虚线习题课　恒成立与能成立问题

题型1　“*a*≥*f*(*x*)”型

例1　若函数*f*(*x*)＝ln *x*＋*ax*2－2在区间内存在单调增区间，则实数*a*的取值范围是(　　)

A. (－∞，－2] B. C. D. (－2，＋∞)

【答案】 D

【解析】根据题意得*f*′(*x*)＝＋2*ax*，因为*f*(*x*)在区间内存在单调增区间，所以*f*′(*x*)>0在内有解，即＋2*ax*>0*a*>－在内有解，故存在*x*∈，使得*a*>－.令*g*(*x*)＝－，则*g*(*x*)在上单调递增，所以*g*(*x*)∈，故*a*>－2.

变式　已知函数*f*(*x*)＝－*mx*(e为自然对数的底数)，若*f*(*x*)<0在(0，＋∞)上有解，则实数*m*的取值范围是(　　)

A. (e，＋∞) B. (－∞，e) C. D.

【答案】 C

【解析】由*f*(*x*)＝－*mx*<0在(0，＋∞)上有解，可得*m*>在(0，＋∞)上有解．令*g*(*x*)＝，*x*>0，则*m*>*g*(*x*)min.由*g*′(*x*)＝，则当0<*x*<2时，*g*′(*x*)<0，函数*g*(*x*)单调递减；当*x*>2时，*g*′(*x*)>0，函数*f*(*x*)单调递增，故当*x*＝2时，函数*g*(*x*)取得最小值*g*(2)＝，故*m*>.

题型2　“*f*(*x*)≥*g*(*x*)”型

例2　已知函数*f*(*x*)＝*x*2－ln *x*，*g*(*x*)＝－*x*3＋*x*2，求证：当*x*>1时，函数*f*(*x*)的图象恒在函数*g*(*x*)的图象的上方．

【解析】令*h*(*x*)＝*f*(*x*)－*g*(*x*)＝*x*3－*x*2－ln *x*，

则*h*′(*x*)＝2*x*2－*x*－＝＝，

因为*x*>1，所以*h*′(*x*)>0，

所以*h*(*x*)在(1，＋∞)上单调递增．

又因为*h*(1)＝>0，所以*f*(*x*)>*g*(*x*)，

故当*x*>1时，*f*(*x*)的图象恒在*g*(*x*)图象的上方．

变式　已知函数*f*(*x*)＝*a* ln (1＋*x*)－*b* ln (1－*x*)＋*a*－*b*在点(0，*f*(0))处的切线方程为*y*＝2*x*.

(1) 求*f*(*x*)的解析式；

(2) 求证：当*x*∈(－1，0)时，*f*(*x*)<*x*＋.

【解析】(1) *f*(*x*)＝*a* ln (1＋*x*)－*b* ln (1－*x*)＋*a*－*b*，

故*f*′(*x*)＝＋，

由*k*＝*f*′(0)，得*a*＋*b*＝2.

由*f*(0)＝0，得*a*－*b*＝0，解得*a*＝*b*＝1，

故*f*(*x*)＝ln (1＋*x*)－ln (1－*x*).

(2) 原命题等价于任意*x*∈(－1，0)，*f*(*x*)－<0，

设*F*(*x*)＝ln (1＋*x*)－ln (1－*x*)－，

则*F*′(*x*)＝.

当*x*∈(－1，0)时，*F*′(*x*)>0，函数*F*(*x*)在(－1，0)上单调递增，

*F*(*x*)<*F*(0)＝0，故任意*x*∈(－1，0)，*f*(*x*)<*x*＋.

题型3　“*f*(*x*1)≥*g*(*x*2)”型

例3　已知函数*f*(*x*)＝，*g*(*x*)＝－*x*2＋2*x*＋*a*－1，若任意*x*1，*x*2∈(0，＋∞)，都有*f*(*x*1)≥*g*(*x*2)恒成立，则实数*a*的取值范围为(　　)

A. (－∞，e) B. (－∞，e]

C. D.

【答案】 C

【解析】*f*(*x*)＝，*g*(*x*)＝－*x*2＋2*x*＋*a*－1，若任意*x*1，*x*2∈(0，＋∞)，都有*f*(*x*1)≥*g*(*x*2)恒成立，则*f*(*x*)min≥*g*(*x*)max(*x*∈(0，＋∞)).*f*′(*x*)＝，当0<*x*<1时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减；当*x*>1时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增，故*f*(*x*)的最小值为*f*(1)＝.又因为*g*(*x*)max＝*a*，所以*a*≤.故实数*a*的取值范围为.

变式　已知函数*f*(*x*)＝e*x*，*g*(*x*)＝ln .若任意*x*1∈(0，＋∞)，存在*x*2∈R，使得*f*(2*x*1)＋*mf*(*x*1)－*g*(*x*2)>0成立，求实数*m*的取值范围．

【解析】*g*(*x*)＝ln ≥ln 2，当且仅当*x*＝0时取等号，由题意，任意*x*1∈(0，＋∞)，存在*x*2∈R，使得*f*(2*x*1)＋*mf*(*x*1)>*g*(*x*2)成立，即任意*x*1∈(0，＋∞)，e2*x*1＋*m*e*x*1>ln 2等价于*m*>－e*x*1对任意*x*1∈(0，＋∞)恒成立．

令*t*＝e*x*1，则*t*>1，且*m*>－*t*对*t*>1恒成立．

设*h*(*t*)＝－*t*(*t*>1)，易知*h*(*t*)在(1，＋∞)内单调递减，所以*h*(*t*)<ln 2－1等价于*m*≥ln 2－1，

所以*m*的取值范围为[ln 2－1，＋∞).

方法提炼：

对于恒成立与能成立问题，如果是单变量问题，一般情况下采取分离参变量转化为相应最值问题等方法．如果是两个变量或多个变量问题时，一般先把其中一个变量当成变量，其余变量当成是常量，这样就把问题转化为单变量的常规题．

虚线**练习部分**

一、 单项选择题(每个5分，共20分)

1. 已知*f*(*x*)＝(*ax*－1)e*x*＋1，若*f*(*x*)在定义域内单调递减，则*a*的值为(　　)

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】 A

【解析】 原问题等价于*f*(*x*)的导函数*f*′(*x*)≤0恒成立．因为*f*(*x*)＝(*ax*－1)e*x*＋1，所以*f*′(*x*)＝(*ax*＋*a*－1)e*x*.因为e*x*>0，所以若要使*f*′(*x*)≤0恒成立，则*a*＝0.

2. 若不等式2*x* ln *x*≥－*x*2＋*ax*对*x*∈[1，＋∞)恒成立，则实数*a*的取值范围是(　　)

A. (－∞，0) B. (－∞，1]

C. (0，＋∞) D. [1，＋∞)

【答案】 B

【解析】 由2*x* ln *x*≥－*x*2＋*ax*，*x*∈[1，＋∞)，可知*a*≤2ln *x*＋*x*.设*h*(*x*)＝2ln *x*＋*x*，*x*∈[1，＋∞)，则*h*′(*x*)＝＋1>0，所以函数*h*(*x*)在[1，＋∞)上单调递增，所以*h*(*x*)min＝*h*(1)＝1，所以*a*≤*h*(*x*)min＝1.故*a*的取值范围是(－∞，1].

3. 设*a*为正实数，函数*f*(*x*)＝*x*3－3*ax*2＋2*a*2，若存在*x*∈[*a*，2*a*]，*f*(*x*)>0，则*a*的取值范围是(　　)

A. (1，＋∞) B. (0，1)

C. D.

【答案】 B

【解析】 因为*f*′(*x*)＝3*x*2－6*ax*＝3*x*(*x*－2*a*)，*a*≤*x*≤2*a*时，若*f*′(*x*)≤0，当且仅当*x*＝2*a*时取等号，故*f*(*x*)在[*a*，2*a*]上单调递减．因为存在*x*∈[*a*，2*a*]，*f*(*x*)>0，所以*f*(*a*)＝－2*a*3＋2*a*2>0，故0<*a*<1.

4. 已知函数*f*(*x*)＝*x*＋*a*，*g*(*x*)＝*x* ln *x*＋1，若存在*x*1∈[1，5]，对任意*x*2∈，都有*f*(*x*1)＝*g*(*x*2)，则实数*a*的取值范围是(　　)

A. B. (－∞，－4＋e]

C. [－4＋e，－] D.

【答案】 C

【解析】 易知*f*(*x*)的值域为[1＋*a*，5＋*a*].*g*′(*x*)＝ln *x*＋1，*x*∈[，e]，当*x*∈[，]时，*g*′(*x*)<0，*g*(*x*)单调递减；当*x*∈[，e]时，*g*′(*x*)>0，*g*(*x*)单调递增，*g*＝1－，*g*＝1－，*g*(e)＝e＋1，故*g*(*x*)max＝e＋1，*g*(*x*)min＝1－，*g*(*x*)的值域为.根据题意，存在*x*1∈[1，5]，对任意*x*2∈[，e]，都有*f*(*x*1)＝*g*(*x*2)，相当于*g*(*x*)的值域是*f*(*x*)值域的子集，则1－≥1＋*a*，且1＋e≤5＋*a*，得－4＋e≤*a*≤－.

二、 多项选择题(每个5分，共15分)

5. 已知函数*f*(*x*)＝*x*3－2*x*2＋3*x*＋*c*，若对任意*x*∈[0，2]，*f*(*x*)≤*c*2－恒成立， 则实数*c*的可能取值是(　　)

A. －1 B. C. 2 D. －

【答案】 ABC

【解析】 *f*(*x*)＝*x*3－2*x*2＋3*x*＋*c*，*f*′(*x*)＝*x*2－4*x*＋3＝(*x*－1)(*x*－3).令*f*′(*x*)>0，解得*x*<1或*x*>3；令*f*′(*x*)<0，解得1<*x*<3，所以函数*f*(*x*)在区间[0，1)上单调递增，在区间(1，2]上单调递减，所以*f*(*x*)max＝*f*(1)＝＋*c*.若对任意*x*∈[0，2]，*f*(*x*)≤*c*2－恒成立，则*f*(1) ≤*c*2－，即＋*c*≤*c*2－，整理可得*c*2－*c*－2≥0，解得*c*≤－1或*c*≥2.结合选项知A，B，C符合题意．

6. 已知函数*f*(*x*)＝*x*－，*g*(*x*)＝*a* cos ＋5－2*a*(*a*>0).给出下列四个命题，其中是真命题的为(　　)

A. 若存在*x*∈[1，2]，使得*f*(*x*)<*a*成立，则*a*>－1

B. 若任意*x*∈R，使得*g*(*x*)>0恒成立，则0<*a*<5

C. 若任意*x*1∈[1，2]，任意*x*2∈R，使得*f*(*x*1)>*g*(*x*2)恒成立，则*a*>6

D. 若任意*x*1∈[1，2]，存在*x*2∈[0，1]，使得*f*(*x*1)＝*g*(*x*2) 成立，则3≤*a*≤4

【答案】 ACD

【解析】 对选项A，只需*f*(*x*)在[1，2]上的最小值小于*a*，易知*f*(*x*)在[1，2]上单调递增，所以*f*(*x*)min＝*f*(1)＝1－＝－1，所以*a*>－1，故A为真；对选项B，只需*g*(*x*)的最小值大于0，因为*a* cos ∈[－*a*，*a*]，所以*g*(*x*)min＝－*a*＋5－2*a*＝5－3*a*>0，所以0<*a*<，故B为假；对选项C，只需*f*(*x*)在[1，2]上的最小值大于*g*(*x*)的最大值，*f*(*x*)min＝－1，*g*(*x*)max＝*a*＋5－2*a*＝5－*a*，即－1>5－*a*，*a*>6，故C为真；对选项D，只需*g*(*x*)min≤*f*(*x*)min，*g*(*x*)max≥*f*(*x*)max，*f*(*x*)max＝*f*(2)＝2－＝1，所以当*x*1∈[1，2]时，*f*(*x*1)∈[－1，1]，当*x*∈[0，1]时，∈，所以*g*(*x*)在[0，1]上单调递减，*g*(*x*)min＝*g*(1)＝5－2*a*，*g*(*x*)max＝*g*(0)＝5－*a*，所以*g*(*x*)∈[5－2*a*，5－*a*]，由题意得 等价于 3≤*a*≤4，故D为真．

7. 已知命题*p*：已知函数*f*(*x*)＝－*x*2＋*ax*＋1(*a*∈R)，若当*a*∈*I*时，任意*x*1，*x*2∈[0，2]，|*f*(*x*1)－*f*(*x*2)|≤恒成立，则下列说法不正确的有(　　)

A. 当*I*＝(1，2)时，命题*p*是真命题

B. 当*I*＝时，命题*p*是真命题

C. 当*I*＝时，命题*p*是真命题

D. 当*I*＝时，命题*p*是真命题

【答案】 BD

【解析】 命题*p*为真，只需当*x*∈[0，2]时，*f*(*x*)max－*f*(*x*)min≤.只需考查当1<*a*<2时的情况，由*f*′(*x*)＝*x*2－(*a*＋1)*x*＋*a*＝(*x*－1)(*x*－*a*).易知*f*(*x*)在[0，1]上单调递增，在[1，*a*]上单调递减，在[*a*，2]上单调递增．由于*f*(2) －*f*(0)＝，所以只需即所以1<*a*≤.故选BD.

三、 填空题(每个5分，共15分)

8. 若关于*x*的不等式*x*3－*ax*2＋1≥0在[－1，1]上恒成立，则实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 (－∞，0]

【解析】 当*x*＝0时，原不等式显然成立，*a*∈R．当*x*≠0时，由原不等式可得*a*≤*x*＋，令*h*(*x*)＝*x*＋，－1≤*x*≤1且*x*≠0，则*h*′(*x*)＝1－＝，易得函数*h*(*x*)在[－1，0)上单调递增，在(0，1]上单调递减，故当*x*＝－1时，*h*(*x*)取得最小值*h*(－1)＝0，所以*a*≤0.

9. 已知函数*f*(*x*)＝e*x*－*ax*，若存在实数*x*∈(0，＋∞)，使得*f*(*x*)≤0成立，则实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 [e，＋∞)

【解析】 依题意，条件等价于存在实数*x*∈(0，＋∞)，使得*a*≥成立．令*g*(*x*)＝(*x*≠0)，则*g*′(*x*)＝，*x*∈(0，＋∞).当0<*x*<1时，*g*′(*x*)<0，函数*f*(*x*)单调递减， 当*x*>1时，*g*′(*x*)>0，函数*f*(*x*)单调递增， 所以*g*(*x*)min＝*g*(1)＝e，所以*a*≥e.

10. 若*x*∈[0，1]时，e*x*－|2*x*－*a*|≥0，则*a*的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 [2ln 2－2，1]

【解析】 由题意得2*x*－e*x*≤*a*≤2*x*＋e*x*对任意*x*∈[0，1]恒成立，令*f*(*x*)＝2*x*－e*x*，*g*(*x*)＝2*x*＋e*x*，因为*f*′(*x*)＝2－e*x*在[0，1]单调递减，且*f*′(ln 2)＝0，所以*f*(*x*)在(0，ln 2)上单调递增，在(ln 2，1)上单调递减，所以*a*≥*f*(*x*)max＝*f*(ln 2)＝2ln 2－2.又因为*g*(*x*)＝2*x*＋e*x*在[0，1]上单调递增，所以*a*≤*g*(*x*)min＝*g*(0)＝1，所以*a*的取值范围为[2ln 2－2，1].

四、 解答题(第11，12题各15分，第13题20分，共50分)

11. 已知函数*f*(*x*)＝ln *x*－*ax*(*a*∈R).

(1) 当*a*＝2时，求函数*f*(*x*)的极值；

(2) 若对任意*x*∈(0，＋∞)，*f*(*x*)<0恒成立，求*a*的取值范围．

【解析】 (1) 当*a*＝2时，*f*(*x*)＝ln *x*－2*x*，*f*′(*x*)＝－2＝(*x*>0).令*f*′(*x*)＝0，得*x*＝.

当*x*变化时，*f*(*x*)，*f*′(*x*)的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  |
| *f*′(*x*) | ＋ | 0 | － |
| *f*(*x*) | 增 | 极大值 | 减 |

所以*f*(*x*)在上单调递增，在上单调递减，极大值为*f*＝－ln 2－1，无极小值．

(2) 对任意*x*∈(0，＋∞)，*f*(*x*)<0恒成立

对任意*x*∈(0，＋∞)，<*a*恒成立

<*a*，*x*∈(0，＋∞).

令*h*(*x*)＝，*h*′(*x*)＝.

当*x*∈(0，e)时，*h*′(*x*)>0，*h*(*x*)单调递增；

当*x*∈(e，＋∞)时，*h*′(*x*)<0，*h*(*x*)单调递减．

所以*h*(*x*)max＝*h*(e)＝，所以*a*>.

12. 已知*f*(*x*)＝*kx*－sin 2*x*＋*a* sin *x*(*k*，*a*为实数).

(1) 当*k*＝0，*a*＝2时，求*f*(*x*)在[0，π]上的最大值；

(2) 当*k*＝4时，若*f*(*x*)在R上单调递增，求*a*的取值范围．

【解析】 (1) 当*k*＝0，*a*＝2时，*f*(*x*)＝－sin 2*x*＋2sin *x*，

*f*′(*x*)＝－2cos 2*x*＋2cos *x*＝－4cos2*x*＋2cos*x*＋2＝－2(2cos *x*＋1)(cos *x*－1).

令*f*′(*x*)＝0，得*x*＝.

当*x*变化时，*f*(*x*)，*f*′(*x*)在[0，π]上的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  |
| *f*′(*x*) | ＋ | 0 | － |
| *f*(*x*) | 增 | 极大值 | 减 |

所以当*x*＝时，*f*(*x*)取得极大值，也是最大值，即*f*(*x*)最大值＝*f*＝.

(2) 若*f*(*x*)在R上单调递增，则*f*′(*x*)＝4－2(2cos2*x*－1)＋*a* cos*x*≥0对任意*x*∈R恒成立，

得4cos2*x*－*a* cos*x*－6≤0.

设*t*＝cos *x*∈[－1，1]，*g*(*t*)＝4*t*2－*at*－6，

则*g*(*t*)≤0在[－1，1]上恒成立，由二次函数*g*(*t*)的图象知解得－2≤*a*≤2.

13. 已知函数*f*(*x*)＝*x*2ln *x*.

(1) 讨论*f*(*x*)的单调性；

(2) 若关于*x*的不等式*f*(*x*)－*ax*＋1≥0恒成立，求实数*a*的取值范围．

【解析】 (1) 由已知得*f*′(*x*)＝2*x*，*x*>0.

令*f*′(*x*)＝0，得*x*＝.

当0<*x*<时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)在上单调递减；

当*x*>时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)在上单调递增．

综上，*f*(*x*)的单调减区间为，单调增区间为.

(2) 因为*f*(*x*)－*ax*＋1≥0恒成立，即*x*2ln *x*－*ax*＋1≥0恒成立，等价于*a*≤*x* ln *x*＋恒成立．

令*g*(*x*)＝*x* ln *x*＋，则*g*′(*x*)＝ln *x*＋1－.

令*h*(*x*)＝ln *x*＋1－，则*h*′(*x*)＝＋>0在(0，＋∞)上恒成立．

所以*g*′(*x*)＝ln *x*＋1－在(0，＋∞)上单调递增．

因为*g*′(1)＝0，

所以当0<*x*<1时，*g*′(*x*)<0，*g*(*x*)在(0，1)上单调递减；

当*x*>1时，*g*′(*x*)>0，*g*(*x*)在(1，＋∞)上单调递增．

所以*g*(*x*)min＝*g*(1)＝1，所以*a*≤*g*(*x*)min＝1.

综上，*a*的取值范围是(－∞，1].