第 2 课时　函数单调性的应用

对点练 ▶ 先练透基础

类型 1　已知单调区间求参数

例1　已知函数 $f(x)=x^3-ax-1$.

(1) 若 $f(x)$在区间$(1，+\infty)$上为增函数，求 a 的取值范围；

(2) 若 $f(x)$的单调减区间为$(-1，1)$，求 a 的值．

【解析】(1) 因为 $f'(x)=3x^2-a$，且 $f(x)$在区间$(1，+\infty)$上为增函数，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在$(1，+\infty)$上恒成立，即 $3x^2-a\geqslant 0$ 在$(1，+\infty)$上恒成立，所以 $a\leqslant 3x^2$ 在$(1，+\infty)$上恒成立，所以 $a\leqslant 3$，即 a 的取值范围是$(-\infty，3]$.

(2) 因为 $f(x)=x^3-ax-1$，

所以 $f'(x)=3x^2-a$，由题意知 $a>0$.

由 $f'(x)<0$，得 $-\sqrt{\frac{a}{3}}<x<\sqrt{\frac{a}{3}}$，

所以 $f(x)$的单调减区间为$\left(-\sqrt{\frac{a}{3}},\ \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$．

又因为 $f(x)$的单调减区间为$(-1，1)$，

所以$\sqrt{\frac{a}{3}}=1$，即 $a=3$.

规律总结：若 $f(x)$的单调增(减)区间为 D，①当区间 D 的端点值是 $f'(x)=0$ 的两根；②当 $f(x)$在区间 I 上单调递增(减)，则可得 $I\subseteq D$ 或 $f'(x)\geqslant 0(f'(x)\leqslant 0)$且 $f'(x)$不恒为零.

类型 2　利用单调性比较大小

例2　(多选)下列判断正确的是(　　)

A. $\frac{2\ln 3}{3}>\ln 2$　　B. $\frac{5}{4}\ln 2<\ln\frac{5}{2}$　C. $\ln 2<\frac{2}{e}$　　D. $2^{\sqrt{5}}>5$

【答案】 ABC

【解析】 构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0，e)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$是增函数，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$是减函数．因为 $9>8$，所以 $\ln 9>\ln 8$，即 $2\ln 3>3\ln 2$，所以$\frac{2\ln 3}{3}>\ln 2$，所以 A 正确；因为 $e>\frac{5}{2}>2$，所以 $f\left(\frac{5}{2}\right)>f(2)$，所以$\frac{\ln\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}>\frac{\ln 2}{2}$，所以$\frac{5}{4}\ln 2<\ln\frac{5}{2}$.所以 B 正确；因为 $f(2)<f(e)=\frac{1}{e}$，所以$\frac{\ln 2}{2}<\frac{1}{e}$，所以 $\ln 2<\frac{2}{e}$，所以 C 正确；因为 $e>\sqrt{5}>2$，所以 $f(\sqrt{5})>f(2)$，所以$\frac{\ln\sqrt{5}}{\sqrt{5}}>\frac{\ln 2}{2}$，所以 $2\ln\sqrt{5}>\sqrt{5}\ln 2$，所以 $\ln 5>\ln 2^{\sqrt{5}}$，所以 $5>2^{\sqrt{5}}$，所以 D 错误．

规律总结：一般利用函数单调性比较大小，需要根据所给式子结构匹配或构造到相应函数，求得单调性之后比较.

类型 3　利用单调性解不等式

例3　已知函数的定义域为 R，$f(2)=-1$，对任意 $x\in R$，$f'(x)<-1$，则 $f(x)>1-x$ 的解集为(　　)

A. $(-\infty, 2)$　　B. $(2, +\infty)$　　C. $(-1, 1)$　　D. $(1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】令 $g(x)=f(x)+x$，因为对任意 $x\in R$，$f'(x)<-1$，所以 $g'(x)=f'(x)+1<0$，即 $g(x)$ 在 R 上单调递减. 又因为 $f(2)=-1$，所以 $g(2)=f(2)+2=1$.由 $f(x)>1-x$，可得 $f(x)+x>1$，即 $g(x)>g(2)$，所以 $x<2$，即不等式 $f(x)>1-x$ 的解集为 $(-\infty, 2)$.

例4　设函数 $f'(x)$是奇函数 $f(x)$的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A. $(-1, 0)\cup(1, +\infty)$　　B. $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$

C. $(-\infty, -1)\cup(-1, 0)$　　D. $(0, 1)\cup(1, +\infty)$

【答案】 B

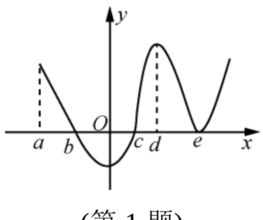
【解析】设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.因为当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，所以当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，此时函数 $g(x)$为减函数. 因为 $f(x)$是奇函数，所以 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 是偶函数，即当 $x<0$ 时，$g(x)$为增函数. 因为 $f(-1)=0$，所以 $g(-1)=g(1)=0$.当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ 等价于 $g(x)=\frac{f(x)}{x}>0$，即 $g(x)>g(1)$，此时 $0<x<1$.当 $x<0$ 时，$f(x)>0$ 等价于 $g(x)=\frac{f(x)}{x}<0$，即 $g(x)<g(-1)$，此时 $x<-1$.综上，原不等式的解集为 $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$.

规律总结：与导函数 $f'(x)$相关的不等关系，往往需要根据求导法则的结构特点构造新函数 $g(x)$，将条件中的不等式转化为 $g'(x)$的正负情况，进而借助 $g(x)$单调性解决相关问题.

综合练 ▶ 再融会贯通

一、　单项选择题

1. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$的导函数的图象如图所示，则以下函数值的大小关系一定正确的是(　　)



(第 1 题)

A. f(a)>f(b)>f(0)　　*B.* f(0)<f(c)<f(d)

C. f(b)<f(0)<f(c)　　*D.* f(c)<f(d)<f(e)

【答案】 *D*

【解析】 由函数 f(x)的导函数图象可知，函数 f(x)在(a，b)，(c，$+\infty$)上单调递增，在(b，c)上单调递减，所以 f(a)<f(b)，故 *A* 错误；f(b)>f(0)>f(c)，故 *B* 和 *C* 错误；f(c)<f(d)<f(e)，故 *D* 正确.

2. 已知函数 $y=\frac{1}{2}x^2-a\ln x-2x$ 在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]$　　*B.* $(-\infty,-1]$　*C.* $[1,+\infty)$　　*D.* $[0,1)$

【答案】 *B*

【解析】 $y'=x-\frac{a}{x}-2$，若函数 $y=\frac{1}{2}x^2-a\ln x-2x$ 在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，则 $x-\frac{a}{x}-2\geqslant 0$ 在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立，即 $x-2\geqslant\frac{a}{x}$，即 $a\leqslant x^2-2x$ 在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立．令 $f(x)=x(x-2)=(x-1)^2-1$，$x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，其图象的对称轴是 $x=1$，故 $f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $f(x)_{min}=f(1)=-1$，故 $a\leqslant-1$.

3. 若函数 $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+mx+2$ 是 R 上的单调函数，则 m 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 函数 $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+mx+2$ 是 R 上的单调函数，即 $y'=x^2+2x+m\geqslant 0$ 或 $y'=x^2+2x+m\leqslant 0$(舍去)在 R 上恒成立，所以 $\Delta=4-4m\leqslant 0$，解得 $m\geqslant 1$.

4. 已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$满足 $f(-1)=2\ 020$，且对任意的 $x\in$R，都有 $f'(x)-3x^2>0$ 成立，则不等式 $f(x)<x^3+2\ 021$ 的解集为(　　)

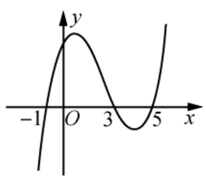
A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)$

【答案】 A

【解析】 设 $g(x)=f(x)-x^3$，则 $g'(x)=f'(x)-3x^2>0$，所以 $g(x)$在 R 上为增函数．因为 $f(-1)=2\ 020$，所以 $g(-1)=f(-1)-(-1)^3=2\ 021$，所以不等式 $f(x)<x^3+2\ 021$ 等价于 $f(x)-x^3<g(-1)$，即 $g(x)<g(-1)$，所以 $x<-1$，即不等式的解集为$(-\infty,-1)$.

二、 多项选择题

5. 已知函数 $y=f(x)$的导函数 $y=f'(x)$的图象如图所示，则下列结论正确的是(　　)



(第 5 题)

A. 函数 $y=f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数　　*B.* 在$(3,5)$上函数 $f'(x)<0$

C. $f(3)=f(5)$　　*D.* $f(-1)<f(3)$

【答案】 *BD*

6. 设 $f(x)$，$g(x)$都是单调函数，其导函数分别为 $f'(x)$，$g'(x)$，$h(x)=f(x)-g(x)$，下列判断正确的是(　　)

A. 若 $f'(x)>0$，$g'(x)>0$，则 $h(x)$单调递增

B. 若 $f'(x)>0$，$g'(x)<0$，则 $h(x)$单调递增

C. 若 $f'(x)<0$，$g'(x)>0$，则 $h(x)$单调递减

D. 若 $f'(x)<0$，$g'(x)<0$，则 $h(x)$单调递减

【答案】 BC

【解析】 $f'(x)>0$ 时，函数 $f(x)$为增函数，$f'(x)<0$ 时，函数 $f(x)$为减函数，同理 $g'(x)>0$ 时，函数 $g(x)$为增函数，$g'(x)<0$ 时，函数 $g(x)$为减函数．不妨取 $f(x)=2^x$，$g(x)=2^{x+1}$，则满足 $f'(x)>0$，$g'(x)>0$，$h(x)=f(x)-g(x)=2^x(1-2)=-2^x$，显然 $h(x)$是减函数，排除 A 选项；取 $f(x)=-x$，$g(x)=-2x$，满足 $f'(x)<0$，$g'(x)<0$，则 $h(x)=f(x)-g(x)=x$，故 $h(x)$是增函数，排除选项 D；当 $f'(x)>0$，$g'(x)<0$ 时，函数 $f(x)$为增函数，$g(x)$为减函数，则$-g(x)$为增函数，所以 $h(x)=f(x)-g(x)$为增函数，故 B 正确；当 $f'(x)<0$，$g'(x)>0$ 时，$f(x)$为减函数，$g(x)$为增函数，$-g(x)$为减函数，所以 $h(x)=f(x)-g(x)$为减函数，故 C 正确．

7. 以下四组不等式中错误的是(　　)

$A.\ \log_{2.8}e>\ln 2.8$　　$B.\ 0.4^{0.2}<0.3^{0.2}$

$C.\ e^{\pi}>\pi^{e}$　　$D.\ \sqrt{\pi}\ \ln 3>\sqrt{3}\ \ln\pi$

【答案】 ABD

【解析】 因为 $\log_{2.8}e<1$，而 $\ln 2.8>1$，故 A 错误；因为函数 $y=x^{0.2}$ 在$(0，+\infty)$上是增函数，$0.4>0.3$，所以 $0.4^{0.2}>0.3^{0.2}$，故 B 错误；设函数 $y=\frac{\ln x}{x}$，则 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>e$ 时，$y'<0$，所以 y 在$(e，+\infty)$上是减函数，所以$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}$，即 $\pi\ln e>e\ln\pi$，所以 $e^{\pi}>\pi^{e}$，故 C 正确；设函数 $y=\frac{\ln x}{x}$，则 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$y'>0$，故 y 在$(0，e)$上是增函数，因为 $0<\sqrt{3}<\sqrt{\pi}<e$，所以$\frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\frac{\ln\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$，即$\sqrt{\pi}\ \ln\sqrt{3}<\sqrt{3}\ \ln\sqrt{\pi}$，所以$\sqrt{\pi}\ \ln 3<\sqrt{3}\ \ln\pi$，故 D 错误，故选 ABD.

三、 填空题

8. 若函数 $f(x)=ax^3-12x+a$ 的单调减区间为$(-2，2)$，则 $a=$________.

【答案】 1

【解析】 由 $f(x)=ax^3-12x+a$，得 $f'(x)=3ax^2-12$，因为 $f(x)=ax^3-12x+a$ 的单调减区间为$(-2，2)$，所以-2 和 2 为方程 $f'(x)=0$ 的两个实根，所以 $12a-12=0$，所以 $a=1$.

9. 已知函数 $f(x)=e^{2x+1}-e^{-2x}-mx$ 在 R 上为增函数，则 m 的取值范围为________.

【答案】 $(-\infty，4\sqrt{e}\ ]$

【解析】 因为函数 $f(x)=e^{2x+1}-e^{-2x}-mx$ 在 R 上为增函数，所以 $f'(x)=2e^{2x+1}+2e^{-2x}-m\geqslant 0$ 在 R 上恒成立，即 $m\leqslant 2e^{2x+1}+2e^{-2x}$ 对 $x\in R$ 恒成立．因为 $2e^{2x+1}+2e^{-2x}\geqslant 2\sqrt{2e^{2x+1}\times 2e^{-2x}}=4\sqrt{e}$，当且仅当 $x=-\frac{1}{4}$ 时取等号，所以 $m\leqslant 4\sqrt{e}$.

10. 已知 $f(x)$是定义在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上的函数，其导函数为 $f'(x)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$，且 $x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)\sin x+f(x)\cos x>0$，则不等式 $f(x)\sin x<3$ 的解集为________.

【答案】 $\left\{x|0<x<\frac{\pi}{3}\right\}$

【解析】 因为 $f'(x)\sin x+f(x)\cos x>0$，所以$[f(x)\cdot\sin x]'>0$.令 $g(x)=f(x)\sin x$，则当 $x\in$

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$ ，所以 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=3$，不等式 $f(x)\sin x<3$，即 $g(x)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$.因为 $g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以原不等式的解集为$\left\{x|0<x<\frac{\pi}{3}\right\}$.

四、 解答题

11. 已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$.

(1) 当 $a=2$ 时，讨论 $f(x)$的单调区间；

(2) 若 $f(x)$在定义域 R 内单调递增，求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=e^x-2x-1$，

则 $f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)=e^x-2>0$，得 $x>\ln 2$；

令 $f'(x)=e^x-2<0$，得 $x<\ln 2$.

所以 $f(x)$的单调增区间为$(\ln 2,+\infty)$，单调减区间为$(-\infty,\ln 2)$.

(2) 由题可知，$f(x)$在定义域 R 内单调递增等价于 $f'(x)=e^x-a\geqslant 0$.由 $f'(x)=e^x-a$ 在 R 上单调递增，又 $e^x>0$，则 $0-a\geqslant 0$，解得 $a\leqslant 0$.

12. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2^x}-2^x$.

(1) 求证：函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数；

(2) 当 $m>0$ 时，解关于 x 的不等式 $f(mx^2-m^2x)+f(m-x)>f(0)$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)=\frac{1}{2^x}-2^x$ 的定义域为 R，

$f'(x)=\frac{1}{2^x}\ln\frac{1}{2}-2^x\ln 2=-\left(\frac{1}{2^x}+2^x\right)\ln 2$.

因为$\frac{1}{2^x}+2^x>0$，$\ln 2>0$，所以 $f'(x)<0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数.

(2) 因为 $f(-x)=\frac{1}{2^{-x}}-2^{-x}=2^x-\frac{1}{2^x}=-f(x)$，且 $f(x)$的定义域为 R，

所以 $f(x)$为奇函数，且 $f(0)=0$，

所以不等式 $f(mx^2-m^2x)+f(m-x)>f(0)$，

即为 $f(mx^2-m^2x)>-f(m-x)=f(x-m)$，

因为 $f(x)$为减函数，所以 $mx^2-m^2x<x-m$，

即$(mx-1)(x-m)<0$.

当 $0<m<1$ 时，原不等式的解集为$\left(m,\frac{1}{m}\right)$ ；

当 $m=1$ 时，原不等式的解集为∅；

当 $m>1$ 时，原不等式的解集为$\left(\frac{1}{m},m\right)$.

拓展练 ▶ 后提升素养

1. (多选)函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+2)x+2\ln x$ 单调递增的必要不充分条件有(　　)

A. $a\geqslant 2$　　B. $a=2$　　C. $a\geqslant 1$　　D. $a>2$

【答案】 AC

【解析】由题意知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+2)x+2\ln x$ 在区间(0，$+\infty$)上单调递增，则 $f'(x)=ax-(a+2)+\frac{2}{x}=\frac{ax^2-(a+2)x+2}{x}\geqslant 0$ 在区间(0，$+\infty$)上恒成立，即 $ax^2-(a+2)x+2\geqslant 0$ 在区间(0，$+\infty$)上恒成立．①当 $a=0$ 时，$-2x+2\geqslant 0$ 泳 $x\leqslant 1$，不满足题意；②当 $a<0$ 时，$ax^2-(a+2)x+2=a\left(x-\frac{2}{a}\right)(x-1)\geqslant 0$，又$\frac{2}{a}<0$，即$\left(x-\frac{2}{a}\right)(x-1)\leqslant 0$ 泳 $x\leqslant 1$，不满足题意；③当 $a>0$ 时，$ax^2-(a+2)x+2=a\left(x-\frac{2}{a}\right)(x-1)\geqslant 0$，又$\frac{2}{a}>0$, $ax^2-(a+2)x+2\geqslant 0$ 在区间(0，$+\infty$)上恒成立，则 $\Delta=(a+2)^2-8a=(a-2)^2\leqslant 0$ 泳 $a=2$.综上，函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+2)x+2\ln x$ 单调递增的充要条件为 $a=2$.结合选项知 AC 符合题意.