习题课　恒成立与能成立问题

题型 1　“$a\geqslant f(x)$”型

例1　若函数 $f(x)=\ln x+ax^2-2$ 在区间$\left(\frac{1}{2}，2\right)$内存在单调增区间，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty，-2]$　　B. $\left(-\frac{1}{8}，+\infty\right)$　　C. $\left(-2，-\frac{1}{8}\right)$　　D. $(-2，+\infty)$

【答案】 D

【解析】根据题意得 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax$，因为 $f(x)$在区间$\left(\frac{1}{2}，2\right)$内存在单调增区间，所以 $f'(x)>0$ 在$\left(\frac{1}{2}，2\right)$内有解，即$\frac{1}{x}+2ax>0$ 穴 $a>-\frac{1}{2x^2}$ 在$\left(\frac{1}{2}，2\right)$内有解，故存在 $x\in\left(\frac{1}{2}，2\right)$，使得 $a>-\frac{1}{2x^2}$.令 $g(x)=-\frac{1}{2x^2}$，则 $g(x)$在$\left(\frac{1}{2}，2\right)$上单调递增，所以 $g(x)\in\left(-2，-\frac{1}{8}\right)$，故 $a>-2$.

变式　已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-mx$(e 为自然对数的底数)，若 $f(x)<0$ 在$(0，+\infty)$上有解，则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $(e，+\infty)$　　B. $(-\infty，e)$　　C. $\left(\frac{e^2}{4}，+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty，\frac{e^2}{4}\right)$

【答案】 C

【解析】由 $f(x)=\frac{e^x}{x}-mx<0$ 在$(0，+\infty)$上有解，可得 $m>\frac{e^x}{x^2}$ 在$(0，+\infty)$上有解．令 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$，$x>0$，则 $m>g(x)_{\min}$.由 $g'(x)=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$，则当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$单调递减；当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增，故当 $x=2$ 时，函数 $g(x)$取得最小值 $g(2)=\frac{e^2}{4}$，故 $m>\frac{e^2}{4}$.

题型 2　“$f(x)\geqslant g(x)$”型

例2　已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$，$g(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2$，求证：当 $x>1$ 时，函数 $f(x)$的图象恒在函数 $g(x)$的图象的上方.

【解析】令 $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\ln x$，

则 $h'(x)=2x^2-x-\frac{1}{x}=\frac{2x^3-x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$，

因为 $x>1$，所以 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增.

又因为 $h(1)=\frac{1}{6}>0$，所以 $f(x)>g(x)$，

故当 $x>1$ 时，$f(x)$的图象恒在 $g(x)$图象的上方.

变式　已知函数 $f(x)=a\ln(1+x)-b\ln(1-x)+a-b$ 在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=2x$.

(1) 求 $f(x)$的解析式；

(2) 求证：当 $x\in(-1,0)$时，$f(x)<x+\frac{x^3}{3}$.

【解析】(1) $f(x)=a\ln(1+x)-b\ln(1-x)+a-b$，

故 $f'(x)=\frac{a}{1+x}+\frac{b}{1-x}$ ，

由 $k=f'(0)$，得 $a+b=2$.

由 $f(0)=0$，得 $a-b=0$，解得 $a=b=1$，

故 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

(2) 原命题等价于任意 $x\in(-1,0)$，$f(x)-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)<0$，

设 $F(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$ ，

则 $F'(x)=\frac{x^4+1}{1-x^2}$.

当 $x\in(-1,0)$时，$F'(x)>0$，函数 $F(x)$在$(-1,0)$上单调递增，

$F(x)<F(0)=0$，故任意 $x\in(-1,0)$，$f(x)<x+\frac{x^3}{3}$.

题型 3 "$f(x_1)\geqslant g(x_2)$"型

例3 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{2x}$ ，$g(x)=-x^2+2x+a-1$，若任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，都有 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$恒成立，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $(-\infty,e)$　　B. $(-\infty,e]$

C. $\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{e}{2}\right)$

【答案】 C

【解析】$f(x)=\frac{e^x}{2x}$ ，$g(x)=-x^2+2x+a-1$，若任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，都有 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$恒成立，则 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}(x\in(0,+\infty))$.$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{2x^2}$ ，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，故 $f(x)$的最小值为 $f(1)=\frac{e}{2}$.又因为 $g(x)_{\max}=a$，所以 $a\leqslant\frac{e}{2}$.故实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$.

变式 已知函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)$.若任意 $x_1\in(0,+\infty)$，存在 $x_2\in\mathbb{R}$，使得 $f(2x_1)+mf(x_1)-g(x_2)>0$ 成立，求实数 m 的取值范围.

【解析】$g(x)=\ln\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)\geqslant\ln 2$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，由题意，任意 $x_1\in(0,+\infty)$，存在 $x_2\in\mathbb{R}$，使得 $f(2x_1)+mf(x_1)>g(x_2)$成立，即任意 $x_1\in(0,+\infty)$，$e2x_1+mex_1>\ln 2$ 等价于 $m>\frac{\ln 2}{ex_1}-ex_1$ 对任意 $x_1\in(0,+\infty)$恒成立.

令 $t=ex_1$，则 $t>1$，且 $m>\frac{\ln 2}{t}-t$ 对 $t>1$ 恒成立.

设 $h(t)=\frac{\ln 2}{t}-t(t>1)$，易知 $h(t)$在$(1，+\infty)$内单调递减，所以 $h(t)<\ln 2-1$ 等价于 $m\geqslant \ln 2-1$，

所以 m 的取值范围为$[\ln 2-1，+\infty)$.

方法提炼：

对于恒成立与能成立问题，如果是单变量问题，一般情况下采取分离参变量转化为相应最值问题等方法. 如果是两个变量或多个变量问题时，一般先把其中一个变量当成变量，其余变量当成是常量，这样就把问题转化为单变量的常规题.

练习部分

一、 单项选择题(每个 5 分，共 20 分)

1. 已知 $f(x)=(ax-1)e^x+1$，若 $f(x)$在定义域内单调递减，则 a 的值为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】 A

【解析】原问题等价于 $f(x)$的导函数 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立. 因为 $f(x)=(ax-1)e^x+1$，所以 $f'(x)=(ax+a-1)e^x$.因为 $e^x>0$，所以若要使 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 $a=0$.

2. 若不等式 $2x\ln x\geqslant -x^2+ax$ 对 $x\in[1，+\infty)$恒成立，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty，0)$　　B. $(-\infty，1]$

C. $(0，+\infty)$　　D. $[1，+\infty)$

【答案】 B

【解析】 由 $2x\ln x\geqslant -x^2+ax$，$x\in[1，+\infty)$，可知 $a\leqslant 2\ln x+x$.设 $h(x)=2\ln x+x$，$x\in[1，+\infty)$，则 $h'(x)=\frac{2}{x}+1>0$，所以函数 $h(x)$在$[1，+\infty)$上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1$，所以 $a\leqslant h(x)_{\min}=1$.故 a 的取值范围是$(-\infty，1]$.

3. 设 a 为正实数，函数 $f(x)=x^3-3ax^2+2a^2$，若存在 $x\in[a，2a]$，$f(x)>0$，则 a 的取值范围是(　　)

A. $(1，+\infty)$　　B. $(0，1)$

C. $\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$　　D. $\left(0，\frac{1}{2}\right)$

【答案】 B

【解析】 因为 $f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$，$a\leqslant x\leqslant 2a$ 时，若 $f'(x)\leqslant 0$，当且仅当 $x=2a$ 时取等号，故 $f(x)$在$[a，2a]$上单调递减. 因为存在 $x\in[a，2a]$，$f(x)>0$，所以 $f(a)=-2a^3+2a^2>0$，故 $0<a<1$.

4. 已知函数 $f(x)=x+a$，$g(x)=x\ln x+1$，若存在 $x_1\in[1，5]$，对任意 $x_2\in\left[\frac{1}{e^2}，e\right]$，都有 $f(x_1)=g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $\left(-4+e，-\frac{1}{e}\right)$　　B. $(-\infty，-4+e]$

C. $\left[-4+e，-\frac{1}{e}\right]$　　D. $\left[-\frac{1}{e}，+\infty\right)$

【答案】 C

【解析】 易知 $f(x)$的值域为$[1+a，5+a]$.$g'(x)=\ln x+1$，$x\in[\frac{1}{e^2}，e]$，当 $x\in[\frac{1}{e^2}，\frac{1}{e}]$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当 $x\in[\frac{1}{e}，e]$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=1-\frac{2}{e^2}$，$g\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{e}$，$g(e)=e+1$，故 $g(x)_{\max}=e+1$，$g(x)_{\min}=1-\frac{1}{e}$，$g(x)$的值域为$\left[1-\frac{1}{e}，1+e\right]$.根据题意，存在 $x_1\in[1，5]$，对任意 $x_2\in[\frac{1}{e^2}，e]$，都有 $f(x_1)=g(x_2)$，相当于 $g(x)$的值域是 $f(x)$值域的子集，则 $1-\frac{1}{e}\geqslant 1+a$，且 $1+e\leqslant 5+a$，得$-4+e\leqslant a\leqslant -\frac{1}{e}$.

二、 多项选择题(每个 5 分，共 15 分)

5. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+c$，若对任意 $x\in[0，2]$，$f(x)\leqslant c^2-\frac{2}{3}$ 恒成立， 则实数 c 的可能取值是(　　)

A. -1　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 2　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】 ABC

【解析】$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+c$，$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.令 $f'(x)>0$，解得 $x<1$ 或 $x>3$；令 $f'(x)<0$，解得 $1<x<3$，所以函数 $f(x)$在区间$[0，1)$上单调递增，在区间$(1，2]$上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{4}{3}+c$.若对任意 $x\in[0,2]$，$f(x)\leqslant c^2-\frac{2}{3}$ 恒成立，则 $f(1)\leqslant c^2-\frac{2}{3}$，即$\frac{4}{3}+c\leqslant c^2-\frac{2}{3}$，整理可得 $c^2-c-2\geqslant 0$，解得 $c\leqslant -1$ 或 $c\geqslant 2$.结合选项知 A，B，C 符合题意.

6. 已知函数 $f(x)=x-\frac{2}{x}$，$g(x)=a\cos\frac{\pi x}{2}+5-2a(a>0)$.给出下列四个命题，其中是真命题的为(　　)

A. 若存在 $x\in[1，2]$，使得 $f(x)<a$ 成立，则 $a>-1$

B. 若任意 $x\in\mathbf{R}$，使得 $g(x)>0$ 恒成立，则 $0<a<5$

C. 若任意 $x_1\in[1，2]$，任意 $x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$恒成立，则 $a>6$

D. 若任意 $x_1\in[1，2]$，存在 $x_2\in[0，1]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则 $3\leqslant a\leqslant 4$

【答案】 ACD

【解析】对选项 A，只需 $f(x)$在$[1，2]$上的最小值小于 a，易知 $f(x)$在$[1，2]$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1-\frac{2}{1}=-1$，所以 $a>-1$，故 A 为真；对选项 B，只需 $g(x)$的最小值大于 0，因为 $a\cos\frac{\pi x}{2}\in[-a，a]$，所以 $g(x)_{\min}=-a+5-2a=5-3a>0$，所以 $0<a<\frac{5}{3}$，故 B 为假；对选项 C，只需 $f(x)$在$[1，2]$上的最小值大于 $g(x)$的最大值，$f(x)_{\min}=-1$，$g(x)_{\max}=a+5-2a=5-a$，即$-1>5-a$，$a>6$，故 C 为真；对选项 D，只需 $g(x)_{\min}\leqslant f(x)_{\min}$，$g(x)_{\max}\geqslant f(x)_{\max}$，$f(x)_{\max}=f(2)=2-\frac{2}{2}=1$，所以当 $x_1\in[1,2]$时，$f(x_1)\in[-1,1]$，当 $x\in[0,1]$时，$\frac{\pi x}{2}\in\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $g(x)$在$[0，1]$上单调递减，$g(x)_{\min}=g(1)=5-2a$，$g(x)_{\max}=g(0)=5-a$，所以 $g(x)\in[5-$

$2a$，$5-a$]，由题意得$\begin{cases}5-2a\leqslant -1,\\5-a\geqslant 1\end{cases}$ 等价于 $3\leqslant a\leqslant 4$，故 D 为真．

7．已知命题 p：已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{a+1}{2}x^2+ax+1(a\in\mathrm{R})$，若当 $a\in I$ 时，任意 x_1，$x_2\in[0，2]$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\dfrac{2}{3}$ 恒成立，则下列说法不正确的有(　　)

A．当 $I=(1，2)$时，命题 p 是真命题

B．当 $I=\left(1，\dfrac{5}{4}\right)$ 时，命题 p 是真命题

C．当 $I=\left(\dfrac{4}{5}，2\right)$ 时，命题 p 是真命题

D．当 $I=\left(1，\dfrac{5}{3}\right)$ 时，命题 p 是真命题

【答案】 BD

【解析】 命题 p 为真，只需当 $x\in[0，2]$时，$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant\dfrac{2}{3}$.只需考查当 $1<a<2$ 时的情况，由 $f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$.易知 $f(x)$在[0，1]上单调递增，在[1，a]上单调递减，在[a，2]上单调递增．由于 $f(2)-f(0)=\dfrac{2}{3}$ ，所以只需$\begin{cases}f(1)\leqslant f(2),\\f(a)\geqslant f(0),\end{cases}$ 即$\begin{cases}a\leqslant\dfrac{5}{3},\\a\leqslant 3,\end{cases}$ 所以 $1<a\leqslant\dfrac{5}{3}$.故选 BD.

三、 填空题(每个 5 分，共 15 分)

8．若关于 x 的不等式 $x^3-ax^2+1\geqslant 0$ 在[-1，1]上恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】 $(-\infty，0]$

【解析】 当 $x=0$ 时，原不等式显然成立，$a\in\mathrm{R}$．当 $x\neq 0$ 时，由原不等式可得 $a\leqslant x+\dfrac{1}{x^2}$ ，令 $h(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ ，$-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，则 $h'(x)=1-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{x^3-2}{x^3}$ ，易得函数 $h(x)$在[-1，0)上单调递增，在(0，1]上单调递减，故当 $x=-1$ 时，$h(x)$取得最小值 $h(-1)=0$，所以 $a\leqslant 0$.

9．已知函数 $f(x)=e^x-ax$，若存在实数 $x\in(0，+\infty)$，使得 $f(x)\leqslant 0$ 成立，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】 $[e，+\infty)$

【解析】依题意，条件等价于存在实数 $x\in(0，+\infty)$，使得 $a\geqslant\dfrac{e^x}{x}$ 成立．令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ $(x\neq 0)$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ ，$x\in(0，+\infty)$.当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减， 当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增， 所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e$，所以 $a\geqslant e$.

10．若 $x\in[0，1]$时，$e^x-|2x-a|\geqslant 0$，则 a 的取值范围为________.

【答案】 $[2\ln 2-2，1]$

【解析】 由题意得 $2x-e^x\leqslant a\leqslant 2x+e^x$ 对任意 $x\in[0，1]$恒成立，令 $f(x)=2x-e^x$，$g(x)=2x+e^x$，因为 $f'(x)=2-e^x$ 在[0，1]单调递减，且 $f'(\ln 2)=0$，所以 $f(x)$在(0，$\ln 2$)上单调

递增，在(ln 2，1)上单调递减，所以 $a\geqslant f(x)_{\max}=f(\ln 2)=2\ln 2-2$.又因为 $g(x)=2x+e^x$ 在[0，1]上单调递增，所以 $a\leqslant g(x)_{\min}=g(0)=1$，所以 a 的取值范围为[2ln 2－2，1].

四、 解答题(第 11，12 题各 15 分，第 13 题 20 分，共 50 分)

11. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$的极值；

(2) 若对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)<0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=\ln x-2x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}\ (x>0)$.令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	＋	0	－
$f(x)$	增	极大值	减

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减，极大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-1$，无极小值.

(2) 对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)<0$ 恒成立

⇔对任意 $x\in(0,+\infty)$，$\frac{\ln x}{x}<a$ 恒成立

⇔$\left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max}<a$，$x\in(0,+\infty)$.

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\in(0,e)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减.

所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$，所以 $a>\frac{1}{e}$.

12. 已知 $f(x)=kx-\sin 2x+a\sin x$(k，a 为实数).

(1) 当 $k=0$，$a=2$ 时，求 $f(x)$在[0，π]上的最大值；

(2) 当 $k=4$ 时，若 $f(x)$在 R 上单调递增，求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 当 $k=0$，$a=2$ 时，$f(x)=-\sin 2x+2\sin x$，

$f'(x)=-2\cos 2x+2\cos x=-4\cos^2x+2\cos x+2=-2(2\cos x+1)(\cos x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{2\pi}{3}$.

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$在[0，π]上的变化情况如下表：

x	$\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$
$f'(x)$	＋	0	－
$f(x)$	增	极大值	减

所以当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时，$f(x)$取得极大值，也是最大值，即 $f(x)_{最大值}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2) 若 $f(x)$在 R 上单调递增，则 $f'(x)=4-2(2\cos^2x-1)+a\cos x\geqslant 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，得 $4\cos^2x-a\cos x-6\leqslant 0$.

设 $t=\cos x\in[-1,1]$，$g(t)=4t^2-at-6$，

则 $g(t)\leqslant 0$ 在$[-1,1]$上恒成立，由二次函数 $g(t)$的图象知$\begin{cases}g(-1)\leqslant 0,\\g(1)\leqslant 0,\end{cases}$ 解得$-2\leqslant a\leqslant 2$.

13. 已知函数 $f(x)=x^2\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x)-ax+1\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1) 由已知得 $f'(x)=2x\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$ ，$x>0$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{\sqrt{e}}{e}$.

当 $0<x<\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ 上单调递减；

当 $x>\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上，$f(x)$的单调减区间为$\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ ，单调增区间为$\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$.

(2) 因为 $f(x)-ax+1\geqslant 0$ 恒成立，即 $x^2\ln x-ax+1\geqslant 0$ 恒成立，等价于 $a\leqslant x\ln x+\frac{1}{x}$ 恒成立.

令 $g(x)=x\ln x+\frac{1}{x}$ ，则 $g'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$.

令 $h(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$ ，则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.

所以 $g'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增.

因为 $g'(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,1)$上单调递减；

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=1$，所以 $a\leqslant g(x)_{\min}=1$.

综上，a 的取值范围是$(-\infty,1]$.