练习参考答案第六章　计数原理

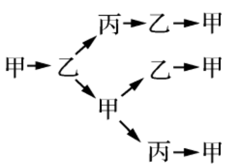
6．1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第 1 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

对点练

例 1　(1) B　(2) C

【解析】 (1) 分两类：甲第一次踢给乙时，满足条件的有 3 种传递方式(如图)，同理，甲先踢给丙时，满足条件也有 3 种传递方式．由分类加法计数原理，共有 $3+3=6$ 种传递方式．



(例 1(1))

(2)　由题意，拨动三枚算珠，有四种拨法：

①十位拨动 0 枚，个位拨动 3 枚，有 2 种结果：7 和 3；②十位拨动 1 枚，个位拨动 2 枚，有 4 种结果：12,16,52,56；③十位拨动 2 枚，个位拨动 1 枚，有 4 种结果：21,25,61,65；④十位拨动 3 枚，个位拨动 0 枚，有 2 种结果：30,70. 综上，拨动图一算盘中的三枚算珠，可以表示不同整数的个数为 12.

例 2　**【解答】** (1) 确定平面上的点 $P(a，b)$，可分两步完成：第一步确定 a 的值，有 6 种不同方法；第二步确定 b 的值，也有 6 种不同方法. 根据分步乘法计数原理，得点 P 可表示平面上不同的点共有 $6\times6=36$ 个.

(2) 确定平面上第二象限内的点 $P(a，b)$，可分两步完成：第一步确定 a 的值，因为 $a<0$，所以有 3 种不同方法；第二步确定 b 的值，因为 $b>0$，所以有 2 种不同方法. 由分步乘法计数原理，得点 P 可表示平面上第二象限内不同的点共有 $3\times2=6$ 个.

例 3　**【解答】** 完成从上山到下山这件事可分为四类：①从东侧上山，且从东侧下山，走法有 3×3 种；②从东侧上山，从西侧下山，走法有 3×2 种；③从西侧上山，从东侧下山，走法有 2×3 种；④从西侧上山，且从西侧下山，走法有 2×2 种. 据分类计数原理知，符合条件的走法共有 $3\times3+3\times2+2\times3+2\times2=25$ 种.

变式　**【解答】** (1) 分为三步：国画、油画、水彩画分别有 5 种、2 种、7 种不同的选法，根据分步乘法计数原理，共有 $5\times2\times7=70$ 种不同的选法.

(2) 分为三类：第一类是一幅选自国画，一幅选自油画. 由分步乘法计数原理知，有 $5\times2=10$ 种不同的选法.

第二类是一幅选自国画，一幅选自水彩画，有 $5\times7=35$ 种不同的选法. 第三类是一幅选自油画，一幅选自水彩画，有 $2\times7=14$ 种不同的选法. 所以共有 $10+35+14=59$ 种不同的选法.

巩固练

1. C 【解析】 分两类，在甲盒中摸球有 3 种，在乙盒中摸球有 5 种，则不同的方法有 $3+5=8$ 种.

2. A 【解析】 因为每位同学都可以选择 4 个不同社团中的一个，即每位同学都有 4 种选择方案，所以不同的参加种数为 $4\times4\times4=64$.

3. D 【解析】 要完成进、出门这件事，需要分两步，第一步进体育场，第二步出体育场，第一步进门有 $4+3=7$ 种方法；第二步出门也有 $4+3=7$ 种方法. 由分步乘法计数原理知，进、出门的方案有 $7\times7=49$ 种.

4. B 【解析】 当 a 当组长时，共有 $1\times4=4$ 种选法；当 a 不当组长时，因为 a 不能当副组长，则共有 $4\times3=12$ 种选法. 因此共有 $4+12=16$ 种选法.

5. ABD

6. ABD 【解析】 对于 A，分四类：第一类，从一班学生中选 1 人，有 7 种选法；第二类，从二班学生中选 1 人，有 8 种选法；第三类，从三班学生中选 1 人，有 9 种选法；第四类，从四班学生中选 1 人，有 10 种选法. 所以共有不同的选法 $N=7+8+9+10=34$ 种. 对于 B，分四步，第一、二、三、四步分别是从一、二、三、四班学生中选一人任组长，所以共有不同的选法 $N=7\times8\times9\times10=5\,040$ 种. 对于 D，分六类，每类又分两步，从一、二班学生中各选 1 人，有 7×8 种不同的选法；从一、三班学生中各选 1 人，有 7×9 种不同的选法；从一、四班学生中各选 1 人，有 7×10 种不同的选法；从二、三班学生中各选 1 人，有 8×9 种不同的选法；从二、四班学生中各选 1 人，有 8×10 种不同的选法；从三、四班学生中各选 1 人，有 9×10 种不同的选法，所以共有不同的选法 $N=7\times8+7\times9+7\times10+8\times9+8\times10+9\times10=431$ 种.

7. ABC 【解析】 东面上山的种数为 $2\times(3+3+4)=20$，西面上山的种数为 $3\times(2+3+4)=27$，南面上山的种数为 $3\times(2+3+4)=27$，北面上山的种数为

$4\times(2+3+3)=32$，故只从一面上山，而从其他任意一面下山的走法种数可能为20,27,32.

8. 5　**【解析】** 分3类：第1类，直接由A到O，有1种走法；

第2类，中间过一个点，有$A\to B\to O$和$A\to C\to O$共2种不同的走法；第3类，中间过两个点，有$A\to B\to C\to O$和$A\to C\to B\to O$共2种不同的走法．由分类加法计数原理可得，共有$1+2+2=5$种不同的走法.

9. 15　120　**【解析】** 由分类加法计数原理知，从书架上任取1本书，不同的取法总数为$4+5+6=15$.由分步乘法计数原理知，从1,2,3层分别各取1本书，不同的取法总数为$4\times5\times6=120$.

10. 36　**【解析】** 甲和乙不是第一名也不是最后一名，所以丙、丁和戊3人中有人获得第一名和最后一名，共有3×2种情况，剩下的一人和甲、乙分别获得第二、三、四名，共有$3\times2\times1$种情况，所以根据分步乘法计数原理可知，共有$3\times2\times3\times2\times1=36$种情况.

11. **【解答】** 从O型血的人中选1人有28种不同的选法，从A型血的人中选1人有7种不同的选法，从B型血的人中选1人有9种不同的选法，从AB型血的人中选1人有3种不同的选法.

(1) 由分类计数原理知，任选1人去献血，共有$28+7+9+3=47$种不同的选法.

(2) 要从四种血型的人中各选1人，即要在每种血型的人中依次选出1人后，这件“各选1人去献血”的事情才完成，所以由分步计数原理知，共有$28\times7\times9\times3=5\,292$种不同的选法.

12. **【解答】** (1) 若两个球颜色不同，则应从A、B袋中各取一个或A、C袋中各取一个，或B、C袋中各取一个，所以应有$1\times2+1\times3+2\times3=11$种.

(2) 若两个球颜色相同，则应在B或C袋中取出2个，所以应有$1+3=4$种.

应用练

【解答】 若选择①②③，则三人出游的不同方法数$N=4\times5\times5=100$.

若选择①②④，则需分两类，第一类，若甲选择4月27日出游，则三人出游的不同方法数$N_1=5\times6=30$；第二类，若甲不选择4月27日出游，则三人出游的不同方法数$N_2=3\times4\times6=72$.故这三人出游的不同方法数$N=N_1+N_2=102$.

若选择①③④，则三人出游的不同方法数 $N＝4×5×5＝100$.

若选择②③④，则三人出游的不同方法数 $N＝5×5×5＝125$.

第 2 课时　两个基本原理的应用

对点练

例 1　**【解答】**　由于 0 不可在最高位，因此应对它进行单独考虑.

(1) 百位数字有 9 种选择，十位数字和个位数字都各有 10 种选择．由分步乘法计数原理知，满足题意的三位数共有 $9×10×10＝900$ 个.

(2) 由于数字不可重复，可知百位数字有 9 种选择，十位数字也有 9 种选择，但个位数字仅有 8 种选择．由分步乘法计数原理知，满足题意的三位数共有 $9×9×8＝648$ 个.

例 2　**【解答】**　分 4 步进行分析：

①，对于区域 A，有 6 种颜色可选．②，对于区域 B，与 A 区域相邻，有 5 种颜色可选．③，对于区域 C，与 A、B 区域相邻，有 4 种颜色可选．④，对于区域 D、E，若 D 与 B 颜色相同，E 区域有 4 种颜色可选；若 D 与 B 颜色不相同，D 区域有 3 种颜色可选，E 区域有 3 种颜色可选，则区域 D、E 有 $4＋3×3＝13$ 种选择．综上，不同的涂色方案有 $6×5×4×13＝1\,560$ 种.

例 3　(1) B　(2) A

【解析】　(1) 由题意可知，这四个小球有两个小球放在一个盒子中，当 1 与 2 号球放在同一盒子中时，有 2 种不同的放法；当 1 与 3 号球放在同一盒子中时，有 2 种不同的放法；当 1 与 4 号球放在同一盒子中时，有 2 种不同的放法；当 2 与 3 号球放在同一盒子中时，有 2 种不同的放法；当 2 与 4 号球放在同一盒子中时，有 2 种不同的放法；当 3 与 4 号球放在同一盒子中时，有 2 种不同的放法．因此，不同的放球方法有 12 种.

(2) 因为每一行从左到右，每一列从上到下分别依次增大，1,2,9 只有一种填法，5 只能填在右上角或左下角，5 填好后与之相邻的空格可填 6,7,8 任一个；余下两个数字按从小到大只有一种填法．共有 $2×3＝6$ 种方法.

巩固练

1. A　**【解析】**　若甲同学选择牛，则乙同学有 2 种选择，丙同学有 10 种选择，选法种数为 $2×10＝20$.若甲同学选择马，则乙同学有 3 种选择，丙同学有

10 种选择，选法种数为 3×10＝30.综上，不同的选法共有 20＋30＝50 种.

2. C　**【解析】** 当乙用现金结账时，此时甲和乙都用现金结账，所以丙有 3 种方法结账，丁有 4 种方法结账，共有 3×4＝12 种方法．当乙用银联卡结账时，此时甲用现金结账，丙有 2 种方法结账，丁有 4 种方法结账，共有 2×4＝8 种方法．综上，共有 12＋8＝20 种方法.

3. B　**【解析】** 由题意可得：不超过 200 的三位数，两个数字一样同为 0 时，有 100,200，共 2 个；两个数字一样同为 1 时，有 110,101,112,121,113,131，…，191,119，共 18 个；两个数字一样同为 2 时，有 122，共 1 个．同理，两个数字一样同为 3,4,5,6,7,8,9 时各 1 个．综上，不超过 200 的“单重数”共有 2＋18＋8＝28 个，其中最大的是 200，较小的依次为 199,191,188,181,177,171，故第 22 个“单重数”为 171.

4. A　**【解析】** 先填第一行，有 3×2×1＝6(种)不同填法，再填第二行第一列，有 2 种不同填法，当该单元格填好后，其他单元格唯一确定．根据分步乘法计数原理，共有 6×2＝12 种不同的填法.

5. AB　**【解析】** 第一步确定百位数，有 6 种方法；第二步确定十位数，有 5 种方法；第三步确定个位数，有 4 种方法．根据分步乘法计数原理知共有 N＝6×5×4＝120 个三位数.所以该数列的项数为 120，百位是 1,2,3,4 的共有 4×5×4＝80 个，百位数是 5 的三位数中，十位是 1 或 2 的共有 4＋4＝8 个，故第 88 个为 526、第 89 个为 531、第 90 个为 532.

6. BD　**【解析】** 设 6 位同学分别用 a，b，c，d，e，f 表示．若任意两位同学之间都进行交换，共进行 5＋4＋3＋2＋1＝15 次交换，现共进行了 13 次交换，说明有 2 次交换没有发生，此时可能有两种情况：①由 3 人构成的 2 次交换，如 a—b 和 a—c 之间的交换没有发生，则收到 4 份纪念品的有 b，c 两人，选 B.②由 4 人构成的 2 次交换，如 a—b 和 c—e 之间的交换没有发生，则收到 4 份纪念品的有 a，b，c，e 4 人，选 D.

7. BD　**【解析】** 由于生物在 B 层班级，所以只能选第 2 或第 3 节，故分两类：若生物选第 2 节，则地理可安排在第 1,3 节，有 2 种选法，其他任意选即可，故有 2×2＝4 种(此种情况自习课可出现在第 1、3、4 节中的某节)；若生物选第 3 节，则地理只能选第 1 节，政治只能选第 4 节，自习只能选在第 2 节，故有 1

种．根据分类加法计数原理可得，共有 4＋1＝5 种不同的选课方式．由以上分析可知，自习课可安排在 4 节课中的任一节．

8. 146　**【解析】** 选 2 个班参加社会实践，这 2 个班不同年级，2 个班为高一和高二各一个班有 6×7＝42 种选法；2 个班为高二和高三各一个班有 7×8＝56 种选法；2 个班为高三和高一各一个班有 8×6＝48 种选法，所以不同的选法共有 42＋56＋48＝146 种选法．

9. 260　**【解析】**根据题意：当 1,3 相同时，2,4 有相同或不同两类，有 5×4×(1＋3)＝80 种；当 1,3 不相同时，2,4 有相同或不同两类，有 5×4×3×(1＋2)＝180 种，所以不同的种植方案共有 80＋180＝260 种．

10. 162　**【解析】** 一位数有 8 个，两位数有 8×9＝72 个．百位数字为 1 时，有 9×9＝81 个；百位数字为 2 时，有 1 个，即 200.故共有 8＋72＋81＋1＝162 个．

11. **【解答】** 当公差为 1 时，数列可以是：1,2,3；2,3,4；3,4,5；…；13,14,15，共 13 种情况．当公差为 2 时，数列可以是：1,3,5；2,4,6；3,5,7；…；11,13,15，共 11 种情况．当公差为 3 时，数列可以是：1,4,7；2,5,8；3,6,9；…；9,12,15，共 9 种情况．当公差为 4 时，数列可以是：1,5,9；2,6,10；3,7,11；…；7,11,15，共 7 种情况．当公差为 5 时，数列可以是：1,6,11；2,7,12；3,8,13；4,9,14；5,10,15，共 5 种情况．当公差为 6 时，数列可以是：1,7,13；2,8,14；3,9,15，共 3 种情况．当公差为 7 时，数列可以是：1,8,15，共 1 种情况．故总的情况有 13＋11＋9＋7＋5＋3＋1＝49 种．又因为三个数成公差数列有两种情况，递增或递减，所以所求的等差数列共有 98 个．

12. **【解答】** (1) 分步解决：第 1 步，千位数字有 5 种选取方法；第 2 步，百位数字有 5 种选取方法；第 3 步，十位数字有 4 种选取方法；第 4 步，个位数字有 3 种选取方法．由分步乘法计数原理知，可组成的无重复数字的四位整数有 5×5×4×3＝300 个．

(2) 方法一：按个位是 0,2,4 分为三类：第 1 类，个位是 0 的有 4×4×3＝48 个；第 2 类，个位是 2 的有 3×4×3＝36 个；第 3 类，个位是 4 的有 3×4×3＝36 个．则由分类加法计数原理知，有 48＋36＋36＝120 个无重复数字的比 2 000 大的四位偶数．

方法二：按千位是 2,3,4,5 分四类：第 1 类，千位是 2 的有 2×4×3＝24 个；第 2 类，千位是 3 的有 3×4×3＝36 个；第 3 类，千位是 4 的有 2×4×3＝24 个；第 4 类，千位是 5 的有 3×4×3＝36 个．由分类加法计数原理知，有 24＋36＋24＋36＝120 个无重复数字的比 2 000 大的四位偶数．

应用练

1. 【解答】 (1) 小华、小李两人共付费 5 元，所以小华、小李一人付费 2 元一人付费 3 元，付费 2 元的乘坐站数有 1,2,3 三种选择，付费 3 元的乘坐站数有 4,5,6 三种选择，所以小华、小李下地铁的方案共有 2×3×3＝18 种．

(2) 小华、小李两人共付费 6 元，所以小华、小李一人付费 2 元一人付费 4 元或两人都付费 3 元，付费 4 元的乘坐站数有 7,8,9 三种选择，因此小华比小李先下地铁的方案共有 3×3＋3＝12 种．

6．2　排列与组合

第 1 课时　排　列

对点练

例 1　【解答】 (1) 中票价只有三种，虽然机票是不同的，但票价是一样的，不存在顺序问题，所以不是排列问题．

(2) 植树和种菜是不同的，存在顺序问题，属于排列问题．

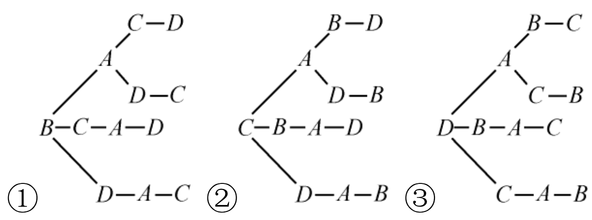
(3)(4) 不存在顺序问题，不属于排列问题．

(5) 中每个人的职务不同，例如甲当班长或当学习委员是不同的，存在顺序问题，属于排列问题．

(6) A 给 B 写信与 B 给 A 写信是不同的，所以存在顺序问题，属于排列问题．

所以在上述各题中(2)(5)(6)属于排列问题．

例 2　【解答】 画树形图如下图：



(例 2)

故有 $BACD$，$BADC$，$BCAD$，$BDAC$，$CABD$，$CADB$，$CBAD$，$CDAB$，$DABC$，$DACB$，$DBAC$，$DCAB$，共 12 种．

变式　**【解答】**　按分步乘法计数原理的步骤：

第一步，分给甲，有 3 种分法；第二步，分给乙，有 2 种分法；第三步，分给丙，有 1 种分法．故共有 3×2×1＝6 种不同的分法．列出这 6 种分法，如下表所示：

甲	乙	丙
玫瑰花	月季花	莲花
玫瑰花	莲花	月季花
月季花	玫瑰花	莲花
月季花	莲花	玫瑰花
莲花	玫瑰花	月季花
莲花	月季花	玫瑰花

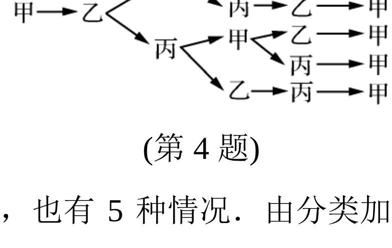
巩固练

1. D　**【解析】**　由题意可知，问题为从 5 个元素中选 3 个元素的排列问题，所以安排方法有 5×4×3＝60(种).

2. D　**【解析】**　若把人抽象地看成元素，将 3 把不同的椅子当成不同的位置，则原问题抽象为从 4 个元素中取 3 个元素占据 3 个不同的位置．显然是从 4 个元素中任取 3 个元素的排列问题，故有 4×3×2＝24 种不同的坐法．

3. B　**【解析】**　按分步乘法计数原理的步骤：第一步，分给甲，有 3 种分法；第二步，分给乙，有 2 种分法；第三步，分给丙，有 1 种分法．故共有 3×2×1＝6 种不同的分法．

4. B　**【解析】**　由甲开始发球，可发给乙，也可发给丙．若甲发球给乙，其传球方法的树形图如图，共 5 种．



(第 4 题)

同样甲第一次发球给丙，也有 5 种情况．由分类加法计数原理，共有 5＋5＝10 种不同的传球方法．

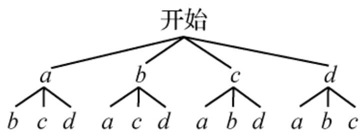
5. BD　**【解析】**　因为加法和乘法满足交换律，所以选出两个数做加法和乘

法时，结果与两数字位置无关，故不是排列问题．而减法、除法与两数字的位置有关，故是排列问题．

6. ACD　**【解析】** 排列问题是与顺序有关的问题，四个选项中只有 B 中的问题与顺序有关，其他问题都与顺序无关．

7. AB　**【解析】** 对于 A，完成的事情是带一本书，无论是带外语书，还是带数学书、物理书，事情都可完成，从而结果为 5＋4＋3＝12 种．对于 B，完成的事情是带 3 本不同学科的参考书，只有从外语、数学、物理书中各选 1 本后，才能完成这件事，因此结果为 5×4×3＝60 种．对于 C，选 1 本外语书和选 1 本数学书，有 5×4＝20 种选法；选外语书、物理书各 1 本，有 5×3＝15 种选法；选数学书、物理书各 1 本，有 4×3＝12 种选法．共有 20＋15＋12＝47 种．对于 D，从数学参考书中选 2 本不同的参考书带到图书馆，有 6 种不同的带法．

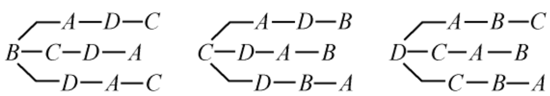
8. 12　**【解析】** 画出树形图如图所示，因此，共计有 12 个不同的排列，它们是 ab，ac，ad，ba，bc，bd，ca，cb，cd，da，db，dc.



(第 8 题)

9. 24　**【解析】** 分两类，一类是末位是 2 时，有 3×4 个；另一类是末位是 4 时，有 3×4 个，共有 24 个．

10. 9　**【解析】** 设四张贺卡分别为 A，B，C，D.由题意知，某人(不妨设为 A 卡的供卡人)取卡的情况有 3 种，据此将卡的不同分配方式分为三类，对于每一类，其他人依次取卡分步进行．用树状图表示，如图，共有 9 种不同的分配方式．

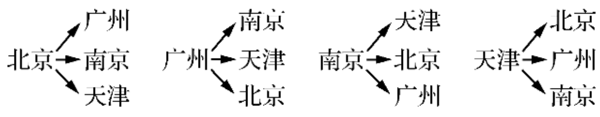


(第 10 题)

11. **【解答】** 符合要求的凹数可分为三类．第 1 类，十位数字为 0 的凹数有 102,103,104,201,203,204,301,302,304,401,402,403，共 12 个；第 2 类，十位数字为 1 的凹数有 213,214,312,314,412,413，共 6 个；第 3 类，十位数字为 2 的凹数有 324,423，共 2 个．所以由 0,1,2,3,4 可组成 12＋6＋2＝20 个无重复数字的凹

数.

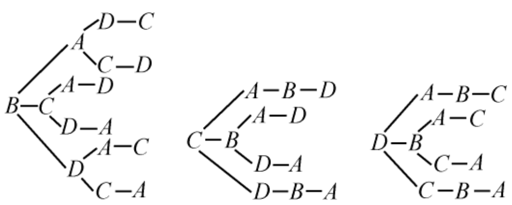
12. 【解答】 (1) 列出每一个起点和终点情况，如图(1)所示.



(第 12 题(1))

故符合题意的机票种类有：北京—广州，北京—南京，北京—天津，广州—南京，广州—天津，广州—北京，南京—天津，南京—北京，南京—广州，天津—北京，天津—广州，天津—南京，共 12 种.

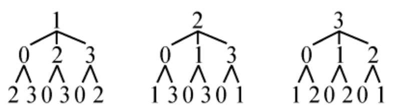
(2) 因为 A 不排第一，排第一位的情况有 3 类(可从 B、C、D 中任选一人排)，而此时兼顾分析 B 的排法，列树形图如图(2)所示. 所以符合题意的所有排列是：$BADC$，$BACD$，$BCAD$，$BCDA$，$BDAC$，$BDCA$，$CABD$，$CBAD$，$CBDA$，$CDBA$，$DABC$，$DBAC$，$DBCA$，$DCBA$，共 14 种.



(第 12 题(2))

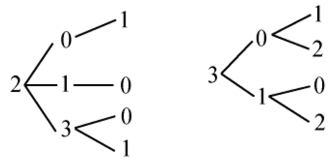
13. 【解答】 (1) 组成三位数分三个步骤：

第一步：选百位上的数字，0 不能排在首位，故有 3 种不同的排法；第二步：选十位上的数字，有 3 种不同的排法；第三步：选个位上的数字，有 2 种不同的排法. 由分步乘法计数原理得，共有 3×3×2＝18 个不同的三位数. 画出树形图，如图(1)，由树形图知，所有的三位数为 102,103,120,123,130,132,201,203,210,213,230,231,301,302,310,312,320,321.



(第 13 题(1))

(2) 直接画出树形图，如图(2)，符合条件的三位数有 201,210,230,231,301,302,310,312，共 8 个.



(第 13 题(2))

第 2 课时　排列数

对点练

例 1　**【解答】**　(1) $\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$

$=\frac{2\times8\times7\times6\times5\times4+7\times8\times7\times6\times5}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1-9\times8\times7\times6\times5}$

$=\frac{8\times7\times6\times5\times(8+7)}{8\times7\times6\times5\times(24-9)}=1.$

(2) 由 $3A_x^3=2A_{x+1}^2+6A_x^2$，

得 $3x(x-1)(x-2)=2(x+1)x+6x(x-1)$.

因为 $x\geqslant3$，且 $x\in\mathbf{N}^*$，

所以 $3(x-1)(x-2)=2(x+1)+6(x-1)$，

即 $3x^2-17x+10=0$，

解得 $x=5$ 或 $x=\frac{2}{3}$(舍去)，所以 $x=5$.

(3) 原不等式可化为$\frac{8!}{(8-x-2)!}<6\times\frac{8!}{(8-x)!}$，

即 $x^2-15x+50<0$，即$(x-5)(x-10)<0$，

得 $5<x<10$.又$\begin{cases}x+2\leqslant8,\\x\leqslant8,\end{cases}$

所以 $5<x\leqslant6$，$x\in\mathbf{N}^*$，所以 $x=6$.

例 2　**【解答】**　(1) 根据题意分步完成任务：

第一步：排千位数字，从 1,2,3,4,5 这 5 个数字中选 1 个来排，有 $A_5^1=5$ 种不同排法；

第二步：排百位、十位、个位数字，从排了千位数字后剩下的 5 个数字中选 3 个来排列，有 $A_5^3=5\times4\times3=60$ 种不同排法，所以组成不同的四位数有 $5\times60=300$ 种.

(2) 根据题意分类完成任务：

第一类：个位数字为 0，则从 1,2,3,4,5 这 5 个数字中选 3 个来排在千位、百位、十位，有 $A_5^3=5\times4\times3=60$ 种不同排法；

第二类：个位数字为 2 或 4，则 0 不能排在千位，有 $A_2^1A_4^1A_4^2=2\times4\times4\times3=96$ 种不同排法.

所以组成的不同四位偶数有 $60+96=156$ 种.

例 3 **【解答】** (1) 男生必须站在一起是男生的全排列，有 A_3^3种排法；女生必须站在一起是女生的全排列，有 A_4^4种排法；全体男生、女生各视为一个元素，有 A_2^2种排法．由分步计数原理知，共有 $A_3^3\cdot A_4^4\cdot A_2^2=288$ 种排队方法.

(2) 三个男生全排列有 A_3^3种排法，把所有男生视为一个元素，与 4 名女生组成 5 个元素全排列，有 A_5^5种排法．故有 $A_3^3\cdot A_5^5=720$ 种排队方法.

(3) 先安排女生，共有 A_4^4种排法；男生在 4 个女生隔成的五个空中安排，共有 A_5^3种排法，故共有 $A_4^4\cdot A_5^3=1\ 440$ 种排法.

(4) 排好男生后让女生插空，共有 $A_3^3\cdot A_4^4=144$ 种排法.

变式 C **【解析】** 首先可将《将进酒》与《望岳》捆绑在一起和另外确定的两首诗词进行全排列，共有 $A_3^3=6$ 种排法，再将《山居秋暝》与《送杜少府之任蜀州》插排在 3 个空里(最后一个空不排)，共有 $A_3^2=6$ 种排法，则后六场开场诗词的排法有 $6\times6=36$ 种.

巩固练

1. A **【解析】** 若 $A_m^5=2A_m^3$，则 $m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)=2\times m(m-1)(m-2)$，即$(m-3)(m-4)=2$，解得 $m=5$ 或 2(舍去).

2. D **【解析】** $A_{34-a}^8=\dfrac{(34-a)!}{(34-a-8)!}=(27-a)(28-a)\cdot\cdots\cdot(34-a)$.

3. B **【解析】** 《傲慢与偏见》在最前面或最后面有两种放法，其余五本书有 A_5^5种排列方式，故不同放法共有 $2A_5^5=240$ 种.

4. B **【解析】** 分步完成：先将其中 2 道工序放在中间有 $A_3^2=6$ 种，再将剩余 3 道工序放在其他 3 个位置有 $A_3^3=6$ 种．由分步乘法计数原理可得，共有 $6\times6=36$ 种.

5. ABC **【解析】** 对 A，因为$(n+1)!=(n+1)n(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$，$n!=n(n-

1)$(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$，故正确．对 B，$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，$nA_{n-1}^{m-1}=\dfrac{n(n-1)!}{(n-m)!}$，故正确．对 C，$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，正确．对 D，因为 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，所以 $A_{n-1}^{m-1}=\dfrac{(n-1)!}{(n-m)!}$，故不正确．

6. ABD　【解析】 对于 A，如果个位是 0，则有 A_9^4个无重复数字的偶数；如果个位不是 0，则有 $A_4^1\cdot A_8^1\cdot A_8^3$个无重复数字的偶数，所以共有 $A_9^4+A_4^1\cdot A_8^1\cdot A_8^3$个无重复数字的偶数，故 A 正确．对于 B，由于 $A_8^1\cdot A_8^3=A_9^4-A_8^3$，所以 $A_9^4+A_4^1\cdot A_8^1\cdot A_8^3=A_9^4+A_4^1(A_9^4-A_8^3)$，故 B 正确．对于 C，因为 $A_{10}^5-A_9^4\neq A_9^4$，所以 $A_9^4+A_4^1(A_9^4-A_8^3)\neq A_{10}^5-A_9^4+A_4^1(A_9^4-A_8^3)$，故 C 错误．对于 D，由于 $A_{10}^5-A_9^4-A_5^1(A_9^4-A_8^3)=41A_8^3=A_9^4+A_4^1\cdot A_8^1\cdot A_8^3$，故 D 正确．

7. ABC　【解析】 若 A，B 不相邻共有 $A_3^3\cdot A_4^2=72$ 种方法，故 A 正确；若 A 不站在最左边，B 不站最右边，利用间接法有 $A_5^5-2A_4^4+A_3^3=78$ 种方法，故 B 正确；若 A 在 B 左边，则有$\dfrac{A_5^5}{A_2^2}=60$ 种方法，故 C 正确；若 A，B 两人站在一起，则有 $A_4^4A_2^2=48$ 种方法，故 D 不正确．

8. 15　【解析】 根据题意，$\dfrac{A_n^7-A_n^5}{A_n^5}=89$，则$\dfrac{A_n^7}{A_n^5}=90$，变形可得 $A_n^7=90A_n^5$，则有$\dfrac{n!}{(n-7)!}=90\dfrac{n!}{(n-5)!}$，变形可得 $(n-5)(n-6)=90$，解得 $n=15$ 或 $n=-4$(舍去)．

9. 480　【解析】 根据题意，将 1、4、5、6 四个数全排列，有 $A_4^4=24$ 种排法．四个数排好后，有 5 个空位，在 5 个空位中任选 2 个，安排 2 和 3，有 $A_5^2=20$ 种排法，则有 $24\times20=480$ 个符合题意的六位数．

10. 120　【解析】 从 8 个车位里选择 4 个相邻的车位，共有 5 种方法，将 4 辆载有救援物资的车辆相邻停放，有 $A_4^4=24$ 种方式，则不同的泊车方案有 $5\times24=120$ 种．

11. 【解答】 因为 $A_n^{m+1}=nA_{n-1}^m$，且 $m+1\leqslant n$，则 $n-m>0$，

所以，两边同时除以 $n-m$，得$\dfrac{1}{n-m}A_n^{m+1}=\dfrac{n}{n-m}A_{n-1}^m$．

又因为$\dfrac{1}{n-m}A_n^{m+1}=\dfrac{1}{n-m}\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)=n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m$

$+1)=\mathrm{A}_n^m$，

所以 $\mathrm{A}_n^m=\dfrac{1}{n-m}\mathrm{A}_n^{m+1}=\dfrac{n}{n-m}\mathrm{A}_{n-1}^m$.

12. 【解答】 (1) 由题意，无重复数字的三位数共有 $\mathrm{A}_9^1\mathrm{A}_9^2=9\times72=648$ 个.

(2) 当百位为 1 时，共有 $\mathrm{A}_9^2=9\times8=72$ 个数；

当百位为 2 时，共有 $\mathrm{A}_9^2=9\times8=72$ 个数；

当百位为 3 时，315 前面共有 $\mathrm{A}_8^1+\mathrm{A}_4^1=12$ 个数，

所以 315 是第 $72+72+12=156$ 个数.

(3) 因为是无重复数字的四位偶数，所以个位必须为 0,2,4,6,8，千位上不能为 0.当个位上为 0 时，共有 $\mathrm{A}_9^3=504$ 个数；当个位上是 2,4,6,8 中的一个时，共有 $\mathrm{A}_8^1\mathrm{A}_8^2\mathrm{A}_4^1=1\,792$ 个数，所以无重复的四位偶数共有 $504+1\,792=2\,296$ 个数.

应用练

ABC 【解析】 由题意，$(2\,021!!)\cdot(2\,020!!)=2\,021!$，显然正确；$2\,004!!=2\,004\times2\,002\times\cdots\times10\times8\times6\times4\times2=2^{1\,002}\cdot1\,002!$，正确；$2\,020!!=2\,020\times2\,018\times\cdots\times10\times8\times6\times4\times2$ 的个位数是 0，正确；$2\,005!!=2\,005\times2\,003\times\cdots\times9\times7\times5\times3\times1$ 的个位数是 5.

第 3 课时　组　　合

对点练

例 1 【解答】 (1) 没有顺序，是组合问题.

(2) 2 名学生完成两件不同的工作，有顺序，是排列问题.

(3) 单循环比赛要求每两支球队之间只打一场比赛，没有顺序，是组合问题.

(4) 争夺冠亚军是有顺序的，是排列问题.

例 2 【解答】 (1) 以其中任意两个点为端点的有向线段为一个排列问题，共有有向线段：AB，AC，AD，BA，BC，BD，CA，CB，CD，DA，DB，DC.

(2) 以其中任意两个点为端点的线段为一个组合问题，共有线段：AB，AC，AD，BC，BD，CD.

(3) 以其中任意三点为顶点的三角形是一个组合问题，共有$\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle ACD$.

巩固练

1. C 【解析】 由集合元素的无序性可知①属于组合问题；因为每两支球

队比赛一次，并不需要考虑谁先谁后，没有顺序的区别，故②是组合问题；③④中两位数顺序不同，数字不同，为排列问题.

2. A　【解析】 从 10 人中任选出 4 人作为甲组，则剩下的人即为乙组，这是组合问题，共有 C_{10}^{4}.

3. D　【解析】 从 10 人中选派 4 人有 C_{10}^{4}种方法，对选出的 4 人具体安排会议有 $C_4^2C_2^1$种方法．由分步乘法计数原理知，不同的选派方法为 $C_{10}^{4}C_4^2C_2^1$.

4. C　【解析】 根据题意，甲没有选择马且乙、丙两人中有一人选择羊，所以甲没有选择马和羊，而是在除了马和羊的十个中选择一个，即有 10 种方法．乙、丙两人中恰有一人选羊，先在两个人中选一人让他选羊，即有 2 种方法，再让剩下的一人在剩余的十个动物中选一个，即有 10 种方法．由分步乘法计数原理知，选法共有 200 种.

5. ABD　6. AC

7. ABC　【解析】 对于 A，从中任取 5 人是组合问题，共有 C_{12}^{5}不同选法．对于 B，甲、乙、丙三人必须参加，则只需要从另外 9 人中选 2 人，是组合问题，共有 C_9^2种不同选法．对于 C，甲、乙、丙三人不能参加，则只需从另外的 9 人中选 5 人，共有 C_9^5种不同选法．对于 D，甲、乙参加且丙不参加，共有 C_9^3种不同选法.

8. 12　【解析】 这是一个组合问题，正方体的 8 个顶点中选 4 个点作一个平面，共有正方体的 6 个面和 6 个对角面，共 12 个不同的平面.

9. 9　【解析】 方法一(直接法)：分两类：第 1 类，小张、小王两名同学都不参加，有 C_4^4种选法；第 2 类，小张、小王两名同学中只有一人参加，有 $C_2^1C_4^3$种选法．根据分类加法计数原理，可得不同的选法种数为 $C_4^4+C_2^1C_4^3=9$.方法二(间接法)：不同的选法种数为 $C_6^4-C_4^2=9$.

10. 13　【解析】 从中任取 3 个球，红球的个数不比白球少的取法：红球 3 个，红球 2 个和白球 1 个．当取红球 3 个时，取法有 1 种；当取红球 2 个和白球 1 个时，取法有 $3\times4=12$ 种．根据分类计数原理，红球的个数不比白球少的取法有 $1+12=13$ 种.

11. 【解答】 分两类，第 1 类：从 *A* 类选修课 3 门中选 1 门，再从 *B* 类选修课 4 门中选 2 门，将它们合在一起，即为一种方案，它是一个组合问题．第 2

类：从 A 类选修课 3 门中选 2 门，再从 B 类选修课 4 门中选 1 门，将它们合在一起，即为一种方案，它是一个组合问题.

12. **【解答】** 需分两步：

第 1 步，根据经纪人的推荐在 12 种股票中选 8 种，是一个组合问题；第 2 步，根据经纪人的推荐在 7 种债券中选 4 种，也是一个组合问题.最后将选中的 8 种股票与选中的 4 种债券合在一起就是一种投资方案.

13. **【解答】** 根据题意可分为如下几类比赛：①小组循环赛：每组有 C_4^2场，枚举知每个小组共比赛 6 场，8 个小组共有 48 场.②八分之一淘汰赛：8 个小组的第一、二名组成 16 强，根据抽签规则，每两支队比赛一场，可以决出 8 强，共有 8 场.③四分之一淘汰赛：根据抽签规则，8 强中每两支队比赛一场，可以决出 4 强，共有 4 场.④半决赛：根据抽签规则，4 强中每两支队比赛一场，可以决出 2 强，共有 2 场.⑤决赛：2 强比赛 1 场确定冠亚军，4 强中的另两队比赛 1 场决出第三、四名，共有 2 场.综上，共有 $8\times\mathrm{C}_4^2+8+4+2+2=64$ 场.

第 4 课时　组合数

对点练

例 1　**【解答】** (1) $\mathrm{C}_{100}^{98}+\mathrm{C}_{200}^{199}=\mathrm{C}_{100}^{2}+\mathrm{C}_{200}^{1}=\dfrac{100\times99}{2}+200=4\,950+200=5\,150$.

(2) $\mathrm{C}_3^3+\mathrm{C}_4^3+\mathrm{C}_5^3+\cdots+\mathrm{C}_{20}^3=\mathrm{C}_4^4+\mathrm{C}_4^3+\mathrm{C}_5^3+\cdots+\mathrm{C}_{20}^3=\mathrm{C}_5^4+\mathrm{C}_5^3+\cdots+\mathrm{C}_{20}^3=\cdots=\mathrm{C}_{21}^4=5\,985$.

(3) ①因为 $\mathrm{C}x^2+3x+2_{16}=\mathrm{C}_{16}^{5x+5}$，

所以 $x^2+3x+2=5x+5$ 或 $x^2+3x+2+5x+5=16$，即 $x^2-2x-3=0$ 或 $x^2+8x-9=0$，

所以 $x=-1$ 或 $x=3$ 或 $x=-9$ 或 $x=1$.

经检验：$x=3$ 或 $x=-9$ 不合题意舍去.

故原方程的解是 $x_1=-1$，$x_2=1$.

②由排列数和组合数公式，原方程可化为

$$3\cdot\frac{(x-3)!}{(x-7)!\cdot4!}=5\cdot\frac{(x-4)!}{(x-6)!},$$

则$\dfrac{3(x-3)}{4!}=\dfrac{5}{x-6}$，即$(x-3)(x-6)=40$，

所以 $x^2-9x-22=0$，解得 $x=11$ 或 $x=-2$(舍去).

所以方程的根为 $x=11$.

变式　【解答】 原方程可变形为$\dfrac{C_{n-1}^5}{C_{n-3}^3}+1=\dfrac{19}{5}$，所以 $C_{n-1}^5=\dfrac{14}{5}\cdot C_{n-3}^3$，即$\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!}=\dfrac{14}{5}\cdot\dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}$，化简并整理得 $n^2-3n-54=0$，

解得 $n=9$ 或 $n=-6$(不合题意，舍去)，所以 $n=9$.

例 2　**【解答】** (1) 分两步完成：

第一步，选 3 名男运动员，有 C_6^3种选法；

第二步，选 2 名女运动员，有 C_4^2种选法．由分步乘法计数原理可得，共有 $C_6^3\cdot C_4^2=120$ 种选法.

(2) 方法一(直接法)：“只有男队长”的选法种数为 C_8^4；“只有女队长”的选法种数为 C_8^4；“男、女队长都入选”的选法种数为 C_8^3，所以共有 $2C_8^4+C_8^3=196$ 种选法.

方法二(间接法)：从 10 人中任选 5 人有 C_{10}^5种选法，其中不选队长的方法有 C_8^5种，所以“至少有 1 名队长”的选法有 $C_{10}^5-C_8^5=196$ 种.

(3) 当有女队长时，其他人任意选，共有 C_9^4种选法；当不选女队长时，必选男队长，共有 C_8^4种选法，其中不含女运动员的选法有 C_5^4种，所以不选女队长时的选法共有$(C_8^4-C_5^4)$种．故既要有队长又要有女运动员的选法共有 $C_9^4+C_8^4-C_5^4=191$ 种.

例 3　**【解答】** (1) 根据分步乘法计数原理可得 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种.

(2) 分给甲、乙、丙三人，每人两本有 $C_6^2C_4^2C_2^2$种方法，这个过程可以分两步完成：第一步分为三份，每份两本，设有 x 种方法；第二步再将这三份分给甲、乙、丙三名同学有 A_3^3种方法．由分步乘法计数原理可得 $C_6^2C_4^2C_2^2=xA_3^3$，所以 $x=\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$.因此分为三份，每份两本一共有 15 种不同分配方法.

变式　【解答】 先将 4 名医生分成 3 组，其中 1 组有 2 人，共有 C_4^2种方法，然后将这 3 组医生分配到 3 个不同的住户中去，有 A_3^3种方法．由分步原理可知共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种不同分配方法.

巩固练

1. D　【解析】 因为 $C_n^2A_2^2=\frac{n(n-1)}{2}\times2=42$，所以 $n=7$ 或 -6(舍去)，故 $\frac{n!}{3!\,(n-4)!}=\frac{7!}{3!\,3!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1}=140$.

2. D　【解析】 $\frac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}=\frac{n}{r}\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=C_n^r$.

3. B　【解析】 因为 $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$，所以 $C_4^4+C_5^4+C_6^4+C_7^4+C_8^4+C_9^4=C_5^5+C_5^4+C_6^4+C_7^4+C_8^4+C_9^4=C_6^5+C_6^4+C_7^4+C_8^4+C_9^4=C_7^5+C_7^4+C_8^4+C_9^4=C_8^5+C_8^4+C_9^4=C_9^5+C_9^4=C_{10}^5$.

4. D　【解析】 从某一档的 7 颗算珠中任取 3 颗，既有上珠又有下珠的种数为 $m=C_2^1C_5^2+C_2^2C_5^1=25$.

5. BC　【解析】 因为 $A_3^m-C_3^2+0!=4$，所以 $A_3^m=6$.当 $m=2$ 时成立；当 $m=3$ 时也成立.

6. ACD　【解析】 由组合数的定义可知 $C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$，A 选项错误；由排列数的定义可知 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$，B 选项正确；由组合数的性质可知 $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$，则 C、D 选项均错误.

7. ABD　【解析】 对于 A，正、副班长有 1 人参加的方法数有 $C_2^1C_{48}^4$种；正、副班长有 2 人参加的方法数有 $C_2^2C_{48}^3$种，故总的方法数有 $C_2^1C_{48}^4+C_2^2C_{48}^3$种，故 A 正确．对于 B,50 人抽取 5 人，总的方法数为 C_{50}^5，其中没有正、副班长的方法数为 C_{48}^5，所以所求方法数有 $C_{50}^5-C_{48}^5$种，故 B 正确．对于 C 和 D，正、副班长中任抽取一个，然后在剩余 49 人中抽取 4 个，方法数有 $C_2^1C_{49}^4$种，减去重复的包括正、副班长的情况 C_{48}^3种，所以方法数有 $C_2^1C_{49}^4-C_{48}^3$种，故 D 正确，C 不正确.

8. 2　【解析】 由题知 $\frac{m!\,(5-m)!}{5!}-\frac{m!\,(6-m)!}{6!}=\frac{7\times m!\,(7-m)!}{10\times7!}$，化简整理得 $m^2-23m+42=0$，解得 $m=2$ 或 $m=21$.又因为 $0\leqslant m\leqslant5$，$m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=2$.

9. {5,6,7,8,9,10,11}　【解析】 由题意，得 $n\geqslant5$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$.因为 $\frac{1}{C_n^3}-\frac{1}{C_n^4}<\frac{2}{C_n^5}$，

所以$\frac{6}{n(n-1)(n-2)}-\frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)}<\frac{240}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.因为 $n(n-1)(n-2)>0$，所以化简得 $n^2-11n-12<0$，解得$-1<n<12$.结合 n 的取值范围得 $n=5,6,7,8,9,10,11$.所以不等式的解集为$\{5,6,7,8,9,10,11\}$.

10. 25　**【解析】** 先将 5 名学生分成 3 组，有 2,2,1 和 3,1,1 两种情况，共$\frac{1}{2}C_5^2C_3^2+C_5^3=15+10=25$ 种.

11. **【解答】** (1) 由已知得 $7\times\frac{6!}{(6-x)!}=20\times\frac{7!}{(8-x)!}$，化简得 $x^2-15x+36=0$，解得 $x=3$ 或 $x=12$.又因为 $x\leqslant6$，且 $x-1\leqslant7$，所以 $x=3$.

(2) 将 $x=3$ 代入得 $C_{20}^{17}+C_{20}^{2}=C_{20}^{3}+C_{20}^{2}=C_{21}^{3}=1\ 330$.

12. **【解答】** 由题可知，分配方式可分为以下情况：

甲班分 2 本，乙班分 4 本，则有 $C_6^2C_4^4=15$ 种；

甲班分 3 本，乙班分 3 本，则有 $C_6^3C_3^3=20$ 种；

甲班分 4 本，乙班分 2 本，则有 $C_6^4C_2^2=15$ 种；

甲班分 2 本，乙班分 3 本，剩下的 1 本分给其他 3 个班级中的 1 个班，则有 $C_6^2C_4^3C_3^1=180$ 种；

甲班分 3 本，乙班分 2 本，剩下的 1 本分给其他 3 个班级中的 1 个班，则有 $C_6^3C_3^2C_3^1=180$ 种；

甲班分 2 本，乙班分 2 本，剩下的 2 本分给其他 3 个班级中的 1 个班，则有 $C_6^2C_4^2C_3^1=270$ 种；

甲班分 2 本，乙班分 2 本，剩下的 2 本分给其他 3 个班级中的 2 个班，则有 $C_6^2C_4^2C_3^1C_2^1=540$ 种.

综上，不同的分配方案共有 $15+20+15+180+180+270+540=1\ 220$ 种.

应用练

1. D　**【解析】** 设 $S=C_n^0+C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n$，则 $S=nC_n^n+(n-1)C_n^{n-1}+(n-2)C_n^{n-2}+\cdots+C_n^0$，又 $C_n^r=C_n^{n-r}$，所以 $2S=nC_n^0+nC_n^1+nC_n^2+\cdots+nC_n^{n-1}+nC_n^n+2C_n^0=n\cdot2^n+2$，所以 $S=n\cdot2^{n-1}+1$.由 $S<2\ 021$，得 $n\cdot2^{n-1}<2\ 020$.因为 $2^7=128,2^8=256$，所以 $8\times2^7=1\ 024<2\ 020,9\times2^8=2\ 304>2\ 020$，所以 n 的值为 8.

2. **【解答】** (1) 所作出的平面有三类.

①α 内 1 点，β 内 2 点确定的平面，最多有 $C_4^1C_6^2$个.

②α 内 2 点，β 内 1 点确定的平面，最多有 $C_4^2C_6^1$个.

③α，β 本身，有 2 个.

故所作的平面最多有 $C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1+2=98$ 个.

(2) 所作的三棱锥有三类.

①α 内 1 点，β 内 3 点确定的三棱锥，最多有 $C_4^1 \cdot C_6^3$个.

②α 内 2 点，β 内 2 点确定的三棱锥，最多有 $C_4^2 \cdot C_6^2$个.

③α 内 3 点，β 内 1 点确定的三棱锥，最多有 $C_4^3 \cdot C_6^1$个.

故最多可作出三棱锥有 $C_4^1C_6^3+C_4^2C_6^2+C_4^3C_6^1=194$ 个.

(3) 当等底面积、等高时，三棱锥的体积相等，所以体积不相同的三棱锥最多有 $C_6^3+C_6^2C_4^2+C_4^3=114$ 个，故最多有 114 个体积不同的三棱锥.

习题课　排列与组合的综合应用

1. C　**【解析】** 由 $A_{n-1}^2-n<7$，得$(n-1)(n-2)-n<7$，整理得 $n^2-4n-5<0$，解得$-1<n<5$.由题知，$n-1\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $n=3$ 或 $n=4$，即原不等式的解集为$\{3,4\}$.

2. D　**【解析】** 第一步先将三个数取出，有 $C_3^2 \cdot C_2^1=6$ 种，第二步对取出的三个数进行排列，共有 $A_3^3=6$ 种，所以完成两步共有 $6\times6=36$ 种.

3. C　**【解析】** 依题意，满足甲、乙两人值班安排在相邻两天的方案共有 $A_2^2A_6^6=1\ 440$(种)，其中满足甲、乙两人值班安排在相邻两天且丙在 10 月 1 日值班的方案共有 $A_2^2A_5^5=240$(种). 故满足甲、乙两人值班安排在相邻两天且丁排在 10 月 7 日值班的方案共有 $A_2^2A_5^5=240$(种)；满足甲、乙两个值班安排在相邻两天且丙在 10 月 1 日值班、丁在 10 月 7 日值班的方案共有 $A_2^2A_4^4=48$(种). 故满足题意的方案共有 $1\ 440-2\times240+48=1\ 008$(种).

4. C　**【解析】** 由题意，排课可分为以下两大类：①“丝”被选中，不同的方法总数为 $N_1=C_4^2A_2^2A_3^3A_4^2-C_4^2A_2^2A_2^2A_3^2=720$ 种；②“丝”不被选中，不同的方法总数为 $N_2=C_4^3A_2^2A_3^3A_4^2=576$ 种. 故共有 $N=720+576=1\ 296$ 种.

5. BC　**【解析】** 根据题意，对于 C_8^m和 C_8^{m-1}，有 $0\leqslant m-1\leqslant 8$ 且 $0\leqslant m\leqslant 8$，则有 $1\leqslant m\leqslant 8$.若 $C_8^{m-1}>3C_8^m$，则有$\dfrac{8!}{(m-1)!\ (9-m)!}>3\times\dfrac{8!}{m!\ (8-m)!}$，变形可得 $m>27-3m$，解得 $m>\dfrac{27}{4}$.综上得$\dfrac{27}{4}<m\leqslant 8$，则 $m=7$ 或 8.

6. BC　【解析】 根据题意，四个不同的小球放入三个分别标有 1～3 号的盒子中，且没有空盒，则三个盒子中有 1 个中放 2 个球，剩下的 2 个盒子中各放 1 个．有两种方法：①先将四个不同的小球分成 3 组，有 C_4^2种方法；将分好的 3 组全排列，对应放到 3 个盒子中，有 A_3^3种放法，则没有空盒的放法有 $C_4^2A_3^3$种．②在 4 个小球中任选 2 个，在 3 个盒子中任选 1 个，将选出的 2 个小球放入选出的盒子中，有 $C_4^2C_3^1$种情况；再将剩下的 2 个小球全排列，放入剩下的 2 个盒子中，有 A_2^2种放法，则没有空盒的放法有 $C_3^1C_4^2A_2^2$种．

7. ABC　【解析】 每人都安排一项工作的不同方法数为 4^5，选项 A 错误．每项工作至少有一人参加，则不同的方法数为 $C_5^2A_4^4$，选项 B 错误．如果司机工作不安排，其余三项工作至少安排一人，则这 5 名同学全部被安排的不同方法数为 $\left(\frac{C_5^3C_2^1}{A_2^2}+\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\right)A_3^3$，选项 C 错误．分两种情况：第一种，安排一人当司机，从丙、丁、戊选一人当司机有 C_3^1，从余下四人中安排三个岗位有$\frac{C_4^2C_2^1C_1^1A_3^3}{A_2^2}$，故有 $C_3^1\frac{C_4^2C_2^1C_1^1A_3^3}{A_2^2}=C_3^1C_4^2A_3^3$.第二种情况，安排两人当司机，从丙、丁、戊选两人当司机有 C_3^2，从余下三人中安排三个岗位有 A_3^3，故有 $C_3^2A_3^3$，故所求方案种数是 $C_3^1C_4^2A_3^3+C_3^2A_3^3$，选项 D 正确．

8. $\frac{1}{2}$　【解析】 从五种不同属性的物质中任取两种，基本事件总数 $n=C_5^2=10$，取出的两种物质恰是相克关系包含的基本事件有：水克火，木克土，火克金，土克水，金克木，共 5 种，则取出的两种物质恰是相克关系的概率为 $P=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

9. 42　【解析】 利用间接法，先在 8 个点中任取 3 个点，再减去三点共线的情况，因此，符合条件的三角形的个数为 $C_8^3-C_4^3-C_5^3=42$.

10. 120　78　【解析】 若没有限制条件，则共有 $A_5^4=120$ 种．若有限制条件，根据题意，分 3 种情况讨论：①从五名志愿者中选派的四人中有甲但没有乙，甲有 3 种安排方法，剩下三人全排列即可，此时有 $3\times A_3^3=18$ 种选派方法；②从五名志愿者中选派的四人中有乙但没有甲，乙有 3 种安排方法，剩下三人全排列即可，此时有 $3\times A_3^3=18$ 种选派方法；③从五名志愿者中选派的四人中既有甲又有乙，需要在剩下 3 人中选出 2 人，有 C_3^2种选法，选出 4 人的安排方法有 $A_3^3+2\times2\times A_2^2$种，则此时有 $C_3^2(A_3^3+2\times2\times A_2^2)=42$ 种选派方法．故一共有 18＋18＋

42＝78 种选派方法．

11. 【解答】 (1) 分三步完成：第一步，在 4 个偶数中取 3 个，有 C_4^3种情况；第二步，在 5 个奇数中取 4 个，有 C_5^4种情况；第三步，3 个偶数，4 个奇数进行全排列，有 A_7^7种情况．故符合题意的七位数有 $C_4^3C_5^4A_7^7=100\,800$ 个．

(2) 上述七位数中，3 个偶数排在一起有 $C_4^3C_5^4A_3^3A_5^5=14\,400$ 个．

(3) 上述七位数中，3 个偶数排在一起，4 个奇数也排在一起的有 $C_4^3C_5^4A_3^3A_4^4A_2^2=5\,760$ 个．

12. 【解答】 (1) 从 10 双鞋子中选取 4 双，有 C_{10}^4种不同选法，每双鞋子中各取一只，分别有 2 种取法，由分步乘法计数原理知，选取种数为 $N=C_{10}^4\times2^4=3\,360$ 种．

(2) 从 10 双鞋子中选 2 双有 C_{10}^2种取法，即有 45 种不同取法．

(3) 先选取一双有 C_{10}^1种选法，再从 9 双鞋中选取 2 双有 C_9^2种选法，每双鞋只取一只各有 2 种取法，根据分步乘法计数原理知，不同取法为 $N=C_{10}^1C_9^2\times2^2=1\,440$ 种．

13. 【解答】 (1) 把 A，B，C 三个球看成一个整体，则不同的排法总数为 $A_3^3A_5^5=720$ 种．

(2) A 在正中间，所以 A 的排法只有 1 种，因为 B，C，D 互不相邻，故 B，C，D 三个球不可能同在 A 的左侧或右侧，若 B，C，D 有 1 个在 A 的左侧，2 个在 A 的右侧，则不同的排法有 $C_3^2A_2^2C_3^1A_3^3=108$，同理可得若 B，C，D 有 2 个在 A 的左侧，2 个在 A 的右侧，不同的排法有 $C_3^2A_2^2C_3^1A_3^3=108$，故所求的不同排法总数为 $1\times216=216$ 种．

(3) 从 7 个位置中选出 4 个位置给 A，B，C，D，且 A，B，C，D 四个球按从左到右排，共有排法 C_7^4种，再排余下元素，共有 A_3^3种，故不同排法总数为 $C_7^4A_3^3=210$ 种．

(4) 三个盒子所放的球数分别为 1,3,3 或 2,2,3.若三个盒子所放的球数分别为 1,3,3，则不同排法共有 $C_7^1C_3^1\dfrac{C_6^3C_3^3}{A_2^2}\times A_2^2=420$；若三个盒子所放的球数分别为 2,2,3，则不同排法共有 $C_7^3C_3^1\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\times A_2^2=630$，故不同的排法总数为 1 050.

6．3　二项式定理

第 1 课时　二项式定理

对点练

例 1　【解答】　方法一：$\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=C_4^0(2\sqrt{x})^4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^0+C_4^1\cdot(2\sqrt{x})^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+C_4^2\cdot(2\sqrt{x})^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+C_4^3\cdot(2\sqrt{x})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3+C_4^4\cdot(2\sqrt{x})^0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=16x^2+32x+24+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}$.

方法二：$\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{1}{x^2}(2x+1)^4=\frac{1}{x^2}[C_4^0(2x)^4\cdot1^0+C_4^1\cdot(2x)^3\cdot1+C_4^2\cdot(2x)^2\cdot1^2+C_4^3\cdot(2x)\cdot1^3+C_4^4\cdot(2x)^0\cdot1^4]=\frac{1}{x^2}(16x^4+32x^3+24x^2+8x+1)=16x^2+32x+24+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}$.

例 2　【解答】　二项展开式的通项 $T_{k+1}=C_n^k\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{n-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}C_n^k x2n-\frac{5}{2}k$.

(1) 因为第 9 项为常数项，即当 $k=8$ 时，$2n-\frac{5}{2}k=0$，解得 $n=10$.

(2) 令 $2n-\frac{5}{2}k=5$，得 $k=\frac{2}{5}(2n-5)=6$，

所以 x^5 的系数为$(-1)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4C_{10}^6=\frac{105}{8}$.

(3) 要使 $2n-\frac{5}{2}k$，即$\frac{40-5k}{2}$为整数，只需 k 为偶数，由于 $k=0,1,2,3$，…，9,10，故符合要求的有 6 项，分别为展开式的第 1,3,5,7,9,11 项.

例 3　$\frac{1}{6}(7^n-1)$　【解析】$C_n^1+C_n^2\cdot6+\cdots+C_n^n\cdot6^{n-1}=\frac{1}{6}(C_n^1\cdot6+C_n^2\cdot6^2+\cdots+C_n^n\cdot6^n)=\frac{1}{6}(C_n^0+C_n^1\cdot6+C_n^2\cdot6^2+\cdots+C_n^n\cdot6^n-1)=\frac{1}{6}[(1+6)^n-1]=\frac{1}{6}(7^n-1)$.

变式　$(-1)^n$　【解析】　原式$=C_n^0+C_n^1(-2)^1+C_n^2(-2)^2+C_n^3(-2)^3+\cdots+C_n^n(-2)^n=(1-2)^n=(-1)^n$.

巩固练

1. D　【解析】　$\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{k+1}=C_5^kx^{2(5-k)}\left(-\frac{1}{2}\right)^kx^{-k}=C_5^k\left(-\frac{1}{2}\right)^kx^{10-3k}$，令 $10-3k=1$，解得 $k=3$，所以二项式展开式中，x 的系数为 C_5^3

$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{5}{4}$.

2. B　【解析】 因为$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$的展开式中$\frac{1}{x}$的系数为$(-1)^3C_5^3=-10$，所以$x\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$的展开式中常数项为$-10$.

3. D 【解析】原式可变为$(2^nC_n^0+2^{n-1}C_n^1+2^{n-2}C_n^2+2^{n-3}C_n^3+\cdots+C_n^n)-2^nC_n^0=(2+1)^n-2^n=3^n-2^n$.

4. B　【解析】 $(x-2)^9=[-3+(x+1)]^9$，则其展开式的通项为 $T_{r+1}=C_9^r(x+1)^r(-3)^{9-r}$，当 $r=8$ 时，$T_9=C_9^8(x+1)^8(-3)^1=-27(x+1)^8$，所以 $a_8=-27$.

5. BD　【解析】 因为$\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_n^rx^{n-r}(-1)^rx^{-r}=C_n^r(-1)^rx^{n-2r}$，若$\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中存在常数项，则只需 $n-2r=0$，即 $n=2r$.又 $n\in\mathbf{N}^*$，$r\in\mathbf{N}$，所以 n 只需为正偶数即可.

6. BD　【解析】 $(3\cdot\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x})^n$的通项公式是 $T_{r+1}=C_n^r\cdot(3\cdot x^{\frac{5}{6}})^{n-r}\cdot(-2x^{\frac{1}{2}})^r=C_n^r\cdot3^{n-r}\cdot(-2)^r\cdot x^{\frac{5n-2r}{6}}$，依题意$\frac{5n-2r}{6}$为整数，注意到 $0\leqslant r\leqslant n$，对照选择项知 $n=4,6,8$.逐一检验：当 $n=4$ 时，$r=1,4$，不满足条件；当 $n=6$ 时，$r=0,3,6$，成立；当 $n=8$ 时，$r=2,5,8$，成立.

7. AC　【解析】 $(1+x^2)(2+x)^4=(2+x)^4+x^2(2+x)^4$，展开式中 x^3 的系数分为两部分，一部分是$(2+x)^4$中含 x^3 的系数为 $C_4^3\cdot2=8$，另一部分是$(2+x)^4$中含 x 项的系数为 $C_4^1\cdot2^3=32$，所以含 x^3 的系数是 $8+32=40$，故 A 正确；展开式中常数项只有$(2+x)^4$展开式的常数项 $2^4=16$，故 C 正确.

8. 6　【解析】 $\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^7$的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r\cdot\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)^{7-r}\cdot(-3\cdot x^{-\frac{1}{2}})^r=(-1)^r\cdot3^{2r-7}\cdot C_7^r\cdot x^{\frac{7}{2}-r}$，令$\frac{7}{2}-r=-\frac{3}{2}$，得 $r=5$，故展开式中含 $x^{-\frac{3}{2}}$的项是第 6 项.

9. 11^n　【解析】 易知 $1+C_n^1\cdot10+C_n^2\cdot10^2+C_n^3\cdot10^3+\cdots+C_n^n\cdot10^n=(1+10)^n=11^n$.

10. 3 【解析】 因为 $(x^2+2)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5=(x^2+2)\cdot\left(C_5^0\frac{1}{x^{10}}-C_5^1\frac{1}{x^8}+C_5^2\frac{1}{x^6}-C_5^3\frac{1}{x^4}+C_5^4\frac{1}{x^2}-1\right)$，故它的展开式的常数项为 $C_5^4-2=3$.

11. 【解答】 $\left(3\sqrt{x}-\frac{2}{3x}\right)^{10}$的展开式的通项公式是 $T_{k+1}=C_{10}^k(3\sqrt{x})^{10-k}\left(-\frac{2}{3x}\right)^k$ $=(-2)^kC_{10}^k3^{10-2k}x^{\frac{10-3k}{2}}(k=0,1，\cdots，10)$.

(1) 展开式的第 4 项的二项式系数为 $C_{10}^3=120$.

(2) 展开式的第 4 项的系数为$(-2)^3 3^4 C_{10}^3=-77\ 760$.

(3) 由题知展开式的第 4 项为$-77\ 760\sqrt{x}$.

12. 【解答】 由题知 $T_3=C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^2=\frac{1}{4}C_n^2x^{\frac{n-3}{2}}$,

因为$\frac{1}{4}C_n^2=7$，所以 $C_n^2=28$，所以$\frac{n(n-1)}{2}=28$，所以 $n=8$(负值舍去).

(1) 前三项分别为 $T_1=C_8^0(\sqrt{x})^8\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^0=x^4$，$T_2=C_8^1(\sqrt{x})^7\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^1=4x^{\frac{13}{4}}$，$T_3=C_8^2(\sqrt{x})^6\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^2=7x^{\frac{5}{2}}$，所以前三项系数分别为 1,4,7，

因为 $2\times4=1+7$，所以前三项系数成等差数列.

(2) $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^r=\frac{1}{2^r}C_8^rx^{4-\frac{3r}{4}}$，$r=0,1，2，\cdots，8$，所以 $r=0,4,8$ 时展开式中 x 的指数为整数，

所以展开式中所有有理项为 $T_1=\left(\frac{1}{2}\right)^0C_8^0x^4=x^4$，$T_5=\frac{1}{2^4}C_8^4x=\frac{35}{8}x$，$T_9=\frac{1}{256}C_8^8x^{-2}=\frac{1}{256x^2}$.

拓展练

1. B 【解析】 $[(x+2y)+z]^6$展开式中含 z^2 项为 $C_6^2(x+2y)^4z^2$，$(x+2y)^4$展开式中 xy^3 项的系数为 $C_4^3\times2^3$，x^2y^2 项的系数为 $C_4^2\times2^2$，所以$(x-y)(x+2y+z)^6$展开式中 $x^2y^3z^2$ 的系数为 $C_6^2C_4^3\times2^3-C_6^2C_4^2\times2^2=480-360=120$.

2. 【解答】 因为 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>2$，所以 $3^n=(2+1)^n=2^n+C_n^1\cdot2^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot2$

$+1\geqslant 2^n+n\cdot 2^{n-1}+2n+1>2^n+n\cdot 2^{n-1}=(n+2)\cdot 2^{n-1}$，故 $3^n>(n+2)\cdot 2^{n-1}$.

第 2 课时　二项式系数的性质

对点练

例 1　【解答】 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(\sqrt{x})^{8-r}\cdot\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)^r=(-1)^r\cdot C_8^r\cdot 2^r\cdot x4-\dfrac{5}{2}r(r=0,1,2,\cdots,8)$.

(1) 设第 $r+1$ 项系数的绝对值最大，则$\begin{cases}C_8^r\cdot 2^r\geqslant C_8^{r+1}\cdot 2^{r+1},\\ C_8^r\cdot 2^r\geqslant C_8^{r-1}\cdot 2^{r-1},\end{cases}$

所以$\begin{cases}\dfrac{1}{8-r}\geqslant\dfrac{2}{r+1},\\ \dfrac{2}{r}\geqslant\dfrac{1}{9-r},\end{cases}$　　解得 $5\leqslant r\leqslant 6$.

又因为 $0\leqslant r\leqslant 8$，$r\in\mathbf{N}$，所以 $r=5$ 或 $r=6$，

故系数的绝对值最大的项是第 6 项和第 7 项.

(2) 二项式系数最大的项为中间项，即第 5 项，

$T_5=C_8^4\cdot 2^4\cdot x4-\dfrac{20}{2}=1\ 120x^{-6}$.

(3) 由(1)知展开式中第 6 项和第 7 项的系数的绝对值最大，而第 6 项的系数为负，第 7 项的系数为正，所以系数最大的项为 $T_7=C_8^6\cdot 2^6\cdot x^{-11}=1\ 792x^{-11}$.

变式　【解答】 $T_6=C_n^5(2x)^5$，$T_7=C_n^6(2x)^6$，依题意有 $C_n^5 2^5=C_n^6 2^6$，解得 $n=8$.故$(1+2x)^8$ 的展开式中，二项式系数最大的项为 $T_5=C_8^4\cdot(2x)^4=1\ 120x^4$.

设第 $k+1$ 项系数最大，则有

$\begin{cases}C_8^k\cdot 2^k\geqslant C_8^{k-1}\cdot 2^{k-1},\\ C_8^k\cdot 2^k\geqslant C_8^{k+1}\cdot 2^{k+1}\end{cases}$　$\Rightarrow 5\leqslant k\leqslant 6$，又 $k\in\{0,1,2,\cdots,8\}$，故 $k=5$ 或 $k=6$.故系数最大的项为 $T_6=1\ 792x^5$，$T_7=1\ 792x^6$.

例 2　【解答】(1) $1+2+2^2+\cdots+2^{5n-1}=\dfrac{2^{5n}-1}{2-1}=2^{5n}-1=32^n-1=(31+1)^n-1=C_n^0\times 31^n+C_n^1 31^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}\times 31+C_n^n-1=31(C_n^0\times 31^{n-1}+C_n^1\times 31^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1})$，

显然上式括号内的数为整数，所以原式能被 31 整除.

(2) $S=C_{27}^1+C_{27}^2+\cdots+C_{27}^{27}=2^{27}-1=8^9-1=(9-1)^9-1=C_9^0\times 9^9-C_9^1\times 9^8$

$+\cdots+C_9^8\times 9-C_9^9-1=9(C_9^0\times 9^8-C_9^1\times 9^7+\cdots+C_9^8)-2=9(C_9^0\times 9^8-C_9^1\times 9^7+\cdots+C_9^8-1)+7$，

显然上式括号内的数是正整数，故 S 除以 9 的余数是 7.

例 3　**【解答】**　令 $x=1$，

则 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=-1$.①

令 $x=-1$，则 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_7=3^7$.②

(1) 令 $x=0$，得 $a_0=1$，代入①中得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=-2$.

(2) 由①－②得 $2a_1+2a_3+2a_5+2a_7=-1-3^7$，所以 $a_1+a_3+a_5+a_7=\dfrac{-1-3^7}{2}=-1\ 094$.

(3) 由①＋②得 $2a_0+2a_2+2a_4+2a_6=-1+3^7$，所以 $a_0+a_2+a_4+a_6=\dfrac{-1+3^7}{2}=1\ 093$.

变式　**【解答】**　方法一：因为$(1-2x)^7$的展开式中，a_0，a_2，a_4，a_6 大于零，而 a_1，a_3，a_5，a_7 小于零，所以$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_7|=(a_0+a_2+a_4+a_6)-(a_1+a_3+a_5+a_7)=1\ 093-(-1\ 094)=2\ 187$.

方法二：$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_7|$是$(1+2x)^7$展开式中各项的系数和，令 $x=1$，所以$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_7|=3^7=2\ 187$.

巩固练

1. B　**【解析】**　$(a-x)^5$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=(-1)^k\cdot C_5^k a^{5-k}x^k$，令 $k=2$，得 $a_2=10a^3$，由题可知 $10a^3=80$，解得 $a=2$，即$(2-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$. 令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5=1$.

2. B　**【解析】**　因为 $1-90C_{10}^1+90^2C_{10}^2-90^3C_{10}^3+\cdots+90^{10}C_{10}^{10}=(1-90)^{10}=(1+88)^{10}=1+88C_{10}^1+88^2C_{10}^2+88^3C_{10}^3+\cdots+88^{10}C_{10}^{10}=1+88(C_{10}^1+88C_{10}^2+88^2C_{10}^3+\cdots+88^9C_{10}^{10})$，所以 $1-90C_{10}^1+90^2C_{10}^2-90^3C_{10}^3+\cdots+90^{10}C_{10}^{10}$除以 88 的余数是 1.

3. D　**【解析】**　因为在$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)^n$的展开式中，只有第 5 项的二项式系数最大，所以 $n=8$，所以$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)^8$的展开式的通项 $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\left(-\frac{1}{2}x\right)^r=C_8^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x\frac{8+r}{2}$，$r=0,1,2$，…，8.令$\frac{8+r}{2}=5$，得 $r=2$，所以展开式中 x^5 的系数为 $C_8^2\left(-\frac{1}{2}\right)$

$^2=7$.

4. B　**【解析】**　令 $x=1$ 可得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=(1+1)^3(1-2)^4=8$.令 $x=-1$ 可得：$a_0-a_1+a_2+\cdots-a_7=(1-1)^3(1+2)^4=0$.两式相加得 $2(a_0+a_2+a_4+a_6)=8$，所以 $a_0+a_2+a_4+a_6=4$.

5. ABD　**【解析】**　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中所有二项式系数和为 $2^6=64$，A 正确；令 $x=1$ 可得$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为$(1-1)^6=0$，B 正确；通项为 $C_6^r(-1)^rx^{6-2r}$，令 $6-2r=0$，得 $r=3$，所以$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为 $C_6^3(-1)^3=-20$，C 错误；$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式共有 7 项，二项式系数最大为第 4 项，D 正确.

6. AC　**【解析】**　$(a-b)^{11}$ 的展开式中的二项式系数之和为 $2^{11}=2\,048$，所以 A 正确；因为 $n=11$ 为奇数，所以展开式中有 12 项，中间两项(第 6 项和第 7 项)的二项式系数相等且最大，所以 B 不正确，C 正确；展开式中第 6 项的系数为负数，不是最大值，所以 D 不正确.

7. CD　**【解析】**　令 $x=1$，可得展开式中各项系数的和为 4^n，又二项式系数的和为 2^n，所以 $4^n-2^n=992$，解得 $n=5$.对 A：因为二项式展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和，所以展开式中，偶数项的二项式系数的和为$\dfrac{2^5}{2}=2^4$，故 A 错误；对 B：因为 $n=5$，所以第三项、第四项的二项式系数最大，故 B 错误；对 C：$T_{r+1}=C_5^r\cdot(x^{\frac{2}{3}})^{5-r}\cdot(3x^2)^r=C_5^r\cdot3^r\cdot x^{\frac{10+4r}{3}}$，设展开式中系数最大的项是第 $r+1$ 项，则$\begin{cases}C_5^r\cdot3^r\geqslant C_5^{r-1}\cdot3^{r-1},\\ C_5^r\cdot3^r\geqslant C_5^{r+1}\cdot3^{r+1},\end{cases}$　解得$\dfrac{7}{2}\leqslant r\leqslant\dfrac{9}{2}$，又 $r\in\mathbf{N}$，所以 $r=4$，所以展开式中系数最大的项只有第五项，故 C 正确；对 D：若 T_{r+1} 是有理项，则$\dfrac{10+4r}{3}$为整数，又 $0\leqslant r\leqslant5$，$r\in\mathbf{N}$，所以 $r=2,5$，所以展开式中有理项为第三项、第六项，故 D 正确.

8. $6x$　**【解析】**　因为 $8<C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n<32$，即 $8<2^n<32$，且 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=4$.所以展开式共有 5 项，系数最大的项为 $T_3=C_4^2(\sqrt{x})^2=6x$.

9. 5　**【解析】**　$(7a+b)^{10}$ 的展开式中二项式系数的和为 $C_{10}^0+C_{10}^1+\cdots+C_{10}^{10}=$

2^{10}，令$(x+3y)^n$中$x=y=1$，则由题知$4^n=2^{10}$，即$2^{2n}=2^{10}$，解得$n=5$.

10. 日 【解析】 因为 $2^{3n+3}+7n+5=8^{n+1}+7n+5=(7+1)^{n+1}+7n+5=7^{n+1}+C_{n+1}^{1}7^{n}+C_{n+1}^{2}7^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^{n}\cdot 7+C_{n+1}^{n+1}+7n+5=7(7^{n}+C_{n+1}^{1}7^{n-1}+C_{n+1}^{2}7^{n-2}+\cdots+C_{n+1}^{n}+n)+6$，显然上式括号内的数是正整数，所以 $2^{3n+3}+7n+5$ 被 7 除所得的余数为 6.所以对于任意自然数 n，经过$(2^{3n+3}+7n+5)$天后的那一天是星期日.

11. 【解答】 设$(2x-3y)^9=a_0x^9+a_1x^8y+a_2x^7y^2+\cdots+a_9y^9$.

(1) 二项式系数之和为 $C_9^0+C_9^1+C_9^2+\cdots+C_9^9=2^9$.

(2) 各项系数之和为 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$，令 $x=1$，$y=1$，所以 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=(2-3)^9=-1$.

(3) 由(2)知，$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=-1$，

令 $x=1$，$y=-1$ 可得 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9=5^9$，

将两式相加可得 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=\dfrac{5^9-1}{2}$，

即所有奇数项系数之和为$\dfrac{5^9-1}{2}$.

(4) $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9$，令 $x=1$，$y=-1$，则$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=5^9$.

12. 【解答】 由题意知，$2^{2n}-2^n=992$①，

即$(2^n-32)(2^n+31)=0$，所以 $2^n=32$，解得 $n=5$.

(1) $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$的展开式中第 6 项的二项式系数最大，即 $T_6=C_{10}^{5}\cdot(2x)^5\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^5=-8\,064$②.

(2) 设第 $r+1$ 项的系数的绝对值最大，

因为 $T_{r+1}=C_{10}^{r}\cdot(2x)^{10-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_{10}^{r}\cdot 2^{10-r}\cdot x^{10-2r}$，

所以$\begin{cases}C_{10}^{r}\cdot 2^{10-r}\geqslant C_{10}^{r-1}\cdot 2^{11-r},\\ C_{10}^{r}\cdot 2^{10-r}\geqslant C_{10}^{r+1}\cdot 2^{10-r-1},\end{cases}$ 即$\begin{cases}C_{10}^{r}\geqslant 2C_{10}^{r-1},\\ 2C_{10}^{r}\geqslant C_{10}^{r+1},\end{cases}$ 即$\begin{cases}11-r\geqslant 2r,\\ 2(r+1)\geqslant 10-r,\end{cases}$ 解得$\dfrac{8}{3}\leqslant r\leqslant\dfrac{11}{3}$.

因为 $r\in\mathbf{N}$，所以 $r=3$，故系数的绝对值最大的项是第 4 项，$T_4=-C_{10}^{3}\cdot 2^7\cdot x^4=-15\,360x^4$.

拓展练

1. B　【解析】 因为$(1+\lambda x)^n$展开式中第三项的二项式系数与第四项的二项式系数相等，所以可得 $n=5$.令 $x=0$，得 $1=a_0$.因为 $a_1+a_2+\cdots+a_5=242$.令 $x=1$，则$(1+\lambda)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5=243$，解得 $\lambda=2$.令 $x=-1$，则$(1-2)^5=a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^5a_5=-1$.

2. 【解答】 (1) 对于$(2x-1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，令 $x=1$ 得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=1$.

(2) ①对$(2x-1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 两边求导得 $2n(2x-1)^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$，

取 $x=1$ 得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2n$.

②将 $2n(2x-1)^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$ 两边同乘 x，得 $2n(2x-1)^{n-1}\cdot x=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots+na_nx^n$，两边求导得 $2n[2(n-1)(2x-1)^{n-2}x+(2x-1)^{n-1}]=a_1+2^2a_2x+3^2a_3x^2+\cdots+n^2a_nx^{n-1}$, 令 $x=1$，得 $1^2a_1+2^2a_2+3^2a_3+\cdots+n^2a_n=4n^2-2n$.

章复习　能力整合与素养提升

1. B　【解析】 $\left(1+x+\frac{1}{x^{2\,020}}\right)^{10}$的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_{10}^{r}\cdot\left(x+\frac{1}{x^{2\,020}}\right)^r$.对于$\left(x+\frac{1}{x^{2\,020}}\right)^r$，其通项公式为 $T_{k+1}=\mathrm{C}_r^k\cdot x^{r-2\,021k}$，$k\leqslant r$，$r$，$k\in\mathbf{N}$，$r\leqslant10$.令 $r-2\,021k=2$，可得 $r=2+2\,021k$，故 $k=0$，$r=2$，故 x^2 项的系数为 $\mathrm{C}_{10}^2\cdot\mathrm{C}_2^0=45$.

2. C　【解析】 $(2+x^2)^6=a_0+a_1x^2+a_2x^4+a_3x^6+a_4x^8+a_5x^{10}+a_6x^{12}$，令 $x=0$，可得 $a_0=2^6=64$.又由二项式$(2+x^2)^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\cdot2^{6-r}(x^2)^r=2^{6-r}\cdot\mathrm{C}_6^r\cdot x^{2r}$，令 $r=5$，可得 $T_6=2\cdot\mathrm{C}_6^5\cdot x^{10}=12x^{10}$，所以 $a_5=12$，所以 $a_0+a_5=64+12=76$.

3. B　【解析】 有 5 名志愿者被分配到 3 个不同巡查点进行防汛抗洪志愿活动，要求每人只能去一个巡查点，每个巡查点至少有一人，包括两种情况：一是按照 2,2,1 分配，有$\frac{1}{2}\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_3^3=90$ 种结果，二是按照 3,1,1 分配，有$\frac{1}{2}\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{A}_3^3=60$ 种结果．不同分配方案的总数为 $90+60=150$.

4. C　【解析】 根据题意，红色至少要涂两个圆，而且相邻两个圆所涂颜色不能相同，则红色只能涂第一、三个圆、第二、四个圆或第一、四个圆，分 3

种情况讨论：①用红色涂第一、三个圆，此时第 2 个圆不能为红色，有 4 种涂色方法，第 4 个圆也不能为红色，有 4 种涂色方法，则此时共有 $4\times4=16$(种)涂色方案；②同理，当用红色涂第二、四个圆也有 16 种涂色方案；③用红色涂第一、四个圆，此时需要在剩下的 4 种颜色中，任取 2 种，涂在第二、三个圆中，有 $A_4^2=12$ 种涂色方案．则一共有 $16+16+12=44$(种)不同的涂色方案．

5. AC　【解析】 $2^8=256$，A 正确；展开式中第 5 项的二项式系数最大，B 错误；$T_{r+1}=C_8^r(x^2)^{8-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_8^rx^{16-3r}$，令 $r=4$，得 $T_5=C_8^4x^4=70x^4$，C 正确；令 $16-3r=0$，$r\in\mathbf{N}$，无解，故展开式中无常数项，D 错误．

6. CD　【解析】 对于选项 A，如果四名男生必须连排在一起，将这四名男生捆绑，形成一个“大元素”，此时，共有 $A_4^4A_4^4=24^2=576$ 种不同的排法，故 A 错误；对于选项 B，如果三名女生必须连排在一起，将这三名女生捆绑，形成一个“大元素”，此时，共有 $A_3^3A_5^5=6\times120=720$ 种不同的排法种数，故 B 错误；对于选项 C，如果女生不能站在两端，则两端安排男生，其他位置的安排没有限制，此时，共有 $A_4^2A_5^5=12\times120=1\ 440$ 种不同的排法种数，故 C 正确；对于选项 D，如果三个女生中任何两个均不能排在一起，将女生插入四名男生所形成的 5 个空中，此时，共有 $A_4^4A_5^3=24\times60=1440$ 种不同的排法种数，故 D 正确．

7. ABD　【解析】 因为相邻手势不相同，所以选择时除第一个手势有 12 种选择，后面手势都只有 11 种选择，所以共有 $12\times11^{n-1}$ 种不同手势．对于 A，$n=7$ 时，有 $12\times11^{n-1}=12\times11^{7-1}=12\times11^6$ 种，故 A 错．对于 B，$n=4$ 时，有 12×11^3 种，$A_{12}^4=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times4}\neq12\times11^3$，故 B 错．对于 C，$n=3$ 时，有 $12\times11^2=1\ 452$ 种，故 C 对．对于 D，$n=11$ 时，有 12×11^{10} 种，$n=10$ 时，有 12×11^9 种，故 $n=11$ 时的种类是 $n=10$ 时的 11 倍，D 错．

8. 2　1　【解析】$(ax-1)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot a^{6-r}\cdot x^{6-r}\cdot(-1)^r$，令 $6-r=3$，解得 $r=3$.故$(ax-1)^6$ 展开式中 x^3 的系数为$-C_6^3\cdot a^3=-160$，解得 $a=2$，故$(ax-1)^6=(2x-1)^6$ 展开式中各项系数和为 $(2-1)^6=1$.

9. 192　【解析】 由题意，要求数学课排在上午(前 4 节)，体育课排在下午(后 2 节)，有 $C_4^1C_2^1=8$(种)．再排其余 4 节，有 $A_4^4=24$(种)．根据乘法原理，共有 $8\times24=192$(种)方法．

10. 204　**【解析】** 由题意得取出的4张卡片上的数字含有相同数字对的个数可能为 0,1,2.当含有 0 对相同数字时，组成的不同的四位数的个数为 $A_4^4=24$ 个；当含有1对相同数字时，组成的不同的四位数的个数为 $C_4^1C_3^2A_4^2=144$ 个；当含有2对相同数字时，组成的不同的四位数的个数为 $C_4^2C_4^2=36$ 个．综上，可以组成不同的四位数的个数为 $24+144+36=204$ 个.

11. **【解答】** (1) 偶数分为两类：若个位数0，则有 $A_4^2=12$ 个.

若个位数是2或4，则首位数不能为0，则共有 $2\times3\times3=18$ 个；故所求偶数的个数为 $12+18=30$.

(2) “凹数”分三类：若十位是0，则有 $A_4^2=12$ 个；若十位是1，则有 $A_3^2=6$ 个；若十位是2，则有 $A_2^2=2$ 个；故符合条件的“凹数”的个数为 $12+6+2=20$.

12. **【解答】** (1) 除去一定担任语文科代表的女生后，先选后排，共有不同选法 $C_7^4\cdot A_4^4=840$ 种.

(2) 先选后排，但先安排不担任语文科代表的该男生，所以共有不同选法 $C_7^4\cdot C_4^1\cdot A_4^4=3\ 360$ 种.

(3) 先从剩下的6人中选3人有 C_6^3 种，再安排必须担任科代表，但不担任数学科代表的该男生有 C_3^1 种选法，其余3人全排列有 A_3^3 种方法，所以共有不同选法 $C_6^3\cdot C_3^1\cdot A_3^3=360$ 种.

13. **【解答】** (1) 令 $x=0$，则 $a_0=1$.令 $x=-\frac{1}{2}$，则 $a_0-\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_3}{2^3}+\cdots+(-1)^n\frac{a_n}{2^n}=0$，所以 $S=0-1=-1$.

(2) 由 $\begin{cases}2^8C_n^8>2^7C_n^7,\\2^8C_n^8>2^9C_n^9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n>11,\\n<\frac{25}{2},\end{cases}$ 所以 $n=12$.

(3) $\left(1+\frac{1}{1\ 000}\right)^{2\ 022}>1+C_{2\ 022}^1\frac{1}{1\ 000}+C_{2\ 022}^2\left(\frac{1}{1\ 000}\right)^2+C_{2\ 022}^3\left(\frac{1}{1\ 000}\right)^3+C_{2\ 022}^4\left(\frac{1}{1\ 000}\right)^4>1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=7$.