虚线习题课　曲线的切线

题型1　在某点处的切线

例1　若函数*f*(*x*)＝e*x*＋sin *x*在点(0，1)处的切线与直线2*x*－*ay*＋1＝0互相垂直，则实数*a*等于(　　)

A. －2 B. －4 C. － D. 2

【答案】 B

【解析】由*f*(*x*)＝e*x*＋sin *x*，得*f*′(*x*)＝e*x*＋cos *x*，所以*f*′(0)＝e0＋cos 0＝2，由题意可得*a*≠0，则直线2*x*－*ay*＋1＝0的斜率为.又因为函数*f*(*x*)＝e*x*＋sin *x*在点(0，1)处的切线与直线2*x*－*ay*＋1＝0互相垂直，所以2×＝－1，即*a*＝－4.

变式　已知曲线*f*(*x*)＝(*x*＋*a* ln *x*)e*x*在点(1，e)处的切线经过坐标原点，则*a*等于(　　)

A. －e B. －2 C. －1 D. e－2

【答案】 C

【解析】由*f*(*x*)＝(*x*＋*a* ln *x*)e*x*，得*f*′(*x*)＝e*x*，所以*f*′(1)＝(*a*＋2)e.由题意知＝(2＋*a*)e，解得*a*＝－1.

题型2　过某点的切线

例2　已知曲线*C*：*y*＝*x*3＋2和点*P*(1，3)，求过点*P*且与曲线*C*相切的直线方程．

【解析】设所求直线与曲线切于点(*x*0，*y*0)，则*y*0＝*x*＋2.

因为*k*＝*y*′|*x*＝*x*0＝3*x*，

所以切线方程为*y*－(*x*＋2)＝3*x*(*x*－*x*0).

因为切线过点*P*(1，3)，

所以3－(*x*＋2)＝3*x*(1－*x*0)，

解得*x*0＝1或*x*0＝－，所以*k*＝3*x*＝3或，

故所求直线的方程为3*x*－*y*＝0或3*x*－4*y*＋9＝0.

变式　若过点*A*(*a*，0)的任意一条直线都不与曲线*C*：*y*＝(*x*－1)e*x*相切，则*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 (－3，1)

【解析】设点*B*(*x*0，(*x*0－1)e*x*0)为曲线*C*上任意一点，因为*y*′＝e*x*＋(*x*－1)e*x*＝*x*e*x*，所以*y*′|*x*＝*x*0＝*x*0e*x*0，则曲线*C*在点*B*处的切线*l*的方程为*y*－(*x*0－1)e*x*0＝*x*0e*x*0(*x*－*x*0).根据题意，切线*l*不经过点*A*，则关于*x*0的方程－(*x*0－1)e*x*0＝*x*0e*x*0·(*a*－*x*0)，即*x*－(*a*＋1)*x*0＋1＝0无实根，所以*Δ*＝(*a*＋1)2－4<0，解得－3<*a*<1，所以*a*的取值范围是(－3，1).

题型3　公切线

例3　若直线*l*既和曲线*C*1相切，又和曲线*C*2相切，则称*l*为曲线*C*1和*C*2的公切线. 求曲线*C*1：*y*＝*x*2和曲线*C*2：*y*＝4e*x*－2的公切线方程．

【解析】*y*＝*x*2的导数为*y*′＝2*x*，*y*＝4e*x*－2的导数为*y*′＝4e*x*－2.

设曲线*C*1，*C*2的公切线与曲线*C*1的切点为(*x*1，*x*)，则切线的斜率为2*x*1，与曲线*C*2的切点为(*x*2，4e*x*2－2)，则切线的斜率为4e*x*2－2，所以2*x*1＝4e*x*2－2，

当曲线*C*1与*C*2的切点相同时，*x*1＝*x*2，*x*＝4e*x*2－2，可得*x*1＝*x*2＝2，所以切点为(2，4)，

此时公切线的方程为4*x*－*y*－4＝0.

当曲线*C*1与*C*2的切点不同时，*x*1≠*x*2，2*x*1＝，可得*x*1＝2*x*2－2，所以4*x*2－4＝4e*x*2－2，即*x*2－1＝e*x*2－2，易知*y*＝*x*－1与*y*＝e*x*－2相切，即有且只有一个交点，

所以方程*x*2－1＝e*x*2－2有且只有一解：*x*2＝2，此时*x*1＝2，与*x*1≠*x*2矛盾，故不存在两切点不同的情况．

综上可得，切点的坐标为(2，4)，公切线的方程为4*x*－*y*－4＝0.

变式　已知函数*f*(*x*)＝*x*2－2*m*，*g*(*x*)＝3ln *x*－*x*，若曲线*y*＝*f*(*x*)与*y*＝*g*(*x*)在公共点处的切线相同，则实数*m*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 1

【解析】设两曲线*y*＝*f*(*x*)与*y*＝*g*(*x*)的公共点为(*a*，*b*)(*a*>0)，

*f*(*x*)＝*x*2－2*m*，其导数*f*′(*x*)＝2*x*，则切线的斜率*k*＝*f*′(*a*)＝2*a*，*g*(*x*)＝3ln *x*－*x*，其导数*g*′(*x*)＝－1，则切线的斜率*k*＝*g*′(*a*)＝－1，则有2*a*＝－1，解得*a*＝1或－(舍去)，则*b*＝3ln 1－1＝－1，则公共点为(1，－1)，则有－1＝1－2*m*，解得*m*＝1.

题型4　切线的应用

例4　若点*P*是曲线*y*＝*x*2－ln *x*上任一点，则点*P*到直线*x*－*y*－4＝0的最小距离是(　　)

A. 　　B. 3　　C. 2　　D. 2

【答案】 C

【解析】设与直线*x*－*y*－4＝0平行的直线与曲线*y*＝*x*2－ln *x*切于点*P*(*x*0，*y*0)，由*y*＝*x*2－ln *x*，得*y*′＝2*x*－(*x*>0)，则*y*′|*x*＝*x*0＝2*x*0－.由2*x*0－＝1，解得*x*0＝1(舍去负值)，所以*P*点坐标为(1，1)，则点*P*到直线*x*－*y*－4＝0的最小距离是＝2.

方法提炼：

①求曲线在某点处的切线：一般通过切点在切线上、在曲线上及切点处导数即为斜率，得到方程进行求解．

②求曲线过某点的切线：一般先设切点，写出切线方程后代入所过的点得切点后求解．

③求两曲线公切线：一般通过“切线斜率相等”与讨论切点异同时所得方程组求解．

虚线练习部分

一、 单项选择题(每个5分，共20分)

1. 若曲线*f*(*x*)＝*ax*＋ln *x*在点(1，*f*(1))处的切线斜率为3，则实数*a*的值为(　　)

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】 由*f*(*x*)＝*ax*＋ln *x*，得*f*′(*x*)＝*a*＋.因为*f*(*x*)在点(1，*f*(1))处的切线斜率为3，所以*f*′(1)＝3，所以*a*＋1＝3，所以*a*＝2.

2. 曲线*y*＝*x*＋在点(1，3)处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为(　　)

A. 4 B. 2 C. 16 D. 8

【答案】 D

【解析】 因为曲线*y*＝*x*＋，所以*y*′＝1－，所以曲线*y*＝*x*＋在点(1，3)处的切线斜率为1－2＝－1，切线方程为*l*：*x*＋*y*－4＝0，则直线*l*与两坐标轴的交点分别为(4，0)，(0，4)，所以直线*l*与坐标轴围成的三角形面积为×4×4＝8.

3. 曲线*y*＝在点处的切线方程为(　　)

A. 2*x*－*y*－＋1＝0 B. 2*x*－*y*－－1＝0

C. 2*x*＋*y*－＋1＝0 D. 2*x*＋*y*－－1＝0

【答案】 D

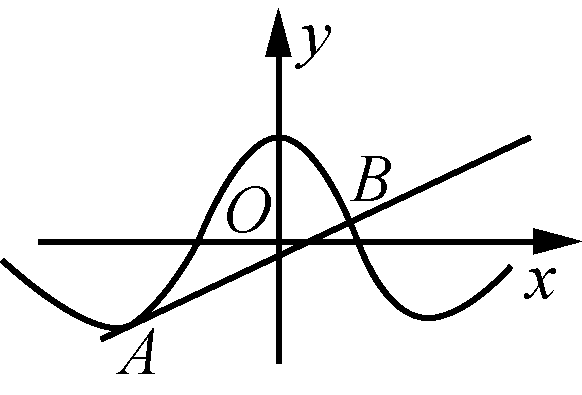
【解析】 由*y*＝，得*y*′＝＝－，所以*y*′|*x*＝＝－＝－2，则曲线*y*＝在点处的切线方程为*y*－1＝－2，即2*x*＋*y*－－1＝0.

4. 已知直线*y*＝*a*(*x*－1)(*a*>0)与曲线*f*(*x*)＝cos *x*(*x*∈(－π，π))相切于点*A*，与曲线的另一交点为*B*，若*A*，*B*两点对应的横坐标分别为*x*1，*x*2(*x*1<*x*2)，则 (1－*x*1)tan *x*1等于(　　)

A. －1 B. 2 C. 1 D. －2

【答案】 C

【解析】 如图，直线与曲线*f*(*x*)＝cos *x*相切于点*A*(*x*1，cos *x*1)，*f*′(*x*)＝－sin *x*，又直线过定点(1，0)，则＝－sin *x*1，所以(1－*x*1)tan *x*1＝1.



(第4题)

二、 多项选择题(每个5分，共15分)

5. 若函数f(x)＝*ln* x与g(x)＝x2＋x－k的图象只有一个公共点P(x0，y0)，且在这个公共点处的切线相同，则下列判断正确的有 (　　)

*A*. x0＝1或x0＝－3 *B*. y0＝0

*C*. k＝ *D*. 切线方程为y＝x－1

【答案】 *BCD*

【解析】 设两个函数图象的公共点P的坐标为(x0，y0)，

由题意可得

即

由②得x0＝1或x0＝－3(舍去).

把x0＝1代入①，解得k＝.故*A*错误，*B*正确，*C*正确．所以切线方程为y＝x－1，故*D*正确．

6. 设直线l是曲线y＝9x2－2＋*ln* x的切线，以下判断正确的有(　　)

*A*. 曲线在点x＝处的切线斜率为10

*B*. 有且只有一条直线l的斜率为6

*C*. 存在一条直线l的斜率为5

*D*. 曲线有且仅有一个零点

【答案】 *ABD*

【解析】 函数y＝9x2－2＋*ln* x的定义域为(0，＋∞)，y′＝18x＋，所以曲线在点x＝处的切线斜率为10，故*A*正确；再设切点为M(a，b)(a>0)，则y′|x＝a＝18a＋≥2＝6，当且仅当18a＝，即a＝时，直线l的斜率取得最小值6，故*B*正确，*C*错误；令y＝9x2－2＋*ln* x＝0，即*ln* x＝2－9x2，又数形结合可得*D*正确．

7. d表示曲线C：y＝x4上的点P到直线l：8x－16y－7＝0的距离，以下判断正确的有(　　)

*A*. d＝2时，存在两个这样的点P

*B*. d＝时，有且只有一个这样的点P

*C*. 曲线C在第二象限存在在点P处的切线垂直于直线l

*D*. 过点与曲线C相切的直线有两条

【答案】 *AC*

【解析】 由y＝x4，得y′＝4x3，设曲线y＝x4上的点P的坐标为(x0，y0).若过点P的切线与直线8x－16y－7＝0平行，则4x＝，解得x0＝，所以切点为，则曲线y＝x4上的点到直线8x－16y－7＝0的距离的最小值为＝＝，故*A*正确，*B*错误．令4x＝－2，存在唯一的负值，所以*C*正确．由上知，曲线在点P(x0，y0)处的切线方程为y＝4xx－3x，代入，结合图形知有且只有一条切线满足，故*D*错误．

三、 填空题(每个5分，共15分)

8. 已知直线y＝2x＋b是曲线y＝*ln* x＋3的一条切线，则b＝\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 2－*ln* 2

【解析】 函数y＝*ln* x＋3(x>0)的导数为y′＝，由题意知直线y＝2x＋b是曲线y＝*ln* x＋3(x>0)的一条切线，可知＝2，所以x＝，所以切点坐标为，而切点在直线上，所以b＝y－2x＝*ln* ＋3－1＝2－*ln* 2.

9. 已知曲线C：y＝2x2－x3，点P(0，－4)，直线l过点P且与曲线C相切于点Q，则点Q的横坐标为\_\_\_\_\_\_\_\_，切线方程为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 －1　7x＋y＋4＝0

【解析】 设切点Q的坐标为(a，2a2－a3)，因为y＝2x2－x3，所以y′＝(2x2－x3)′＝4x－3x2，所以直线l的斜率为4a－3a2，直线l的方程为y－2a2＋a3＝(4a－3a2)(x－a).因为直线过P(0，－4)，所以－4－2a2＋a3＝－a(4a－3a2)，即(a＋1)(a2－2a＋2)＝0，所以a＝－1，切线的斜率为4×(－1)－3×(－1)2＝－7，切线方程为y－(－4)＝－7(x－0)，即7x＋y＋4＝0.

10. 已知曲线y＝2x－*ln* x在点(1，2)处的切线与曲线y＝(a－1)x2＋(a＋3)x＋5相切，则a＝\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 2或10

【解析】 令f(x)＝2x－*ln* x，g(x)＝(a－1)x2＋(a＋3)x＋5，则f′(x)＝2－，f′(1)＝2－1＝1，可得曲线y＝f(x)在点(1，2)处的切线方程为y＝x＋1.联立得(a－1)x2＋(a＋2)x＋4＝0，所以解得a＝2或a＝10.

四、 解答题(第11，12题各15分，第13题20分，共50分)

11. 设函数f(x)＝a*e*x*ln* x＋.

(1) 求导函数f′(x)；

(2) 若曲线y＝f(x)在点(1，f(1))处的切线方程为y＝*e*(x－1)＋2，求a，b的值．

【解析】 (1) 由f (x)＝a*e*x*ln* x＋，

得f ′(x)＝(a*e*x*ln* x)′＋′＝a*e*x*ln* x＋＋.

(2) 由于切点既在曲线y＝f (x)上，又在切线y＝*e*(x－1)＋2上，将x＝1代入切线方程得y＝2，将x＝1代入函数f (x)得f (1)＝b，所以b＝2.将x＝1代入导函数f′(x)中，得f′(1)＝a*e*＝*e*，所以a＝1.

12. 设曲线f(x)＝a *ln* x＋，a∈R，*l*是曲线*y*＝*f*(*x*)的一条切线．

(1) 若曲线*y*＝*f*(*x*)在点(1，*f*(1))处的切线为*l*，若*l*与直线*x*＋2*y*－3＝0垂直，求直线*l*方程；

(2) 求证：当*a*＝0时，*l*与坐标轴围成的三角形的面积与切点无关．

【解析】 (1) *f*′(*x*)＝－，由题意知*f*′(1)＝*a*－1＝2，故*a*＝3，*f*(1)＝1，所以所求*l*的方程为2*x*－*y*－1＝0.

(2) 当*a*＝0时，*f*(*x*)＝，*x*>0，*f*′(*x*)＝－，

设函数*f*(*x*)图象上任意一点*P*，

切线*l*的斜率为*k*＝*f*′(*x*0)＝－.

过点*P*的切线方程为*y*－＝－(*x*－*x*0).

令*x*＝0，解得*y*＝；令*y*＝0，解得*x*＝2*x*0.则切线与坐标轴围成的三角形面积为*S*＝||·|2*x*0|＝2.

所以*l*与坐标轴围成的三角形的面积与切点无关．

13. 若存在过点(1，0)的直线与曲线*y*＝*x*3和*y*＝*ax*2＋*x*－9都相切，求实数*a*的值．

【解析】 设直线与曲线*y*＝*x*3的切点坐标为(*x*0，*y*0)，

则则切线的斜率*k*＝3*x*＝0或*k*＝.

若*k*＝0，此时切线的方程为*y*＝0.

由消去*y*，

可得*ax*2＋*x*－9＝0，

其中*Δ*＝0，即＋36*a*＝0，解得*a*＝－；

若*k*＝，则切线方程为*y*＝(*x*－1)，

由消去*y*，

可得*ax*2－3*x*－＝0，

又由*Δ*＝0，即9＋9*a*＝0，解得*a*＝－1.

综上，*a*＝－或－1.