虚线习题课　构造法处理不等关系

题型1　根据式子结构特征构造

例1　设函数f′(x)是奇函数f(x)(x∈R)的导数，*f*(1)＝1，当*x*<0时，*xf*′(*x*)＋*f*(*x*)<0，则使 *xf*(*x*)>1成立的*x*的取值范围是(　　)

A. (－1，0)∪(1，＋∞) B. (－1，1)

C. (－∞，－1)∪(1，＋∞) D. (－∞，－1)∪(0，1)

【答案】 C

【解析】 设*F*(*x*)＝*xf*(*x*)，易知函数*F*(*x*)为偶函数，且当*x*<0时，*F*′(*x*)＝*xf*′(*x*)＋*f*(*x*)<0，故函数*F*(*x*)在(－∞，0)上单调递减，由对称性知，函数*F*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增．将目标不等式转化为*F*(*x*)>*F*(1)＝1，结合函数的单调性得|*x*|>1，解得*x*<－1或*x*>1，故所求不等式的解集是(－∞，－1)∪(1，＋∞).

例2　已知函数*f*(*x*)＝*x* ln *x*，若对任意*x*1>*x*2>0，(*x*－*x*)>*f*(*x*1)－*f*(*x*2)恒成立，则实数*λ*的取值范围为(　　)

A. [1，e] B. (－∞，1] C. [e，＋∞) D. [1，＋∞)

【答案】 D

【解析】 由(*x*－*x*)>*f*(*x*1)－*f*(*x*2)，得*x*－*x*1ln *x*1>*x*－*x*2ln *x*2.令*g*(*x*)＝*x*2－*x* ln *x*，则问题可以转化为对任意*x*1>*x*2>0，*g*(*x*1)>*g*(*x*2)恒成立，即函数*g*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增．因为*g*′(*x*)＝*λx*－ln *x*－1，故问题转化为*g*′(*x*)≥0在(0，＋∞)上恒成立，所以*λ*≥在(0，＋∞)上恒成立，即转化为*λ*≥.令*h*(*x*)＝，则*h*′(*x*)＝－，所以当*x*∈(0，1)时，*h*′(*x*)>0，当*x*∈(1，＋∞)时，*h*′(*x*)<0，所以*h*(*x*)在(0，1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减，所以*h*(*x*)max＝*h*(1)＝1，所以*λ*≥1.

题型2　作差构造

例3　求证：≥ln *x*＋*x*.

【解析】 令*f*(*x*)＝－*x*－ln *x*，*x*>0，

则*f*′(*x*)＝－1－＝(*x*＋1).

令*F*(*x*)＝e*x*－1－，则*F*′(*x*)＝e*x*－1＋>0，

故函数*F*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增，*F*(1)＝0，

所以当0<*x*<1时，*F*(*x*)<0，从而*f*′(*x*)<0；

当*x*>1时，*F*(*x*)>0，从而*f*′(*x*)>0，

所以函数*f*(*x*)在(0，1)上单调递减，在(1，＋∞)上单调递增，所以*f*(*x*)的最小值为*f*(1)＝0，

所以当*x*>0时，*f*(*x*)≥*f*(1)＝0，即－ln *x*－*x*≥0，

从而≥ln *x*＋*x*，即得证．

题型3　分离参数构造

例4　已知关于*x*的不等式*x*2＋1≥在(0，＋∞)上恒成立，则实数*a*的取值范围为(　　)

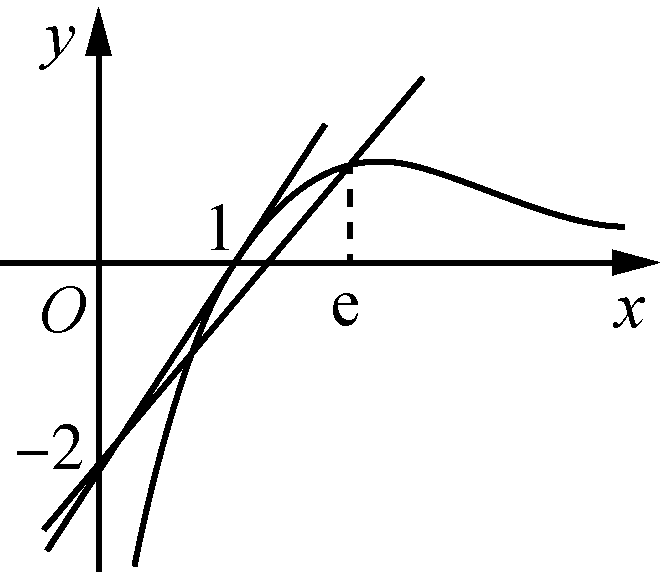
A. (－∞，e] B. C. (－∞，e－1] D. (－∞，e－2]

【答案】 B

【解析】 由题意知*x*>0，问题转化为*a*≤＝－.令*g*(*x*)＝－，故*a*≤[*g*(*x*)]min，而*g*′(*x*)＝(*x*－1).令*g*′(*x*)>0，解得*x*>1；令*g*′(*x*)<0，解得0<*x*<1，故*g*(*x*)在(0，1)上单调递减，在(1，＋∞)上单调递增，故*g*(*x*)min＝*g*(1)＝e－，故*a*≤e－.

变式　设函数*f*(*x*)＝ln *x*－*mx*2＋2*x*，若存在唯一的整数*x*0，使得*f*(*x*0)>0，求实数*m*的取值范围．

【解析】*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞).当*m*≤0时，*f*′(*x*)＝－2*mx*＋2>0，*f*(*x*)单调递增，存在无数个整数*x*0，使得*f*(*x*0)>0，不符合题意．当*m*>0时，由于*x*>0，所以>*mx*－2.令*y*＝，*y*′＝，当0<*x*<e时，*y*′>0；当*x*>e时，*y*′<0，所以函数*y*＝在(0，e)上单调递增，在(e，＋∞)上单调递减，所以*y*＝的极大值也是最大值，且*x*→0时，*y*→－∞，*x*→＋∞时，*y*→0.作出函数*y*＝和*y*＝*mx*－2的大致图象，如图，过点(0，－2)的直线*y*＝*mx*－2介于(1，0)，之间时满足条件，直线*y*＝*mx*－2过点(1，0)时，*m*的值为2，直线*y*＝*mx*－2过点(2，*f*(2))时，*m*的值为＋1，由图象可知，*m*的取值范围是.



(变式)

方法提炼：

构造函数是解决导数问题的基本方法．

①作差或变形作差构造函数f(x)＝g(x)－h(x)，转化为求证f(x)最值；

②分离参数或分离函数构造函数g(a)≥f(x)(或g(a)≤f(x))，转化为求解f(x)最值；

③根据式子特征构造函数，主要依靠条件或问题中“显然”的特征构造相应函数．

虚线练习部分

一、 单项选择题(每个5分，共20分)

1. 已知函数*y*＝*f*(*x*)在R上可导且满足不等式*xf*′(*x*)＋*f*(*x*)>0恒成立，对任意正数*a*，*b*，若*a*<*b*，则必有(　　)

A. *af*(*b*)<*bf*(*a*) B. *bf*(*a*)<*af*(*b*) C. *af*(*a*)<*bf*(*b*) D. *bf*(*b*)<*af*(*a*)

【答案】 C

【解析】 构造函数*F*(*x*)＝*xf*(*x*)，则*F*′(*x*)＝*xf*′(*x*)＋*f*(*x*)>0，从而*F*(*x*)在R上单调递增．因为*a*<*b*，所以*F*(*a*)<*F*(*b*)，即 *af*(*a*)<*bf*(*b*).故选C.

2. 已知关于*x*的不等式*x*3－*ax*2≥ln *x*恒成立，则实数*a*的取值范围为(　　)

A. (－∞，1] B. (0，1] C. D. (－∞，0]

【答案】 A

【解析】 由关于*x*的不等式*x*3－*ax*2≥ln *x*对*x*>0恒成立，可得*a*≤恒成立．设*f*(*x*)＝，则*f*′(*x*)＝，令*g*(*x*)＝*x*3－1＋2ln *x*，*g*′(*x*)＝3*x*2＋>0，可得*g*(*x*)＝*x*3－1＋2ln *x*在(0，＋∞)上单调递增，且*g*(1)＝0，当0<*x*<1时，*g*(*x*)<0，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减；当*x*>1时，*g*(*x*)>0，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增，可得*f*(*x*)在*x*＝1处取得极小值1，且为最小值，则*a*≤1，即*a*的取值范围是(－∞，1].

3. 已知*f*(*x*)＝*a*－2ln *x*(*a*>0)在[2，＋∞)上为单调增函数，则*a*的取值范围为(　　)

A. B. C. [1，＋∞) D. (1，＋∞)

【答案】 A

【解析】 由题意知*f*′(*x*)＝*a*－＝≥0对任意的*x*∈[2，＋∞)恒成立，即*ax*2－2*x*＋*a*≥0对任意的*x*∈[2，＋∞)恒成立，所以*a*≥＝.令*y*＝*x*＋，则*y*′＝1－>0，故*y*＝*x*＋在[2，＋∞)上单调递增，所以*y*＝*x*＋≥，则0<≤，所以*a*的取值范围为.

4. 已知定义在(0，＋∞)上的函数*f*(*x*)，*f*′(*x*)是*f*(*x*)的导函数，满足*xf*′(*x*)－*f*(*x*)<0，且*f*(2)＝2，则*f*(e*x*)－e*x*>0的解集是(　　)

A. (0，e2) B. (ln 2，＋∞) C. (－∞，ln 2) D. (e2，＋∞)

【答案】 C

【解析】 设*g*(*x*)＝(*x*>0)，则*g*′(*x*)＝<0，所以*g*(*x*)在(0，＋∞)上单调递减．因为*f*(2)＝2，所以*g*(2)＝＝1，不等式*f*(e*x*)－e*x*>0等价于*g*(e*x*)＝>1＝*g*(2)，所以0<e*x*<2，解得*x*<ln 2，所以原不等式的解集为(－∞，ln 2).

二、 多项选择题(每个5分，共15分)

5. 设*f*′(*x*)是函数*f*(*x*)(*x*∈R)的导函数，若对任意*x*∈R，都有2*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)＞0，则下列判断一定正确的是(　　)

A. 4*f*(2)＞*f*(1) B. *f*(*x*)为增函数 C. *f*(*x*)没有零点 D. *f*(*x*)没有极值点

【答案】 AC

【解析】 令*g*(*x*)＝*x*2*f*(*x*)，则*g*′(*x*)＝*x*[2*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)]，由题意知*g*(*x*)在(－∞，0)上单调递减，在(0，＋∞)上单调递增，所以*g*(2)＞*g*(1)4*f*(2)＞*f*(1)，所以选项A正确．因为*g*(0)＝0，所以当*x*≠0时，*g*(*x*)＞0，即*f*(*x*)＞0.又由2*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)＞0知*f*(0)＞0，所以对任意*x*∈R，有*f*(*x*)＞0，所以选项C正确．取*f*(*x*)＝*x*2＋1，则*f*(*x*)满足题设条件，所以选项B，D错误．

6. 下列判断正确的是(　　)

A. 2e3>3e2 B. e3>e5 C. 2e<3e D. 3e<e

【答案】 AC

【解析】 构造函数*f*(*x*)＝，所以*f*′(*x*)＝，当*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，函数*f*(*x*)是增函数，当*x*∈(－∞，1)时，*f*′(*x*)<0，函数*f*(*x*)是减函数．对于A，2e3>3e2>，故A正确；对于B，e3>e5>，故B错误；对于C，2e<3e<，故C正确；对于D，3e<e<，故D错误．

7. 已知函数*f*(*x*)＝ln *x*＋，若*x*1，*x*2∈(1，＋∞)，且*x*1＜*x*2，都有＜0.5，则实数*m*的值可以为(　　)

A. e B. 3 C. 4 D. 5

【答案】 CD

【解析】 因为*x*1，*x*2∈(1，＋∞)，且*x*1＜*x*2，都有＜0.5，所以当*x*1＜*x*2时，2*f*(*x*1)－*x*1＞2*f*(*x*2)－*x*2对*x*1，*x*2∈(1，＋∞)恒成立，令*g*(*x*)＝2*f*(*x*)－*x*＝2ln *x*＋－*x*(*x*＞1)，则*g*(*x*)在(1，＋∞)上单调递减，所以*g*′(*x*)＝－－1≤0在(1，＋∞)上恒成立，所以*m*≥8*x*－4*x*2在(1，＋∞)上恒成立，所以只需*m*≥[(8*x*－4*x*2)]max.又当*x*＞1时，[(8*x*－4*x*2)]max<4，所以*m*≥4，所以*m*的取值范围为[4，＋∞)，由选项可知，只有C，D符合条件．

三、 填空题(每个5分，共15分)

8. 已知定义在R上的奇函数*f*(*x*)满足*f*(1)＝2，且当*x*>0时，恒有*f*′(*x*)>2，则*f*(*x*)>2*x*的解集是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 (－1，0)∪(1，＋∞)

【解析】 设*g*(*x*)＝*f*(*x*)－2*x*，易知*g*(*x*)是奇函数，因为*g*′(*x*)＝*f*′(*x*)－2>0，所以*g*(*x*)单调递增，结合函数图象可知所求解集为(－1，0)∪(1，＋∞).

9. 已知不等式*x*－2－*a*e－*x*≥0对任意的*x*∈R恒成立，则满足条件的实数*a*的取值集合是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 (－∞，－e]

【解析】 *x*－2－*a*e－*x*≥0，即*a*≤(*x*－2)e*x*对任意的*x*∈R恒成立．令*f*(*x*)＝(*x*－2)e*x*，则*f*′(*x*)＝(*x*－1)e*x*，易得当*x*＞1时，*f*′(*x*)＞0，函数*f*(*x*)单调递增；当*x*＜1时，*f*′(*x*)＜0，函数*f*(*x*)单调递减，故当*x*＝1时，函数*f*(*x*)取得最小值*f*(1)＝－e，故*a*≤－e.

10. 已知函数*f*(*x*)＝ln *x*，若*af*(*x*)≤e*x*－1－1恒成立，则实数*a*的取值集合是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 {1}

【解析】 设*g*(*x*)＝*af*(*x*)－e*x*－1＋1＝*a* ln *x*－e*x*－1＋1，*g*′(*x*)＝－e*x*－1.又*g*(*x*)≤*g*(1)＝0，故*x*＝1是*y*＝*g*(*x*)的极大值点，所以*g*′(1)＝*a*－1＝0，*a*＝1.另一方面，当*a*＝1时，*g*′(*x*)＝－e*x*－1，*g*′(1)＝0，*g*′(*x*)在区间(0，＋∞)上单调递减，故*g*(*x*)在(0，1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减，所以*g*(*x*)≤*g*(1)＝0，*f*(*x*)≤e*x*－1－1恒成立．

四、 解答题(第11，12题各15分，第13题20分，共50分)

11. 求证：e*x*＞*x*＞ln *x*.

【解析】 令*g*(*x*)＝e*x*－*x*，所以*g*′(*x*)＝e*x*－1，

又因为*x*＞0，

所以e*x*＞e0＝1，即*g*′(*x*)＞0，*g*(*x*)在区间(0，＋∞)上单调递增；

所以*g*(*x*)＝e*x*－*x*＞*g*(0)＝1＞0，所以e*x*＞*x*.①

令*h*(*x*)＝*x*－ln *x*，则*h*′(*x*)＝1－，

当*x*∈(0，1)时，*h*′(*x*)＜0，*h*(*x*)在区间(0，1)上单调递减；

当*x*∈(1，＋∞)时，*h*′(*x*)＞0，*h*(*x*)在区间(1，＋∞)上单调递增；

所以当*x*＝1时，*h*(*x*)取得极小值，也是最小值，

且*h*(1)＝1＞0，

所以*h*(*x*)＝*x*－ln *x*≥*h*(1)＝1＞0，所以*x*＞ln *x*.②

由①②得*x*＞0时，e*x*＞*x*＞ln *x*成立．

12. 已知函数*f*(*x*)＝*x*－ln *x*，*g*(*x*)＝*a*e*x*.

(1) 求函数*f*(*x*)的单调区间；

(2) 求证：当*a*≥时，*xf*(*x*)≤*g*(*x*).

【解析】 (1) 函数*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞).

由*f*(*x*)＝*x*－ln *x*，得*f*′(*x*)＝1－＝.

当*x*∈(0，1)时，*f*′(*x*)<0；

当*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，

所以*f*(*x*)的单调减区间是(0，1)，单调增区间是(1，＋∞).

(2) 要证*xf*(*x*)≤*g*(*x*)，

即证*x*(*x*－ln *x*)≤*a*e*x*，即证*a*≥.

设*h*(*x*)＝，

则*h*′(*x*)＝

＝，

由(1)可知*f*(*x*)≥*f*(1)＝1，即ln *x*－(*x*－1)≤0，

于是，当*x*∈(0，1)时，*h*′(*x*)>0，*h*(*x*)单调递增；

当*x*∈(1，＋∞)时，*h*′(*x*)<0，*h*(*x*)单调递减．

所以当*x*＝1时，*h*(*x*)取得最大值，

*h*(*x*)max＝＝，

所以当*a*≥时，*xf*(*x*)≤*g*(*x*).

13. 已知函数*f*(*x*)＝(*a*＋1)ln *x*＋*x*2＋1.

(1) 讨论函数*f*(*x*)的单调性；

(2) 若对任意不相等的*x*1，*x*2∈(0，＋∞)，恒有|*f*(*x*1)－*f*(*x*2)|≥4|*x*1－*x*2|成立，求非负实数*a*的取值范围．

【解析】 (1) 因为*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，*f*′(*x*)＝＋2*x*.

所以当*a*＋1≥0时，*f*′(*x*)＞0恒成立，

所以当*a*≥－1时，函数*f*(*x*)在区间(0，＋∞)上单调递增．

当*a*＋1＜0，即*a*<－1时，函数*f*(*x*)在区间上单调递减，在区间(，＋∞)上单调递增．

(2) 不妨设*x*1＞*x*2，又因为*a*≥0，

所以函数*f*(*x*)在区间(0，＋∞)上单调递增，

|*f*(*x*1)－*f*(*x*2)|≥4|*x*1－*x*2|恒成立等价于*f*(*x*1)－*f*(*x*2)≥4*x*1－4*x*2恒成立，

即*f*(*x*1)－4*x*1≥*f*(*x*2)－4*x*2恒成立．

令*g*(*x*)＝*f*(*x*)－4*x*，*x*∈(0，＋∞)，

则函数*g*(*x*)为单调增函数，即*g*′(*x*)≥0恒成立．

*g*′(*x*)＝＋2*x*－4＝，

令*h*(*x*)＝2*x*2－4*x*＋*a*＋1，*x*∈(0，＋∞)，

因为*h*(*x*)min＝*h*(1)＝*a*－1，所以*a*≥1，

故*a*的取值范围为[1，＋∞).