求 18 点时潮水起落的速度.

【解析】因为 $S'(t)=3\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{5\pi}{6}\right)\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $S'(18)=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{12}\times18+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{8}$，所以 18 点时潮水起落的速度是$\frac{\pi}{8}$ m/h.

规律总结：对三角函数型函数的求导，往往需要利用三角恒等变换公式，对函数式进行化简，再进行求导．复合函数的求导法则熟悉后，中间步骤可以省略，即不必再写出函数的复合过程，直接运用公式，从外层开始由外到内逐层求导．

综合练 ▶ 再融会贯通

一、 单项选择题

1. 函数 $y=\cos(2x+1)$的导数是(　　)

A. $y'=\sin(2x+1)$　　B. $y'=-2x\sin(2x+1)$

C. $y'=-2\sin(2x+1)$　　D. $y'=2x\sin(2x+1)$

【答案】 C

【解析】 $y'=-\sin(2x+1)(2x+1)'=-2\sin(2x+1)$.

2. 设 $f(x)=\ln(2x-1)$，若 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)=1$，则 x_0 的值为(　　)

A. $\frac{e+1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{4}$

【答案】 B

【解析】 由 $f(x)=\ln(2x-1)$，得 $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$.

由 $f'(x_0)=\frac{2}{2x_0-1}=1$，解得 $x_0=\frac{3}{2}$.

3. 随着科学技术的发展，放射性同位素技术已经广泛应用于医学、航天等众多领域，并取得了显著经济效益．假设某放射性同位素的衰变过程中，其含量 N(单位：贝克)与时间 t(单位：天)满足函数关系 $P(t)=P_0\cdot 2^{-\frac{t}{30}}$，其中 P_0 为 $t=0$ 时该放射性同位素的含量．已知 $t=15$ 时，该放射性同位素的瞬时变化率为$-\frac{3\sqrt{2}\ln 2}{10}$，则该放射性同位素含量为4.5贝克时衰变所需时间为(　　)

A. 20天　　B. 30天　　C. 45天　　D. 60天

【答案】 D

【解析】 由 $P(t)=P_0\cdot 2^{-\frac{t}{30}}$ 得 $P'(t)=-\frac{1}{30}\cdot P_0\cdot 2^{-\frac{t}{30}}\ln 2$.因为 $t=15$ 时，该放射性同位素的瞬时变化率为$-\frac{3\sqrt{2}\ln 2}{10}$，所以 $P'(15)=-\frac{\sqrt{2}\ln 2}{60}P_0=-\frac{3\sqrt{2}\ln 2}{10}$，解得 $P_0=18$，则 $P(t)=18\cdot 2^{-\frac{t}{30}}$．当该放射性同位素含量为4.5贝克，即 $P(t)=4.5$ 时，由 $18\cdot 2^{-\frac{t}{30}}=4.5$，得 $2^{-\frac{t}{30}}=\frac{1}{4}$，所以$-\frac{t}{30}=-2$，解得 $t=60$.

4. 设 $a\in\mathrm{R}$，函数 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$ 的导函数是 $f'(x)$，且 $f'(x)$是奇函数．若曲线 $y=f(x)$的一条切线的斜率是$\frac{3}{2}$，则切点的横坐标为(　　)

A. $\ln 2$　　B. $-\ln 2$　　C. $\frac{\ln 2}{2}$　　D. $-\frac{\ln 2}{2}$

【答案】 A

【解析】 对 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$ 求导得 $f'(x)=e^x-ae^{-x}$.又 $f'(x)$是奇函数，故 $f'(0)=1-a=0$，

解得 $a=1$，故 $f'(x)=e^x-e^{-x}$.设切点为(x_0,y_0)，则 $f'(x_0)=ex_0-e-x_0=\frac{3}{2}$，得 $ex_0=2$ 或 $ex_0=-\frac{1}{2}$ (舍去)，得 $x_0=\ln 2$.

二、 多项选择题

5. 下列函数求导正确的是(　　)

A. 若 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则 $f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

B. 若 $f(x)=e^{2x}$，则 $f'(x)=e^{2x}$

C. 若 $f(x)=\sqrt{2x-1}$，则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

D. 若 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则 $f'(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】 AC

【解析】 若 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则 $f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$，故 A 正确；若 $f(x)=e^{2x}$，则 $f'(x)=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$，故 B 错误；若 $f(x)=\sqrt{2x-1}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(2x-1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x-1)'=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$，故 C 正确；若 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则 $f'(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)'=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故 D 错误.

6. 以下函数求导正确的是(　　)

A. 函数 $f(x)=(x+1)^2(x-1)$在 $x=1$ 处的导数等于 4

B. 函数 $f(x)=(1-2x^3)^{10}$ 在 $x=1$ 处的导数等于 32

C. 函数 $f(x)=x\ln(2x+5)$在 $x=1$ 处的导数等于 $\ln 7$

D. 函数 $f(x)=xe^{x-1}$ 在 $x=1$ 处的导数等于 2

【答案】 AD

【解析】 对于 A，$f'(x)=[(x+1)^2]'(x-1)+(x+1)^2\cdot(x-1)'=2(x+1)(x-1)+(x+1)^2=3x^2+2x-1$，所以 $f'(1)=4$，故 A 正确；对于 B，$f'(x)=10(1-2x^3)^9(-6x^2)$，所以 $f'(1)=10(1-2)^9(-6)=60$，故 B 错误；对于 C，$f'(x)=[x\ln(2x+5)]'=x'\ln(2x+5)+x[\ln(2x+5)]'=\ln(2x+5)+x\cdot\frac{1}{2x+5}\cdot(2x+5)'=\ln(2x+5)+\frac{2x}{2x+5}$，$f'(1)=\ln 7+\frac{2}{7}$，故 C 错误；对于 D，$f'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=(x+1)e^{x-1}$，$f'(1)=(1+1)e^{1-1}=2$，故 D 正确.

7. 下列判断正确的是(　　)

A. 曲线 $f(x)=\ln(x-1)$在点(2，0)处的切线的倾斜角是$\frac{\pi}{4}$

B. 曲线 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 在点(2，1)处的切线的倾斜角是$\frac{\pi}{4}$

C. 曲线 $f(x)=e^{x-1}$ 在点(2，e)处的切线方程是 $ex-y-e=0$

D. 曲线 $f(x)=(x-1)^5$ 在点(2，1)处的切线与直线 $x+5y=0$ 互相垂直

【答案】 ACD

【解析】 选项A，$f'(x)=\frac{1}{x-1}$ ，$f'(2)=1$，所以倾斜角 $\theta=\frac{\pi}{4}$ ，故A正确；选项B，$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$ ，$f'(2)=-1$，所以倾斜角 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ ，故B错误；选项C，$f'(x)=e^{x-1}$，$f'(2)=e$，所以切线方程为 $ex-y-e=0$，故C正确；选项D，$f'(x)=5(x-1)^4$，$f'(2)=5$，所以D正确.

三、 填空题

8. 若函数 $f(x)=e^{ax}+\ln(x+1)$，$f'(0)=4$，则 $a=$________.

【答案】 3

【解析】 由 $f(x)=e^{ax}+\ln(x+1)$，得 $f'(x)=ae^{ax}+\frac{1}{x+1}$ ，因为 $f'(0)=4$，所以 $f'(0)=a+1=4$，所以 $a=3$.

9. 已知 $f(x)=x^3$，则 $f'(2x+3)=$________，$[f(2x+3)]'=$________.

【答案】 $3(2x+3)^2$ $6(2x+3)^2$

【解析】 因为 $f(x)=x^3$，所以 $f'(x)=3x^2$，则 $f'(2x+3)=3(2x+3)^2$.设 $t=2x+3$，$f(2x+3)=f(t)$，则 $t'=2$，则$[f(2x+3)]'=2\times3(2x+3)^2=6(2x+3)^2$.

10. 曲线 $f(x)=(1-x)^2+3\ln(2+x)$在点$(1，f(1))$处的切线的斜率为________.

【答案】 1

【解析】 $f(x)=(1-x)^2+3\ln(2+x)(x>-2)$，$f'(x)=2x-2+\frac{3}{2+x}=\frac{2x^2+2x-1}{x+2}$ ，所以 $k=f'(1)=1$.

四、 解答题

11. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=(3x^2+1)(2-x)$；

(2) $f(x)=x^2\ln(2x)$；

(3) $f(x)=\ln(2x-1)^3$.

【解析】 (1) $f'(x)=6x(2-x)+(3x^2+1)\times(-1)=-9x^2+12x-1$；

(2) $f'(x)=2x\ln(2x)+x^2\times\frac{2}{2x}=x[2\ln(2x)+1]$；

(3) 因为 $f(x)=3\ln(2x-1)$，所以 $f'(x)=\frac{6}{2x-1}$.

12. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax$ 的图象在 $x=2$ 处的切线与直线 $2x+3y+1=0$ 平行，

(1) 求 a 的值；

(2) 求曲线 $g(x)=f(x)+x$ 上到直线 $y=x+3$ 距离最小的点的坐标，并求出该最小值.

【解析】 (1) 由 $f(x)=\ln(x+1)-ax$，得 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-a$，因为函数 $f(x)$的图象在 $x=2$ 处的切线与直线 $2x+3y+1=0$ 平行，所以 $f'(2)=\frac{1}{3}-a=-\frac{2}{3}$ ，所以 $a=1$.

(2) $g(x)=\ln(x+1)$，$g'(x)=\frac{1}{x+1}$ ，令 $g'(x)=\frac{1}{x+1}=1$，得 $x=0$，则曲线 $g(x)$在点$(0,0)$处的切线方程为 $x-y=0$，即点$(0,0)$到直线 $y=x+3$ 的距离最小，最小距离 $d=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

创新练▶延伸与迁移

1. 在对函数 $y=[f(x)]^{g(x)}$求导时可运用对数法：在解析式两边同时取对数，得到 $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$，然后两边同时求导，得$\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$，于是 $y'=[f(x)]^{g(x)}\cdot[g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}]$.用此法探求 $y=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ $(x>0)$的导数为________.

【答案】 $y'=[1-\ln(x+1)]\cdot(x+1)^{\frac{-2x-1}{x+1}}$

【解析】 由 $y=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ $(x>0)$，

两边同时取对数，得 $\ln y=\frac{1}{x+1}\ln(x+1)$，

两边同时求导，得$\frac{y'}{y}=\frac{-1}{(x+1)^2}\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}[1-\ln(x+1)]$，所以 $y'=[1-\ln(x+1)]\cdot(x+1)^{\frac{-2x-1}{x+1}}$.