章复习　能力整合与素养提升

要点回顾▶连点成面

概念与几何意义	概念	f(x)在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$．
	几何意义	(1)“在”点 $(x_1，y_1)$处的切线： ①斜率 $k=f'(x_1)$；②切线方程为 $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$． 曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0，f(x_0))$处的切线斜率是 $f'(x_0)$，相应地，切线方程是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$． (2)“过”点 $(x_1，y_1)$的切线． ①设切点 $(x_0，y_0)$；②求切线方程；③列方程组：切点 $(x_0，y_0)$在曲线上，$y_0=f(x_0)$；切点在切线 $y-y_1=f'(x_0)(x-x_1)$上；④解方程组，得 x_0，求切线．
	物理意义	$v=s'(t)$表示瞬时速度．$a=v'(t)$表示加速度．
运算	基本公式	①$C'=0$；②$(x^n)'=nx^{n-1}$；③$(\sin x)'=\cos x$；④$(\cos x)'=-\sin x$； ⑤$(a^x)'=a^x\ln a$；⑥$(e^x)'=e^x$； ⑦$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$；⑧$(\ln x)'=\frac{1}{x}$．
	运算法则	$(u\pm v)'=u'\pm v'$；$(uv)'=u'v+uv'$； $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$； 复合函数求导法则：$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$．
研究函数性质	函数的单调性	①若 $f'(x)>0$，则 f(x)为增函数；若 $f'(x)<0$，则 f(x)为减函数；若 $f'(x)$的符号不确定，则 f(x)不是单调函数． ②若函数 $y=f(x)$在区间(a，b)上单调递增，则 $f'(x)\geqslant 0$，反之等号不成立；若函数 $y=f(x)$在区间(a，b)上单调递减，则 $f'(x)\leqslant 0$，反之等号不成立．
	极值	设函数 f(x)在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近所有的点，都有 $f(x)<f(x_0)$，就说 $f(x_0)$是函数 f(x)的一个极大值，记作 $y_{极大值}=f(x_0)$.如果对 x_0 附近所有的点，都有 $f(x)>f(x_0)$，就说 $f(x_0)$是函数 f(x)的一个极小值，记作 $y_{极小值}=f(x_0)$.极大值和极小值统称为极值．
	最值	闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值，最大值是区间端点值和区间内的极大值中的最大者，最小值是区间端点值和区间内的极小值中的最小者．

考法聚焦▶核心突破

考法1　导数的几何意义

例1　已知函数 $f(x)=xe^{2x}-a(2x+\ln x)(a\in R)$，若曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线方程为 $y=-e^2$，求 a 的值.

【解析】由题意知，$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-a\left(2+\frac{1}{x}\right)=(2x+1)\left(e^{2x}-\frac{a}{x}\right)$，

则 $f'(1)=3(e^2-a)$，又因为 $f(1)=e^2-2a$,

所以曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线方程为 $y-(e^2-2a)=3(e^2-a)(x-1)$，即 $y-(e^2-2a)=3(e^2-a)x+3a-3e^2$,

所以$\begin{cases}3(e^2-a)=0,\\3a-3e^2+(e^2-2a)=-e^2,\end{cases}$ 解得 $a=e^2$.

【题组训练】

1. 已知曲线 $y=\ln x-x^2$ 上的一点 $P(1，f(1))$，在点 P 处的切线的倾斜角为 θ，则角 $\theta=$________.

【答案】 $\frac{3\pi}{4}$

【解析】因为 $y=\ln x-x^2$，所以 $y'=\frac{1}{x}-2x$，则 $y'|_{x=1}=-1$，即 $\tan\theta=-1$.而 $\theta\in[0，\pi)$，所以 $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

2. 已知函数 $f(x)=2\sin x+3xf'(0)$，则曲线 $y=f(x)$在点$\left(\frac{\pi}{2}，f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$处的切线方程是________.

【答案】 $3x+y-2=0$

【解析】由 $f(x)=2\sin x+3xf'(0)$，得 $f'(x)=2\cos x+3f'(0)$，所以 $f'(0)=2\cos 0+3f'(0)$，得 $f'(0)=-1$，所以 $f(x)=2\sin x-3x$，$f'(x)=2\cos x-3$，则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}-3=-3$.又因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}-3\times\frac{\pi}{2}=2-\frac{3\pi}{2}$，所以曲线 $y=f(x)$在点$\left(\frac{\pi}{2}，f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$处的切线方程为 $y-2+\frac{3\pi}{2}=-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $3x+y-2=0$.

3. 过曲线 $y=2e^x$(e 为自然对数的底数)上一点 $A(1，2e)$作曲线的切线，则切线与直线 $4ex+y-6e=0$ 以及 y 轴所围图形的面积为________.

【答案】 3e

【解析】由已知得 $y'=2e^x$，所以切线的斜率为 $k=y'|_{x=1}=2e$，切线方程为 $y-2e=2e(x-1)$，即 $y=2ex$.由 $4ex+y-6e=0$，得当 $x=0$ 时，$y=6e$.联立$\begin{cases}y=2ex,\\4ex+y-6e=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1,\\y=2e,\end{cases}$ 所以此时所围图形的面积 $S=\frac{1}{2}\times 6e\times 1=3e$.

考法 2　含参函数的单调性讨论

例2　已知函数 $f(x)=ax+\frac{a}{x}+(1-a^2)\ln x$，$a\in R$，求函数 $f(x)$的单调区间.

【解析】因为 $f(x)=ax+\frac{a}{x}+(1-a^2)\ln x$，$x>0$，

所以 $f'(x)=a-\frac{a}{x^2}+\frac{1-a^2}{x}=\frac{ax^2+(1-a^2)x-a}{x^2}=\frac{(x-a)(ax+1)}{x^2}$.

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}>0$ 恒成立，故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $a\neq 0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$ 或 $x=-\frac{1}{a}$.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，即 $x>a$ 时，函数单调递增，

令 $f'(x)<0$，即 $0<x<a$ 时，函数单调递减.

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，即 $0<x<-\frac{1}{a}$ 时，函数单调递增；

令 $f'(x)<0$，即 $x>-\frac{1}{a}$ 时，函数单调递减.

综上所述：当 $a=0$ 时，$f(x)$的增区间为$(0,+\infty)$.当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的增区间为$(a,+\infty)$，减区间为$(0,a)$；当 $a<0$ 时，$f(x)$的增区间为$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$，减区间为$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$.

【题组训练】

1. 已知函数 $f(x)=e^{2x}-me^x-m^2\left(3x-\frac{1}{2}\right)$，讨论 $f(x)$的单调性.

【解析】$f'(x)=2e^{2x}-me^x-3m^2=(2e^x-3m)(e^x+m)$.

①当 $m=0$ 时，$f'(x)=2e^{2x}>0$ 恒成立，所以 $f(x)$在 R 上单调递增.

②当 $m<0$ 时，$2e^x-3m>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln(-m)$，

当 $x>\ln(-m)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(\ln(-m),+\infty)$上单调递增；当 $x<\ln(-m)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(-\infty,\ln(-m))$上单调递减.

③当 $m>0$ 时，$e^x+m>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln\frac{3m}{2}$，

当 $x>\ln\frac{3m}{2}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$\left(\ln\frac{3m}{2},+\infty\right)$上单调递增；

当 $x<\ln\frac{3m}{2}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$\left(-\infty,\ln\frac{3m}{2}\right)$上单调递减.

2. 已知函数 $f(x)=(x-k)^2e^{\frac{x}{k}}$，求 $f(x)$的单调区间.

【解析】因为 $f'(x)=\frac{1}{k}(x^2-k^2)e^{\frac{x}{k}}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm k$，

当 $k>0$ 时，$f'(x)$，$f(x)$随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-k)$	$-k$	$(-k,k)$	k	$(k,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	$4k^2e^{-1}$	减	0	增

所以 $f(x)$的单调增区间是$(-\infty, -k)$和$(k, +\infty)$，单调减区间是$(-k, k)$.
当 $k<0$ 时，$f'(x)$，$f(x)$随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, k)$	k	$(k, -k)$	$-k$	$(-k, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	减	0	增	$4k^2e^{-1}$	减

所以 $f(x)$的单调减区间是$(-\infty, k)$和$(-k, +\infty)$，单调增区间是$(k, -k)$.

考法 3　极值与最值

例3　已知函数 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x(a>0)$的导函数 $y=f'(x)$的两个零点为-3 和 0.

(1) 求 $f(x)$的单调区间；

(2) 若 $f(x)$的极小值为-1，求 $f(x)$的极大值.

【解析】(1) $f'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x=[ax^2+(2a+b)x+b+c]e^x$.
令 $g(x)=ax^2+(2a+b)x+b+c$，因为 $e^x>0$，
所以 $y=f'(x)$的零点就是 $g(x)=ax^2+(2a+b)x+b+c$ 的零点，且 $f'(x)$与 $g(x)$符号相同.
因为 $a>0$，所以当 $x<-3$ 或 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；
当$-3<x<0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，
所以 $f(x)$的单调增区间是$(-\infty, -3)$，$(0, +\infty)$，单调减区间是$(-3, 0)$.
(2) 由(1)知，$x=0$ 是 $f(x)$的极小值点，

所以有$\begin{cases} c=-1, \\ b+c=0, \\ 9a-3(2a+b)+b+c=0, \end{cases}$

解得 $a=1$，$b=1$，$c=-1$.
所以函数 $f(x)$的解析式为 $f(x)=(x^2+x-1)e^x$.
又由(1)知，$f(x)$的单调增区间是$(-\infty, -3)$，$(0, +\infty)$，单调减区间是$(-3, 0)$.
所以函数 $f(x)$的极大值为 $f(-3)=(9-3-1)e^{-3}=\dfrac{5}{e^3}$.

例4　已知函数 $f(x)=x^2-a\ln x(a\in \mathbf{R})$，求 $f(x)$在$[1, e]$上的最小值.

【解析】$f'(x)=\dfrac{2x^2-a}{x}\ (x>0)$，
当 $x\in[1, e]$时，$2x^2-a\in[2-a, 2e^2-a]$.
若 $a\leqslant 2$，则当 $x\in[1, e]$时，$f'(x)\geqslant 0$，
所以 $f(x)$在$[1, e]$上是增函数，
又 $f(1)=1$，故函数 $f(x)$在$[1, e]$上的最小值为 1.
若 $a\geqslant 2e^2$，则当 $x\in[1, e]$时，$f'(x)\leqslant 0$，
所以 $f(x)$在$[1, e]$上是减函数，又 $f(e)=e^2-a$，
所以 $f(x)$在$[1, e]$上的最小值为 e^2-a.
若 $2<a<2e^2$，则当 $1\leqslant x<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$是减函数；
当$\sqrt{\dfrac{a}{2}}<x\leqslant e$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$是增函数.
又 $f\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)=\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$，

所以 $f(x)$在$[1，e]$上的最小值为$\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$．

综上可知，当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$在$[1，e]$上的最小值为 1；

当 $2<a<2e^2$ 时，$f(x)$在$[1，e]$上的最小值为$\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$；

当 $a\geqslant 2e^2$ 时，$f(x)$在$[1，e]$上的最小值为 e^2-a.

考法 4　导数与函数性质的综合应用

例5　(多选)已知函数 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x(x-1)$，则下列判断正确的是(　　)

A. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-e^{-x}(x+1)$

B. $f(x)<0$ 的解集为$(-\infty，-1)\cup(0，1)$

C. 函数 $f(x)$在 R 上单调递增

D. 函数 $f(x)$有 3 个零点

【答案】 BD

【解析】对选项 A，当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=e^{-x}(-x-1)=-f(x)$，所以 $f(x)=e^{-x}(x+1)$，故 A 错误．对选项 B，因为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}(x+1), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ e^x(x-1), & x>0,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}x<0,\\ e^{-x}(x+1)<0\end{cases}$ 泳 $x<-1$；$\begin{cases}x=0,\\ 0<0\end{cases}$ 泳 $x\in$眎；$\begin{cases}x>0,\\ e^x(x-1)<0\end{cases}$ 泳 $0<x<1$.综上，$f(x)<0$ 的解集为$(-\infty，-1)\cup(0，1)$，故 B 正确；对选项 C，当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x(x-1)$，$f'(x)=e^x(x-1)+e^x=xe^x>0$，所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上为增函数．因为 $f(x)$是定义在 R 上的奇函数，所以函数 $f(x)$在$(-\infty，0)$，$(0，+\infty)$上单调递增，又当 $x=0$ 时，$e^0(0-1)=-1$，故不能说 $f(x)$在 R 上单调递增，故 C 错误．对选项 D，因为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}(x+1), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ e^x(x-1), & x>0,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}x<0,\\ e^{-x}(x+1)=0\end{cases}$ 泳 $x=-1$；$\begin{cases}x>0,\\ e^x(x-1)=0\end{cases}$ 泳 $x=1$.因为 $f(0)=0$，所以函数 $f(x)$有 3 个零点，故 D 正确．

变式　(多选)已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{\pi}+\cos x-\frac{\pi}{4}$ $(x\in R)$，则下列说法正确的有(　　)

A. 直线 $y=0$ 为曲线 $y=f(x)$的一条切线

B. $f(x)$的极值点个数为 3

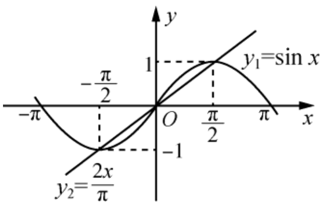
C. $f(x)$的零点个数为 4

D. 若 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$，则 $x_1+x_2=0$

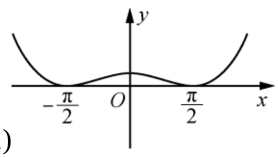
【答案】 ABD

【解析】因为 $f(x)=\frac{x^2}{\pi}+\cos x-\frac{\pi}{4}$ $(x\in R)$，所以 $f'(x)=\frac{2x}{\pi}-\sin x(x\in R)$，令 $f'(x)=0$，即$\frac{2x}{\pi}=\sin x$.令 $y_1=\sin x$，$y_2=\frac{2x}{\pi}$，在同一平面直角坐标系中作出两函数的图象，如图(1)所

示，由图象得当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ +\infty\right)$ 和 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ 时，$\sin x<\frac{2x}{\pi}$ ，所以此时 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{2},\ +\infty\right)$ 上单调递增；当 $x\in\left(-\infty,\ -\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x>\frac{2x}{\pi}$ ，所以此时 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，且 $f(0)=1-\frac{\pi}{4}$ ，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi}+\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=0$，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi}+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}=0$，作出函数 $f(x)$ 的图象，如图(2)所示．对于 A，根据函数的图象知 A 正确．对于 B，由图象得 $f'(x)=0$ 有 3 个不同的解，有 3 个极值点，故 B 正确．对于 C，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 或 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=0$，所以函数 $f(x)$ 有 2 个零点，故 C 不正确．对于 D，因为 $f(-x)=\frac{(-x)^2}{\pi}+\cos(-x)-\frac{\pi}{4}=\frac{x^2}{\pi}+\cos x-\frac{\pi}{4}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，所以函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x_1)=f(x_2)=f(-x_2)$，所以 $x_1=-x_2$，即 $x_1+x_2=0$，故 D 正确．



图(1)



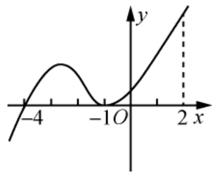
图(2)

(变式)

练习部分

一、 单项选择题(每个 5 分，共 20 分)

1. 已知函数 $y=f(x)$的导函数的图象如图所示，则下列结论正确的是(　　)



(第 1 题)

A. －4 是函数 f(x)的极小值点

B. －1 是函数 f(x)的极小值点

C. 函数 f(x)在区间(－4，1)上单调递减

D. 函数 f(x)在区间(－4，－1)上先增后减

【答案】 *A*

【解析】 结合导函数的图象，可知 f(x)在(－∞，－4)上单调递减，在(－4，＋∞)上单调递增，所以－4 是函数 f(x)的极小值点，故 *A* 正确；－1 不是 f(x)的极值点，故 *B* 错误；函数 f(x)在区间(－4，1)上单调递增，故 *C* 错误；函数 f(x)在区间(－4，－1)上单调递增，故 *D* 错误．

2. 已知函数 $f(x)=x^2e^{ax+1}-ax$，若曲线 $y=f(x)$在点(1，f(1))处的切线与直线 $y=2x$ 平行，则 a 等于(　　)

A. －2　　*B*. －2 或－1　　*C*. －1 或 2　　*D*. －1

【答案】 *A*

【解析】因为 $f(x)=x^2e^{ax+1}-ax$，所以 $f'(x)=2xe^{ax+1}+ax^2e^{ax+1}=a$.又曲线 $y=f(x)$在点(1，f(1))处的切线与直线 $y=2x$ 平行，所以 $f'(1)=2e^{a+1}+ae^{a+1}-a=2$，即$(2+a)e^{a+1}=2+a$，所以 $2+a=0$，即 $a=-2$.

3. 对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$(a 为非零整数)，四位同学分别给出下列结论，其中有且仅有一个结论是错误的，则错误的结论是(　　)

A. －1 是函数 f(x)的零点　　*B*. 1 是函数 f(x)的极值点

C. 3 是函数 f(x)的极值　　*D*. 点(2，8)在曲线 y＝f(x)上

【答案】 *A*

【解析】 由 *A* 知 $a-b+c=0$；由 *B* 知 $f'(x)=2ax+b$，$2a+b=0$；由 *C* 知 $f'(x)=2ax+b$，令 $f'(x)=0$，可得 $x=-\frac{b}{2a}$，则 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=3$，则$\frac{4ac-b^2}{4a}=3$；由 *D* 知 $4a+2b+c=8$.假设 *A* 选项错误，则$\begin{cases}a-b+c\neq 0,\\2a+b=0,\\\frac{4ac-b^2}{4a}=3,\\4a+2b+c=8,\end{cases}$得$\begin{cases}a=5,\\b=-10,\\c=8,\end{cases}$满足题意，故 *A* 结论错误；同理易知，当 *B* 或 *C* 或 *D* 选项错误时，不符合题意，故选 *A*.

4. 已知函数 f(x)(x∈R)满足 $f(1)=1$，且 $f'(x)<1$，则不等式 $f(\lg^2 x)<\lg^2 x$ 的解集为(　　)

A. $\left(0,\frac{1}{10}\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10,+\infty)$

C. $\left(\frac{1}{10},10\right)$　　D. $(10,+\infty)$

【答案】 B

【解析】 设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g'(x)=f'(x)-1$，因为 $f'(x)<1$，所以 $g'(x)<0$，即函数 $g(x)$ 为减函数．因为 $f(1)=1$，所以 $g(1)=f(1)-1=1-1=0$，则不等式 $g(x)<0$ 等价为 $g(x)<g(1)$，则此不等式的解集为 $x>1$，即 $f(x)<x$ 的解为 $x>1$.因为 $f(\lg^2 x)<\lg^2 x$，由 $\lg^2 x>1$ 得 $\lg x>1$ 或 $\lg x<-1$，解得 $x>10$ 或 $0<x<\frac{1}{10}$，故原不等式的解集为 $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10,+\infty)$.

二、多项选择题(每个 5 分，共 15 分)

5. 对于函数 $f(x)=16\ln(1+x)+x^2-10x$，下列结论正确的是(　　)

A. $x=3$ 是函数 $f(x)$的一个极值点

B. 函数 $f(x)$的单调增区间是$(-1,1)$，$(2,+\infty)$

C. 函数 $f(x)$在区间$(1,2)$上单调递减

D. 直线 $y=16\ln 3-16$ 与函数 $f(x)$的图象有 2 个交点

【答案】 AC

【解析】 $f'(x)=\frac{16}{x+1}+2x-10=\frac{2(x-1)(x-3)}{x+1}$　$(x>-1)$，所以当$-1<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递增，在$(1,3)$上单调递减，在$(3,+\infty)$上单调递增，故 3 是 $f(x)$的极小值点，故 A 正确，B 错误，C 正确；由函数 $f(x)$的单调性可知 $f(3)<f(2)<f(1)$，而 $f(2)=16\ln 3-16$，故直线 $y=16\ln 3-16$ 与 $y=f(x)$的图象有 3 个交点，故 D 错误.

6. 在平面直角坐标系内，由 A，B，C，D 四点所确定的“N 型函数”指的是三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，其图象过 A，D 两点，且 $f(x)$的图象在点 A 处的切线经过点 B，在点 D 处的切线经过点 C.若将由 $A(0,0)$，$B(1,4)$，$C(3,2)$，$D(4,0)$四点所确定的“N 型函数”记为 $y=f(x)$，则下列选项正确的是(　　)

A. 曲线 $y=f(x)$在点 D 处的切线方程为 $y=-2x+8$

B. $f(x)=\frac{1}{8}x(x-4)(x-8)$

C. 曲线 $y=f(x)$关于点$(4,0)$对称

D. 当 $4\leqslant x\leqslant 6$ 时，$f(x)\geqslant 0$

【答案】 ABC

【解析】因为直线 CD 的斜率为$\frac{0-2}{4-3}=-2$，所以直线 CD 的方程为 $y-0=-2(x-4)$，即 $y=8-2x$，所以 A 正确；因为 $f(x)$的图象经过 $A(0,0)$，$D(4,0)$，所以 $f(x)$有两个零点 0，4，故可设 $f(x)=x(x-4)(kx+m)(k\neq 0)$，$f'(x)=kx(x-4)+(kx+m)(2x-4)$，由 $f'(0)=4$，$f'(4)=-2$，可得 $m=-1$，$k=\frac{1}{8}$，所以 $f(x)=\frac{1}{8}x(x-4)(x-8)$，B 正确；由 $f(x)+f(8-x)=0$，所以曲线 $y=f(x)$关于点$(4,0)$对称，C 正确；当 $4\leqslant x\leqslant 6$ 时，有 $x-4\geqslant 0$，$x-8\leqslant 0$，所以 $f(x)\leqslant 0$，即 D 不正确.

7. 已知偶函数 $y=f(x)$对于任意的 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$(其中 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数)，则下列不等式中成立的有(　　)

A. $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$　　　B. $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

C. $f(0)<\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$　　　D. $f\left(\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】 BCD

【解析】 因为偶函数 $y=f(x)$对于任意的 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$，所以设 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，$g'(x)=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}>0$，所以当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$ 是单调增函数，且是偶函数，所以 $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.对于 A，因为 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}}$，即 $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，所以 A 不正确，B 正确. 对于 C，根据 $g(x)$的单调性可知 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)>g(0)$，所以 $\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}>\frac{f(0)}{1}$，所以 $f(0)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $f(x)$是偶函数，所以 $f(0)<\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，所以 C 正确. 对于 D，因为根据 $g(x)$的单调性可知 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}}>\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，即 $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，所以 D 正确.

三、 填空题(每个 5 分，共 15 分)

8. 若过点(2，0)作曲线 $f(x)=x^3$ 的切线 l，则直线 l 的方程为________.

【答案】 $27x-y-54=0$ 或 $y=0$

【解析】因为点(2，0)不在函数 $f(x)$的图象上，所以它不是切点. $f'(x)=3x^2$.设切点为 $P(a,a^3)$，$k=3a^2=\frac{a^3-0}{a-2}$，解得 $a=3$ 或 $a=0$，切线的斜率为 27 或 0.当 $k=27$ 时，切线方程为 $27x-y-54=0$；当 $k=0$ 时，切线方程为 $y=0$.

9. 已知函数 $f(x)=ax^3+2x^2-4x+5$，当 $x=\frac{2}{3}$ 时，函数 $f(x)$有极值，则函数 $f(x)$在[−3，1]上的最大值为________.

【答案】 13

【解析】 因为 $f'(x)=3ax^2+4x-4$，当 $x=\frac{2}{3}$ 时，函数 $f(x)$有极值，所以 $f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}$

$=0$，解得 $a=1$，所以 $f'(x)=3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$.当 $x\in(-3,\ -2)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x\in\left(-2，\dfrac{2}{3}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x\in\left(\dfrac{2}{3}，1\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以 $f(x)$在 $x=-2$ 处取得极大值 $f(-2)=13$，且 $f(-3)=8$，$f(1)=4$，所以 $f(x)$在$[-3，1]$上的最大值为 13.

10. 在木工实践活动中，要求同学们将横截面半径为 R、圆心角为$\dfrac{\pi}{2}$的扇形木块锯成横截面为梯形的木块．甲同学在扇形木块 OAB 的弧$\overset{\frown}{AB}$上任取一点 D，作扇形的内接梯形 $OCDB$，使点 C 在 OA 上，则他能锯出来梯形木块 $OCDB$ 面积的最大值为________.

【答案】 $\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8}$

【解析】 设$\angle DOB=x$，则 $CD=R\cos x$，$OC=R\sin x$，$S_{OCDB}=\dfrac{(R+R\cos x)R\sin x}{2}$，欲求 S_{OCDB} 的最大值，先求$(1+\cos x)\sin x$ 的最大值$\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.令 $f(x)=(1+\cos x)\sin x$，则 $f'(x)=\cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)=2\cos^2x+\cos x-1$，当 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos x=-1$(舍去)时，$f'(x)=0$，此时，$x=\dfrac{\pi}{3}$.当 $x\in\left(0，\dfrac{\pi}{3}\right)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，故 $x=\dfrac{\pi}{3}$时，$f(x)$有最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，此时梯形 $OCDB$ 面积取得的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

四、 解答题(第 11，12 题各 15 分，第 13 题 20 分，共 50 分)

11. 在“①$f(-1)=-4$，$f'(1)=0$；②$f(1)=0$，$f'(0)=1$；③$f(x)$在$(-1，f(-1))$处的切线方程为 $y=8x+4$”这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并求解.

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$，且________.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 求函数 $f(x)$的极小值.

【解析】 (1) 方案一：选择①$f(-1)=-4$，$f'(1)=0$，

因为 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，$f(-1)=-4$，$f'(1)=0$，

所以$\begin{cases}3+2a+b=0，\\-1+a-b=-4，\end{cases}$ 解得 $a=-2$，$b=1$.

方案二：选择②$f(1)=0$，$f'(0)=1$.

因为 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，

$f(1)=0$，$f'(0)=1$，所以$\begin{cases}b=1，\\1+a+b=0，\end{cases}$

解得 $a=-2$，$b=1$.

方案三：选择③$f(x)$在$(-1，f(-1))$处的切线方程为 $y=8x+4$.

因为 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，

所以$\begin{cases}3-2a+b=8, \\ -1+a-b=-4,\end{cases}$ 解得 $a=-2$，$b=1$.

(2) 由(1)得 $f(x)=x^3-2x^2+x$，
所以 $f'(x)=3x^2-4x+1$.

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1}{3}$ ，$x_2=1$.

当 $x\in\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(1, +\infty)$时，$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 上单调递减，在$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ ，$(1, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$的极小值为 $f(1)=0$.

12. 已知函数 $f(x)=\ln x+x-ax^2$，$a\in\mathrm{R}$.
(1) 若 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极值，求 a 的值；
(2) 设 $g(x)=f(x)+(a-3)x$，试讨论函数 $g(x)$的单调性.
【解析】 (1) 因为 $f(x)=\ln x+x-ax^2$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+1-2ax$，

因为 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极值，
所以 $f'(1)=1+1-2a=0$，解得 $a=1$.

验证：当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}+1-2x=-\frac{(x-1)(2x+1)}{x}$ $(x>0)$，

易得 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值.
(2) 因为 $g(x)=f(x)+(a-3)x=\ln x+x-ax^2+(a-3)x=\ln x-ax^2+(a-2)x$，

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-2ax+(a-2)=-\frac{(ax+1)(2x-1)}{x}$ $(x>0)$.

①若 $a\geqslant0$，则当 $x\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)$在$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增；

当 $x\in\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，

所以函数 $g(x)$在$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减.

②若 $a<0$，$g'(x)=-\frac{a\left(x+\frac{1}{a}\right)(2x-1)}{x}$ $(x>0)$，

当 $a<-2$ 时，易得函数 $g(x)$在$\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 和$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增，在$\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减；

当 $a=-2$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以函数 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增；

当$-2<a<0$ 时，易得函数 $g(x)$在$\left(0，\frac{1}{2}\right)$ 和$\left(-\frac{1}{a}，+\infty\right)$ 上单调递增，在$\left(\frac{1}{2}，-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

13. 已知 $a\in\mathrm{R}$，函数 $f(x)=ax-1-\ln x$ 在 $x=1$ 处取得极值.

(1) 求函数 $f(x)$的单调区间；

(2) 若对任意 $x\in(0，+\infty)$，$f(x)\geqslant bx-2$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$，由 $f'(1)=a-1=0$，解得 $a=1$，所以 $f(x)=x-1-\ln x$，$f'(x)=\frac{x-1}{x}$.

由 $f'(x)>0$，得 $x>1$；由 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$，

所以 $f(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增.

(2) 因为对任意 $x\in(0，+\infty)$，$f(x)\geqslant bx-2$ 恒成立，

所以 $b\leqslant 1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$.令 $g(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$，

所以 $g'(x)=\frac{\ln x-2}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=e^2$，

由 $g'(x)>0$，得 $x>e^2$，由 $g'(x)<0$，得 $0<x<e^2$，

所以 $g(x)$在$(0，e^2)$上单调递减，在$(e^2，+\infty)$上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(e^2)=1-\frac{1}{e^2}$，所以 $b\leqslant 1-\frac{1}{e^2}$，

所以实数 b 的取值范围是$\left(-\infty，1-\frac{1}{e^2}\right]$.