第 2 课时　导数的四则运算法则

对点练▶先练透基础

类型 1　两个函数和、差的导数

例1　求下列函数的导数：

(1) $y=x^{-2}+x^2$；

(2) $y=x^2-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

【解析】 (1) $y'=2x-2x^{-3}$.

(2) 因为 $y=x^2-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=x^2-2\sin x$，

所以 $y'=2x-2\cos x$.

变式　(1) 若函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=2f'(1)\ln x+2x$，则 $f'(1)=$________，$f'(2)=$________.

【答案】 -2　0

【解析】 因为 $f(x)=2f'(1)\ln x+2x$，则有 $f'(x)=2f'(1)\cdot\frac{1}{x}+2$，故 $f'(1)=2f'(1)+2$，解得 $f'(1)=-2$，$f'(x)=-\frac{4}{x}+2$，所以 $f'(2)=0$.

(2) 已知 $f'(x)$为函数 $f(x)=ax-b\ln x$ 的导函数，且满足 $f'(1)=0$，$f'(-1)=2$，则 $f'(2)$等于(　　)

A. 1　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{4}{3}$

【答案】 C

【解析】 因为 $f'(x)$为函数 $f(x)=ax-b\ln x$ 的导函数，所以 $f'(x)=a-\frac{b}{x}$.若 $f'(1)=0$，$f'(-1)=2$，则 $a-b=0$，$a+b=2$，解得 $a=1$，$b=1$，所以 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$，所以 $f'(2)=\frac{1}{2}$.

规律总结：函数关系式中含有 $f'(x_0)$，首先认清 $f'(x_0)$为常数，进而求导赋值计算.

类型 2　两个函数积、商的导数

例2　求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2+3)(3x-1)$；

(2) $y=3^xe^x-2^x+e$；

(3) $y=\frac{\ln x}{x^2+1}$.

【解析】 (1) 方法一：$y'=(2x^2+3)'(3x-1)+(2x^2+3)\cdot(3x-1)'=4x(3x-1)+3(2x^2+3)=18x^2-4x+9$.

方法二：因为 $y=(2x^2+3)(3x-1)=6x^3-2x^2+9x-3$，

所以 $y'=(6x^3-2x^2+9x-3)'=18x^2-4x+9$.

(2) $y'=(\ln 3+1)\cdot(3e)^x-2^x\ln 2$.

(3) $y'=\dfrac{x^2+1-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}$.

变式 (1) 若函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 在 $x=a$ 处的导数值与函数值互为相反数，则 a 的值为________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】 因为 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ ，所以 $f(a)=\dfrac{e^a}{a}$.又因为 $f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}$ ，所以 $f'(a)=\dfrac{e^a\cdot a-e^a}{a^2}$.由题意知 $f(a)+f'(a)=0$，所以$\dfrac{e^a}{a}+\dfrac{e^a\cdot a-e^a}{a^2}=0$，所以 $2a-1=0$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$.

(2) 函数 $y=2x(\ln x+1)$在 $x=1$ 处的切线方程为(　　)

A. $y=4x+2$　　B. $y=2x-4$

C. $y=4x-2$　　D. $y=2x+4$

【答案】 C

【解析】 由已知得 $y'=2(\ln x+1)+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2\ln x+4$，则 $y'|_{x=1}=4$.又当 $x=1$ 时，$y=2$，则切线方程为 $y=4x-2$.

综合练 ▶ 再融会贯通

一、 单项选择题

1. 若函数 $f(x)=(x-1)\ln x$，则 $f'(1)$等于(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. e

【答案】 B

【解析】 因为 $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}$ ，所以 $f'(1)=0$.

2. 已知 $f(x)=x(2\,021+\ln x)$，若 $f'(x_0)=2\,022$，则 x_0 等于(　　)

A. e^2　　B. 1　　C. ln 2　　D. e

【答案】 B

【解析】 $f'(x)=2\,021+\ln x+1=\ln x+2\,022$，因为 $f'(x_0)=2\,022$，所以 $f'(x_0)=\ln x_0+2\,022=2\,022$，所以 $\ln x_0=0$，所以 $x_0=1$.

3. 已知函数 $f(x)=2x+3f'(0)\cdot e^x$，则 $f'(1)$等于(　　)

A. $\dfrac{3}{2}$ e　　B. $3-2e$　　C. $2-3e$　　D. $2+3e$

【答案】 C

【解析】$f'(x)=2+3f'(0)\cdot e^x$，所以 $f'(0)=2+3f'(0)$，解得 $f'(0)=-1$，所以 $f'(x)=2-3e^x$，所以 $f'(1)=2-3e$.

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{e^x+1}+x^3$，其导函数为 $f'(x)$，则 $f(2\,020)+f(-2\,020)+f'(2\,021)-f'(-2\,021)$的值为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】 C

【解析】$f'(x)=\frac{-3e^x}{(e^x+1)^2}+3x^2$, $f'(-x)=\frac{-3e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}+3(-x)^2=\frac{-3e^x}{(e^x+1)^2}+3x^2$，所以 $f'(x)$为偶函数，所以 $f'(2\ 021)-f'(-2\ 021)=0$.因为 $f(x)+f(-x)=\frac{3}{e^x+1}+x^3+\frac{3}{e^{-x}+1}-x^3=\frac{3}{e^x+1}+\frac{3e^x}{e^x+1}=3$，所以 $f(2\ 020)+f(-2\ 020)=3$，所以 $f(2\ 020)+f(-2\ 020)+f'(2\ 021)-f'(-2\ 021)=3$.

二、 多项选择题

5. 在下列函数中，求导正确的有(　　)

A. $f(x)=x^2-1$，则 $f'(x)=2x$

B. $g(x)=x\ln x+1$，则 $g'(x)=\ln x+\frac{1}{x}$

C. $h(x)=\frac{x+2}{e^x}$，则 $h'(x)=-\frac{x+1}{e^x}$

D. $\phi(x)=x\sin x+\cos x$，则 $\varphi'(x)=-x\cos x$

【答案】 AC

【解析】 $f'(x)=(x^2)'-1'=2x$，故选项 A 正确；$g'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$，故选项 B 不正确；$h'(x)=\frac{(x+2)'e^x-(x+2)(e^x)'}{(e^x)^2}=-\frac{x+1}{e^x}$，故选项 C 正确；$\varphi'(x)=x'\sin x+x(\sin x)'+(\cos x)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，故选项 D 不正确.

6. 若函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象关于 y 轴对称，则 $f(x)$的解析式可能为(　　)

A. $f(x)=3\cos x$　　B. $f(x)=x^3+x$

C. $f(x)=x+\frac{1}{x}$　　D. $f(x)=e^x+x$

【答案】 BC

【解析】 根据题意，依次分析选项：对于 A，$f(x)=3\cos x$，其导函数 $f'(x)=-3\sin x$，它为奇函数，图象不关于 y 轴对称，不符合题意；对于 B，$f(x)=x^3+x$，其导函数 $f'(x)=3x^2+1$，它为偶函数，图象关于 y 轴对称，符合题意；对于 C，$f(x)=x+\frac{1}{x}$，其导函数 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$，它为偶函数，图象关于 y 轴对称，符合题意；对于 D，$f(x)=e^x+x$，其导函数 $f'(x)=e^x+1$，它不是偶函数，图象不关于 y 轴对称，不符合题意.

7. 下列函数在点 $x=0$ 处有切线的是(　　)

A. $f(x)=3x^2+\cos x$　　B. $g(x)=x\cdot\sin x$

C. $h(x)=\frac{1}{x}+2x$　　D. $w(x)=\frac{1}{\cos x}$

【答案】 ABD

【解析】$f'(x)=6x-\sin x$，$f'(0)=0$，此时切线的斜率为 0，故在点 $x=0$ 处有切线．$g'(x)=\sin x+x\cos x$，$g'(0)=0$，此时切线的斜率为 0，故在点 $x=0$ 处有切线．$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+2$，在 $x=0$ 处不可导，则在 $x=0$ 处没有切线．$w'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$，$w'(0)=0$，此时切线的斜率为 0，故在点 $x=0$ 处有切线.

三、填空题

8. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}$，则 $f(x)$在 $x=2$ 处的导数 $f'(2)=$________.

【答案】 2

【解析】 因为 $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{2}{1-x}$，所以 $f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$，所以 $f'(2)=2$.

9. 满足“若 $f'(x)$为偶函数，则 $f(x)$为奇函数”为假命题的一个函数是________.

【答案】 答案不唯一，如 $f(x)=x^3+1$.

10. 已知函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，记 $f_1(x)=f'(x)$，$f_2(x)=f'_1(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f'_n(x)(n\in \mathrm{N}^*)$. 若 $f(x)=x\sin x$，则 $f_{2\,021}(x)+f_{2\,023}(x)=$________.

【答案】 $-2\sin x$

【解析】 $f(x)=x\sin x$，则 $f_1(x)=f'(x)=\sin x+x\cos x$，$f_2(x)=f'_1(x)=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$，$f_3(x)=f'_2(x)=-2\sin x-\sin x-x\cos x=-3\sin x-x\cos x$，$f_4(x)=f'_3(x)=-3\cos x-\cos x+x\sin x=-4\cos x+x\sin x$，$f_5(x)=f'_4(x)=4\sin x+\sin x+x\cos x=5\sin x+x\cos x$，$f_6(x)=f'_5(x)=5\cos x+\cos x-x\sin x=6\cos x-x\sin x$，$f_7(x)=f'_6(x)=-6\sin x-\sin x-x\cos x=-7\sin x-x\cos x$，…，则 $f_1(x)+f_3(x)=\sin x+x\cos x-3\sin x-x\cos x=-2\sin x$，$f_3(x)+f_5(x)=-3\sin x-x\cos x+5\sin x+x\cos x=2\sin x$，$f_5(x)+f_7(x)=5\sin x+x\cos x-7\sin x-x\cos x=-2\sin x$，即 $f_{4n+1}(x)+f_{4n+3}(x)=-2\sin x$，$f_{4n+3}(x)+f_{4n+5}(x)=2\sin x$，则 $f_{2\,021}(x)+f_{2\,023}(x)=-2\sin x$.

四、 解答题

11. 已知曲线 $f(x)=\frac{1}{x}+a\ln x+\ln a$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+3y+1=0$ 垂直.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 记 $g(x)=f'(x)$，求 $g'(1)$.

【解析】 (1) 根据题意，$f(x)=\frac{1}{x}+a\ln x+\ln a$，

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}$，则有 $f'(1)=a-1$.

即曲线 $f(x)$在 $x=1$ 处的切线的斜率 $k=a-1$，

若曲线 $f(x)$在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+3y+1=0$ 垂直，则 $k=a-1=3$，解得 $a=4$.

(2) 由(1)知 $g(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}$，所以 $g'(x)=2x^{-3}-4x^{-2}$，故 $g'(1)=-2$.

12. 已知 a，b，$c\in \mathrm{R}$，函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$的导函数为 $f'(x)$.

(1) 若 $b=c$，求曲线 $y=f(x)$在点$(b，f(b))$处的切线方程；

(2) 求$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+\frac{1}{f'(c)}$ 的值.

【解析】 (1) 若 $b=c$，则 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$，

所以 $f'(x)=(x-b)^2+(x-a)\cdot 2(x-b)$，

则 $f'(b)=(b-b)^2+(b-a)\cdot 2(b-b)=0$，

即曲线 $y=f(x)$在点$(b，f(b))$处的切线斜率为 0.

又因为 $f(b)=(b-a)(b-b)^2=0$，

所以所求切线方程为 $y=0$.

(2) 由 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$得

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)[(x-b)(x-c)]'=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$，

所以 $f'(a)=(a-b)(a-c)$，$f'(b)=(b-a)(b-c)$，

$f'(c)=(c-a)(c-b)$，

因此$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+\frac{1}{f'(c)}$

$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{1}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}\right)+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{b-a}{(a-c)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$

$=-\frac{1}{(a-c)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}=0.$

创新练 ▶ 延伸与迁移

1. 已知三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$的图象的对称中心为点 $M(x_0，y_0)$，且点 M 在函数 $y=f(x)$的图象上，记函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，$f'(x)$的导函数为 $f''(x)$，则有 $f''(x_0)=0$.若函数 $f(x)=x^3-3x^2$,则可得 $f\left(\frac{1}{2\,022}\right)+f\left(\frac{2}{2\,022}\right)+\cdots+f\left(\frac{4\,042}{2\,022}\right)+f\left(\frac{4\,043}{2\,022}\right)$ 等于(　　)

A. 4 043　　B. －4 043

C. 8 086　　D. －8 086

【答案】 D

【解析】 $f'(x)=3x^2-6x$，$f''(x)=6x-6$，由 $f''(x_0)=0$，得 $x_0=1$，而 $f(1)=-2$，故函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 关于点(1，－2)对称，即 $f(x)+f(2-x)=-4$.所以 $f\left(\frac{1}{2\,022}\right)+f\left(\frac{2}{2\,022}\right)+\cdots+f\left(\frac{4\,042}{2\,022}\right)+f\left(\frac{4\,043}{2\,022}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2\,022}\right)+f\left(\frac{4\,043}{2\,022}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2\,022}\right)+f\left(\frac{4\,042}{2\,020}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)+f\left(\frac{2\,023}{2\,022}\right)\right]+f\left(\frac{2\,022}{2\,022}\right)=-4\times2\,021+(-2)=-8\,086.$