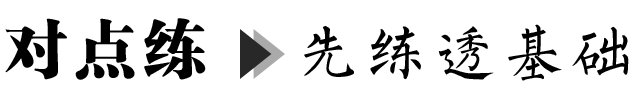
虚线第4课时　函数的最大(小)值



类型1　函数的最大(小)值

例1　已知函数*f*(*x*)＝*x*3＋*x*2－2*x*，求函数*y*＝*f*(*x*)在[－2，1]上的最大值与最小值．

【解析】 令*f*′(*x*)＝3*x*2＋*x*－2＝0，解得*x*1＝－1，*x*2＝，当*x*变化时，*f*′(*x*)，*f*(*x*)的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | －2 | (－2，  －1) | －1 | (－1，  ) |  | (，  1) | 1 |
| *f*′(*x*) |  | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |  |
| *f*(*x*) | －2 | 增 |  | 减 | － | 增 | － |

　　所以－1与是函数*f*(*x*)在(－2，1)上的两个极值点，而*f*(－2)＝－2，*f*(－1)＝，*f*＝－，*f*(1)＝－，所以函数*y*＝*f*(*x*)在[－2，1]上的最大值是*f*(－1)＝，最小值是*f*(－2)＝－2.

规律总结：利用导数求函数的极值与闭区间上的最值，设函数*f*(*x*)在[*a*，*b*]上连续，在(*a*，*b*)内可导，求*f*(*x*)在[*a*，*b*]上的最大值和最小值的步骤如下：

求函数*y*＝*f*(*x*)在(*a*，*b*)内的极值，将函数*y*＝*f*(*x*)的各极值与端点处的函数值*f*(*a*)，*f*(*b*)比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值．

例2　已知函数*f*(*x*)＝*x*3－4*x*＋4.

(1) 求*f*(*x*)的极值；

(2) 求*f*(*x*)在[0，3]上的最值．

【解析】 (1) 因为*f*(*x*)＝*x*3－4*x*＋4，*f*′(*x*)＝*x*2－4＝(*x*＋2)(*x*－2).令*f*′(*x*)＝0，解得*x*＝－2或*x*＝2，

当*x*变化时，*f*′(*x*)，*f*(*x*)的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (－∞，－2) | －2 | (－2，2) | 2 | (2，＋∞) |
| *f*′(*x*) | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |
| *f*(*x*) | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

　　故当*x*＝－2时，*f*(*x*)取得极大值，*f*(－2)＝；当*x*＝2时，*f*(*x*)取得极小值，*f*(2)＝－.

(2) 由(1)可知*f*(*x*)的极大值为，极小值为－，

*f*(0)＝4，*f*(3)＝1，

因为－<1<4，所以*f*(*x*)在[0，3]上的最大值为4，最小值为－.

类型2　根据最值求参数

例3　(1) 若函数*f*(*x*)＝*x*3＋*x*2－2在区间(*a*－4，*a*)上存在最小值，则*a*的取值范围是(　　)

A. (0，4) B. [0，4) C. [1，4) D. (1，4)

【答案】 C

【解析】 因为*f*(*x*)＝*x*3＋*x*2－2，所以*f*′(*x*)＝*x*2＋2*x*＝*x*(*x*＋2)，令*f*′(*x*)>0，解得*x*<－2或*x*>0；令*f*′(*x*)<0，解得－2<*x*<0.故*f*(*x*)的单调增区间为(－∞，－2)和(0，＋∞)，单调减区间为(－2，0)，所以函数*f*(*x*)在*x*＝0处取得极小值，由于函数*f*(*x*)在区间(*a*－4，*a*)内取到最小值，则由*f*(*a*－4)≥*f*(0)可得(*a*－4)3＋(*a*－4)2－2≥－2，可得(*a*－4)2(*a*－1)≥0，即解得1≤*a*<4.因此，实数*a*的取值范围是[1，4).

(2) 已知函数*f*(*x*)＝(*a*>0)在[1，＋∞)上的最大值为，则*a*的值为(　　)

A. －1 B. C. D. ＋1

【答案】 A

【解析】 由*f*(*x*)＝，得*f*′(*x*)＝，

当*a*>1时，若*x*>，则*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减；

若1<*x*<，则*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增，

故当*x*＝时，函数*f*(*x*)有最大值＝，

解得*a*＝<1，不符合题意．

当*a*＝1时，函数*f*(*x*)在[1，＋∞)上单调递减，最大值为*f*(1)＝，不符合题意．

当0<*a*<1时，函数*f*(*x*)在[1，＋∞)上单调递减．此时最大值为*f*(1)＝＝，解得*a*＝－1，符合题意．故*a*的值为－1.

类型3　构造新函数求最值

例4　已知函数*f*(*x*)＝ln *x*＋*x*2－3*x*，若对于任意*x*1，*x*2∈[1，10]，当*x*1<*x*2时，不等式*f*(*x*1)－*f*(*x*2)>－恒成立，求实数*m*的取值范围．

【解析】 *f*(*x*1)－*f*(*x*2)>－可变形为*f*(*x*1)＋>*f*(*x*2)＋，令*h*(*x*)＝*f*(*x*)＋，则*h*(*x*)＝ln *x*＋*x*2－3*x*＋(*x*>0)，不等式可化为*h*(*x*1)>*h*(*x*2).

因为对任意*x*1，*x*2∈[1，10]，当*x*1<*x*2时，不等式*h*(*x*1)>*h*(*x*2)恒成立，

则可知*h*(*x*)＝*f*(*x*)＋在[1，10]上单调递减．

因为*h*′(*x*)＝＋2*x*－3－＝，

所以2*x*3－3*x*2＋*x*－*m*≤0在[1，10]上恒成立，

则*m*≥2*x*3－3*x*2＋*x*在[1，10]上恒成立．

令*φ*(*x*)＝2*x*3－3*x*2＋*x*，

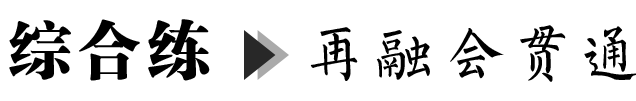
则*φ*′(*x*)＝6*x*2－6*x*＋1＝6－≥1>0，

所以*φ*(*x*)在[1，10]上单调递增，

所以*φ*(*x*)max＝*φ*(10)＝1 710，所以*m*≥1 710，

所以实数*m*的取值范围为[1 710，＋∞).

规律总结：在具体问题情境中，往往需要构造函数之后求相应最值，如：在解决取值范围问题，特别是恒成立问题中，通过分离参变量转化为求新函数最值问题是常用策略．



一、 单项选择题

1. 函数*f*(*x*)＝ln *x*－*x*在区间(0，e]上的最大值为(　　)

A. 1－e B. －1 C. －e D. 0

【答案】 B

【解析】 *f*′(*x*)＝－1＝，当*x*∈(0，1)时，*f*′(*x*)>0；当*x*∈(1，e)时，*f*′(*x*)<0，所以*f*(*x*)在(0，1)上单调递增，在(1，e)上单调递减，故当*x*＝1时*f*(*x*)取得极大值，也为最大值，*f*(1)＝－1.

2. 函数*y*＝*x*＋2cos *x*在区间上的最大值是(　　)

A. ＋1 B. ＋ C. ＋ D.

【答案】 C

【解析】 令*y*′＝1－2sin *x*＝0，得*x*＝，易知*y*＝*x*＋2cos *x*在区间上是增函数，在区间上是减函数．当*x*＝时，*y*取得最大值，此时*y*＝＋.

3. 函数*f*(*x*)＝*ax*－ln *x*≥0(*a*∈R)恒成立的一个充分不必要条件是(　　)

A. *a*∈ B. *a*∈[0，＋∞) C. *a*∈[1，＋∞) D. *a*∈(－∞，e]

【答案】 C

【解析】 函数*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，依题意，*a*≥在(0，＋∞)上恒成立．设*g*(*x*)＝，则*g*′(*x*)＝，易知函数*g*(*x*)在(0，e)上单调递增，在(e，＋∞)上单调递减，所以*g*(*x*)max＝*g*(e)＝，所以*a*≥，故使得函数 *f*(*x*)＝*ax*－ln *x*≥0(*a*∈R)恒成立的一个充分不必要条件是*a*≥1.

4. 已知函数*f*(*x*)＝2ln *x*＋*ax*2－3*x*在*x*＝2处取得极小值，则*f*(*x*)在内的最大值为(　　)

A. － B. 2ln 3－ C. －1 D. 2ln 2－4

【答案】 B

【解析】 因为*f*(*x*)＝2ln *x*＋*ax*2－3*x*，所以*f*′(*x*)＝＋2*ax*－3.由题意可得*f*′(2)＝4*a*－2＝0，解得*a*＝，则*f*(*x*)＝2ln *x*＋*x*2－3*x*，*f*′(*x*)＝＋*x*－3＝.令*f*′(*x*)＝0，可得*x*＝1或*x*＝2，

当*x*变化时，*f*(*x*)，*f*′(*x*)的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  | 1 | (1，2) | 2 | (2，3] |
| *f*′(*x*) | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |
| *f*(*x*) | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

所以函数*f*(*x*)的极大值为*f*(1)＝－，极小值为*f*(2)＝2ln 2－4.又因为*f*＝－2ln 2－，*f*(3)＝2ln 3－，*f*(3)－*f*(1)＝2ln 3－＋＝2ln 3－2＝2(ln 3－1)>0，即*f*(1)<*f*(3)，所以*f*(*x*)max＝*f*(3)＝2ln 3－.

二、 多项选择题

5. 已知函数*f*(*x*)＝*x*3－2*x*2，*x*∈[－1，3]，则下列判断正确的是(　　)

A. 最大值为9 B. 最小值为－3

C. 函数*f*(*x*)在区间[1，3]上单调递增 D. *x*＝0是它的极大值点

【答案】 ABD

【解析】 *f*′(*x*)＝3*x*2－4*x*，令*f*′(*x*)＝3*x*2－4*x*>0，解得*x*<0或*x*>.当*x*∈[－1，0)，时，*f*′(*x*)>0，函数*f*(*x*)单调递增；当*x*∈时，*f*′(*x*)<0，函数*f*(*x*)单调递减，C错误；0是它的极大值点，D正确．因为*f*(0)＝0，*f*(3)＝27－2×9＝9，所以函数*f*(*x*)的最大值为9，A正确．因为*f*(－1)＝－1－2＝－3，*f*＝－2×＝－，所以函数*f*(*x*)的最小值为－3，B正确．

6. 若函数*f*(*x*)＝2*x*3－*ax*2(*a*＜0)在上有最大值，则*a*的取值可能为(　　)

A. －6 B. －5 C. －4 D. －3

【答案】 ABC

【解析】 令*f*′(*x*)＝2*x*(3*x*－*a*)＝0，解得*x*1＝0，*x*2＝(*a*＜0).当＜*x*＜0时，*f*′(*x*)＜0；当*x*＜或*x*＞0时，*f*′(*x*)＞0，则*f*(*x*)的单调增区间为，(0，＋∞)，单调减区间为，从而*f*(*x*)在*x*＝处取得极大值*f*＝－.由*f*(*x*)＝－，得＝0，解得*x*＝或*x*＝－，又因为*f*(*x*)在上有最大值，所以＜≤－，解得*a*≤－4.所以选项A，B，C符合题意．

7. 若*f*(*x*)＝*xa*·cos *x*，*x*∈的最大值为*M*，则(　　)

A. 当*a*＝－1时，*M*< B. 当*a*＝2时，*M*<

C. 当*a*＝1时，*M*> D. 当*a*＝3时，*M*<

【答案】 AB

【解析】 对于选项A，当*a*＝－1时，*f*(*x*)＝，*f*′(*x*)＝<0在区间上恒成立， 所以*f*(*x*)在区间上单调递减，所以*M*＝＝<，故选项A正确．对于选项B，当*a*＝2时，*f*(*x*)＝*x*2·cos *x*，则*f*′(*x*)＝*x* cos *x*(2－*x* tan *x*)>0在区间上恒成立，所以*f*(*x*)在区间上单调递增，即*M*＝<，故选项B正确．对于选项C，当*a*＝1时，当*x*∈时，*x*<tan *x* 恒成立，所以*f*(*x*)＝*x* cos *x*<tan *x* cos *x*＝sin *x*≤，所以*M*<，故选项C错误．对于选项D，当*a*＝3时，*f*(*x*)＝*x*3·cos *x*，则*f*′(*x*)＝*x*2cos *x*(3－*x* tan *x*)>0在区间上恒成立，所以*f*(*x*)在区间[，]上单调递增，所以*M*＝·>，故选项D错误．

三、 填空题

8. 函数*y*＝3*x*3－9*x*＋5在[－2，2]上的最大值与最小值之差为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 12

【解析】 因为*y*＝3*x*3－9*x*＋5，所以令*y*′＝9*x*2－9＝0，解得*x*1＝1，*x*2＝－1.令*y*′>0，解得*x*>1或*x*<－1；令*y*′<0，解得－1<*x*<1，所以函数*f*(*x*)在[－2，－1)上单调递增，在(－1，1)上单调递减，在(1，2]上单调递增．所以当*x*＝－1时，*y*取极大值，且极大值是11；当*x*＝1时，*y*取极小值，且极小值是－1.而*x*＝－2时，*y*＝－1，*x*＝2时，*y*＝11，所以函数*y*的最大值为11，最小值为－1，故函数*y*的最大值与最小值之差是12.

9. 已知函数*f*(*x*)＝*x*3＋*x*2－2在区间(*a*－2，*a*＋3)上存在最小值，则*a*的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 [－1，2)

【解析】 *f*′(*x*)＝*x*2＋2*x*＝*x*(*x*＋2)，*f*′(*x*)＝0时，*x*＝－2或*x*＝0.当*x*<－2或*x*>0时，*f*′(*x*)>0，当－2<*x*<0时，*f*′(*x*)<0，所以函数*f*(*x*)的单调增区间是(－∞，－2)和(0，＋∞)，单调减区间是(－2，0)，所以函数的极大值点是－2，极小值点是0，且*f*(0)＝－2，那么当*x*3＋*x*2－2＝－2时，解得*x*＝0或*x*＝－3, 所以若函数*f*(*x*)在区间(*a*－2，*a*＋3)上存在最小值， 则解得－1≤*a*<2.

10. 设动直线*x*＝*m*与函数*f*(*x*)＝*x*2，*g*(*x*)＝2ln *x*的图象分别交于*M*，*N*，则*MN*的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 1

【解析】 根据题意可得点*M*(*m*，*m*2)，*N*(*m*，2ln *m*)，所以*MN*＝*m*2－2ln *m*(*m*>0).设*h*(*m*)＝*m*2－2ln *m*(*m*>0)，*h*′(*m*)＝2*m*－＝(*m*>0)，所以当*m*∈(0，1)时，*h*′(*m*)<0，*h*(*m*)单调递减；当*m*∈(1，＋∞)时，*h*′(*m*)>0，*h*(*m*)单调递增，所以*h*(*m*)min＝*h*(1)＝1，所以*MN*的最小值为1.

四、 解答题

11. 已知函数*f*(*x*)＝(*x*2－4)(2*x*－*a*)，*a*∈R，*f*′(*x*)为*f*(*x*)的导函数，且*f*′(－1)＝0.

(1) 讨论函数*f*(*x*)的单调性；

(2) 求函数*f*(*x*)在[－2，2]上的最大值和最小值．

【解析】 (1) 由*f*(*x*)＝(*x*2－4)(2*x*－*a*)，

得*f*′(*x*)＝6*x*2－2*ax*－8.

因为*f*′(－1)＝0，所以6＋2*a*－8＝0，所以*a*＝1，

所以*f*′(*x*)＝6*x*2－2*x*－8＝(2*x*＋2)(3*x*－4).

令*f*′(*x*)＝0，得*x*＝－1或*x*＝.

所以当*x*<－1或*x*>时，*f*′(*x*)>0；

当－1<*x*<时，*f*′(*x*)<0，

所以*f*(*x*)在(－∞，－1)，上单调递增，在上单调递减．

(2) 由(1)知*f*(*x*)在(－2，－1)和上单调递增，在上单调递减．

又因为*f*(－2)＝*f*(2)＝0，*f*(－1)＝9，*f*＝－，

所以当*x*∈[－2，2]时，*f*(*x*)max＝9，*f*(*x*)min＝－.

12. 已知函数*f*(*x*)＝(*x*－*k*)e*x*.

(1) 求*f*(*x*)的极值；

(2) 求*f*(*x*)在区间[0，1]上的最小值．

【解析】 (1) 由*f*(*x*)＝(*x*－*k*)e*x*，得*f*′(*x*)＝(*x*－*k*＋1)e*x*，令*f*′(*x*)＝0，得*x*＝*k*－1，

当*x*变化时，*f*(*x*)与*f*′(*x*)的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | (－∞，*k*－1) | *k*－1 | (*k*－1，＋∞) |
| *f*′(*x*) | － | 0 | ＋ |
| *f*(*x*) | 减 | －e*k*－1 | 增 |

所以*f*(*x*)的单调减区间是(－∞，*k*－1)，单调增区间是(*k*－1，＋∞)，

*f*(*x*)有极小值*f*(*k*－1)＝－e*k*－1，无极大值．

(2) 当*k*－1≤0，即*k*≤1时，*f*′(*x*)＝(*x*－*k*＋1)e*x*≥0在*x*∈[0，1]上恒成立，

则函数*f*(*x*)在[0，1]上单调递增，

所以*f*(*x*)在区间[0，1]上的最小值为*f*(0)＝－*k*.

当0<*k*－1<1，即1<*k*<2时，

由(1)知*f*(*x*)在[0，*k*－1]上单调递减，在(*k*－1，1]上单调递增，

所以*f*(*x*)在区间[0，1]上的最小值为*f*(*k*－1)＝－e*k*－1.

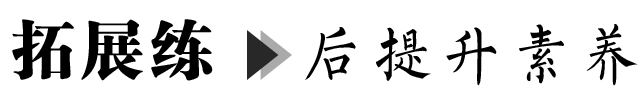
当*k*－1≥1，即*k*≥2时，函数*f*(*x*)在[0，1]上单调递减，

所以*f*(*x*)在区间[0，1]上的最小值为*f*(1)＝(1－*k*)e.

综上，当*k*≤1时，*f*(*x*)在区间[0，1]上的最小值为*f*(0)＝－*k*；

当1<*k*<2时，*f*(*x*)在区间[0，1]上的最小值为*f*(*k*－1)＝－e*k*－1；

当*k*≥2时，*f*(*x*)在区间[0，1]上的最小值为*f*(1)＝(1－*k*)e.



1. (多选)下列不等式中恒成立的有(　　)

A. ln (*x*＋1)≥，*x*>－1 B. ln *x*≤，*x*>0

C. e*x*≥*x*＋1 D. cos *x*≥1－*x*2

【答案】 ACD

【解析】 选项A，设*f*(*x*)＝ln (*x*＋1)－(*x*>－1)，则*f*′(*x*)＝－＝，当－1<*x*<0时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减；当*x*>0时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增．所以*f*(*x*)min＝*f*(0)＝0，即*f*(*x*)≥0在(－1，＋∞)上恒成立，ln (*x*＋1)≥(*x*>－1)恒成立，故A正确．选项B，设*g*(*x*)＝ln *x*－(*x*>0)，则*g*′(*x*)＝－＝－≤0恒成立，所以*g*(*x*)在(0，＋∞)上单调递减，又*g*(1)＝0，所以*g*(*x*)≤0在(0，＋∞)上不可能恒成立，ln *x*≤(*x*>0)不恒成立，故B错误．选项C，设*h*(*x*)＝e*x*－*x*－1，则*h*′(*x*)＝e*x*－1，令*h*′(*x*)＝0，解得*x*＝0，当*x*<0时，*h*′(*x*)<0，*h*(*x*)单调递减；当*x*>0时，*h*′(*x*)>0，*h*(*x*)单调递增．所以*h*(*x*)min＝*h*(0)＝0，即*h*(*x*)≥0在R上恒成立，所以e*x*≥*x*＋1恒成立，即C正确．选项D，设*t*(*x*)＝cos *x*－1＋*x*2，则*t*′(*x*)＝－sin *x*＋*x*，令*m*(*x*)＝*t*′(*x*)＝－sin *x*＋*x*，则*m*′(*x*)＝－cos *x*＋1≥0恒成立，即*m*(*x*)在R上单调递增，又*m*(0)＝0，所以当*x*<0时，*m*(*x*)<0，*t*′(*x*)<0，*t*(*x*)单调递减；当*x*>0时，*m*(*x*)>0，*t*′(*x*)>0，*t*(*x*)单调递增．所以*t*(*x*)min＝*t*(0)＝0，即*t*(*x*)≥0在R上恒成立，cos *x*≥1－*x*2恒成立，故D正确．