对点练 ▶ 先练透基础

类型 1　函数的最大(小)值

例1　已知函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$，求函数 $y=f(x)$在$[-2，1]$上的最大值与最小值．

【解析】　令 $f'(x)=3x^2+x-2=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{2}{3}$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	-2	$(-2，-1)$	-1	$\left(-1，\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}，1\right)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	增	$\frac{3}{2}$	减	$-\frac{22}{27}$	增	$-\frac{1}{2}$

所以-1 与$\frac{2}{3}$ 是函数 $f(x)$在$(-2，1)$上的两个极值点，而 $f(-2)=-2$，$f(-1)=\frac{3}{2}$，$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{22}{27}$，$f(1)=-\frac{1}{2}$，所以函数 $y=f(x)$在$[-2，1]$上的最大值是 $f(-1)=\frac{3}{2}$，最小值是 $f(-2)=-2$.

规律总结：利用导数求函数的极值与闭区间上的最值，设函数 $f(x)$在$[a，b]$上连续，在$(a，b)$内可导，求 $f(x)$在$[a，b]$上的最大值和最小值的步骤如下：

求函数 $y=f(x)$在$(a，b)$内的极值，将函数 $y=f(x)$的各极值与端点处的函数值 $f(a)$，$f(b)$比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值．

例2　已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$.

(1) 求 $f(x)$的极值；

(2) 求 $f(x)$在$[0，3]$上的最值．

【解析】 (1) 因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$，$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=2$，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty，-2)$	-2	$(-2，2)$	2	$(2，+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

故当 $x=-2$ 时，$f(x)$取得极大值，$f(-2)=\frac{28}{3}$；当 $x=2$ 时，$f(x)$取得极小值，$f(2)=-\frac{4}{3}$．

(2) 由(1)可知 $f(x)$的极大值为$\frac{28}{3}$，极小值为$-\frac{4}{3}$，

$f(0)=4$，$f(3)=1$，

因为$-\frac{4}{3}<1<4$，所以 $f(x)$在$[0，3]$上的最大值为 4，最小值为$-\frac{4}{3}$.

类型 2　根据最值求参数

例3　(1) 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$ 在区间$(a-4，a)$上存在最小值，则 a 的取值范围是(　　)

A. (0，4)　　B. [0，4)　　C. [1，4)　　D. (1，4)

【答案】 C

【解析】 因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$，所以 $f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$，令 $f'(x)>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>0$；令 $f'(x)<0$，解得$-2<x<0$.故 $f(x)$的单调增区间为$(-\infty，-2)$和$(0，+\infty)$，单调减区间为$(-2，0)$，所以函数 $f(x)$在 $x=0$ 处取得极小值，由于函数 $f(x)$在区间$(a-4，a)$内取到最小值，则$\begin{cases}a-4<0<a,\\f(a-4)\geqslant f(0),\end{cases}$ 由 $f(a-4)\geqslant f(0)$可得$\frac{1}{3}(a-4)^3+(a-4)^2-2\geqslant-2$，可得$(a-4)^2(a-1)\geqslant0$，即$\begin{cases}a-4<0<a,\\(a-4)^2(a-1)\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a<4$.因此，实数 a 的取值范围是$[1，4)$.

(2) 已知函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+a}(a>0)$在$[1，+\infty)$上的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 a 的值为(　　)

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\sqrt{3}+1$

【答案】 A

【解析】 由 $f(x)=\frac{x}{x^2+a}$，得 $f'(x)=\frac{a-x^2}{(x^2+a)^2}$，

当 $a>1$ 时，若 $x>\sqrt{a}$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

若 $1<x<\sqrt{a}$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

故当 $x=\sqrt{a}$ 时，函数 $f(x)$有最大值$\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

解得 $a=\frac{3}{4}<1$，不符合题意.

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$在$[1，+\infty)$上单调递减，最大值为 $f(1)=\frac{1}{2}$，不符合题意.

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$在$[1，+\infty)$上单调递减．此时最大值为 $f(1)=\frac{1}{a+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $a=\sqrt{3}-1$，符合题意．故 a 的值为$\sqrt{3}-1$.

类型 3　构造新函数求最值

例4　已知函数 $f(x)=\ln x+x^2-3x$，若对于任意 x_1，$x_2\in[1，10]$，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $f(x_1)-f(x_2)>\frac{m}{x_2}-\frac{m}{x_1}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【解析】 $f(x_1)-f(x_2)>\frac{m}{x_2}-\frac{m}{x_1}$ 可变形为 $f(x_1)+\frac{m}{x_1}>f(x_2)+\frac{m}{x_2}$，令 $h(x)=f(x)+\frac{m}{x}$，则 $h(x)$

$=\ln x+x^2-3x+\dfrac{m}{x}$ $(x>0)$，不等式可化为 $h(x_1)>h(x_2)$.

因为对任意 x_1，$x_2\in[1，10]$，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $h(x_1)>h(x_2)$恒成立，

则可知 $h(x)=f(x)+\dfrac{m}{x}$ 在$[1，10]$上单调递减.

因为 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-3-\dfrac{m}{x^2}=\dfrac{2x^3-3x^2+x-m}{x^2}$，

所以 $2x^3-3x^2+x-m\leqslant 0$ 在$[1，10]$上恒成立，

则 $m\geqslant 2x^3-3x^2+x$ 在$[1，10]$上恒成立.

令 $\varphi(x)=2x^3-3x^2+x$，

则 $\varphi'(x)=6x^2-6x+1=6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\geqslant 1>0$，

所以 $\varphi(x)$在$[1，10]$上单调递增，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(10)=1\ 710$，所以 $m\geqslant 1\ 710$，

所以实数 m 的取值范围为$[1\ 710，+\infty)$.

规律总结：在具体问题情境中，往往需要构造函数之后求相应最值，如：在解决取值范围问题，特别是恒成立问题中，通过分离参变量转化为求新函数最值问题是常用策略.

综合练▶再融会贯通

一、 单项选择题

1. 函数 $f(x)=\ln x-x$ 在区间$(0，e]$上的最大值为(　　)

A. $1-e$　　B. -1　　C. $-e$　　D. 0

【答案】 B

【解析】 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 $x\in(0，1)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1，e)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，e)$上单调递减，故当 $x=1$ 时 $f(x)$取得极大值，也为最大值，$f(1)=-1$.

2. 函数 $y=x+2\cos x$ 在区间$\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值是(　　)

A. $\dfrac{\pi}{3}+1$　　B. $\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

【答案】 C

【解析】 令 $y'=1-2\sin x=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{6}$，易知 $y=x+2\cos x$ 在区间$\left[0，\dfrac{\pi}{6}\right]$上是增函数，在区间$\left[\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{\pi}{2}\right]$上是减函数．当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，y 取得最大值，此时 $y=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

3. 函数 $f(x)=ax-\ln x\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$恒成立的一个充分不必要条件是(　　)

A. $a\in\left[\dfrac{1}{e}，+\infty\right)$　　B. $a\in[0，+\infty)$　　C. $a\in[1，+\infty)$　　D. $a\in(-\infty，e]$

【答案】 C

【解析】 函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，依题意，$a\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$ 在$(0，+\infty)$上恒成立．设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，易知函数 $g(x)$在$(0，e)$上单调递增，在$(e，+\infty)$上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$ ，所以 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$ ，故使得函数 $f(x)=ax-\ln x\geqslant0(a\in R)$恒成立的一个充分不必要条件是 $a\geqslant1$.

4. 已知函数 $f(x)=2\ln x+ax^2-3x$ 在 $x=2$ 处取得极小值，则 $f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2}，3\right]$ 内的最大值为(　　)

A. $-\dfrac{5}{2}$　　　B. $2\ln 3-\dfrac{9}{2}$　　　C. -1　　　D. $2\ln 2-4$

【答案】 B

【解析】 因为 $f(x)=2\ln x+ax^2-3x$，所以 $f'(x)=\dfrac{2}{x}+2ax-3$.由题意可得 $f'(2)=4a-2=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$ ，则 $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-3x$，$f'(x)=\dfrac{2}{x}+x-3=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$.令 $f'(x)=0$，可得 $x=1$ 或 $x=2$，

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$的变化情况如下表：

x	$\left[\dfrac{1}{2}，1\right)$	1	(1，2)	2	(2，3]
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以函数 $f(x)$的极大值为 $f(1)=-\dfrac{5}{2}$ ，极小值为 $f(2)=2\ln 2-4$.又因为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\ln 2-\dfrac{11}{8}$ ，$f(3)=2\ln 3-\dfrac{9}{2}$ ，$f(3)-f(1)=2\ln 3-\dfrac{9}{2}+\dfrac{5}{2}=2\ln 3-2=2(\ln 3-1)>0$，即 $f(1)<f(3)$，所以 $f(x)_{\max}=f(3)=2\ln 3-\dfrac{9}{2}$.

二、 多项选择题

5. 已知函数 $f(x)=x^3-2x^2$，$x\in[-1，3]$，则下列判断正确的是(　　)

A. 最大值为 9　　　B. 最小值为−3

C. 函数 $f(x)$在区间[1，3]上单调递增　　　D. $x=0$ 是它的极大值点

【答案】 ABD

【解析】 $f'(x)=3x^2-4x$，令 $f'(x)=3x^2-4x>0$，解得 $x<0$ 或 $x>\dfrac{4}{3}$.当 $x\in[-1，0)$，$\left(\dfrac{4}{3}，3\right]$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增；当 $x\in\left(0，\dfrac{4}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减，C 错误；0 是它的极大值点，D 正确．因为 $f(0)=0$，$f(3)=27-2\times9=9$，所以函数 $f(x)$的最大值为 9，A 正确．因为 $f(-1)=-1-2=-3$，$f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{64}{27}-2\times\dfrac{16}{9}=-\dfrac{32}{27}$ ，所以函数 $f(x)$的最小值为−3，B 正确．

6. 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2(a<0)$在$\left(\dfrac{a}{2}，\dfrac{a+6}{3}\right)$ 上有最大值，则 a 的取值可能为(　　)

A. −6　　B. −5　　C. −4　　D. −3

【答案】 ABC

【解析】 令 $f'(x)=2x(3x-a)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=\frac{a}{3}$ $(a<0)$.当$\frac{a}{3}<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<\frac{a}{3}$ 或 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$的单调增区间为$\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$，$(0,+\infty)$，单调减区间为$\left(\frac{a}{3},0\right)$，从而$f(x)$在 $x=\frac{a}{3}$ 处取得极大值 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}$.由 $f(x)=-\frac{a^3}{27}$，得$\left(x-\frac{a}{3}\right)^2\left(2x+\frac{a}{3}\right)=0$，解得 $x=\frac{a}{3}$ 或 $x=-\frac{a}{6}$，又因为 $f(x)$在$\left(\frac{a}{2},\frac{a+6}{3}\right)$ 上有最大值，所以$\frac{a}{3}<\frac{a+6}{3}\leqslant-\frac{a}{6}$，解得 $a\leqslant-4$.所以选项 A，B，C 符合题意.

7. 若 $f(x)=x^a\cdot\cos x$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 的最大值为 M，则(　　)

A. 当 $a=-1$ 时，$M<\sqrt{3}$　　　B. 当 $a=2$ 时，$M<\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. 当 $a=1$ 时，$M>\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　D. 当 $a=3$ 时，$M<\frac{1}{2}$

【答案】 AB

【解析】 对于选项 A，当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{\cos x}{x}$，$f'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}<0$ 在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上恒成立，所以 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减,所以 $M=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\pi}\sqrt{3}<\sqrt{3}$，故选项 A 正确．对于选项 B，当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2\cdot\cos x$，则 $f'(x)=x\cos x(2-x\tan x)>0$ 在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上恒成立，所以 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，即 $M=\frac{\pi^2}{18}<\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选项 B 正确．对于选项 C，当 $a=1$ 时，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x<\tan x$ 恒成立，所以 $f(x)=x\cos x<\tan x\cos x=\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $M<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选项 C 错误．对于选项 D，当 $a=3$ 时，$f(x)=x^3\cdot\cos x$，则 $f'(x)=x^2\cos x(3-x\tan x)>0$ 在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上恒成立，所以 $f(x)$在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$上单调递增，所以 $M=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^3>\frac{1}{2}$，故选项 D 错误.

三、 填空题

8. 函数 $y=3x^3-9x+5$ 在$[-2,2]$上的最大值与最小值之差为________.

【答案】 12

【解析】 因为 $y=3x^3-9x+5$，所以令 $y'=9x^2-9=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-1$.令 $y'>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$；令 $y'<0$，解得$-1<x<1$，所以函数 $f(x)$在$[-2,-1)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增．所以当 $x=-1$ 时，y 取极大值，且极大值是 11；当 $x=1$ 时，y 取极小值，且极小值是-1.而 $x=-2$ 时，$y=-1$，$x=2$ 时，$y=11$，所以函数 y 的最大值为 11，最小值为-1，故函数 y 的最大值与最小值之差是 12.

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$ 在区间$(a-2,a+3)$上存在最小值，则 a 的取值范围为________.

【答案】 $[-1，2)$

【解析】$f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$，$f'(x)=0$ 时，$x=-2$ 或 $x=0$.当 $x<-2$ 或 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$的单调增区间是$(-\infty，-2)$和$(0，+\infty)$，单调减区间是$(-2，0)$，所以函数的极大值点是-2，极小值点是 0，且 $f(0)=-2$，那么当$\frac{1}{3}x^3+x^2-2=-2$ 时，解得 $x=0$ 或 $x=-3$, 所以若函数 $f(x)$在区间$(a-2，a+3)$上存在最小值，则 $\begin{cases}-3\leqslant a-2<0, \\ a+3>0,\end{cases}$ 解得$-1\leqslant a<2$.

10. 设动直线 $x=m$ 与函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=2\ln x$ 的图象分别交于 M，N，则 MN 的最小值为________.

【答案】 1

【解析】 根据题意可得点 $M(m，m^2)$，$N(m，2\ln m)$，所以 $MN=m^2-2\ln m(m>0)$.设 $h(m)=m^2-2\ln m(m>0)$，$h'(m)=2m-\frac{2}{m}=\frac{2(m^2-1)}{m}$ $(m>0)$，所以当 $m\in(0，1)$时，$h'(m)<0$，$h(m)$单调递减；当 $m\in(1，+\infty)$时，$h'(m)>0$，$h(m)$单调递增，所以 $h(m)_{\min}=h(1)=1$，所以 MN 的最小值为 1.

四、 解答题

11. 已知函数 $f(x)=(x^2-4)(2x-a)$，$a\in\mathrm{R}$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数，且 $f'(-1)=0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2) 求函数 $f(x)$在$[-2，2]$上的最大值和最小值.

【解析】 (1) 由 $f(x)=(x^2-4)(2x-a)$，

得 $f'(x)=6x^2-2ax-8$.

因为 $f'(-1)=0$，所以 $6+2a-8=0$，所以 $a=1$，

所以 $f'(x)=6x^2-2x-8=(2x+2)(3x-4)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\frac{4}{3}$.

所以当 $x<-1$ 或 $x>\frac{4}{3}$ 时，$f'(x)>0$；

当 $-1<x<\frac{4}{3}$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，-1)$，$\left(\frac{4}{3}，+\infty\right)$ 上单调递增，在$\left(-1，\frac{4}{3}\right)$ 上单调递减.

(2) 由(1)知 $f(x)$在$(-2，-1)$和$\left(\frac{4}{3}，2\right)$ 上单调递增，在$\left(-1，\frac{4}{3}\right)$ 上单调递减.

又因为 $f(-2)=f(2)=0$，$f(-1)=9$，$f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{100}{27}$，

所以当 $x\in[-2，2]$时，$f(x)_{\max}=9$，$f(x)_{\min}=-\frac{100}{27}$.

12. 已知函数 $f(x)=(x-k)e^x$.

(1) 求 $f(x)$的极值；

(2) 求 $f(x)$在区间$[0，1]$上的最小值.

【解析】 (1) 由 $f(x)=(x-k)e^x$，得 $f'(x)=(x-k+1)e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=k-1$，当 x 变化时，$f(x)$与 $f'(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty, k-1)$	$k-1$	$(k-1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	减	$-e^{k-1}$	增

所以 $f(x)$的单调减区间是$(-\infty，k-1)$，单调增区间是$(k-1，+\infty)$，

$f(x)$有极小值 $f(k-1)=-e^{k-1}$，无极大值.

(2) 当 $k-1\leqslant 0$，即 $k\leqslant 1$ 时，$f'(x)=(x-k+1)e^x\geqslant 0$ 在 $x\in[0，1]$上恒成立，

则函数 $f(x)$在$[0，1]$上单调递增，

所以 $f(x)$在区间$[0，1]$上的最小值为 $f(0)=-k$.

当 $0<k-1<1$，即 $1<k<2$ 时，

由(1)知 $f(x)$在$[0，k-1]$上单调递减，在$(k-1，1]$上单调递增，

所以 $f(x)$在区间$[0，1]$上的最小值为 $f(k-1)=-e^{k-1}$.

当 $k-1\geqslant 1$，即 $k\geqslant 2$ 时，函数 $f(x)$在$[0，1]$上单调递减，

所以 $f(x)$在区间$[0，1]$上的最小值为 $f(1)=(1-k)e$.

综上，当 $k\leqslant 1$ 时，$f(x)$在区间$[0，1]$上的最小值为 $f(0)=-k$；

当 $1<k<2$ 时，$f(x)$在区间$[0，1]$上的最小值为 $f(k-1)=-e^{k-1}$；

当 $k\geqslant 2$ 时，$f(x)$在区间$[0，1]$上的最小值为 $f(1)=(1-k)e$.

拓展练▶后提升素养

1. (多选)下列不等式中恒成立的有(　　)

A. $\ln(x+1)\geqslant\frac{x}{x+1}$，$x>-1$　　B. $\ln x\leqslant\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，$x>0$

C. $e^x\geqslant x+1$　　D. $\cos x\geqslant 1-\frac{1}{2}x^2$

【答案】 ACD

【解析】 选项 A，设 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ $(x>-1)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$，当$-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增．所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$，即 $f(x)\geqslant 0$ 在$(-1，+\infty)$上恒成立，$\ln(x+1)\geqslant\frac{x}{x+1}$ $(x>-1)$恒成立，故 A 正确．选项 B，设 $g(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ $(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{(x-1)^2}{2x^2}\leqslant 0$ 恒成立，所以 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，又 $g(1)=0$，所以 $g(x)\leqslant 0$ 在$(0，+\infty)$上不可能恒成立，$\ln x\leqslant\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ $(x>0)$不恒成立，故 B 错误．选项 C，设 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=0$，当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增．所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$，即 $h(x)\geqslant 0$ 在 R 上恒成立，所以 $e^x\geqslant x+1$ 恒成立，即 C 正确．选项 D，设 $t(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$，则 $t'(x)=-\sin x+x$，令 $m(x)=t'(x)=-\sin x+x$，则 $m'(x)=-\cos x+1\geqslant 0$ 恒成立，即 $m(x)$在 R 上单调递增，又 $m(0)=0$，所以当 $x<0$ 时，$m(x)<0$，$t'(x)<0$，$t(x)$单调递减；当 $x>0$ 时，$m(x)>0$，$t'(x)>0$，$t(x)$单调递增．所以 $t(x)_{\min}=t(0)=0$，即 $t(x)\geqslant 0$ 在 R 上恒成立，$\cos x\geqslant 1-\frac{1}{2}x^2$ 恒成立，故 D 正确．