第 5 课时　函数极(最)值的应用

对点练 ▶ 先练透基础

类型 1　函数零点问题

例1　若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-bx+4$ 在 $x=-2$ 和 $x=1$ 处取得极值.

(1) 求函数 $f(x)$的解析式；

(2) 讨论方程 $f(x)=k$ 实数解的个数.

【解析】 (1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-bx+4$，则 $f'(x)=x^2+2ax-b$，由题意得$\begin{cases}f'(-2)=0,\\ f'(1)=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}4-4a-b=0,\\ 1+2a-b=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=2.\end{cases}$ 经检验符合题意.

(2) 由(1)得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+4$，

所以 $f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>1$；

令 $f'(x)<0$，解得 $-2<x<1$，

所以 $f(x)$的增区间为$(-\infty，-2)$，$(1，+\infty)$，减区间为$(-2，1)$，

即在 $x=1$ 处函数 $f(x)$取得极小值，且为$\frac{17}{6}$，在 $x=-2$ 处函数 $f(x)$取得极大值，且为$\frac{22}{3}$.

则当 $k<\frac{17}{6}$ 或 $k>\frac{22}{3}$ 时，方程 $k=f(x)$有一个解；

当 $k=\frac{17}{6}$ 或 $k=\frac{22}{3}$ 时，方程 $k=f(x)$有两个解；

当$\frac{17}{6}<k<\frac{22}{3}$ 时，方程 $k=f(x)$有三个解.

例2　已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.

(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 若 $f(x)$有两个零点，求 a 的取值范围.

【解析】 由题意得 $f(x)$的定义域为$(-\infty，+\infty)$，

且 $f'(x)=e^x-a$.

(1) 当 $a=1$ 时，$f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$.

所以当 $x\in(-\infty，0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增.

(2) 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=e^x-a>0$ 恒成立，$f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增，不合题意；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty，\ln a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(\ln a，+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)$的极小值(也是最小值)为 $f(\ln a)=a-a(\ln a+2)=-a(1+\ln a)$.

又当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.

所以要使 $f(x)$ 有两个零点，只要 $f(\ln a)<0$ 即可，

则 $1+\ln a>0$，可得 $a>\frac{1}{e}$.

综上，若 $f(x)$ 有两个零点，则 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e}，+\infty\right)$.

规律总结：函数零点的个数主要依靠零点存在性定理确定，具体由函数极值正负和极值点左右两侧是否满足存在零点决定.

类型 2　导数与实际问题

例3　海轮每小时使用的燃料费与它的航行速度的立方成正比，已知某海轮的最大航速为 30n mile/h，当速度为 10n mile/h 时，它的燃料费是每小时 25 元，其余费用(无论速度如何)都是每小时 400 元．如果甲、乙两地相距 800 n mile，则要使该海轮从甲地航行到乙地的总费用最低，它的航速应为(　　)

A. 30n mile/h　　B. 25n mile/h　　C. 20n mile/h　　D. 10n mile/h

【答案】 C

【解析】 因为海轮每小时使用的燃料费与它的航行速度的立方成正比，设海轮的速度为 $x(0<x\leqslant 30)$n mile/h，燃料费用为 W 元，比例系数为 k，则满足 $W=kx^3$，当速度为 10n mile/h 时，它的燃料费是每小时 25 元，代入上式可得 $25=k\times 10^3$，解得 $k=\frac{1}{40}$ ，其余费用(无论速度如何)都是每小时 400 元．如果甲、乙两地相距 800n mile，则所需时间为 $\frac{800}{x}$ h，则总费用为 $f(x)=(\frac{1}{40}x^3+400)\times\frac{800}{x}=\frac{20x^3+320\,000}{x}$ $(0<x\leqslant 30)$，所以 $f'(x)=\frac{40(x^3-8\,000)}{x^2}$ ，令 $f'(x)=0$，解得 $x=20$.当 $0<x<20$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在(0，20)内单调递减；当 $20<x\leqslant 30$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在(20，30]内单调递增，所以当 $x=20$ 时，海轮从甲地航行到乙地的总费用最低.

综合练 ▶ 再融会贯通

一、　单项选择题

1. 函数 $f(x)=5^x+x-19$ 的零点所在的区间为(　　)

A. (0，1)　　B. (1，2)　　C. (2，3)　　D. (3，4)

【答案】 B

【解析】函数 $f(x)=5^x+x-19$ 是连续函数且单调递增，因为 $f(1)=5+1-19=-13<0$，$f(2)=25+2-19=8>0$，所以 $f(1)\,f(2)<0$，由零点判定定理可知函数 $f(x)$ 的零点在(1，2).

2. 为积极响应“地摊经济”的号召，某个体户计划在市政府规划的摊位同时销售 A，B 两种小商品．当投资额为 $x(x\geqslant 0)$ 千元时，在销售 A，B 商品中所获收益分别为 $f(x)$ 千元与 $g(x)$ 千元，其中 $f(x)=2x$，$g(x)=5\ln(2x+1)$.若该个体户准备共投入 5 千元销售 A，B 两种小商品，为使总收益最大，则 A 商品需投入(　　)

A. 4 千元　　B. 3 千元　　C. 2 千元　　D. 1 千元

【答案】 B

【解析】 设投入经销 B 商品的资金为 x 千元 $(0\leqslant x\leqslant 5)$，则投入经销 A 商品的资金为 $(5-x)$ 千元，获得的收益为 $S(x)$ 千元，则 $S(x)=2(5-x)+5\ln(2x+1)=5\ln(2x+1)-2x+$

$10(0\leqslant x\leqslant 5)$，$S'(x)=\dfrac{10}{2x+1}-2$.当 $0\leqslant x<2$ 时，$S'(x)>0$，函数 $S(x)$在$[0，2)$上单调递增；当 $2<x\leqslant 5$ 时，$S'(x)<0$，函数 $S(x)$在$(2，5]$上单调递减，所以当 $x=2$ 时，函数 $S(x)$取得最大值 $S(2)=6+5\ln 5$，所以当投入经销 B 商品的资金为 2 千元，投入经销 A 商品的资金为 3 千元时，此时总收益最大.

3. 某莲藕种植塘每年的固定成本是 2 万元，每年最大规模的种植量是 10 万斤，每种植 1 斤藕，成本增加 1 元．销售额 y(单位：万元)与莲藕种植量 x(单位：万斤)满足函数关系 $y=-\dfrac{1}{6}x^3+ax^2+x$($a$ 为常数).若种植 3 万斤，利润是$\dfrac{23}{2}$万元，则要使销售利润最大，每年需种植莲藕(　　)

A. 6 万斤　　B. 8 万斤　　C. 7 万斤　　D. 9 万斤

【答案】 B

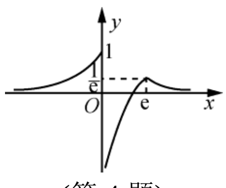
【解析】 设销售利润为 $g(x)$万元，则 $g(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+ax^2+x-2-x=-\dfrac{1}{6}x^3+ax^2-2(0<x\leqslant 10)$.因为 $g(3)=-\dfrac{1}{6}\times 3^3+a\times 3^2-2=\dfrac{23}{2}$，所以 $a=2$，则 $g(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+2x^2-2$，求导得 $g'(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4x=-\dfrac{1}{2}x(x-8)$，当 $x\in(0，8)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in(8，10)$时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(0，8)$上单调递增，在$(8，10)$上单调递减，则 $x=8$ 时，$g(x)$取得最大值．所以要使销售利润最大，每年需种植莲藕 8 万斤.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} xe^x，x<0，\\ \ln x，x>0，\end{cases}$ 若 $g(x)=f(x)-ax$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $\left(0，\dfrac{1}{e}\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{e}，1\right)$　　C. $[1，e)$　　D. $[e，+\infty)$

【答案】 A

【解析】 问题等价于 $y=a$ 与 $y=h(x)=\begin{cases} e^x，x<0，\\ \dfrac{\ln x}{x}，x>0\end{cases}$ 有三个交点，画出 $y=h(x)$的图象如图所示．由图可知当 $a\in\left(0，\dfrac{1}{e}\right)$时满足题意.



(第 4 题)

二、 多项选择题(每个 5 分，共 15 分)

5. 设函数 $f(x)=x\,ln^2x+x$ 的导函数为 $f'(x)$，则(　　)

A. $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$　　　　*B*. $x=\dfrac{1}{e}$ 是 $f(x)$的极值点

C. f(x)存在零点　　　　　　*D.* f(x)在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增

【答案】 *AD*

【解析】 由题可知 $f(x)=x\ln^2x+x$ 的定义域为(0，＋∞)，$f'(x)=\ln^2x+2\ln x+1$，所以 $f'\left(\frac{1}{e}\right)=\ln^2\frac{1}{e}+2\ln\frac{1}{e}+1=0$，故 *A* 正确；$f'(x)=\ln^2x+2\ln x+1=(\ln x+1)^2\geqslant0$，故函数f(x)单调递增，故无极值点，故 *B* 错误，*D* 正确．又 $f(x)=x\ln^2x+x=x(\ln^2x+1)>0$，故函数f(x)不存在零点，故 *C* 错误．

6．设函数 $f(x)=(x^2-3)e^x$，则(　　)

A. f(x)有极小值，且有最小值

B. f(x)有极大值，但无最大值

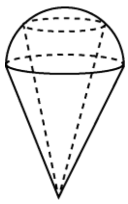
C. 若方程 f(x)＝a 恰有一个实根，则 $a>\frac{6}{e^3}$

D. 若方程 f(x)＝a 恰有三个实根，则 $0<a<\frac{6}{e^3}$

【答案】 *ABD*

【解析】 因为 $f(x)=(x^2-3)e^x$，所以 $f'(x)=(x^2+2x-3)e^x$，令 $f'(x)=0$，解得 x＝－3 或x＝1.当 x∈(－∞，－3)，(1，＋∞)时，$f'(x)>0$，函数 f(x)单调递增；当 x∈(－3，1)时，$f'(x)<0$，函数 f(x)单调递减．当 x→－∞时，f(x)→0，当 x→＋∞时，f(x)→＋∞，所以当 x＝1 时，函数 f(x)取得极小值，且为最小值－2*e*，当 x＝－3 时，函数 f(x)取得极大值，无最大值，故 *A*，*B* 正确．若方程 f(x)＝a 恰有一个实根，可得 a＝－2*e* 或 $a>\frac{6}{e^3}$，故 *C* 错误．若方程 f(x)＝a 恰有三个实根，可得 $0<a<\frac{6}{e^3}$，故 *D* 正确．

7. 如图，外层是类似于“甜筒冰淇淋”的图形，上部分是体积为 $10\sqrt{15}\pi$ 的半球，下面大圆刚好与高度为 6 的圆锥的底面圆重合，在该封闭的几何体内倒放一个小圆锥，小圆锥底面平行于外层圆锥的底面，且小圆锥顶点与外层圆锥顶点重合，则该小圆锥体积可以为(　　)



(第 7 题)

A. 10π　　*B.* 18π　　*C.* 30π　　*D.* 40π

【答案】 *ABC*

【解析】 令上部分的半球半径为 R，可得 $\frac{2}{3}\pi R^3=10\sqrt{15}\pi$，解得 $R=\sqrt{15}$.设小圆锥的底面半径为 r，小圆锥底面中心到球心距离为 h，可知 r，h 和 R 构成直角三角形，即 $r^2+h^2=15$，小圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2(h+6)=\frac{1}{3}\pi(15-h^2)(h+6)(0<h<\sqrt{15})$.令 $f(h)=(15-h^2)\cdot(h+6)(0<h<\sqrt{15})$，则 $f'(h)=-3(h+5)\cdot(h-1)$，可知 f(h)在(0，1)上单调递增，在$(1,\sqrt{15})$上单调递减，所以当 h＝1 时，f(h)最大，$f(h)_{max}=f(1)=98$，即 $V_{max}=\frac{98}{3}\pi$，即 *A*，*B*，*C*

三个选项都满足题意.

三、 填空题

8. 已知函数 $f(x)=2ln\,x-\frac{1}{e}x^2$，则函数 f(x)有________个零点.

【答案】 1

【解析】 $f(x)=2ln\,x-\frac{1}{e}x^2$，$x>0$，所以 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2x}{e}=\frac{2(e-x^2)}{ex}$，所以当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$f'(x)>0$，f(x)单调递增；当 $x>\sqrt{e}$ 时，$f'(x)<0$，f(x)单调递减，故当 $x=\sqrt{e}$ 时，f(x)有极大值，极大值为 $f(\sqrt{e})=1-1=0$，所以 f(x)只有一个零点.

9. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x-5$ 无极值点，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】 [－1，1]

【解析】 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x-5$，$f'(x)=x^2-2ax+1$，若函数 f(x)在 R 上无极值点，即 $f'(x)=0$ 最多有 1 个实数根，故 $\Delta=4a^2-4\leq 0$，解得 $a\in[-1,1]$.

10. 若函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x+m$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有两个零点，则实数 m 的取值范围为________.

【答案】 $\left(-1-\frac{1}{2e^2},-\frac{1}{2}\right)$

【解析】 因为 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x+m$，$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，

所以 $g'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$，

当 $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当 $x\in(1,e)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

故 $g(x)$在 $x=1$ 处取得极小值 $g(1)=m+\frac{1}{2}$.

又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=m+1+\frac{1}{2e^2}$，$g(e)=\frac{1}{2}e^2+m-1$，

$g(e)-g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)-2>0$，则 $g(e)>g\left(\frac{1}{e}\right)$，

所以 $g(x)$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有两个零点的条件是$\begin{cases}g(1)=\frac{1}{2}+m<0,\\ g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e^2}+1+m>0,\end{cases}$

解得$-1-\frac{1}{2e^2}<m<-\frac{1}{2}$.

四、 解答题

11. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-4a(a,b\in R)$.

(1)　当 $a=b=1$ 时，求 $f(x)$的单调增区间；

(2)　当 $a\neq 0$ 时，若函数 $f(x)$恰有两个不同的零点，求$\dfrac{b}{a}$ 的值.

【解析】 (1) 当 $a=b=1$ 时，

$f(x)=x^3+x^2-4$，$f'(x)=3x^2+2x$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>0$ 或 $x<-\dfrac{2}{3}$ ，

所以 $f(x)$的单调增区间是$\left(-\infty，-\dfrac{2}{3}\right)$ 和$(0，+\infty)$.

(2) $f'(x)=3ax^2+2bx$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=-\dfrac{2b}{3a}$.

因为函数 $f(x)$恰有两个不同的零点，

所以 $f(0)=0$ 或 $f\left(-\dfrac{2b}{3a}\right)=0$.

当 $f(0)=0$ 时，得 $a=0$，不合题意，舍去；

当 $f\left(-\dfrac{2b}{3a}\right)=0$ 时，

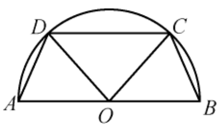
代入得 $a\left(-\dfrac{2b}{3a}\right)^3+b\left(-\dfrac{2b}{3a}\right)^2-4a=0$，

即$-\dfrac{8}{27}\left(\dfrac{b}{a}\right)^3+\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{b}{a}\right)^3-4=0$，所以$\dfrac{b}{a}=3$.

12. 如图，有一生态农庄的平面图是一个半圆形，其中，直径 AB 长为 $2\sqrt{2}$ km，C，D 两点在半圆弧上，且 $AD=BC$，设$\angle COB=\theta$，现要在景区内铺设一条观光通道，由 AB，BC，CD 和 DA 组成.

(1) 若 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ ，求观光通道 l 的长度；

(2) 现要在农庄内种植经济作物，其中，在$\triangle AOD$ 内种植鲜花，在$\triangle OCD$ 内种植果树，在扇形 COB 内种植草坪．已知种植鲜花和种植果树的利润均为 2 百万元/km²，种植草坪的利润为 1 百万元/km²，则当 θ 为何值时，总利润最大？



(第 12 题)

【解析】 (1) 在△COB 中，$\angle COB=\dfrac{\pi}{6}$ ，$OB=OC=\sqrt{2}$ ，

所以 $BC^2=OC^2+OB^2-2OB\cdot OC\cdot\cos\angle COB=2+2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$，

则 $BC=\sqrt{3}-1$，所以 $AD=\sqrt{3}-1$.又因为$\triangle AOD\cong\triangle BOC$，所以$\angle AOD=\angle COB=\dfrac{\pi}{6}$ ，得$\angle COD=\dfrac{2\pi}{3}$.

在$\triangle DOC$中，$CD^2=OC^2+OD^2-2OC\cdot OD\cdot \cos\angle COD=2+2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=6$，则$CD=\sqrt{6}$.所以$l=AB+BC+CD+AD=2(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)+\sqrt{6}$.

(2) 由题意得$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}OA\cdot OD\cdot \sin\theta=\sin\theta$，

$S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot \sin(\pi-2\theta)=\sin 2\theta$，

$S_{扇形COB}=\frac{1}{2}OB^2\cdot\theta=\theta$.

设总利润为$T(\theta)$百万元，

则$T(\theta)=2\sin\theta+2\sin 2\theta+\theta$，

$T'(\theta)=2\cos\theta+4\cos 2\theta+1=8\cos^2\theta+2\cos\theta-3$

$=(4\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)$.

因为$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时，$\frac{1}{2}<\cos\theta<1$，$T'(\theta)>0$，$T(\theta)$单调递增；

当$\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$时，$0<\cos\theta<\frac{1}{2}$，$T'(\theta)<0$，$T(\theta)$单调递减，所以$T(\theta)_{max}=T\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$.

所以当$\theta=\frac{\pi}{3}$时，总利润取得最大值，最大值为$\left(2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$百万元.