5．1　导数的概念及其意义

第 1 课时　变化率问题

对点练▶先练透基础

类型 1　平均变化率

例1　已知函数 $f(x)=2x^2-1$.

(1) 求在区间$(1，1+\Delta x)$上的平均变化率；

(2) 当平均变化率大于 7 时，求Δx 的范围.

【解析】 (1) 根据题意，函数 $f(x)=2x^2-1$ 在区间$(1，1+\Delta x)$上，其平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(1+\Delta x)^2-1-(2\times1^2-1)}{1+\Delta x-1}=4+2\Delta x$.

(2) 由(1)知当 $4+2\Delta x>7$ 时，$\Delta x>\frac{3}{2}$.

规律总结：函数 $f(x)$在区间$(a，b)$上的平均变化率 $v=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

类型 2　瞬时变化率

例2　(1) 一质点位移 y(单位：m)与时间 t(单位：s)之间的关系为 $y(t)=2t^3$，求在 $t=1$ 时质点的瞬时速度；

(2) 一质点速度 v(单位：m/s)与时间 t(单位：s)之间的关系为 $v(t)=2t^2$，求在 $t=1$ 时质点的瞬时加速度.

【解析】 (1) $\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{y(1+\Delta t)-y(1)}{\Delta t}=2\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{(1+\Delta t)^3-1}{\Delta t}$

$=2\lim\limits_{\Delta t\to0}(\Delta t^2+3\Delta t+3)=6$，

所以在 $t=1$ 时质点的瞬时速度是 6 m/s.

(2) 由题意知 $v(t)=2t^2$，

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{v(1+\Delta t)-v(1)}{\Delta t}=2\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(1+\Delta t)^2-1}{\Delta t}=4$，

所以在 $t=1$ 时质点的瞬时加速度为 4 m/s^2.

规律总结：当Δt 无限趋近于 0 时，平均速度 $v(t)=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$的极限是物体在 t_0 时的瞬时速度；

当Δt 无限趋近于 0 时，加速度 $a(t)=\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$的极限是物体在 t_0 时的瞬时加速度.

类型 3　抛物线在某点处的切线

例3　已知抛物线 $f(x)=-x^2+x-1$ 在点 $P(x_0，f(x_0))$处的切线斜率为 3，求该抛物线在点 P 处的切线方程.

【解析】 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{-(x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)-1-(-x_0^2+x_0-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-2x_0+1)=-2x_0+1=3$，

解得 $x_0=-1$，又因为 $f(x_0)=-3$，

所以该抛物线在点 P 处的切线方程为 $y+3=3(x+1)$，即 $3x-y=0$.

规律总结：求抛物线 $y=f(x)$在点 $P(x_0, f(x_0))$处的切线方程，除传统方法之外，可通过以下三个步骤求解：①点 P 在抛物线 $y=f(x)$上，即 $y_0=f(x_0)$；②在 P 处斜率为 k，即 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；③点 P 在切线上，即 $y-y_0=k(x-x_0)$.

综合练▶再融会贯通

一、 单项选择题

1. 在曲线 $y=x^2+1$ 上取一点(1，2)及邻近一点$(1+\Delta x, 2+\Delta y)$，则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$为(　　)

A. $\Delta x+\dfrac{1}{\Delta x}+2$　　B. $\Delta x-\dfrac{1}{\Delta x}-2$

C. $\Delta x+2$　　D. $2+\Delta x-\dfrac{1}{\Delta x}$

【答案】 C

【解析】 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2+1-(1+1)}{\Delta x}=\Delta x+2$.

2. 将原油精炼为汽油、柴油、塑胶等各种不同产品时，需要对原油进行冷却和加热．如果第 x h 时，原油的温度(单位：℃)为 $f(x)=x^2-7x+15(0\leqslant x\leqslant 8)$，则第 4h 时，原油温度的瞬时变化率为(　　)

A. －1　　B. 1　　C. 3　　D. 5

【答案】 B

3. 已知一个物体的运动方程为 $s=2(t+1)^2-1$，其中位移 s 的单位是 m，时间 t 的单位是 s，则物体的初速度 v_0 为(　　)

A. 0 m/s　　B. 1 m/s　　C. 2 m/s　　D. 4 m/s

【答案】 D

4. 若函数 $y=x^2$ 在区间$[x_0, x_0+\Delta x]$上的平均变化率为 k_1，在$[x_0-\Delta x, x_0]$上的平均变化率为 k_2，则 k_1 与 k_2 的大小关系是(　　)

A. $k_1>k_2$　　B. $k_1<k_2$

C. $k_1=k_2$　　D. 不确定

【答案】 A

【解析】因为函数 $y=f(x)=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2=\Delta x(2x_0+\Delta x)$，所以 $k_1=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$.因为函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $x_0-\Delta x$ 到 x_0 之间的平均变化量为 $\Delta y=f(x_0)-f(x_0-\Delta x)=(x_0)^2-(x_0-\Delta x)^2=\Delta x(2x_0-\Delta x)$，所以 $k_2=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0-\Delta x$.因为 $k_1-k_2=2\Delta x$，而 $\Delta x>0$，故 $k_1>k_2$.

二、 多项选择题

5. 已知函数 $f(x)=x^2+3x+1$，以下判断正确的有(　　)

A. $\frac{f(3)-f(1)}{2}=7$

B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=7$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=5$

D. 在点(1，5)处的切线方程是 $y=5x$

【答案】 AD

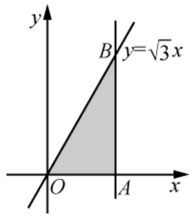
【解析】 $f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)+1-(1+3+1)=\Delta x^2+5\Delta x$，对于 A 选项，取 $\Delta x=2$，得 $\frac{f(3)-f(1)}{2}=7$，故 A 正确；对于 B 选项，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+5)=5$，故 B 错误；对于 C 选项，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{5}{2}$，故 C 错误；对于 D 选项，由 B 知在点(1，5)处的切线方程为 $y-5=5(x-1)$，即 $y=5x$，故 D 正确．

6. 已知抛物线 $f(x)=ax^2-x+1$ 在点(1，$f(1)$)处的切线斜率小于 3，则实数 a 的值可能为(　　)

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【答案】 AB

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=\sqrt{3}x$，$y=0$，$x=t(t>0)$围成的△OAB 的面积为 $S(t)$，以下判断正确的是(　　)



(第 7 题)

A. $S(t)=\sqrt{3}t^2$

B. $S(t)$在 $t=0$ 时的瞬时变化率是 0

C. $S(t)$在 $t=1$ 时的瞬时变化率是 $2\sqrt{3}$

D. $S(t)$在 $t=2$ 时的瞬时变化率是 $2\sqrt{3}$

【答案】 *BD*

【解析】 因为 $AB=\sqrt{OB^2-OA^2}=\sqrt{3}t$，所以 $S(t)=\frac{1}{2}OA\cdot AB=\frac{1}{2}t\cdot\sqrt{3}t=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$，故 *A* 错误；进而根据定义易得 *B*，*D* 正确．

三、 填空题

8. 设函数 $f(x)=x^2+x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$____________．

【答案】 3

【解析】 根据题意，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=3$.

9. 已知自由落体的运动方程为 $s(t)=3t^2$，则 t 在 2 到 $2+\Delta t$ 这一段时间内落体的平均速度为________，落体在 t=2 时的瞬时速度为________.

【答案】 $3\Delta t+12$　12

【解析】 这一段时间内落体的平均速度为 $v=\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\dfrac{3(2+\Delta t)^2-3\times 2^2}{\Delta t}=3\Delta t+12$. 落体在 t=2 时的瞬时速度为 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3\Delta t+12)=12$.

10. 函数 $y=\sin x$ 在 0 到 $\dfrac{\pi}{6}$ 之间的平均变化率 $y_1=$________，在 $\dfrac{\pi}{3}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间的平均变化率为 y_2，则 y_1________ y_2(比较大小).

【答案】 $\dfrac{3}{\pi}$　>

【解析】 在 0 到 $\dfrac{\pi}{6}$ 之间的平均变化率为 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0}{\frac{\pi}{6}-0}=\dfrac{3}{\pi}$；在 $\dfrac{\pi}{3}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间的平均变化率为 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{\pi}$. 因为 $2-\sqrt{3}<1$，所以 $\dfrac{3}{\pi}>\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{\pi}$. 所以 $y_1>y_2$.

四、 解答题

11. 已知函数 $f(x)=x^2$.

(1) 在 x=1，2，3 附近的平均变化率，取 Δx 都为 $\dfrac{1}{3}$，哪一点附近的平均变化率最大？

(2) 求抛物线 $f(x)=x^2$ 分别在点(1，1)，(3，9)处的切线方程.

【解析】 (1) 设函数 $f(x)=x^2$ 在 x=1，2，3 附近的平均变化率分别为 k_1，k_2，k_3，

则 $k_1=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x$，

$k_2=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\dfrac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=\dfrac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=4+\Delta x$，

$k_3=\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\dfrac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=\dfrac{6\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=6+\Delta x$，

取 $\Delta x=\dfrac{1}{3}$ 时，$k_1=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$，$k_2=4+\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{3}$，$k_3=6+\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{3}$，所以 $k_1<k_2<k_3$，

所以函数 $f(x)=x^2$ 在 x=3 附近的平均变化率最大.

(2) 由(1)知抛物线 $f(x)=x^2$ 在(1，1)处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$；

在(3，9)处的切线方程为 $y-9=6(x-3)$，

即 $6x-y-9=0$.

12. 根据所给的运动方程，先写出物体在时间段[u，u＋d]和[u－d，u]上的平均速度，再让 d 趋于 0，求出它在 t＝u 处的瞬时速度.

(1) $s(t)=\frac{gt^2}{2}$；

(2) $s(t)=2t^2-5t+c$；

(3) $s(t)=5+3t-\frac{gt^2}{2}$.

【解析】 (1) $v_1=\frac{\frac{g}{2}(u+d)^2-\frac{g}{2}u^2}{d}=\frac{gud+\frac{g}{2}d^2}{d}=gu+\frac{gd}{2}$，$v_2=\frac{\frac{g}{2}u^2-\frac{g}{2}(u-d)^2}{d}=\frac{gud-\frac{g}{2}d^2}{d}=gu-\frac{gd}{2}$，

当 $d\to0$ 时，$v_1=v_2\to gu$，它在 $t=u$ 处的瞬时速度为 gu.

(2) $v_1=\frac{[2(u+d)^2-5(u+d)+c]-(2u^2-5u+c)}{d}$

$=\frac{4ud+2d^2-5d}{d}=4u+2d-5$，

$v_2=\frac{(2u^2-5u+c)-[2(u-d)^2-5(u-d)+c]}{d}$

$=\frac{4ud-2d^2-5d}{d}=4u-2d-5$，

当 $d\to0$ 时，$v_1=v_2\to4u-5$，它在 $t=u$ 处的瞬时速度为 $4u-5$.

(3) $v_1=\frac{\left[5+3(u+d)-\frac{g}{2}(u+d)^2\right]-\left(5+3u-\frac{g}{2}u^2\right)}{d}$

$=\frac{3d-gud-\frac{g}{2}d^2}{d}=3-gu-\frac{g}{2}d$，

$v_2=\frac{\left(5+3u-\frac{g}{2}u^2\right)-\left[5+3(u-d)-\frac{g}{2}(u-d)^2\right]}{d}$

$=\frac{3d-gud+\frac{g}{2}d^2}{d}=3-gu+\frac{g}{2}d$，

当 $d\to0$ 时，$v_1=v_2\to3-gu$，它在 $t=u$ 处的瞬时速度为 $3-gu$.

应用练▶后提升素养

1. 水波的半径以 0.5 m/s 的速度向外扩张，当半径为 2.5 m 时，圆面积的膨胀率是________m^2/s.

【答案】 2.5π

【解析】 水波的半径以 $v=0.5$ m/s 的速度向外扩张，则水波的面积为 $s=\pi r^2=\pi(vt)^2=0.25\pi t^2$. 当半径为 2.5 m 时，$t=\frac{2.5}{0.5}=5$ s，此时水波面积的膨胀率是 2.5π m^2/s.

2. 2019 年 10 月，宁启铁路线新开行“绿巨人”动力集中复兴号动车组，最高时速为 160 km/h.假设“绿巨人”开出站一段时间内，速度 v(单位：m/s)与行驶时间 t(单位：s)的关系为 $v=0.4t+0.6t^2$，则出站后“绿巨人”速度首次达到 24 m/s 时加速度为________m/s².

【答案】 7.6

【解析】 根据题意，$v=0.4t+0.6t^2$，若 $v=0.4t+0.6t^2=24$，解得 $t=6$ 或 $-\frac{20}{3}$ (舍去)，则 $t=6$.又由 $v=0.4t+0.6t^2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(t+\Delta x)-v(t)}{\Delta x}=0.4+1.2t$，所以当 $t=6$ 时的加速度为 7.6 m/s².即此时“绿巨人”的加速度为 7.6 m/s².