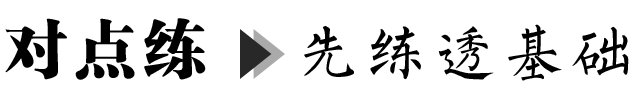
虚线第3课时　简单复合函数的导数



类型1　简单复合函数的导数

例1　求下列各函数的导数：

(1) *y*＝ln (3*x*－2)；

(2) *f*(*x*)＝e－2*x*＋1＋e*x*＋e2；

(3) *y*＝；

(4) *f*(*x*)＝ln2*x*－2ln *x*＋3.

【解析】(1) *y*′＝·(3*x*－2)′＝；

(2) *f*′(*x*)＝e－2*x*＋1·(－2*x*＋1)′＋e*x*＝－2e－2*x*＋1＋e*x*.

(3) *y*′＝·(1－2*x*2)′＝－.

(4) *f*(*x*)＝ln 2*x*－2ln *x*＋3＝(ln *x*－1)2＋2，

所以*f*′(*x*)＝×2(ln *x*－1)＝.

规律总结：某些较复杂的函数可以先进行整理，比如化为简单的复合函数，利用复合函数的求导法则求其导数．

类型2　利用复合函数的导数求曲线在某点处的切线

例2　(1) 若曲线*y*＝e2*x*＋1在点(*x*0，e2*x*0＋1)处的切线方程为2e*x*－*y*＋e＝0，则*x*0＝\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 0

【解析】 *y*′＝2e2*x*＋1，所以2e2*x*0＋1＝2e，得*x*0＝0.

(2) 设曲线*y*＝e－*x*(*x*≥0)在点*M*(*t*，e－*t*)(*t*≥0)处的切线*l*与*x*轴、*y*轴所围成的三角形面积为*S*(*t*)，则*S*(*t*)的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 *S*(*t*)＝(*t*＋1)2e－*t*(*t*≥0)

【解析】 对*y*＝e－*x*求导可得*y*′＝*f*′(*x*)＝(e－*x*)′＝－e－*x*，

故切线*l*在点*M*(*t*，e－*t*)处的斜率为*f*′(*t*)＝－e－*t*，

故切线*l*的方程为*y*－e－*t*＝－e－*t*(*x*－*t*)，即e－*tx*＋*y*－e－*t*(*t*＋1)＝0.

令*y*＝0，得*x*＝*t*＋1；令*x*＝0，得*y*＝e－*t*(*t*＋1),

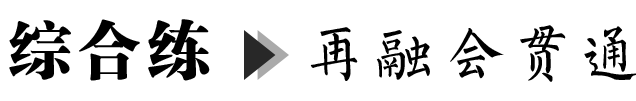
所以*S*(*t*)＝(*t*＋1)·e－*t*(*t*＋1)＝(*t*＋1)2e－*t*(*t*≥0).

类型3　复合函数导数的实际应用

例3　某港口在一天24h内潮水的高度近似满足函数关系*S*(*t*)＝3sin (0≤*t*≤24)，其中*S*的单位是m，*t*的单位是h，求18点时潮水起落的速度．

【解析】 因为*S*′(*t*)＝3cos ×＝cos ，所以*S*′(18)＝cos (×18＋)＝cos ＝cos ＝，所以18点时潮水起落的速度是m/h.

规律总结：对三角函数型函数的求导，往往需要利用三角恒等变换公式，对函数式进行化简，再进行求导．复合函数的求导法则熟悉后，中间步骤可以省略，即不必再写出函数的复合过程，直接运用公式，从外层开始由外到内逐层求导．



一、 单项选择题

1. 函数*y*＝cos (2*x*＋1)的导数是(　　)

A. *y*′＝sin (2*x*＋1) B. *y*′＝－2*x* sin (2*x*＋1)

C. *y*′＝－2sin (2*x*＋1) D. *y*′＝2*x* sin (2*x*＋1)

【答案】 C

【解析】 *y*′＝－sin (2*x*＋1)(2*x*＋1)′＝－2sin (2*x*＋1).

2. 设*f*(*x*)＝ln (2*x*－1)，若*f*(*x*)在*x*＝*x*0处的导数 *f*′(*x*0)＝1，则*x*0的值为(　　)

A. B. C. 1 D.

【答案】 B

【解析】 由*f*(*x*)＝ln (2*x*－1)，得*f*′(*x*)＝.

由*f*′(*x*0)＝＝1，解得*x*0＝.

3. 随着科学技术的发展，放射性同位素技术已经广泛应用于医学、航天等众多领域，并取得了显著经济效益．假设某放射性同位素的衰变过程中，其含量*N*(单位：贝克)与时间*t*(单位：天)满足函数关系*P*(*t*)＝*P*0·2－，其中*P*0为*t*＝0时该放射性同位素的含量．已知*t*＝15时，该放射性同位素的瞬时变化率为－，则该放射性同位素含量为4.5贝克时衰变所需时间为(　　)

A. 20天 B. 30天 C. 45天 D. 60天

【答案】 D

【解析】 由*P*(*t*)＝*P*0·2－得*P*′(*t*)＝－·*P*0·2－ln 2.因为*t*＝15时，该放射性同位素的瞬时变化率为－，所以*P*′(15)＝－*P*0＝－，解得*P*0＝18，则*P*(*t*)＝18·2－．当该放射性同位素含量为4.5贝克，即*P*(*t*)＝4.5时，由18·2－＝4.5，得2－＝，所以－＝－2，解得*t*＝60.

4. 设*a*∈R，函数*f*(*x*)＝e*x*＋*a*·e－*x*的导函数是*f*′(*x*)，且*f*′(*x*)是奇函数．若曲线*y*＝*f*(*x*)的一条切线的斜率是，则切点的横坐标为(　　)

A. ln 2 B. －ln 2 C. D. －

【答案】 A

【解析】 对*f*(*x*)＝e*x*＋*a*·e－*x*求导得*f*′(*x*)＝e*x*－*a*e－*x*.又*f*′(*x*)是奇函数，故*f*′(0)＝1－*a*＝0，解得*a*＝1，故*f*′(*x*)＝e*x*－e－*x*.设切点为(*x*0，*y*0)，则*f*′(*x*0)＝e*x*0－e－*x*0＝，得e*x*0＝2或e*x*0＝－(舍去)，得*x*0＝ln 2.

二、 多项选择题

5. 下列函数求导正确的是(　　)

A. 若*f*(*x*)＝，则*f*′(*x*)＝

B. 若*f*(*x*)＝e2*x*，则*f*′(*x*)＝e2*x*

C. 若*f*(*x*)＝，则*f*′(*x*)＝

D. 若*f*(*x*)＝cos ，则*f*′(*x*)＝－sin

【答案】 AC

【解析】 若*f*(*x*)＝，则*f*′(*x*)＝＝，故A正确；若*f*(*x*)＝e2*x*，则*f*′(*x*)＝e2*x*·(2*x*)′＝2e2*x*，故B错误；若*f*(*x*)＝，则*f*′(*x*)＝·(2*x*－1)－1·(2*x*－1)′＝，故C正确；若*f*(*x*)＝cos ，则*f*′(*x*)＝

－sin ·′＝－2sin (2*x*－)，故D错误．

6. 以下函数求导正确的是(　　)

A. 函数*f*(*x*)＝(*x*＋1)2(*x*－1)在*x*＝1处的导数等于4

B. 函数*f*(*x*)＝(1－2*x*3)10在*x*＝1处的导数等于32

C. 函数*f*(*x*)＝*x* ln (2*x*＋5)在*x*＝1处的导数等于ln 7

D. 函数*f*(*x*)＝*x*e*x*－1在*x*＝1处的导数等于2

【答案】 AD

【解析】 对于A，*f*′(*x*)＝[(*x*＋1)2]′(*x*－1)＋(*x*＋1)2·(*x*－1)′＝2(*x*＋1)(*x*－1)＋(*x*＋1)2＝3*x*2＋2*x*－1，所以*f*′(1)＝4，故A正确；对于B，*f*′(*x*)＝10(1－2*x*3)9(－6*x*2)，所以*f*′(1)＝10(1－2)9(－6)＝60，故B错误；对于C，*f*′(*x*)＝[*x* ln (2*x*＋5)]′＝*x*′ln (2*x*＋5)＋*x*[ln (2*x*＋5)]′＝ln (2*x*＋5)＋*x*··(2*x*＋5)′＝ln (2*x*＋5)＋，*f*′(1)＝ln 7＋，故C错误；对于D，*f*′(*x*)＝e*x*－1＋*x*e*x*－1＝(*x*＋1)e*x*－1，*f*′(1)＝(1＋1)e1－1＝2，故D正确．

7. 下列判断正确的是(　　)

A. 曲线*f*(*x*)＝ln (*x*－1)在点(2，0)处的切线的倾斜角是

B. 曲线*f*(*x*)＝在点(2，1)处的切线的倾斜角是

C. 曲线*f*(*x*)＝e*x*－1在点(2，e)处的切线方程是e*x*－*y*－e＝0

D. 曲线*f*(*x*)＝(*x*－1)5在点(2，1)处的切线与直线*x*＋5*y*＝0互相垂直

【答案】 ACD

【解析】 选项A，*f*′(*x*)＝，*f*′(2)＝1，所以倾斜角*θ*＝，故A正确；选项B，*f*′(*x*)＝－，*f*′(2)＝－1，所以倾斜角*θ*＝，故B错误；选项C，*f*′(*x*)＝

e*x*－1，*f*′(2)＝e，所以切线方程为e*x*－*y*－e＝0，故C正确；选项D，*f*′(*x*)＝5(*x*－1)4，

*f*′(2)＝5，所以D正确．

三、 填空题

8. 若函数*f*(*x*)＝e*ax*＋ln (*x*＋1)，*f*′(0)＝4，则*a*＝\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 3

【解析】 由*f*(*x*)＝e*ax*＋ln (*x*＋1)，得*f*′(*x*)＝*a*e*ax*＋，因为*f*′(0)＝4，所以*f*′(0)＝*a*＋1＝4，所以*a*＝3.

9. 已知*f*(*x*)＝*x*3，则*f*′(2*x*＋3)＝\_\_\_\_\_\_\_\_，[*f*(2*x*＋3)]′＝\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 3(2*x*＋3)2　6(2*x*＋3)2

【解析】 因为*f*(*x*)＝*x*3，所以*f*′(*x*)＝3*x*2，则*f*′(2*x*＋3)＝3(2*x*＋3)2.设*t*＝2*x*＋3，*f*(2*x*＋3)＝*f*(*t*)，则*t*′＝2，则[*f*(2*x*＋3)]′＝2×3(2*x*＋3)2＝6(2*x*＋3)2.

10. 曲线*f*(*x*)＝(1－*x*)2＋3ln (2＋*x*)在点(1，*f*(1))处的切线的斜率为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 1

【解析】 *f*(*x*)＝(1－*x*)2＋3ln (2＋*x*)(*x*＞－2)，*f*′(*x*)＝2*x*－2＋＝，所以*k*＝*f*′(1)＝1.

四、 解答题

11. 求下列函数的导数：

(1) *f*(*x*)＝(3*x*2＋1)(2－*x*)；

(2) *f*(*x*)＝*x*2ln (2*x*)；

(3) *f*(*x*)＝ln (2*x*－1)3.

【解析】 (1) *f*′(*x*)＝6*x*(2－*x*)＋(3*x*2＋1)×(－1)＝－9*x*2＋12*x*－1；

(2) *f*′(*x*)＝2*x* ln (2*x*)＋*x*2×＝*x*[2ln (2*x*)＋1]；

(3) 因为*f*(*x*)＝3ln (2*x*－1)，所以*f*′(*x*)＝.

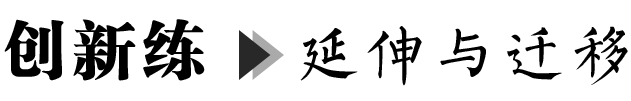
12. 已知函数*f*(*x*)＝ln (*x*＋1)－*ax*的图象在*x*＝2处的切线与直线2*x*＋3*y*＋1＝0平行，

(1) 求*a*的值；

(2) 求曲线*g*(*x*)＝*f*(*x*)＋*x*上到直线*y*＝*x*＋3距离最小的点的坐标，并求出该最小值．

【解析】 (1) 由*f*(*x*)＝ln (*x*＋1)－*ax*，得*f*′(*x*)＝－*a*，因为函数*f*(*x*)的图象在*x*＝2处的切线与直线2*x*＋3*y*＋1＝0平行，所以*f*′(2)＝－*a*＝－，所以*a*＝1.

(2) *g*(*x*)＝ln (*x*＋1)，*g*′(*x*)＝，令*g*′(*x*)＝＝1，得*x*＝0，则曲线*g*(*x*)在点(0，0)处的切线方程为*x*－*y*＝0，即点(0，0)到直线*y*＝*x*＋3的距离最小，最小距离*d*＝＝.



1. 在对函数*y*＝[*f*(*x*)]*g*(*x*)求导时可运用对数法：在解析式两边同时取对数，得到ln *y*＝*g*(*x*)·ln *f*(*x*)，然后两边同时求导，得＝*g*′(*x*)ln *f*(*x*)＋*g*(*x*)，于是*y*′＝[*f*(*x*)]*g*(*x*)·[*g*′(*x*)ln *f*(*x*)＋*g*(*x*)·].用此法探求*y*＝(*x*＋1)(*x*>0)的导数为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 *y*′＝[1－ln (*x*＋1)]·(*x*＋1)

【解析】 由*y*＝(*x*＋1)(*x*>0)，

两边同时取对数，得ln *y*＝ln (*x*＋1)，

两边同时求导，得＝ln (*x*＋1)＋×＝[1－ln (*x*＋1)]，所以*y*′＝[1－ln (*x*＋1)]·(*x*＋1)．