5.2　导数的运算

第1课时　基本初等函数的导数

对点练 ▶ 先练透基础

类型1　利用公式求导数

例1　求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$；(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；(3) $y=\dfrac{2^x}{3^x}$.

【解析】 (1) $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$；

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$，所以 $y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$；

(3) $y=\dfrac{2^x}{3^x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$，所以 $y'=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\ln\dfrac{2}{3}$.

规律总结：求函数的导数，需要将函数化为具有公式的类型再计算.

类型2　曲线在某一点处的切线方程

例2　已知直线 $y=kx$ 是曲线 $y=\ln x$ 的切线，求实数 k 的值.

【解析】 曲线 $y=\ln x$ 的导数为 $y'=\dfrac{1}{x}$，设切点为 $P(x_0，\ln x_0)$，则过点 P 的切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，代入(0，0)点，得 $x_0=\mathrm{e}$，所以 P 点坐标为(e，1)，$k=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

规律总结：

利用导数的几何意义解决切线问题的两种情况：

(1) 若已知点是切点，则在该点处的切线斜率就是该点处的导数；

(2) 如果已知点不是切点，则应先设出切点，再借助两点连线的斜率公式进行求解.

变式　已知曲线 $y=\dfrac{1}{x}$.

(1) 求曲线在点 $P(1，1)$处的切线方程；

(2) 求过点 $Q(1，0)$的曲线的切线方程.

【解析】 因为 $y=\dfrac{1}{x}$，所以 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$.

(1) 显然点 $P(1，1)$是曲线上的点，所以 P 为切点，

所求切线斜率为函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $P(1，1)$处的导数，

即 $k=f'(1)=-1$.

所以曲线在 $P(1，1)$处的切线方程为 $y-1=-(x-1)$，

即 $x+y-2=0$.

(2) 显然 $Q(1，0)$不在曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上，

则可设过该点的切线的切点为 $A\left(a，\dfrac{1}{a}\right)$，

那么该切线斜率为 $k=f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$.

则切线方程为 $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$.①

将点 $Q(1，0)$代入方程得 $0-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(1-a)$.

解得 $a=\frac{1}{2}$，代入方程①整理可得切线方程为 $y=-4x+4$.

类型 3　导数的实际应用

例3　某质点的运动方程是 $S(t)=\sin t$，则质点在 $t=\frac{\pi}{3}$ 时的速度为________，质点运动的加速度为________.

【答案】 $\frac{1}{2}$　$-\sin t$

【解析】 $v(t)=S'(t)=\cos t$，所以 $v\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，即质点在 $t=\frac{\pi}{3}$ 时的速度为$\frac{1}{2}$.因为 $v(t)=\cos t$，所以加速度 $a(t)=v'(t)=(\cos t)'=-\sin t$.

综合练▶再融会贯通

一、 单项选择题

1. 函数 $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$ 的导数是(　　)

A. x^{-1}　　B. $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$　　C. $\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$　　D. $x^{\frac{3}{4}}\ln x$

【答案】 C

2. 若 $f(x)=3^x$，则 $f'(1)$等于(　　)

A. 3　B. $3\ln 3$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\ln 3$

【答案】 B

3. 已知曲线 $y=x^2$ 在点 P 处的切线方程为 $y=2x-1$，则点 P 的坐标是(　　)

A. (1，0)　B. (0，1)　C. (1，1)　D. (0，0)

【答案】 C

【解析】 设切点坐标为$(a，a^2)$，易得 $2a=2$，所以 $a=1$.

4. 已知函数 $f_1(x)=\sin x$，$f_{n+1}(x)=f'_n(x)$，则 $f_{2\,021}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 等于(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】 D

【解析】 根据题意，函数 $f_1(x)=\sin x$，$f_{n+1}(x)=f'_n(x)$，则 $f_2(x)=f'_1(x)=\cos x$，

$f_3(x)=f'_2(x)=-\sin x$，

$f_4(x)=f'_3(x)=-\cos x$，

$f_5(x)=f'_4(x)=\sin x$，

…

则有 $f_{n+4}(x)=f_n(x)$，则 $f_{2\,021}(x)=f_1(x)=\sin x$，故 $f_{2\,021}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

二、 多项选择题

5. 下列求导运算正确的是(　　)

A. $(\cos x)'=\sin x$　　B. $(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$

C. $(2^x)'=2^x\log_2 e$　　D. $(\sin x)'=\cos x$

【答案】 BD

【解析】 $(\cos x)'=-\sin x$，$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$，$(2^x)'=2^x\ln 2$，$(\sin x)'=\cos x$.

6. 下列结论中正确的有(　　)

A. $y=\ln 2$，则 $y'=\frac{1}{2}$　　B. $y=\sqrt{x}$，则 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

C. $y=e^x$，则 $y'=e^x$　　D. $y=\log_2 x$，则 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$

【答案】 BCD

【解析】 若 $y=\ln 2$，则 $y'=0$，故选项A错误．若 $y=\sqrt{x}$，则 $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，故选项B正确．若 $y=e^x$，则 $y'=e^x$，故选项C正确．若 $y=\log_2 x$，则 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$，故选项D正确．

7. 下列函数 $f(x)$中，满足 $f'(x)=0$ 有实数解的有(　　)

A. $f(x)=x$　　B. $f(x)=\sin x$

C. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$　　D. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$

【答案】 BD

三、 填空题

8. 某质点的运动方程是 $s=t^3$(s 的单位：m，t 的单位：s)，则质点在 $t=3$ 时的瞬时速度是________m/s.

【答案】 27

【解析】 位移对时间的一阶导数是速度，为 $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=3t^2$，则 $t=3$ 时的瞬时速度为 $v_3=3\times3^2=27$(m/s).

9. 已知函数 $f(x)=\sin x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\pi+2\Delta x)-f(\pi)}{\Delta x}=$__________.

【答案】 -2

【解析】 根据题意，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\pi+2\Delta x)-f(\pi)}{\Delta x}=2\times\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\pi+2\Delta x)-f(\pi)}{2\Delta x}=2f'(\pi)$，又由 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$，则有 $f'(\pi)=\cos\pi=-1$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\pi+2\Delta x)-f(\pi)}{\Delta x}=-2$.

10. 与曲线 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在点 $P(8，4)$处的切线垂直且过点 P 的直线方程为________.

【答案】 $3x+y-28=0$

【解析】 因为 $y=\sqrt[3]{x^2}$ ，所以 $y'=(\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ，所以在点 $P(8，4)$处曲线的切线斜率 $k=\frac{2}{3}\times 8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.所以适合题意的切线的斜率为-3.从而适合题意的直线方程为 $y-4=-3(x-8)$，即 $3x+y-28=0$.

四、 解答题

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=x\sqrt{x}$ ；(2) $y=\frac{1}{x^4}$ ；(3) $y=\sqrt[5]{x^3}$ ；

(4) $y=\log_2x^2-\log_2x$；

(5) $y=-2\sin\frac{x}{2}\left(1-2\cos^2\frac{x}{4}\right)$.

【解析】(1) $y'=(x\sqrt{x})'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

(2) $y'=\left(\frac{1}{x^4}\right)'=(x^{-4})'=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$.

(3) $y'=(\sqrt[5]{x^3})'=(x^{\frac{3}{5}})'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.

(4) 因为 $y=\log_2x^2-\log_2x=\log_2x$，

所以 $y'=(\log_2x)'=\frac{1}{x\cdot\ln 2}$.

(5) 因为 $y=-2\sin\frac{x}{2}\left(1-2\cos^2\frac{x}{4}\right)=2\sin\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{4}-1\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x$，

所以 $y'=(\sin x)'=\cos x$.

12. 已知直线 $y=e^2x+b$ 是曲线 $f(x)=e^x$ 的一条切线，求实数 b 的值.

【解析】 曲线 $y=e^x$ 的导数为 $y'=e^x$，设切点为 $P(x_0，ex_0)$，则过点 P 的切线方程为 $y-ex_0=ex_0(x-x_0)$，即为 $y=e^2x+b$，所以 $e^2=ex_0$ 且 $b=ex_0(1-x_0)$，得 $x_0=2$，$b=-e^2$.

创新练 ▶ 延伸与迁移

1. (多选)给出定义：若函数 $f(x)$在 D 上可导，即 $f'(x)$存在，且导函数 $f'(x)$在 D 上也可导，则称 $f(x)$在 D 上存在二阶导函数，记 $f''(x)=(f'(x))'$.若 $f''(x)<0$ 在 D 上恒成立，则称 $f(x)$在 D 上为凸函数．以下四个函数在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数的是(　　)

A. $f(x)=\cos x$　　B. $f(x)=\ln x$　　C. $f(x)=x^2$　　D. $f(x)=\frac{1}{x}$

【答案】 AB

【解析】 对于 A，$f'(x)=-\sin x$，$f''(x)=-\cos x$.因为 $x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f''(x)<0$，$f(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数，故 A 正确；对于 B，$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，故 $f(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数，故 B 正确；对于 C，$f'(x)=2x$，$f''(x)=2>0$，故 $f(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上不是凸函数，

故 C 错误；对于 D，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，$f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$，故 $f(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上不是凸函数，故 D 错误.