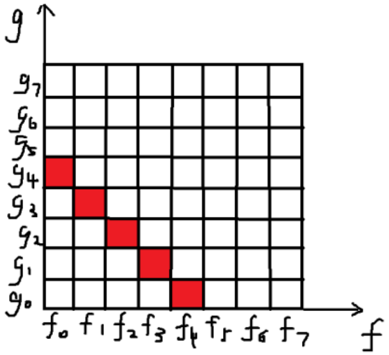
（半）在线卷积简介

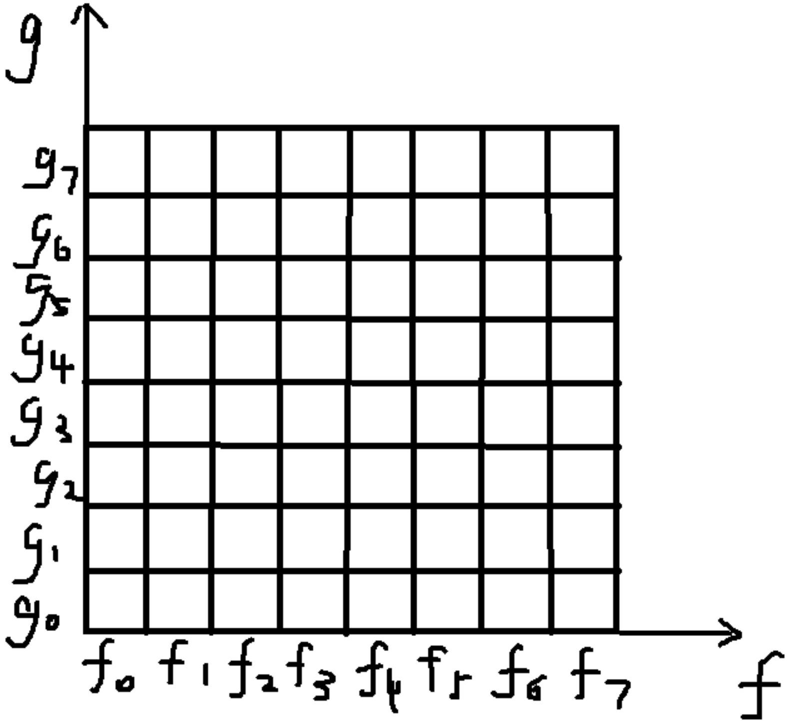
2021.9

多项式/形式幂级数的离线卷积

- 我们使用简单的图表来表示“贡献”这一说法。
- 设多项式 $f \coloneqq \sum_{0 \le i \le n} f_i x^i \in \mathbb{F}_{998244353}[x]$
- 和 $g \coloneqq \sum_{0 \le i \le n} g_i x^i \in \mathbb{F}_{998244353}[x]$
- 均离线给出即系数在计算前都已知。
- 观察右图 $[x^i]fg = \sum_{j+k=i} f_j g_k$ 例：
- $[x^4]fg$为下图

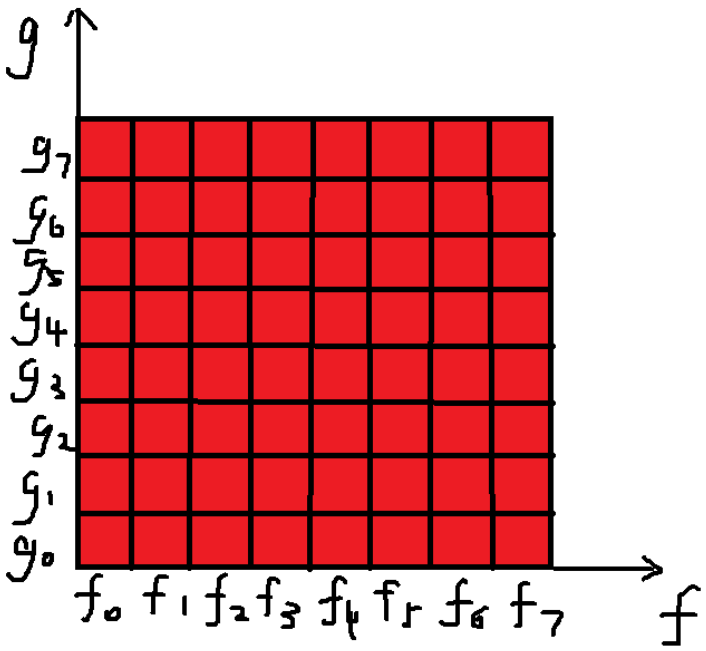


- 可以发现这些红色的方块都对 fg 的
- 同一个次数的系数产生贡献



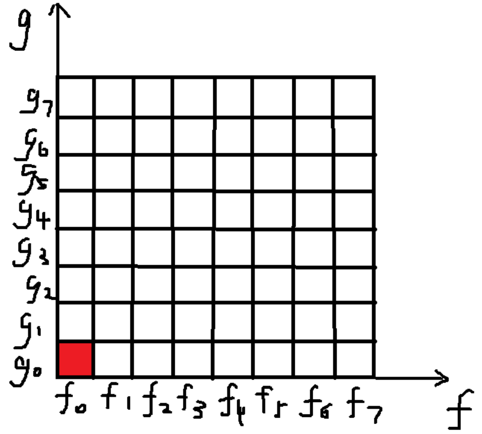
多项式/形式幂级数的离线卷积

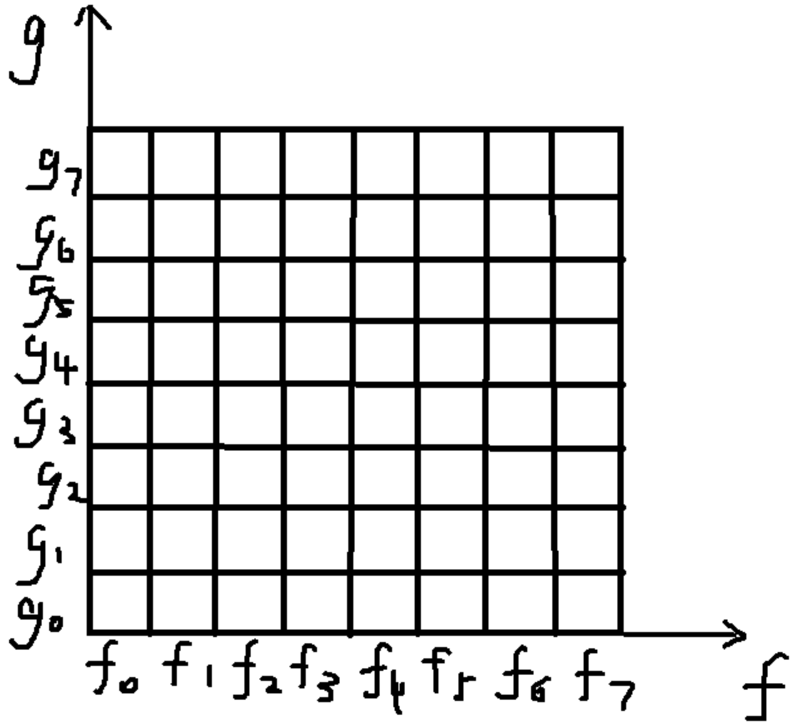
- 离线卷积实际上计算了整个正方形的贡献，我们将它涂成红色
- 换言之，我们知道了一次离线卷积
- 可以轻易完成一个正方形的贡献。
- 离线卷积可用 NTT 完成。
- 具体的，我们求 f 和 g 的 $2n$ 长的 DFT 再
- 将点值逐点相乘（Hadamard 积）
- 后进行一次 $2n$ 长的 IDFT 即可。
- 若计算 $2n$ 长 DFT 和 IDFT 的时间为 $O(\mathcal{M}(n))$ 那么
- 离线算法的时间为 $O(\mathcal{M}(n))$ 。



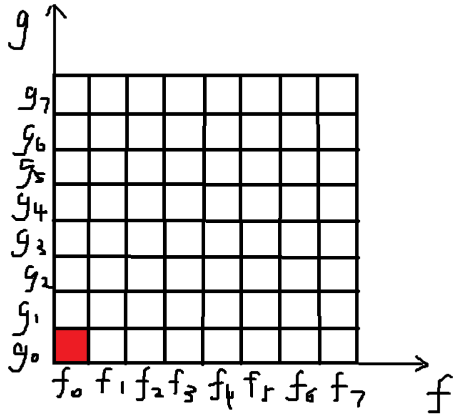
多项式/形式幂级数的半在线卷积

- 仍然考虑上述卷积问题，但是此时
- g 的系数离线给出，但 f 的系数在线一个一个给出
- 我们首先给出 f_0 且要求计算出 $[x^0]fg$ 后才会给出 f_1
- 后给出 f_1 且要求计算 $[x^1]fg$ ，以此类推。
- 因为该算法中的多项式一半离线一半在线所以被称为
- 半在线（semi-relaxed/half-line）算法。
- 考虑一种朴素算法，朴素算法是在线的。

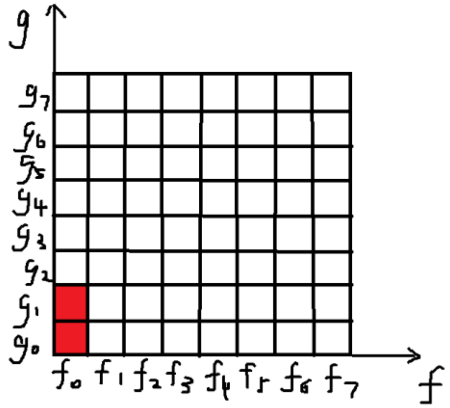




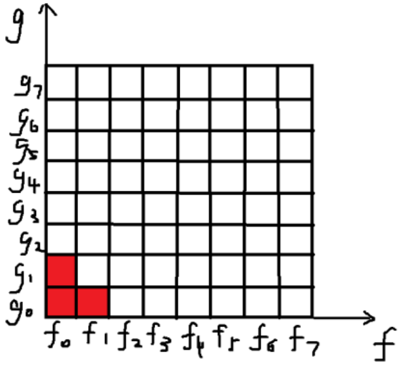
朴素在线卷积算法



f_0 和 g_0 都给出了，直接计算。

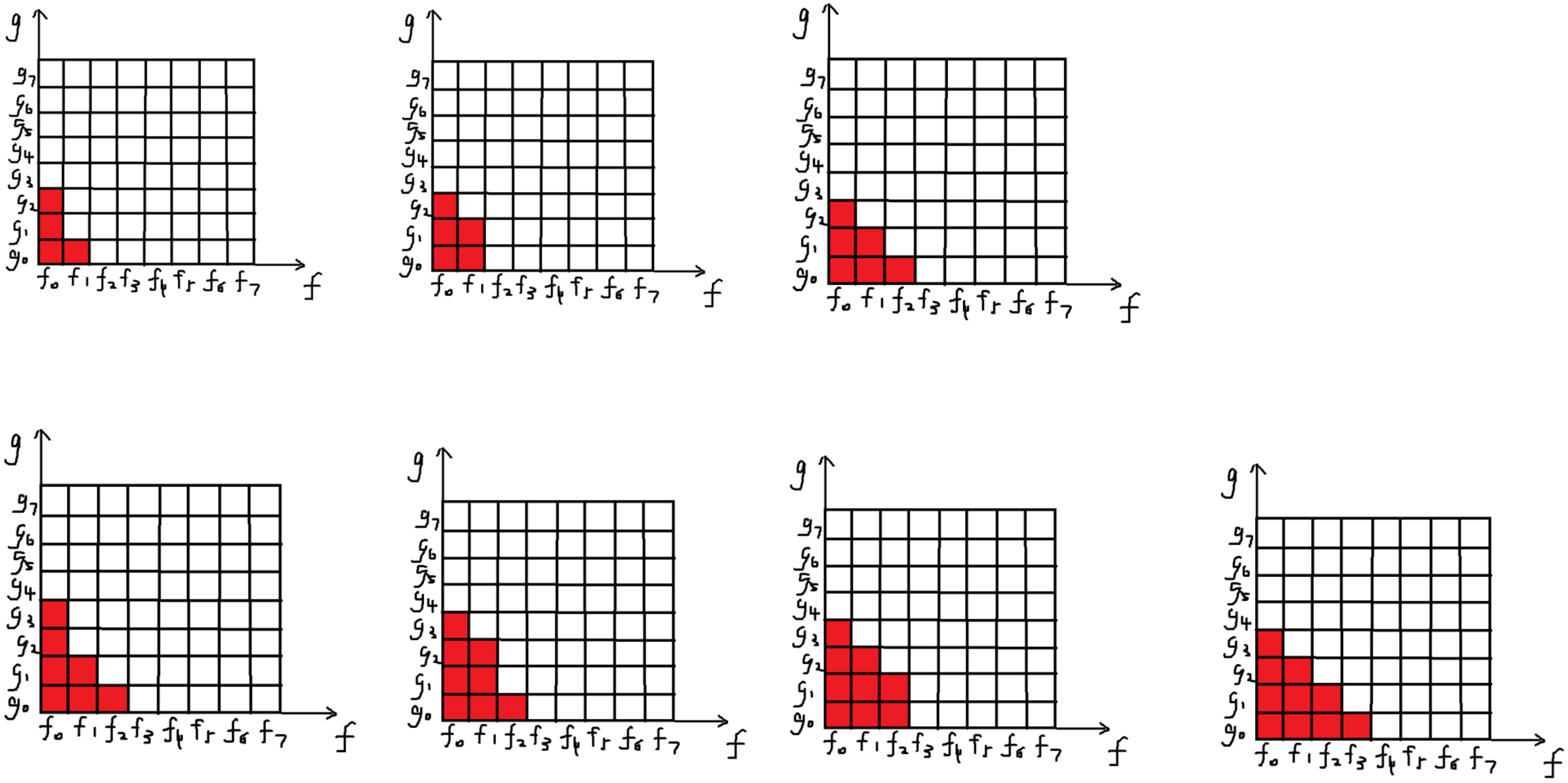


给出 g_1 和 f_1，计算 f_0g_1 的贡献



计算 f_1g_0 的贡献
即得 $[x^1]fg$ 。

朴素在线卷积算法

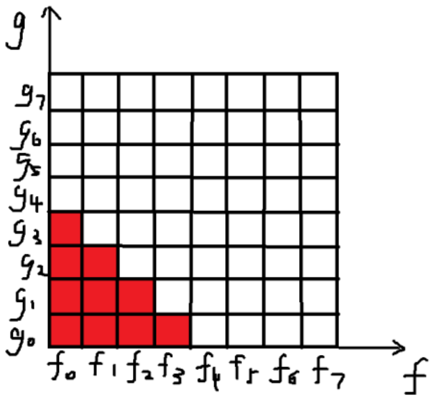


朴素在线卷积算法

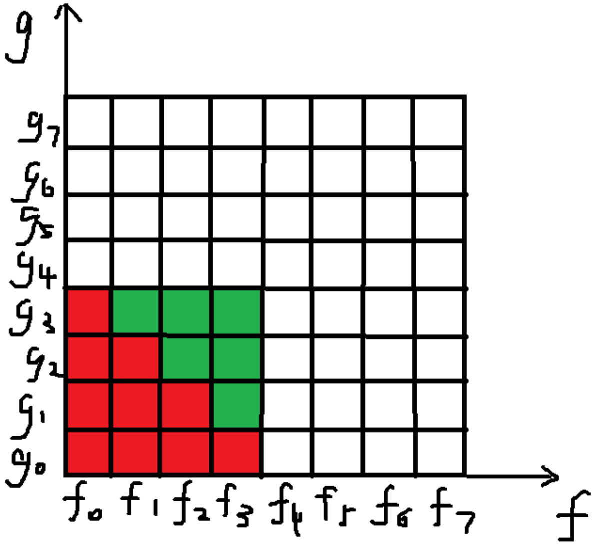
- 发现就是一个简单的迭代过程，但是该算法是在线的。
- 朴素算法时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

一个想法

- 观察刚刚的朴素算法，我们仅计算了下三角形的贡献。



- 但此时我们能够离线计算的其实有
- 即红色和绿色部分

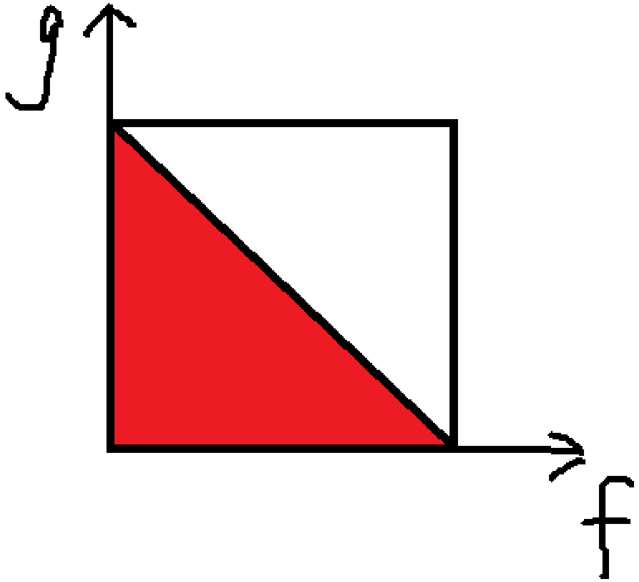


一个想法

- 如果我们可以将大正方形的贡献划分为一个个小的正方形
- 使得小正方形可以离线计算，那么就可能得到高效的在线算法。
- 另一种想法是作一些不一样的划分，因为大部分时候我们不需要整个正方形的贡献，而仅仅需要这个三角形的贡献（因为形式幂级数运算一般只需要前 n 项），不妨将 Base Case 设置为小三角形的贡献，我们先来看这种想法，并且我们先考虑半在线算法，后面再讨论在线算法，这里引入朴素算法的目的是使用朴素算法计算 Base Case 。

Base Case

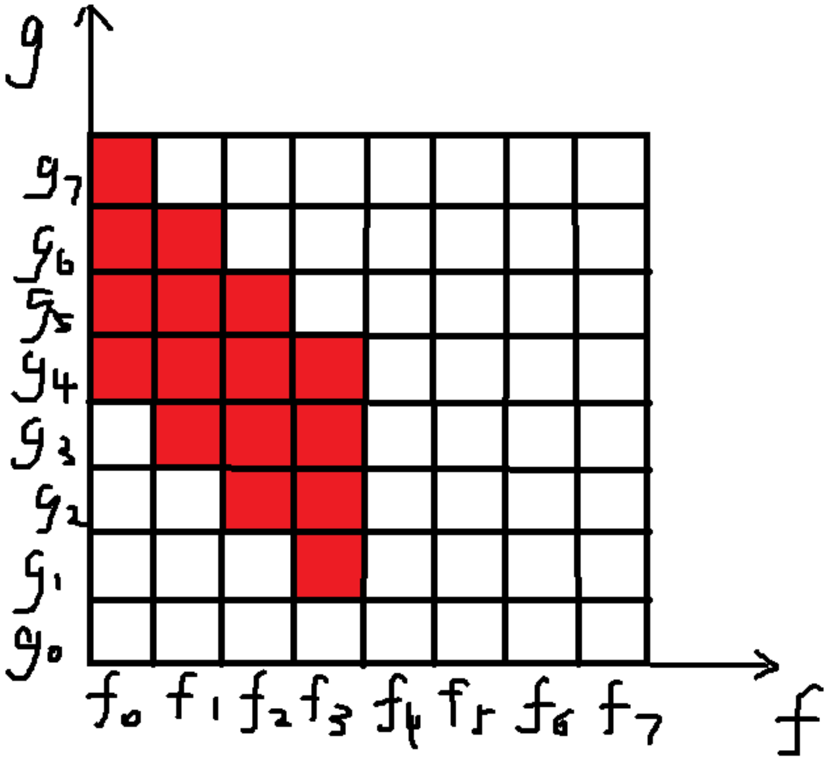
- 前述的朴素算法仅计算下三角形的贡献，我们令
- $n < 32$ 时的情况使用朴素算法作为 Base Case 。



这是一个粗糙的表示，省略了小正方形。

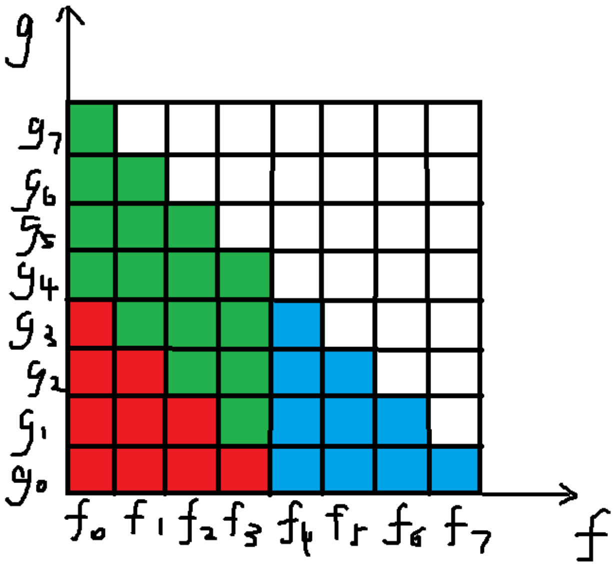
循环卷积（Middle Product）

- 考虑计算右图红色部分的贡献
- 我们令 $f_A := f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3$
- 求 f_A 的 8 长 DFT 和
- $g := \sum_{0 \le i \le 7} g_i x^i$ 的 8 长 DFT
- 并逐点相乘再 IDFT 后取高位的 4
- 项系数即为红色部分贡献
- 这是因为循环卷积
- 计算的是 $f_A g \bmod (x^8 - 1)$

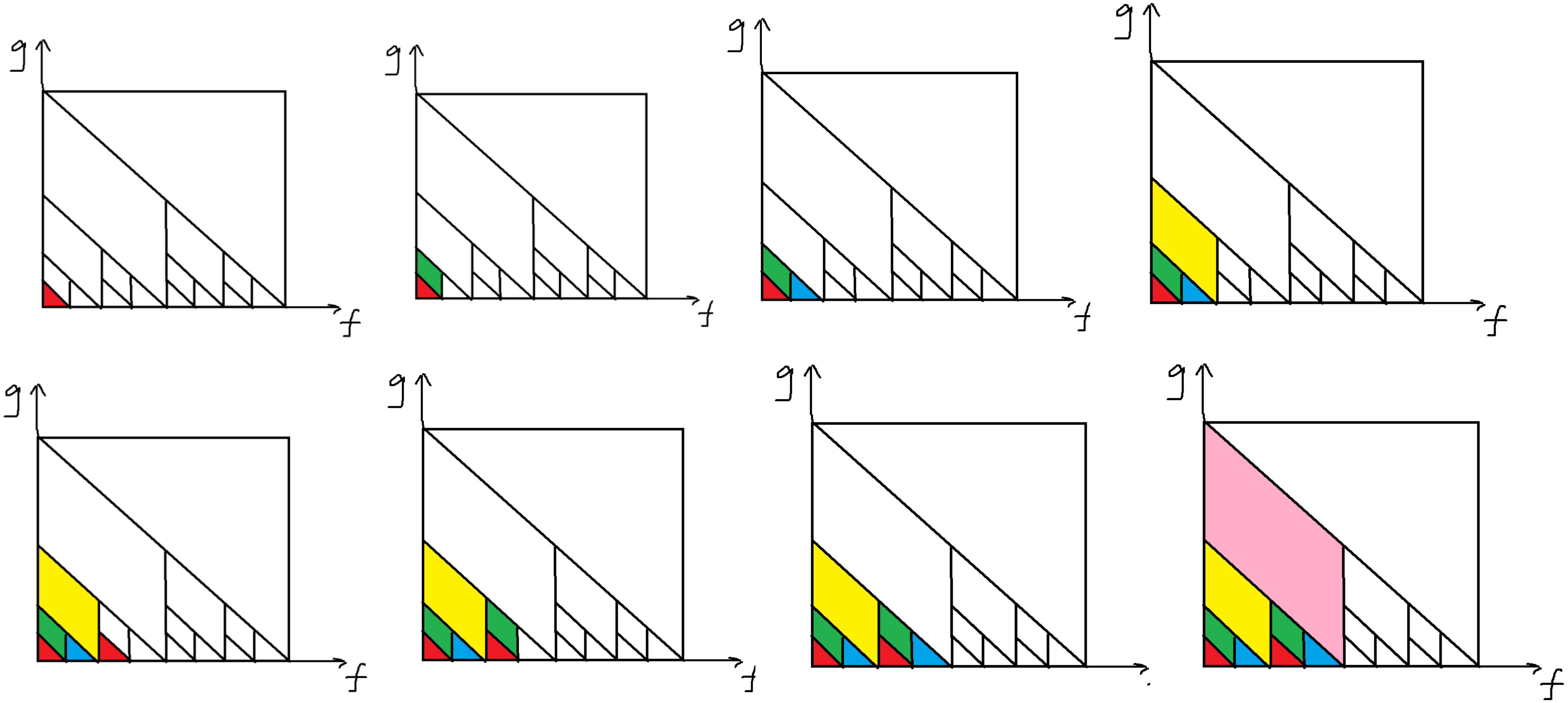


常见的分治半在线卷积

- 一般常见的半在线卷积通常被描述为，计算前一段对后一段的贡献，这个形容有些抽象，我们不妨使用前述图表的方式来描述。
- 考虑右图中，红色和蓝色方块为 Base Case
- 朴素计算即可，但我们注意 f 的系数是在线
- 给出的，所以在开始计算蓝色部分前，我们
- 先计算绿色部分，这可以使用循环卷积完成。
- 再使用朴素算法计算蓝色部分即可。
- 绿色部分即前半部分对后半部分的“贡献”。



倍增计算

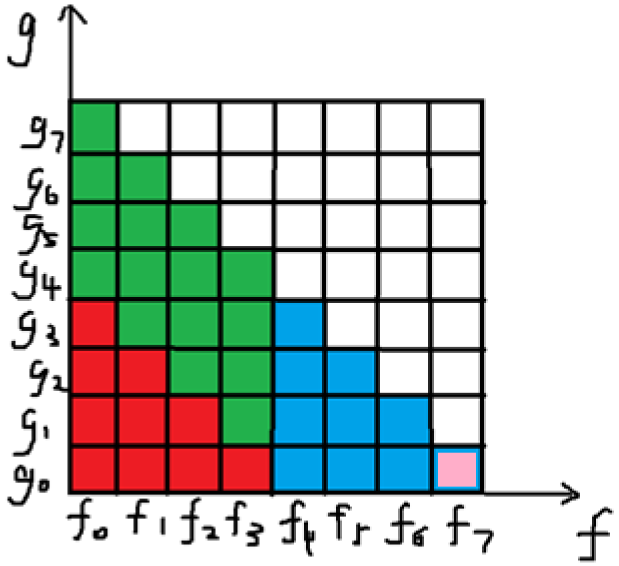


剩余部分如法炮制即可。

倍增计算

- 我们发现在获取 f_i 之前，其余对于 $[x^i]fg$ 的贡献都已经计算完毕，也就是仅剩下 $f_i g_0$ 这个贡献没有加入。

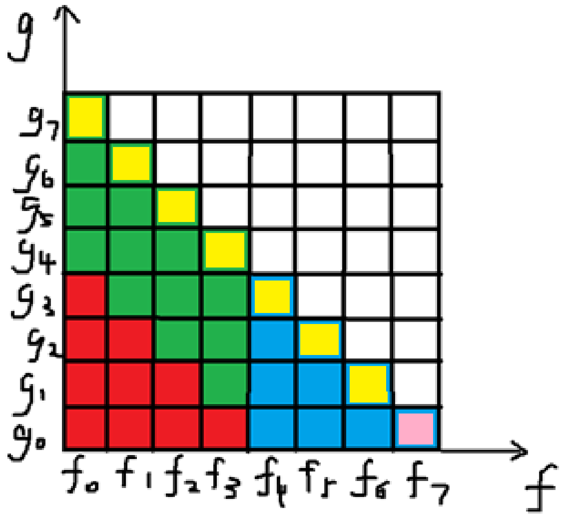
- 观察右图，在需要计算粉色的贡献时，我们
- 才要求给出 f_7 此时其余贡献
- 均已计算完毕且可访问。



半在线卷积应用，形式幂级数的基本操作

- 给出形式幂级数 g 且 $g(0) \neq 0$ ，求其逆元 f 即满足 $fg=1$ 的 f 的前 n 项系数。

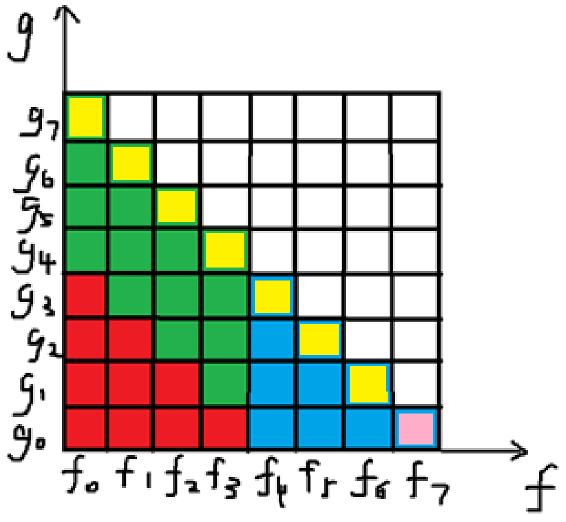
- 考虑右图，首先 $f_0 = g_0^{-1}$ ，然后假设我们
- 计算到了粉色部分，那么其余贡献（黄色部分）
- 加上 $f_7 g_0$ 等于 0 那么 f_7 就可以直接被导出。



半在线卷积应用，形式幂级数的基本操作

- 给出形式幂级数 g 和 f 且 $g(0) \neq 0$，求 fg^{-1} 的前 n 项系数。

- 我们有 $(fg^{-1})g = f$ 这里不要将 fg^{-1} 视作
- 乘积，而是将其视为一个整体，照搬前述算法，
- 右图的 f 实为 fg^{-1} 那么黄色部分贡献加上
- $(fg^{-1})_7 g_0$ 等于 f_7，即得。



- 也解决了形式幂级数的对数。

半在线卷积应用，形式幂级数的基本操作

- 给出形式幂级数 g 满足 $g(0)=0$ ，求 $e^g=\sum_{i\geq 0} g^i/i!$ 的前 n 项系数。

- 因为 $(e^g)'=e^g\cdot g'$ 所以半在线卷积在得到了 e^g 的第 i 项后立得
- e^g 的第 $i+1$ 项的系数。

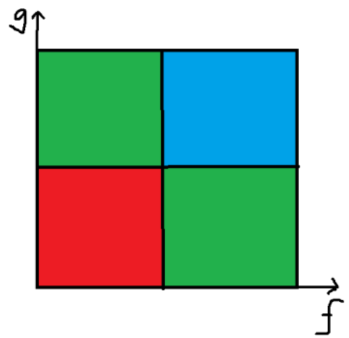
半在线卷积应用，形式幂级数的基本操作

- 给出形式幂级数 f 且 $f(0) = 1$ 求 f^k 。

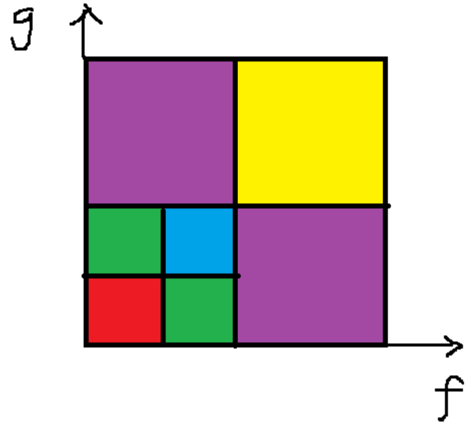
- $\left(f^k\right)' = f' \cdot k \cdot f^{k-1} \Rightarrow f^k = \int (\log f)' \cdot k \cdot f^k$
- 而我们知道 $(\log f)' = f'/f$ 可半在线计算。

- 我们发现，半在线卷积能做的上述基本操作，在线卷积也可做到，不再赘述。

半在线卷积到在线卷积



- 考虑我们已经完成了右图红色部分贡献的计算，此时绿色部分为两个并行的半在线卷积，在绿色部分完成后我们离线计算蓝色部分即可。注意蓝色部分不会对当前计算的系数有贡献，那么得到了一个简单的倍增法。然后紫色部分为两个并行的半在线卷积，黄色部分在紫色部分计算完毕后再计算，以此类推。



- 注意到这里没有使用三角形的划分方式，而是
- 使用了正方形的划分方式。

- 在线卷积的时间（复杂度）等于半在线卷积的时间。

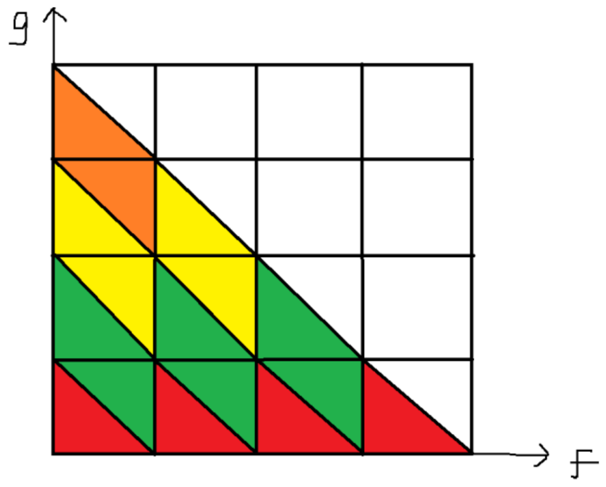
Elegia’s approach

- Elegia 提出对于普通的分治法（即前述倍增进行的半在线卷积）进行改造，就能得到一个更好的算法。假设我们进行 B 叉的分治，那么有

- $T(n) = B \cdot T\left(\frac{n}{B}\right) + O\left(B \cdot \mathcal{M}\left(\frac{n}{B}\right)\right) + O\left(B^2 \cdot \frac{n}{B}\right)$
- 取 $B = \log n$ 和 $\mathcal{M}(n) = n \log n$ 得 $T(n) = O\left(\frac{n \log^2 n}{\log \log n}\right)$

Elegia’s approach

- 右图是一种 4 叉分治的模拟，在计算完了红色的 Base Case 之后，将整个贡献分成了若干块。在实践中迭代法可能没有办法很好的完全与递归法对应，但效率相仿，我们可以简单的将两个迭代的半在线算法并行来以此导出在线算法。
- 注意复用之前计算的 DFT 点值。



简单例题，LOJ 烷基计数

- 计算 $A(x) = 1 + \frac{1}{6}x \cdot (A^3(x) + 3 \cdot A(x) \cdot A(x^2) + 2 \cdot A(x^3))$ 系数的第 $n+1$ 项。

- 三个并行的在线卷积分别维护 $A^2(x)$ 和 $A^3(x)$ 和 $A(x) \cdot A(x^2)$ 即可。

简单例题，洛谷 一阶微分方程

- 给出 $A(x),B(x)$ 求满足 $\frac{dF(x)}{dx} = A(x)e^{F(x)-1} + B(x)$ 的 $F(x)$ 。

- 在线卷积维护 $e^{F(x)-1} \cdot F'(x)$ 。
- 半在线卷积维护 $A(x)e^{F(x)-1}$ 。

- 并行计算即可。

参考文献

- van der Hoeven, J., 2003a. New algorithms for relaxed multiplication. Tech. Rep. 2003–44, Universit´e Paris-Sud, Orsay, France.
- J. van der Hoeven. Relax, but don’t be too lazy. JSC, 34:479–542, 2002.
- Elegia and Athekatelan. 信息学竞赛中的生成函数计算理论框架.
- Elegia 的讲课视频.
- fjzzq2002. 一个更好的多项式模板.
- van der Hoeven, J., August 2003b. Relaxed multiplication using the middle product. In: Bronstein, M. (Ed.), Proc. ISSAC’03. Philadelphia, USA, pp. 143–147.

感谢观看，再见

更多内容请见参考文献