第2课时　导数的概念及其几何意义

对点练 ▶ 先练透基础

类型1　导(函)数的概念

例1　用导数的定义，求函数 $y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=1$ 处的导数.

【解析】 因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1-\sqrt{1+\Delta x}}{\sqrt{1+\Delta x}}$

$=\frac{-\Delta x}{\sqrt{1+\Delta x}\cdot(1+\sqrt{1+\Delta x})}$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{\sqrt{1+\Delta x}\cdot(1+\sqrt{1+\Delta x})}$，

所以当 Δx 无限趋近于0时，

$\frac{-1}{\sqrt{1+\Delta x}\cdot(1+\sqrt{1+\Delta x})}$

无限趋近于 $-\frac{1}{2}$，所以 $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

规律总结：区别概念：①函数 $f(x)$ 的导函数(简称导数)：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

②函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

类型2　导数的几何意义

例2　求函数 $f(x)=-2x^2$ 在下列各点的导数，并说明它们的几何意义：

(1) $x=-1$；(2) $x=0$；(3) $x=2$.

【解析】 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-2(x_0+\Delta x)^2+2x_0^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-4\cdot x_0\cdot\Delta x-2(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[-4x_0-2(\Delta x)]=-4x_0$.

(1) $f'(-1)=4$，表示 $f(x)$ 在点 $(-1，-2)$ 处的切线的斜率为4；

(2) $f'(0)=0$，表示 $f(x)$ 在点 $(0，0)$ 处的切线斜率为0；

(3) $f'(2)=-8$，表示 $f(x)$ 在点 $(2，-8)$ 处的切线斜率为 -8.

规律总结：曲线 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是曲线 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线斜率.

类型3　曲线在某点处的切线

例3　已知抛物线 $y=x^2+4$ 与直线 $y=x+10$.

(1) 求它们的交点；

(2) 求抛物线在交点处的切线方程.

【解析】 (1) 由$\begin{cases}y=x^2+4,\\ y=x+10,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-2,\\ y=8\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=3,\\ y=13.\end{cases}$

所以抛物线与直线的交点坐标为(－2，8)或(3，13).

(2) 因为$y=x^2+4$，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^2+4-(x^2+4)}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^2+2x\cdot\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2x$，

所以$\Delta x\to 0$时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x$.

所以$y'|_{x=-2}=-4$，$y'|_{x=3}=6$，

即在点(－2，8)处的切线斜率为－4，在点(3，13)处的切线斜率为6.

所以在点(－2，8)处的切线方程为$4x+y=0$；

在点(3，13)处的切线方程为$6x-y-5=0$.

规律总结：若曲线$f(x)$在$x=x_0$处的切线方程为$y=kx+b$，则满足$f(x_0)=kx_0+b$，$k=f'(x_0)$.

变式 若函数$f(x)$在(2，$f(2)$)处的切线方程为$2x+y-3=0$，则$f(2)+f'(2)=$________.

【答案】 －3

【解析】 由已知切点在切线上，得$f(2)=-1$，而切点处的导数为切线斜率，所以$f'(2)=-2$，所以$f(2)+f'(2)=-3$.

综合练 ▶ 再融会贯通

一、 单项选择题

1. 式子$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$表示的是(　　)

A. $f'(1)$　　　　B. $f'(\Delta x)$

C. $f'(1+\Delta x)$　　D. $f(1)$

【答案】 A

【解析】 根据题意，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{1+\Delta x-1}=f'(1)$.

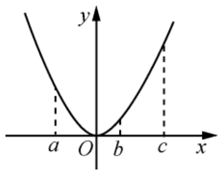
2. 设函数$f(x)$在$x=1$处存在导数且为2，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$等于(　　)

A. 2　　B. 1　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 6

【答案】 C

【解析】 根据题意，函数$f(x)$在$x=1$处存在导数且为2，即$f'(1)=2$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}\times\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}\times f'(1)=\dfrac{2}{3}$.

3. 已知函数$f(x)$在R上有导函数，$f(x)$的图象如图所示，则下列不等式正确的是(　　)



(第 3 题)

A. $f'(a)<f'(b)<f'(c)$　　*B*. $f'(b)<f'(c)<f'(a)$

C. $f'(a)<f'(c)<f'(b)$　　*D*. $f'(c)<f'(a)<f'(b)$

【答案】 *A*

【解析】 根据题意，$f'(a)$，$f'(b)$，$f'(c)$分别为函数在 $x=a$，$x=b$ 和 $x=c$ 处切线的斜率，则有 $f'(a)<0<f'(b)<f'(c)$.

4. 设 $f(x)$是可导函数，且满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2\Delta x+1)-f(1)}{2\Delta x}=-2$，则 $y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线的斜率为(　　)

A. -4　　*B*. 4　　*C*. 2　　*D*. -2

【答案】 *D*

【解析】 根据题意，因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2\Delta x+1)-f(1)}{2\Delta x}=-2$，即 $f'(1)=-2$，曲线 $y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线的斜率 $k=-2$.

二、 多项选择题

5. 下列说法错误的是(　　)

A. 若 $f'(x_0)$不存在，则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处就没有切线

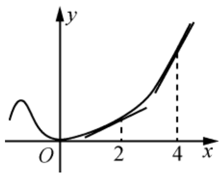
B. 若曲线 $y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处有切线，则 $f'(x_0)$必存在

C. 若 $f'(x_0)$不存在，则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线斜率不存在

D. 若曲线 $y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处没有切线，则 $f'(x_0)$有可能存在

【答案】 *ABD*

6. 已知函数 $f(x)$在 R 上可导，其部分图象如图所示，设$\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=a$，则下列不等式正确的是(　　)



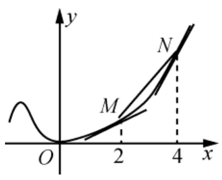
(第 6 题)

A. $a<f'(2)<f'(4)$　　*B*. $f'(2)<a<f'(4)$

C. $f(2)+f(4)<f(3)$　　*D*. $f(2)+f(4)>f(3)$

【答案】 *BD*

【解析】 根据题意，如图(1)，设 M 点坐标为$(2, f(2))$，N 点坐标为$(4, f(4))$，则 $f'(2)$为曲线在点 M 处切线的斜率，$f'(4)$ 为曲线在点 N 处切线的斜率，$k_{MN}=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=a$，则 a 为直线 MN 的斜率，结合图形分析可得：$f'(2)<a<f'(4)$，故 *B* 正确；且结合图形易得 $f(2)+f(4)>f(3)$，故 *D* 正确.



(第 6 题(1))

7. 关于函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的说法中，正确的有(　　)

A. f(x)的最小值为 2　*B*. $f(1)>f'(1)$

C. $f'(2)=\frac{3}{4}$　　*D*. f(x)的图象上各点处的切线的斜率都小于 1

【答案】 *BCD*

【解析】当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，故选项 *A* 错误；因为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{x+\Delta x+\frac{1}{x+\Delta x}-x-\frac{1}{x}}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}\right)=1-\frac{1}{x^2}$，函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，故 $f(1)=2$，$f'(1)=0$，$f(1)>f'(1)$，故 *B* 正确；$f'(2)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，故 *C* 正确；由 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}<1$，故 *D* 正确.

三、 填空题

8. 曲线 $y=-\frac{x^2}{2}$ 在点$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4}\right)$处的切线倾斜角是________.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

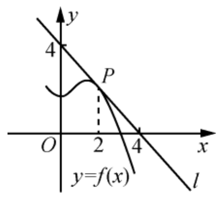
【解析】因为 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-\frac{(x+\Delta x)^2}{2}+\frac{x^2}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-x-\frac{\Delta x}{2}\right)=-x$，所以 $y'|_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以切线倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.

9. 设 f(x)是可导函数，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=2$，则 $f'(x_0)=$________.

【答案】 2

【解析】 根据题意，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)=2$.

10. 如图，函数 y＝f(x)的图象在点 P(2，y)处的切线是 l，则 f(2)＋f′(2)＝________.



(第 10 题)

【答案】 1

【解析】 由图象可得，函数 y＝f(x)的图象在点 P 处的切线 l 与 x 轴交于(4，0)，与 y 轴交于(0，4)，则可知 l：x＋y＝4，所以 f(2)＝2，f′(2)＝－1，所以 f(2)＋f′(2)＝1.

四、 解答题

11. 已知曲线 $y=-x^2+4x$ 上有两点 A(4，0)，B(2，4).

(1) 求割线 AB 的斜率 k_{AB} 及 AB 所在直线的方程；

(2) 在曲线 AB 上是否存在点 C，使过点 C 的切线与 AB 所在直线平行？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解析】 (1) 因为点 A(4，0)，B(2，4)，所以 $k_{AB}=\frac{4-0}{2-4}=-2$，所以 $y=-2(x-4)$，所以所求割线 AB 所在直线方程为 $2x+y-8=0$.

(2) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)+x^2-4x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-2x+4-\Delta x)=-2x+4$，令 $y'=-2x+4=-2$，得 $x=3$，$y=-3^2+3\times 4=3$.所以点 C 坐标为(3，3)，所求切线方程为 $2x+y-9=0$.

故在曲线 AB 上存在点 C，使过点 C 的切线与 AB 所在直线平行.

12. (1) 已知曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 上一点 P(1，1)，用导数的定义求在点 P 处的切线的斜率.

(2) 设函数 $f(x)=x^3+ax^2-9x-1(a<0)$，若曲线 $y=f(x)$上的斜率最小的切线与直线 $12x+y=6$ 平行，求 a 的值.

【解析】 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1-(1+\Delta x)^2}{\Delta x(1+\Delta x)^2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)^2}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x-2}{(1+\Delta x)^2}=-2.$

(2) 因为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3+a(x_0+\Delta x)^2-9(x_0+\Delta x)-1-(x_0^3+ax_0^2-9x_0-1)=(3x_0^2+2ax_0-9)\Delta x+(3x_0+a)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+2ax_0-9+(3x_0+a)\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2+2ax_0-9$，

即 $f'(x_0)=3x_0^2+2ax_0-9$，

所以 $f'(x_0)=3\left(x_0+\frac{a}{3}\right)^2-9-\frac{a^2}{3}$.

当 $x_0=-\frac{a}{3}$ 时，$f'(x_0)$取最小值 $-9-\frac{a^2}{3}$.

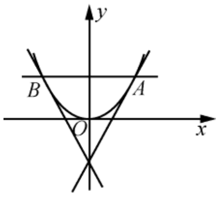
因为斜率最小的切线与 $12x+y=6$ 平行，所以该切线斜率为-12，所以 $-9-\frac{a^2}{3}=-12$，解得 $a=\pm 3$.

又因为 $a<0$，所以 $a=-3$.

创新练 ▶ 延伸与迁移

1. 被誉为“数学之神”之称的阿基米德(公元前 287 年—公元前 212 年)是古希腊伟大的物理学家、数学家、天文学家，他最早利用逼近的思想证明了如下结论：抛物线的弦与抛物线所围成的封闭图形的面积等于抛物线的弦与经过弦的端点的两条切线所围成的三角形面

积的三分之二. 这个结论就是著名的阿基米德定理，其中的三角形被称为阿基米德三角形. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：$y=4$ 与抛物线 C：$y=\frac{1}{4}x^2$ 交于 A，B 两点，则弦与抛物线 C 所围成的封闭图形的面积为________.



(第 1 题)

【答案】 $\frac{64}{3}$

【解析】 由题意知点 $A(4，4)$，$B(-4，4)$，因为 $y=\frac{1}{4}x^2$，所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{2}x_0$，所以在点 A 处的切线斜率为 2，切线方程为 $y-4=2(x-4)$，即 $y=2x-4$.同理可得，在点 B 处的切线方程为 $y=-2x-4$，所以弦 AB 与两条切线所围成的三角形面积为 $\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$，所以弦与抛物线 C 所围成的封闭图形的面积为 $\frac{2}{3}\times 32=\frac{64}{3}$.