习题课　曲线的切线

题型 1　在某点处的切线

例1　若函数 $f(x)=e^x+\sin\ x$ 在点(0，1)处的切线与直线 $2x-ay+1=0$ 互相垂直，则实数 a 等于(　　)

A. -2　　B. -4　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 2

【答案】 B

【解析】由 $f(x)=e^x+\sin x$，得 $f'(x)=e^x+\cos x$，所以 $f'(0)=e^0+\cos 0=2$，由题意可得 $a\neq0$，则直线 $2x-ay+1=0$ 的斜率为$\frac{2}{a}$.又因为函数 $f(x)=e^x+\sin x$ 在点(0，1)处的切线与直线 $2x-ay+1=0$ 互相垂直，所以 $2\times\frac{2}{a}=-1$，即 $a=-4$.

变式　已知曲线 $f(x)=(x+a\ln x)e^x$ 在点(1，e)处的切线经过坐标原点，则 a 等于(　　)

A. $-e$　　B. -2　　C. -1　　D. $e-2$

【答案】 C

【解析】由 $f(x)=(x+a\ln x)e^x$，得 $f'(x)=\left(1+\frac{a}{x}+x+a\ln x\right)e^x$，所以 $f'(1)=(a+2)e$.由题意知$\frac{e-0}{1-0}=(2+a)e$，解得 $a=-1$.

题型 2　过某点的切线

例2　已知曲线 C：$y=x^3+2$ 和点 $P(1，3)$，求过点 P 且与曲线 C 相切的直线方程.

【解析】设所求直线与曲线切于点$(x_0，y_0)$，则 $y_0=x_0^3+2$.

因为 $k=y'|x=x_0=3x_0^2$ ，

所以切线方程为 $y-(x_0^3+2)=3x_0^2(x-x_0)$.

因为切线过点 $P(1，3)$，

所以 $3-(x_0^3+2)=3x_0^2(1-x_0)$，

解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$ ，所以 $k=3x_0^2=3$ 或$\frac{3}{4}$ ，

故所求直线的方程为 $3x-y=0$ 或 $3x-4y+9=0$.

变式　若过点 $A(a，0)$的任意一条直线都不与曲线 C：$y=(x-1)e^x$ 相切，则 a 的取值范围是________.

【答案】 $(-3，1)$

【解析】设点 $B(x_0，(x_0-1)ex_0)$为曲线 C 上任意一点，因为 $y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$，所以 $y'|x=x_0=x_0ex_0$,则曲线 C 在点 B 处的切线 l 的方程为 $y-(x_0-1)ex_0=x_0ex_0(x-x_0)$.根据题意，切线 l 不经过点 A，则关于 x_0 的方程$-(x_0-1)ex_0=x_0ex_0\cdot(a-x_0)$，即 $x_0^2-(a+1)x_0+1=0$ 无实根，所以 $\Delta=(a+1)^2-4<0$，解得$-3<a<1$，所以 a 的取值范围是$(-3，1)$.

题型 3　公切线

例3　若直线 l 既和曲线 C_1 相切，又和曲线 C_2 相切，则称 l 为曲线 C_1 和 C_2 的公切线. 求曲线 C_1：$y=x^2$ 和曲线 C_2：$y=4e^{x-2}$ 的公切线方程.

【解析】$y=x^2$ 的导数为 $y'=2x$，$y=4e^{x-2}$ 的导数为 $y'=4e^{x-2}$.

设曲线 C_1，C_2 的公切线与曲线 C_1 的切点为$(x_1，x_1^2)$，则切线的斜率为 $2x_1$，与曲线 C_2 的切点为$(x_2，4ex_2-2)$，则切线的斜率为 $4ex_2-2$，所以 $2x_1=4ex_2-2$，

当曲线 C_1 与 C_2 的切点相同时，$x_1=x_2$，$x_1^2=4ex_2-2$，可得 $x_1=x_2=2$，所以切点为(2，

4)，

此时公切线的方程为 $4x-y-4=0$.

当曲线 C_1 与 C_2 的切点不同时，$x_1\neq x_2$，$2x_1=\dfrac{x_1^2-4ex_2-2}{x_1-x_2}$，可得 $x_1=2x_2-2$，所以 $4x_2-4=4ex_2-2$，即 $x_2-1=ex_2-2$，易知 $y=x-1$ 与 $y=e^{x-2}$ 相切，即有且只有一个交点，

所以方程 $x_2-1=ex_2-2$ 有且只有一解：$x_2=2$，此时 $x_1=2$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾，故不存在两切点不同的情况.

综上可得，切点的坐标为(2，4)，公切线的方程为 $4x-y-4=0$.

变式 已知函数 $f(x)=x^2-2m$，$g(x)=3\ln x-x$，若曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在公共点处的切线相同，则实数 m 的值是________.

【答案】 1

【解析】设两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的公共点为 $(a，b)(a>0)$，

$f(x)=x^2-2m$，其导数 $f'(x)=2x$，则切线的斜率 $k=f'(a)=2a$，$g(x)=3\ln x-x$，其导数 $g'(x)=\dfrac{3}{x}-1$，则切线的斜率 $k=g'(a)=\dfrac{3}{a}-1$，则有 $2a=\dfrac{3}{a}-1$，解得 $a=1$ 或 $-\dfrac{3}{2}$ (舍去)，则 $b=3\ln 1-1=-1$，则公共点为(1，-1)，则有 $-1=1-2m$，解得 $m=1$.

题型 4　切线的应用

例4 若点 P 是曲线 $y=x^2-\ln x$ 上任一点，则点 P 到直线 $x-y-4=0$ 的最小距离是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】设与直线 $x-y-4=0$ 平行的直线与曲线 $y=x^2-\ln x$ 切于点 $P(x_0，y_0)$，由 $y=x^2-\ln x$，得 $y'=2x-\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$，则 $y'|_{x=x_0}=2x_0-\dfrac{1}{x_0}$.由 $2x_0-\dfrac{1}{x_0}=1$，解得 $x_0=1$(舍去负值)，所以 P 点坐标为(1，1)，则点 P 到直线 $x-y-4=0$ 的最小距离是 $\dfrac{|1-1-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

方法提炼：

①求曲线在某点处的切线：一般通过切点在切线上、在曲线上及切点处导数即为斜率，得到方程进行求解.

②求曲线过某点的切线：一般先设切点，写出切线方程后代入所过的点得切点后求解.

③求两曲线公切线：一般通过"切线斜率相等"与讨论切点异同时所得方程组求解.

练习部分

一、 单项选择题(每个 5 分，共 20 分)

1. 若曲线 $f(x)=ax+\ln x$ 在点(1，$f(1)$)处的切线斜率为 3，则实数 a 的值为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】 B

【解析】 由 $f(x)=ax+\ln x$，得 $f'(x)=a+\dfrac{1}{x}$.因为 $f(x)$ 在点(1，$f(1)$)处的切线斜率为 3，所以 $f'(1)=3$，所以 $a+1=3$，所以 $a=2$.

2. 曲线 $y=x+\dfrac{2}{x}$ 在点(1，3)处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为(　　)

A. 4　　B. 2　　C. 16　　D. 8

【答案】 D

【解析】 因为曲线 $y=x+\frac{2}{x}$，所以 $y'=1-\frac{2}{x^2}$，所以曲线 $y=x+\frac{2}{x}$ 在点(1，3)处的切线斜率为 1－2＝－1，切线方程为 l：$x+y-4=0$，则直线 l 与两坐标轴的交点分别为(4，0)，(0，4)，所以直线 l 与坐标轴围成的三角形面积为$\frac{1}{2}\times4\times4=8$.

3. 曲线 $y=\frac{\cos x}{\sin x}$ 在点$\left(\frac{\pi}{4}，1\right)$处的切线方程为(　　)

A. $2x-y-\frac{\pi}{2}+1=0$　　B. $2x-y-\frac{\pi}{2}-1=0$

C. $2x+y-\frac{\pi}{2}+1=0$　　D. $2x+y-\frac{\pi}{2}-1=0$

【答案】 D

【解析】由 $y=\frac{\cos x}{\sin x}$，得 $y'=\frac{-\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}=-\frac{1}{\sin^2x}$，所以 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-2$，

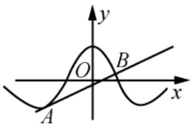
则曲线 $y=\frac{\cos x}{\sin x}$ 在点$\left(\frac{\pi}{4}，1\right)$处的切线方程为 $y-1=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，即 $2x+y-\frac{\pi}{2}-1=0$.

4. 已知直线 $y=a(x-1)(a>0)$与曲线 $f(x)=\cos x(x\in(-\pi，\pi))$相切于点 A，与曲线的另一交点为 B，若 A，B 两点对应的横坐标分别为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，则 $(1-x_1)\tan x_1$ 等于(　　)

A. －1　　B. 2　　C. 1　　D. －2

【答案】 C

【解析】 如图，直线与曲线 $f(x)=\cos x$ 相切于点 $A(x_1，\cos x_1)$，$f'(x)=-\sin x$，又直线过定点(1，0)，则$\frac{\cos x_1}{x_1-1}=-\sin x_1$，所以$(1-x_1)\tan x_1=1$.



(第 4 题)

二、 多项选择题(每个 5 分，共 15 分)

5. 若函数 $f(x)=\ln x$ 与 $g(x)=\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-k$ 的图象只有一个公共点 $P(x_0，y_0)$，且在这个公共点处的切线相同，则下列判断正确的有 (　　)

A. $x_0=1$ 或 $x_0=-3$　　*B.* $y_0=0$

C. $k=\frac{5}{6}$　　*D.* 切线方程为 $y=x-1$

【答案】 *BCD*

【解析】 设两个函数图象的公共点 P 的坐标为$(x_0，y_0)$，

由题意可得$\begin{cases}f(x_0)=g(x_0)，\\ f'(x_0)=g'(x_0)，\end{cases}$

即$\begin{cases} \ln x_0=\frac{1}{6}x_0^2+\frac{2}{3}x_0-k①, \\ \frac{1}{x_0}=\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}②, \end{cases}$

由②得 $x_0=1$ 或 $x_0=-3$(舍去).

把 $x_0=1$ 代入①，解得 $k=\frac{5}{6}$.故 *A* 错误，*B* 正确，*C* 正确．所以切线方程为 $y=x-1$，故 *D* 正确．

6. 设直线 l 是曲线 $y=9x^2-2+\frac{1}{2}\ln x$ 的切线，以下判断正确的有(　　)

A. 曲线在点 $x=\frac{1}{2}$ 处的切线斜率为 10

B. 有且只有一条直线 l 的斜率为 6

C. 存在一条直线 l 的斜率为 5

D. 曲线有且仅有一个零点

【答案】 *ABD*

【解析】 函数 $y=9x^2-2+\frac{1}{2}\ln x$ 的定义域为(0，＋∞)，$y'=18x+\frac{1}{2x}$ ，所以曲线在点 $x=\frac{1}{2}$ 处的切线斜率为 10，故 *A* 正确；再设切点为 M(a，b)(a>0)，则 $y'|_{x=a}=18a+\frac{1}{2a}\geqslant 2\sqrt{18a\cdot\frac{1}{2a}}=6$，当且仅当 $18a=\frac{1}{2a}$ ，即 $a=\frac{1}{6}$ 时，直线 l 的斜率取得最小值 6，故 *B* 正确，*C* 错误；令 $y=9x^2-2+\frac{1}{2}\ln x=0$，即$\frac{1}{2}\ln x=2-9x^2$，又数形结合可得 *D* 正确．

7. d 表示曲线 C：$y=x^4$ 上的点 P 到直线 l：$8x-16y-7=0$ 的距离，以下判断正确的有(　　)

A. $d=2\sqrt{2}$ 时，存在两个这样的点 P

B. $d=\frac{\sqrt{5}}{20}$ 时，有且只有一个这样的点 P

C. 曲线 C 在第二象限存在在点 P 处的切线垂直于直线 l

D. 过点$\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{16}\right)$ 与曲线 C 相切的直线有两条

【答案】 *AC*

【解析】 由 $y=x^4$，得 $y'=4x^3$，设曲线 $y=x^4$ 上的点 P 的坐标为$(x_0，y_0)$.若过点 P 的切线与直线 $8x-16y-7=0$ 平行，则 $4x_0^3=\frac{1}{2}$ ，解得 $x_0=\frac{1}{2}$ ，所以切点为$\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{16}\right)$ ，则曲线 $y=x^4$ 上的点到直线 $8x-16y-7=0$ 的距离的最小值为$\frac{|4-1-7|}{\sqrt{64+256}}=\frac{4}{8\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$ ，故 *A* 正确，*B* 错误．令 $4x_0^3=-2$，存在唯一的负值，所以 *C* 正确．由上知，曲线在点 $P(x_0，y_0)$处的切线方程为 $y=4x_0^3x-3x_0^4$ ，代入$\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{16}\right)$ ，结合图形知有且只有一条切线满足，故 *D* 错误．

三、 填空题(每个 5 分，共 15 分)

8. 已知直线 $y=2x+b$ 是曲线 $y=\ln x+3$ 的一条切线，则 b=________.

【答案】 $2-\ln 2$

【解析】函数 $y=\ln x+3(x>0)$的导数为 $y'=\dfrac{1}{x}$ ，由题意知直线 $y=2x+b$ 是曲线 $y=\ln x+3(x>0)$的一条切线，可知$\dfrac{1}{x}=2$，所以 $x=\dfrac{1}{2}$ ，所以切点坐标为$\left(\dfrac{1}{2},\ \ln\dfrac{1}{2}+3\right)$ ，而切点在直线上，所以 $b=y-2x=\ln\dfrac{1}{2}+3-1=2-\ln 2$.

9. 已知曲线 C：$y=2x^2-x^3$，点 P(0，-4)，直线 l 过点 P 且与曲线 C 相切于点 Q，则点 Q 的横坐标为________，切线方程为________.

【答案】 -1　$7x+y+4=0$

【解析】 设切点 Q 的坐标为$(a，2a^2-a^3)$，因为 $y=2x^2-x^3$，所以 $y'=(2x^2-x^3)'=4x-3x^2$，所以直线 l 的斜率为 $4a-3a^2$，直线 l 的方程为 $y-2a^2+a^3=(4a-3a^2)(x-a)$.因为直线过 P(0，$-4$)，所以$-4-2a^2+a^3=-a(4a-3a^2)$，即$(a+1)(a^2-2a+2)=0$，所以 $a=-1$，切线的斜率为 $4\times(-1)-3\times(-1)^2=-7$，切线方程为 $y-(-4)=-7(x-0)$，即 $7x+y+4=0$.

10. 已知曲线 $y=2x-\ln x$ 在点(1，2)处的切线与曲线 $y=(a-1)x^2+(a+3)x+5$ 相切，则 a=________.

【答案】 2 或 10

【解析】 令 $f(x)=2x-\ln x$，$g(x)=(a-1)x^2+(a+3)x+5$，则 $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$ ，$f'(1)=2-1=1$，可得曲线 $y=f(x)$ 在点(1，2)处的切线方程为 $y=x+1$. 联立 $\begin{cases}y=x+1,\\ y=(a-1)x^2+(a+3)x+5,\end{cases}$ 得 $(a-1)x^2+(a+2)x+4=0$，所以 $\begin{cases}a-1\neq 0,\\ \Delta=a^2-12a+20=0,\end{cases}$ 解得 a=2 或 a=10.

四、 解答题(第 11，12 题各 15 分，第 13 题 20 分，共 50 分)

11. 设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\dfrac{be^{x-1}}{x}$.

(1) 求导函数 $f'(x)$；

(2) 若曲线 $y=f(x)$在点(1，f(1))处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$，求 a，b 的值.

【解析】 (1) 由 $f(x)=ae^x\ln x+\dfrac{be^{x-1}}{x}$ ，

得 $f'(x)=(ae^x\ln x)'+\left(\dfrac{be^{x-1}}{x}\right)'=ae^x\ln x+\dfrac{ae^x}{x}+\dfrac{be^{x-1}x-be^{x-1}}{x^2}$.

(2) 由于切点既在曲线 $y=f(x)$上，又在切线 $y=e(x-1)+2$ 上，将 x=1 代入切线方程得 y=2，将 x=1 代入函数 f(x)得 f(1)=b，所以 b=2.将 x=1 代入导函数 $f'(x)$中，得 $f'(1)=ae=e$，所以 a=1.

12. 设曲线 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}$ ，$a\in R$，l 是曲线 $y=f(x)$的一条切线.

(1) 若曲线 $y=f(x)$在点(1，$f(1)$)处的切线为 l，若 l 与直线 $x+2y-3=0$ 垂直，求直线 l 方程；

(2) 求证：当 $a=0$ 时，l 与坐标轴围成的三角形的面积与切点无关.

【解析】 (1) $f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ ，由题意知 $f'(1)=a-1=2$，故 $a=3$，$f(1)=1$，所以所求 l

的方程为 $2x-y-1=0$.

(2) 当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ ，$x>0$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ，

设函数 $f(x)$图象上任意一点 $P\left(x_0，\frac{1}{x_0}\right)$ ，

切线 l 的斜率为 $k=f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$.

过点 $P\left(x_0，\frac{1}{x_0}\right)$ 的切线方程为 $y-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$.

令 $x=0$，解得 $y=\frac{2}{x_0}$ ；令 $y=0$，解得 $x=2x_0$.则切线与坐标轴围成的三角形面积为 $S=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=2$.

所以 l 与坐标轴围成的三角形的面积与切点无关.

13. 若存在过点(1，0)的直线与曲线 $y=x^3$ 和 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 都相切，求实数 a 的值.

【解析】 设直线与曲线 $y=x^3$ 的切点坐标为$(x_0，y_0)$，

则$\begin{cases}y_0=x_0^3，\\ \frac{y_0}{x_0-1}=3x_0^2，\end{cases}$ 则切线的斜率 $k=3x_0^2=0$ 或 $k=\frac{27}{4}$.

若 $k=0$，此时切线的方程为 $y=0$.

由$\begin{cases}y=0，\\ y=ax^2+\frac{15}{4}x-9，\end{cases}$ 消去 y，

可得 $ax^2+\frac{15}{4}x-9=0$，

其中 $\Delta=0$，即$\left(\frac{15}{4}\right)^2+36a=0$，解得 $a=-\frac{25}{64}$ ；

若 $k=\frac{27}{4}$ ，则切线方程为 $y=\frac{27}{4}(x-1)$，

由$\begin{cases}y=\frac{27}{4}(x-1)，\\ y=ax^2+\frac{15}{4}x-9，\end{cases}$ 消去 y，

可得 $ax^2-3x-\frac{9}{4}=0$，

又由 $\Delta=0$，即 $9+9a=0$，解得 $a=-1$.

综上，$a=-\frac{25}{64}$ 或-1.