5.3　导数在研究函数中的应用

第 1 课时　函数的单调性

对点练 ▶ 先练透基础

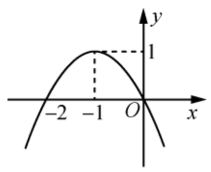
类型 1　利用导数证明函数单调性

例1　求证：函数 $f(x)=-2\ln x+x^2$ 在(1，＋∞)上是增函数.

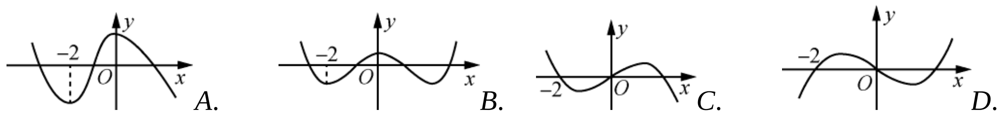
【证明】 $f'(x)=\dfrac{-2}{x}+2x=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$，因为 $x>1$，所以$(x+1)(x-1)>0$，即在区间(1，＋∞)上，$f'(x)>0$ 恒成立，故函数 $f(x)=-2\ln x+x^2$ 在(1，＋∞)上是增函数.

类型 2　识图问题

例2　(1) 若 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象如图所示，则函数 $f(x)$的图象最有可能是图中的(　　)



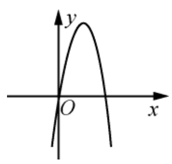
(例 2(1))



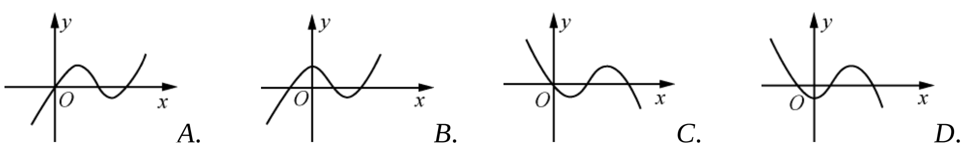
【答案】 A

【解析】 由 $f'(x)$的图象可知，当 $x\in(-\infty，-2)\cup(0，+\infty)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-2，0)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty，-2)$和$(0，+\infty)$上单调递减，在$(-2，0)$上单调递增，可排除 B，C，D.故选 A.

(2) 已知函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，若 $y=f'(x)$的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$的图象可能是(　　)



(例 2(2))



【答案】 D

【解析】 由导函数的图象可得：当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，排除选项 A，B；当 $x>0$ 时，$f'(x)$先正后负，所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上先增后减，因为选项 C 中的图象是先减后增再减，故排除选项 C.

类型 3　利用导数求单调区间

例3　(1) 函数 $f(x)=-x^3+4x^2-4x$ 的单调增区间是(　　)

A. $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(-2,\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{2}{3},2\right)$　　D. $\left(-\frac{2}{3},2\right)$

【答案】 C

【解析】 由 $f(x)=-x^3+4x^2-4x$，得 $f'(x)=-3x^2+8x-4$，由 $f'(x)=-3x^2+8x-4>0$，得 $3x^2-8x+4<0$，解得$\frac{2}{3}<x<2$，因此函数 $f(x)=-x^3+4x^2-4x$ 的单调增区间是$\left(\frac{2}{3},2\right)$．

(2) 函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}+3\ln x$ 的单调减区间是________．

【答案】 (0，1)

【解析】 函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}+3\ln x$ 的定义域为(0，+∞)，$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}=\frac{x^2+3x-4}{x^2}=\frac{(x+4)(x-1)}{x^2}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$，故函数 f(x)的单调减区间是(0，1).

规律总结：求函数单调区间，首先确定函数的定义域，再令 $f'(x)>0$ 解得单调增区间，令 $f'(x)<0$ 解得单调减区间.

类型 3　含参函数的单调性

例4　已知函数 $f(x)=\ln x-(a+2)x+ax^2(a\in R)$，讨论 $f(x)$的单调区间.

【解析】 $f(x)=\ln x-(a+2)x+ax^2$ 的定义域为(0，+∞)，$f'(x)=\frac{1}{x}-(a+2)+2ax=\frac{2ax^2-(a+2)x+1}{x}=\frac{(2x-1)(ax-1)}{x}$．

①当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$与 $f'(x)$在(0，+∞)上的变化情况如下表：

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	增		减

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内单调递增，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$内单调递减.

②当 $0<a<2$ 时，$f(x)$与 $f'(x)$在(0，+∞)上的变化情况如下表：

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增		减		增

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$内单调递增，在$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$内单调递减.

③当 $a=2$ 时，$f'(x)\geq 0$，所以 $f(x)$在(0，+∞)上单调递增.

④当 $a>2$ 时，$f(x)$与 $f'(x)$在(0，+∞)上的变化情况如下表：

x	$\left(0,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增		减		增

所以 $f(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ 内单调递增，在$\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{2}\right)$ 内单调递减.

规律总结：含参函数单调性的讨论，一般包括 $f'(x)=0$ 是否有解、有几个解、解是否在定义域内、解的大小等情况.

综合练 ▶ 再融会贯通

一、　单项选择题

1. 函数 $y=4x^2+\frac{1}{x}$ 的单调增区间是(　　)

A. $(0，+\infty)$　　B. $(-\infty，1)$　C. $\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$　　D. $(1，+\infty)$

【答案】 C

【解析】 令 $y'=8x-\frac{1}{x^2}=\frac{8x^3-1}{x^2}>0$，即$(2x-1)(4x^2+2x+1)>0$，解得 $x>\frac{1}{2}$.

2. 已知函数 $f(x)=x^2e^x$，$x\in[-1，1]$，则 $f(x)$的单调增区间是(　　)

A. $[0，+\infty)$　　B. $(0，1]$　C. $(-\infty，-2)$　　D. $(-1，0)$

【答案】 B

【解析】 $f(x)=x^2e^x$，$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$，由 $f'(x)>0$ 泳 $x>0$ 或 $x<-2$.因为函数 $f(x)$的定义域为$[-1，1]$，结合选项，所以函数 $f(x)$的单调增区间为$(0，1]$.

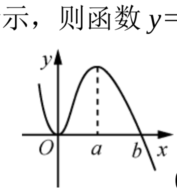
3. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\ln x$ 的单调减区间为(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ +\infty\right)$　　B. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$　C. $\left(0,\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$　　D. $\left(-\infty,\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

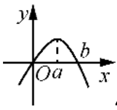
【答案】 C

【解析】 因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\ln x(x>0)$，所以 $f'(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-3}{3x}$，当 $f'(x)<0$ 时，解得 $0<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$，则函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\ln x$ 的单调减区间为$\left(0,\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

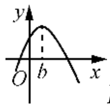
4. 若函数 $y=f'(x)$的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$的图象可能是(　　)



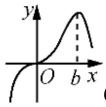
(第 4 题)



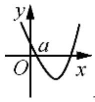
A.



B.



C.



D.

【答案】 *C*

【解析】 由 y＝f′(x)的图象可知，y＝f(x)在(－∞，b)上单调递增，排除选项 *A* 和 *D*.因为 f′(0)＝0，所以 y＝f(x)在 x＝0 处的切线斜率为 0，排除选项 *B*.

二、 多项选择题

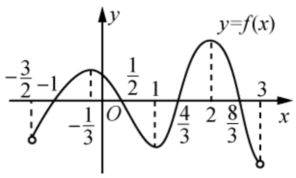
5. 判断函数 $y=x\cos x-\sin x$ 在下面哪个区间内是增函数(　　)

A. $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$　　C. $\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$

【答案】 CD

【解析】 $y'=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$，欲使导数为正，只需 x 与 $\sin x$ 符号相反，分析四个选项知，C，D 选项符合条件.

6. 已知函数 $y=f(x)$在定义域$\left(-\frac{3}{2},\ 3\right)$内可导，其图象如图所示，记 $y=f(x)$的导函数为 $y=f'(x)$，则能使不等式 $f'(x)<0$ 成立的有(　　)



(第 6 题)

A. $\left(-\frac{3}{2},\ -1\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$　　C. $\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{8}{3},\ 3\right)$

【答案】 BCD

【解析】 能使 $f'(x)<0$ 的区间是 $y=f(x)$的单调减区间的子集，故选 BCD.

7. 下列函数在定义域内是增函数的有(　　)

A. $y=x^{\frac{1}{3}}$　　B. $y=\begin{cases}\frac{2x-1}{x},\ x\leqslant -1,\\ x^2+4x+3,\ x>-1,\end{cases}$

C. $y=2^x-2^{-x}$　　D. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x$

【答案】 ACD

【解析】 因为$\frac{1}{3}>0$，所以 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 单调递增，又因为 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 为奇函数，所以 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 R 上单调递增，故选项 A 正确．当 $x\leqslant -1$ 时，$y=\frac{2x-1}{x}=2-\frac{1}{x}$ 在$(-\infty,\ -1]$上单调递增；当 $x>-1$ 时，$y=x^2+4x+3$ 在$(-1,\ +\infty)$上单调递增，但 $2-\frac{1}{(-1)}>(-1)^2+4\times(-1)+3$，所以 $y=\begin{cases}\frac{2x-1}{x},\ x\leqslant -1,\\ x^2+4x+3,\ x>-1\end{cases}$ 在 R 上不是单调增函数，故选项 B 不正确．$y=2^x$ 在 R 上单调递增，$y=-2^{-x}$ 在 R 上单调递增，所以 $y=2^x-2^{-x}$ 在 R 上单调递增，故选项 C 正确．$y'=x-2+\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x}\geqslant 0$ 恒成立，所以 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x$ 在$(0,\ +\infty)$上单调递增，故选项 D 正确.

三、 填空题

8. 已知函数 $f(x)=(x-4)e^x+1$，则 $f(x)$的单调增区间是________.

【答案】 $(3,\ +\infty)$

【解析】$f'(x)=(x-3)e^x$，由 $f'(x)=0$，得 $x=3$.当 $x<3$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(-\infty，3)$上单调递减，在$(3，+\infty)$上单调递增.

9. 已知函数 $f(x)=2x^2-\ln x$，若 $f(x)$在区间$(2m，m+1)$上单调递增，则实数 m 的取值范围是________.

【答案】 $\left[\frac{1}{4}，1\right)$

【解析】 因为 $f(x)=2x^2-\ln x$ 的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=4x-\frac{1}{x}$，由 $f'(x)>0$，得 $4x-\frac{1}{x}>0$，解得 $x>\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$的增区间为$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$.由于 $f(x)$在区间$(2m，m+1)$上单调递增，则$(2m，m+1)$⊆$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$，所以$\begin{cases}m+1>2m,\\2m\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得$\frac{1}{4}\leqslant m<1$.因此，实数 m 的取值范围是$\left[\frac{1}{4}，1\right)$.

10. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-e$(e 为自然对数的底数)，则关于 x 的不等式 $f(x+1)>f(-2x)$的解集为________.

【答案】 $\left(-\frac{1}{3}，+\infty\right)$

【解析】 因为 $f'(x)=e^x+e^{-x}>0$，所以函数 $f(x)$为 R 上的增函数，所以 $x+1>-2x$，所以 $x>-\frac{1}{3}$.所以原不等式的解集为$\left(-\frac{1}{3}，+\infty\right)$.

四、 解答题

11. 已知函数 $f(x)=x+ax^2+3\ln x$，曲线 $y=f(x)$过点 $P(1，0)$.

(1) 求函数 $f(x)$的解析式；

(2) 求函数 $f(x)$的单调区间.

【解析】 (1) 由 $f(x)=x+ax^2+3\ln x$ 过点 $P(1，0)$，得 $1+a=0$，即 $a=-1$，所以 $f(x)=x-x^2+3\ln x$.

(2) 由(1)知 $f'(x)=1-2x+\frac{3}{x}=\frac{-2x^2+x+3}{x}=\frac{-(2x-3)(x+1)}{x}$ $(x>0)$.

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{3}{2}$；令 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{3}{2}$，

所以 $f(x)$在$\left(0，\frac{3}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{3}{2}，+\infty\right)$上单调递减.

12. 已知函数 $f(x)=x^2-(2a+1)x+a\ln x(a>0)$.

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线方程；

(2) 求 $f(x)$的单调区间.

【解析】 (1) 因为 $a=1$，所以 $f(x)=x^2-3x+\ln x$，

所以 $f'(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x}$ $(x>0)$.又因为 $f(1)=-2$，$f'(1)=0$，所以所求切线方程为 $y=-2$.

(2) $f'(x)=\frac{2x^2-(2a+1)x+a}{x}=\frac{(x-a)(2x-1)}{x}$ $(x>0)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=a$，x_2

$=\frac{1}{2}$.

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $x\in(0，a)$或 $x\in\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$ ；

由 $f'(x)<0$，解得 $x\in\left(a，\frac{1}{2}\right)$.

所以 $f(x)$的单调增区间为$(0，a)$和$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$ ，单调减区间为$\left(a，\frac{1}{2}\right)$.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{x}\geqslant0$，所以 $f(x)$的单调增区间为$(0，+\infty)$，无单调减区间.

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $x\in\left(0，\frac{1}{2}\right)$ 或 $x\in(a，+\infty)$；由 $f'(x)<0$，解得 $x\in\left(\frac{1}{2}，a\right)$ ，

所以 $f(x)$的单调增区间为$\left(0，\frac{1}{2}\right)$ 和$(a，+\infty)$，单调减区间为$\left(\frac{1}{2}，a\right)$.

综上，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$的单调增区间为$(0，a)$和$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$ ，单调减区间为$\left(a，\frac{1}{2}\right)$ ；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$的单调增区间为$(0，+\infty)$，无单调减区间；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$的单调增区间为$\left(0，\frac{1}{2}\right)$ 和$(a，+\infty)$，单调减区间为$\left(\frac{1}{2}，a\right)$.

拓展练▶后提升素养

1. 若函数 $f(x)=(-x^2+ax)e^x$ 在区间$(-1，1)$上存在减区间，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】 $\left(-\infty，\frac{3}{2}\right)$

【解析】 $f(x)=(-x^2+ax)e^x$，则 $f'(x)=e^x(-x^2+ax-2x+a)$，函数 $f(x)=(-x^2+ax)e^x$ 在区间$(-1，1)$上存在减区间，只需$-x^2+ax+a-2x\leqslant0$ 在区间$(-1，1)$上有解，记 $g(x)=-x^2+(a-2)x+a$，其图象的对称轴为 $x=\frac{a-2}{2}$ ，开口向下，$g(-1)=-1-(a-2)+a=1>0$，只需 $g(1)<0$，所以$-1+a-2+a<0$，解得 $a<\frac{3}{2}$.