对点练▶先练透基础

类型1　求函数的极值

例1　求下列函数的极值：

(1) $f(x)=x^3-12x$；

(2) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{2(x-1)^2}$．

【解析】 (1) 函数 $f(x)$的定义域为R．

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$．

令 $f'(x)=0$，得 $x=-2$ 或 $x=2$．

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty，-2)$	-2	$(-2，2)$	2	$(2，+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

从表中可以看出，当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)$有极大值，且 $f(-2)=(-2)^3-12\times(-2)=16$；

当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$有极小值，

且 $f(2)=2^3-12\times2=-16$．

(2) 函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty，1)\cup(1，+\infty)$．

$f'(x)=\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{2(x-1)^3}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=2$．

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty，-1)$	-1	$(-1，1)$	1	$(1，2)$	2	$(2，+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$f(x)$	增	$-\dfrac{3}{8}$	减		增	3	增

故当 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$有极大值，

且极大值为 $f(-1)=-\dfrac{3}{8}$．

规律总结：极值反映函数在某一点附近的大小情况，刻画了函数的局部性质，求函数的极值必须研究导函数为零处两侧的单调性情况，进而根据极值定义获取．

变式　已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{e^x}$，求函数 $y=f(x)$的极值．

【解析】 函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{e^x}$ 的定义域为R，

且 $f'(x)=\dfrac{(x^2+x-1)'e^x-(x^2+x-1)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$=\dfrac{(2x+1)e^x-(x^2+x-1)e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{-x^2+x+2}{e^x}=\dfrac{-（x+1）（x-2）}{e^x}$，

又 $e^x>0$，由 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=2$，

当 $x\in(-\infty，-1)$和$(2，+\infty)$时，$f'(x)<0$，

此时 $f(x)$为减函数；

当 $x\in(-1，2)$时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$为增函数.

由 $f(x)$的单调性知，$f(x)_{极小值}=f(-1)=-e$，

$f(x)_{极大值}=f(2)=5e^{-2}=\dfrac{5}{e^2}$.

类型 2　已知极值求参数

例2　已知函数 $f(x)=x^3+3mx^2+nx+m^2$ 在 $x=-1$ 时有极值 0，则 $m+n=$________.

【答案】 11

【解析】 因为 $f(x)=x^3+3mx^2+nx+m^2$，

所以 $f'(x)=3x^2+6mx+n$，

依题意可得$\begin{cases}f（-1）=0，\\ f'（-1）=0\end{cases}$ 冰$\begin{cases}-1+3m-n+m^2=0，\\ 3-6m+n=0，\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=2，\\ n=9\end{cases}$ 或$\begin{cases}m=1，\\ n=3，\end{cases}$

当 $m=1$，$n=3$ 时，$f(x)=x^3+3x^2+3x+1$，$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geqslant 0$，所以函数 $f(x)$在 R 上单调递增，函数 $f(x)$无极值，舍去．当 $m=2$，$n=9$ 时，经检验，符合题意，故 $m+n=11$.

规律总结：由于可导函数 $y=f(x)$在某一点的导数值为 0 是该函数在这点取极值的必要不充分条件，为此已知极值求参数时必须检验充分性.

例3　若函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处取得极大值或极小值，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$的极值点．已知 a，b 是实数，1 和－1 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点.

(1) 求 a 和 b 的值；

(2) 设函数 $g(x)$的导函数 $g'(x)=f(x)+2$，求 $g(x)$的极值点.

【解析】 (1) 由 $f(x)=x^3+ax^2+bx$，

得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

因为 1 和－1 是函数 $f(x)$的两个极值点，

所以 $f'(1)=3+2a+b=0$，$f'(-1)=3-2a+b=0$，解得 $a=0$，$b=-3$.

经检验，$a=0$，$b=-3$ 时，$f'(x)=3x^2-3$，显然符合题意.

综上所述，$a=0$，$b=-3$.

(2) 由(1)得 $f(x)=x^3-3x$，所以令 $g'(x)=f(x)+2=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0$，解得 $x_1=x_2=1$，$x_3=-2$.

因为当 $x<-2$ 时，$g'(x)<0$；

当$-2<x<1$ 时，$g'(x)>0$，

所以－2 是 $g(x)$的极小值点.

因为当$-2<x<1$ 或 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

所以 1 不是 $g(x)$的极值点.

所以 $g(x)$的极小值点是－2，无极大值点.

综合练 ▶ 再融会贯通

一、　单项选择题

1. 函数 $y=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的极大值点为(　　)

A. 0　B. $\dfrac{\pi}{3}$　C. $\dfrac{\pi}{6}$　D. $\dfrac{\pi}{2}$

【答案】 C

【解析】 函数 $y=x+2\cos x$ 的导数为 $y'=1-2\sin x$，因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，由 $y'=1-2\sin x=0$，可得 $\sin x=\dfrac{1}{2}$，解得 $x=\dfrac{\pi}{6}$.当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$y'>0$，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$y'<0$，所以函数 $y=x+2\cos x$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，在 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以使得函数 $y=x+2\cos x$ 取得极大值时 x 的值为 $\dfrac{\pi}{6}$.

2. 若函数 $f(x)=x^3-ax^2(a>0)$的极大值点为 $a-2$，则 a 等于(　　)

A. 1　B. 2　C. 4　D. 6

【答案】 B

【解析】 $f'(x)=3x^2-2ax$.当 $x<0$ 或 $x>\dfrac{2a}{3}$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{2a}{3}$ 时，$f'(x)<0$.所以 $f(x)$ 的极大值点为 0，则 $a-2=0$，解得 $a=2$.

3. 如果函数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx-2a^2$ 在 $x=2$ 时有极值 0，那么 $a+b$ 的值为(　　)

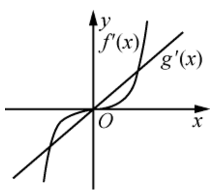
A. 14　B. 40

C. 48　D. 14 或 40

【答案】 B

【解析】 函数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx-2a^2$，$f'(x)=3x^2-6ax+b$，若在 $x=2$ 时有极值 0，可得 $\begin{cases}f(2)=0,\\ f'(2)=0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}8-12a+2b-2a^2=0,\\ 12-12a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\ b=36.\end{cases}$ 当 $a=4$，$b=36$ 时，$f'(x)=3x^2-24x+36$，满足函数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx-2a^2$ 在 $x=2$ 时有极值 0.当 $a=2$，$b=12$ 时，$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2\geqslant 0$，不满足函数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx-2a^2$ 在 $x=2$ 时有极值 0.所以 $a=4$，$b=36$，$a+b=40$.

4. 已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的导函数 $f'(x)$，$g'(x)$的图象如图所示，则关于函数 $y=g(x)-f(x)$ 的判断正确的是(　　)



(第 4 题)

A. 有 3 个极大值点

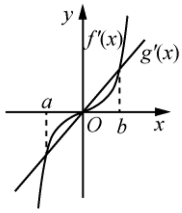
B. 有 3 个极小值点

C. 有 1 个极大值点和 2 个极小值点

D. 有 2 个极大值点和 1 个极小值点

【答案】 *D*

【解析】如图(1)，结合函数图象可知，当 x<a 时，f′(x)<g′(x)，此时 y′＝g′(x)－f′(x)>0，函数 y 单调递增；当 a<x<0 时，f′(x)>g′(x)，此时 y′＝g′(x)－f′(x)<0，函数 y 单调递减；当 0<x<b 时，f′(x)<g′(x)，此时 y′＝g′(x)－f′(x)>0，函数 y 单调递增；当 x>b 时，f′(x)>g′(x)，此时 y′＝g′(x)－f′(x)<0，函数 y 单调递减，故函数 y 在 x＝a，x＝b 处取得极大值，在 x＝0 处取得极小值.



(第 4 题(1))

二、 多项选择题

5. 下列四个函数中，在 x＝0 处取得极值的函数有(　　)

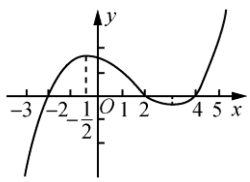
A. $y=x^3$　　*B.* $y=x^2+1$

C. $y=|x|$　　*D.* $y=2^x$

【答案】 *BC*

【解析】 *A* 选项，$y'=3x^2\geqslant 0$ 恒成立，所以函数在 R 上单调递增，无极值点，故 A 错误. B 选项，$y'=2x$，当 $x>0$ 时函数 y 单调递增，当 $x<0$ 时函数 y 单调递减，且 $y'|_{x=0}=0$，故 B 正确. C 选项，结合该函数图象可知它在(0，＋∞)上单调递增，在(－∞，0]上单调递减，故 C 正确；D 选项，$y=2^x$ 在 R 上单调递增，无极值点，故 D 错误.

6. 若函数 $y=f(x)$的导函数的图象如图所示，则下列判断中错误的是(　　)



(第 6 题)

A. 函数 y＝f(x)在区间$\left(-3，-\frac{1}{2}\right)$内单调递增

B. 函数 y＝f(x)在区间(4，5)内单调递增

C. 当 x＝2 时，函数 y＝f(x)有极小值

D. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，函数 y＝f(x)有极大值

【答案】 *ACD*

7. 设函数 f(x)的定义域为 R，$x_0(x_0\neq 0)$是 $f(x)$的极大值点，以下结论错误的是(　　)

A. 挽 $x\in$R，$f(x)\leqslant f(x_0)$

B. $-x_0$ 是 $f(-x)$的极大值点

C. $-x_0$ 是$-f(x)$的极小值点

D. $-x_0$ 是$-f(-x)$的极小值点

【答案】 AC

【解析】 $x_0(x_0\neq 0)$是$f(x)$的极大值点，并不是最大值点，故A错误；$f(-x)$的图象相当于$f(x)$的图象关于y轴对称，故$-x_0$应是$f(-x)$的极大值点，故B正确；$-f(x)$的图象相当于$f(x)$的图象关于x轴对称，故x_0应是$-f(x)$的极小值点，跟$-x_0$没有关系，故C错误；$-f(-x)$的图象相当于$f(x)$的图象先关于y轴对称，再关于x轴对称．故D正确．

三、 填空题

8. 函数$f(x)=x^2-\ln x$的极值点是________．

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 函数$f(x)$的定义域为$\{x|x>0\}$，$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$或$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (舍去).当$x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以函数$f(x)$的极值点是$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

9. 设函数$f(x)=ax^3+x^2+bx+1$在$x=1$和$x=2$处都有极值，则$ab=$________，极大值是________．

【答案】 $\frac{8}{27}$　$\frac{5}{9}$

【解析】 $f'(x)=3ax^2+2x+b$，因为函数$f(x)=ax^3+x^2+bx+1$在$x=1$和$x=2$处都有极值．

所以$\begin{cases}f'(1)=3a+2+b=0,\\ f'(2)=12a+4+b=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-\frac{2}{9},\\ b=-\frac{4}{3},\end{cases}$ 经检验符合题意，所以$ab=\frac{8}{27}$.所以$f'(x)=-\frac{2}{3}x^2+2x-\frac{4}{3}$，当$x\in(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$时，$f'(x)<0$，所以函数$f(x)$的减区间为$(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$.当$x\in(1,2)$时，$f'(x)>0$，所以函数$f(x)$的增区间为$(1,2)$，所以函数$f(x)$有极大值$f(2)=8a+4+2b+1=\frac{5}{9}$．

10. 已知函数$f(x)=x^3+mx^2+(m+6)x+1$存在极值，则实数m的取值范围为________．

【答案】 $(-\infty,-3)\cup(6,+\infty)$

【解析】 因为函数$f(x)=x^3+mx^2+(m+6)x+1$存在极值，所以$f'(x)=3x^2+2mx+m+6$有两个不相等的实根，所以$\Delta=4m^2-12(m+6)>0$，解得$m<-3$或$m>6$.

四、 解答题

11. 设函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx$在$x=1$和$x=-1$处有极值，且$f(1)=-1$，求a，b，c的值，并求出相应的极值．

【解析】 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，因为$f(x)$在$x=1$和$x=-1$处有极值，且$f(1)=-1$，

所以$\begin{cases}f'(-1)=0,\\ f'(1)=0,\\ f(1)=-1,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}3a-2b+c=0,\\ 3a+2b+c=0,\\ a+b+c=-1,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=0,\\ c=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

所以 $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(x+1)(x-1)$.

当 $x\in(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

函数 $f(x)$为增函数；

当 $x\in(-1,1)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$为减函数，

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$有极大值 $f(-1)=1$；

当 $x=1$ 时，$f(x)$有极小值 $f(1)=-1$.

12. 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a$.

(1) 求 $f(x)$的极值；

(2) 当 a 在什么范围内取值时，曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点？

【解析】 (1) $f'(x)=3x^2-2x-1$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以 $f(x)$的极大值是 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}+a$，极小值是 $f(1)=a-1$.

(2) 函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a=(x-1)^2(x+1)+a-1$，

由此可知，x 取足够大的正数时，有 $f(x)>0$，

x 取足够小的负数时，有 $f(x)<0$，

所以曲线 $y=f(x)$与 x 轴至少有一个交点.

由(1)知 $f(x)_{极大值}=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}+a$，

$f(x)_{极小值}=f(1)=a-1$.

因为曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点，

所以 $f(x)_{极大值}<0$ 或 $f(x)_{极小值}>0$，

即$\frac{5}{27}+a<0$ 或 $a-1>0$，所以 $a<-\frac{5}{27}$ 或 $a>1$.

所以当 $a\in\left(-\infty,-\frac{5}{27}\right)\cup(1,+\infty)$时，曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点.