



中国计算机学会
China Computer Federation



杂题选讲

钱易

January 24, 2022

【IOI2021】registers



中国计算机学会
China Computer Federation



这个处理器可以访问 m 个不同的 b 位存储单元（本题中 $m = 100$ 且 $b = 2000$ ）。它们被称作寄存器，为 $r[0] \dots r[m-1]$ 。

每个寄存器可以看作一个整数

$2^0 \cdot r[i][0] + 2^1 \cdot r[i][1] + \dots + 2^{b-1} \cdot r[i][b-1]$ ，其中 $r[i][j]$ 为第 i 个寄存器的第 j 位。

你可以进行以下九种操作：

【IOI2021】registers



中国计算机学会
China Computer Federation



1. 将一个寄存器内容拷贝到另一个寄存器。
2. 将一个寄存器内存入指定内容（常量）。
3. 取两个寄存器的按位与存入第三个寄存器。
4. 取两个寄存器的按位或存入第三个寄存器。
5. 取两个寄存器的按位异或存入第三个寄存器。
6. 取一个寄存器的按位取反存入第二个寄存器。
7. 取一个寄存器内容，按位左移指定位后存入第二个寄存器。
8. 取一个寄存器内容，按位右移指定位后存入第二个寄存器。
9. 取两个寄存器的和，模 2^b 后存入第三个寄存器。

【IOI2021】registers



中国计算机学会
China Computer Federation



你要完成两个任务：

1. 给定 $n \leq 100$ 个数，求它们最小值，若要满分，指令数不能超过 150。
2. 给定 $n \leq 100$ 个数，求它们排序后的结果，若要满分，指令数不能超过 4000。

这些数为 $a[i] (0 \leq i < n)$, $0 \leq a[i] \leq 2^k$, $1 \leq k \leq 10$, $m = 100$, $b = 2000$ 。

数的给定方式是： $a[i]$ 存储在 $r[0]$ 的第 $k*i$ 至 $k*i+k-1$ 这些位中。

你给定的答案也用同样方式存储在 $a[0]$ 中提交（最小值任务只要 $r[0][0 \dots k-1]$ 为最小值即可）。

【IOI2021】registers



中国计算机学会
China Computer Federation



首先我们先来思考如何进行比较。

首先 $\sim x = 2^b - 1 - x$ ，所以减法是可以容易实现的，即

$$x - y = (x + 1) + (2^b - 1 - y) = (x + 1) + \sim y \pmod{2^b}.$$

比较我们可以通过作差的方式实现，即 $x < y \iff x - y < 0$ ，如果 x, y 不是很大，就是 $x - y$ 模 2^b 后最高位为 1)。

这个方法可以并行。

再用折半的方法，可以 $O(\log_2 n)$ 步解决任务一。

【IOI2021】registers



中国计算机学会
China Computer Federation



对于排序的部分，相对难解决。首先常用的 $O(n \log_2 n)$ 排序，比较哪些数都要依赖之前的结果，而这题之中我们做不到。

这里引入奇偶排序：

第一轮，对于所有奇数下标的位置，如果它比下一个数大，则交换它们。

第二轮，对于所有偶数下标的位置，如果它比下一个数大，则交换它们。

可以证明，进行上述步骤 n 次一定可以完成排序。

这个算法是可以并行的，可以 $O(n)$ 步解决任务二。

事实上使用双调排序可以获得更好的结果。

【IOI2021】dungeons



中国计算机学会
China Computer Federation



Robert 正在设计一款新的电脑游戏。游戏中有一位英雄、 n 个敌人和 $n+1$ 个地牢。敌人从 0 到 $n-1$ 编号，地牢从 0 到 n 编号。敌人 i ($0 \leq i \leq n-1$) 处在牢 i ，其能力值为 $s[i]$ 。地牢 n 里没有敌人。

英雄一开始进入地牢 x ，初始能力值为 z 。每次英雄进入地牢 i ($0 \leq i \leq n-1$) 时，都需要面对敌人 i ，且会发生以下情况中的一种：

1. 如果英雄的能力值大于等于敌人 i 的能力值 $s[i]$ ，那么英雄会胜出。这使得英雄的能力值增加 $s[i]$ ($s[i] \geq 1$)。这种情况下，下一步英雄将会进入地牢 $w[i]$ ($w[i] > i$)。

2. 否则英雄会战败，这使得英雄的能力值增加 $p[i]$ ($p[i] \geq 1$)。在这种情况下，下一步英雄将会进入地牢 $l[i]$ 。

【IOI2021】dungeons



中国计算机学会
China Computer Federation



当英雄进入地牢 n 的时候，游戏结束。可以看出无论英雄的起始地牢和初始能力值如何，游戏一定会在有限次对战之后结束。

Robert 希望你通过 q 次模拟来对游戏进行测试。对于每次模拟，Robert 输入英雄的起始地牢 x 和初始能力值 z 。你需要做的是对于每次模拟给出游戏结束时英雄的能力值。

$$1 \leq n \leq 400000, 1 \leq q \leq 50000$$

【IOI2021】dungeons



中国计算机学会
China Computer Federation



本题重点显然是打赢一个敌人后，加的是敌人的能力值。

我们将值域按 $[2^i, 2^{i+1})$ 分层。

如果你打败了处于同层的敌人，就可以直接晋级下一层。

对每层建立一个倍增的表。

时间复杂度 $O((n + q) \log_2^2 n)$ 。

但是 q 比较小， n 比较大，所以按 $[k^i, k^{i+1})$ 分层，可以做到 $O((q * k + n) \log_2 n \log_k n)$ ，可以通过此题。

【UOJ #671】诡异操作



中国计算机学会
China Computer Federation



给定一个序列 a ，以及 q 个操作，每个操作为以下三种之一：

1. $1\ l\ r\ v$: 给定 v ，对于 $l \leq i \leq r$ ，将 a_i 变为 $\lfloor \frac{a_i}{v} \rfloor$ 。这里我们保证 $v \geq 1$ 。
 2. $2\ l\ r\ v$: 给定 v ，对于 $l \leq i \leq r$ ，将 a_i 变为 $a_i \& v$ ，其中 $\&$ 是按位与运算。
 3. $3\ l\ r$: 向你询问 a_i ($l \leq i \leq r$) 的总和。
- $1 \leq n \leq 300000, 1 \leq q \leq 200000, 0 \leq v_i, a_i < 2^{128}$ 。
std 时间复杂度 $O(n \log_2 a_i + q \log_2^2 n)$ 。

【UOJ #671】诡异操作



中国计算机学会
China Computer Federation



使用线段树维护序列。每个节点维护区间内的数，每一位有多少个是 1。

操作 2 可以打标记，操作 1 直接线段树上搜索修改，每个数修改次数不多，时间复杂度有一定保证。

进一步，我们使用一种 $O(\log_2 len)$ 的方法维护区间每一位有多少个是 1，经过分析时间复杂度为 $O(n \log_2 a_i + q \log_2^2 n)$ 。

【UOJ #592】新年的聚会



中国计算机学会
China Computer Federation



交互题。

有一张 n 个点 m 条边的图，你可以给定一个点集，询问该点集内的点之间有没有边。

你需要猜出这张图。

$1 \leq n \leq 1000, 1 \leq m \leq 2000$ 。

询问次数 ≤ 50000 ($O(m \log_2 n)$)。

询问点集大小和 $\leq 10^6$ ($O(n\sqrt{m})$)。

【UOJ #592】新年的聚会



中国计算机学会
China Computer Federation



分治，求解一个点集之间的边前，我们将它分为两半，先求出两侧内部的边。

对于一张 E 条边的图，我们有办法将它的点集分为 $O(\sqrt{E})$ 个独立集。

我们将两侧分别分割为独立集。然后对于两侧之间的一对独立集，再分治求解之间的边。

复杂度可以证明，询问次数 $O(m \log_2 n)$ ，点集大小和 $O(n\sqrt{m})$ 。

【UOJ #604】赶路



中国计算机学会
China Computer Federation



给平面上 n 个点，没有三点共线。
指定起点终点，找到一条不自交的路径。
要求时间复杂度 $O(n^2)$ ，虽然容易做到更低。



【UOJ #604】赶路



中国计算机学会
China Computer Federation



直接分治， $\text{solve}(s, t, A)$ 表示 s 到 t 经过点集 A 里所有点。



【CF #1208H】Red Blue Tree



中国计算机学会
China Computer Federation



给定一棵树，叶子节点都有初始颜色（红或蓝）。

有一个数 k ，每个非叶子节点的颜色由它儿子的颜色确定，如果蓝儿子个数 - 红儿子个数 $\geq k$ ，那么它是蓝的，不然是红的。

你要支持 q 次操作，每个操作为以下三种之一：

1. 询问一个节点的颜色。
2. 修改一个叶子节点的颜色。
3. 修改 k 。

$n, q \leq 10^5, -n \leq k \leq n$ 。

【CF #1208H】Red Blue Tree



中国计算机学会
China Computer Federation



对于同一棵树，如果 k 从小慢慢变大，它就会从蓝变红。
对于每个节点，存在一个时刻 t_i ，当 $k \geq t_i$ 时，它为红，否则为蓝。
DDP。
时间复杂度 $O(n + q \log^2 n)$ 。

【CF #566C】 C. Logistical Questions



给定一棵树，边带权，找到一个点 p 。使得 $\sum_{i=1}^n \text{dist}(i, p)^{1.5}$ 最小，输出这个式子的值。

$$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$$



【CF #566C】C. Logistical Questions



首先点分，计算重心答案。可以分析出真正选的点在哪个对应子树里。

时间复杂度 $O(n \log_2 n)$ 。



【CF #1083C】C. Max Mex



中国计算机学会
China Computer Federation



给定一棵 n 个节点的树，每个点有个权值 p_i ， p 是一个 0 到 $n-1$ 的排列。

下面有 q 个操作，每个为以下两种之一：

1. 给定两个点，交换它们的权值。
2. 对于树上所有链，求链上节点权值的 **mex** 的最大值。

$$1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5$$

【CF #1083C】C. Max Mex



考虑如果 mex 最大值是 M ，那么值为 $0 \dots M-1$ 的点一定在一条链上。

维护数组 b_i ，其中 $p_{b_i} = i$ ，用线段树维护区间的节点在树上的形态。
时间复杂度 $O(n + q \log_2 n)$ 。

数据结构题一



给定一个树，一开始只有一个节点。

下面执行 q 次操作，每次操作为：

1. 给定 a_i, w_i ，表示在节点 a_i 下新建一个节点，编号为已有节点数+1，两点间边权为 w_i 。
2. 给定 k_i ，表示你可以选定 k_i 个节点，将这些点两两之间路径染红，输出红色边边权和的最大值。

$$1 \leq q \leq 10^5, w_i \geq 0$$

数据结构题一



中国计算机学会
China Computer Federation



$k = 2$ 时，答案为树的直径。

而我们进而可以证明：

我们以一个直径端点为根，长链剖分，从大往小选每条长链可以得到答案。

考虑动态维护长链剖分。

如果加入之后直径没有改变，那么从加入的点往上，可能有些点的长儿子会变换为这个加入节点所在子树的对应儿子。

这个和 LCT access 部分基本一样，可以直接做。

如果改变了也容易解决。

套用 LCT 的复杂度分析，长链均摊改变数量为 $O(q \log_2 q)$ ，再用平衡树维护所有长链长度，容易回答询问。

时间复杂度 $O(q \log_2^2 q)$ 。

<https://cometoj.com/contest/58/problem/F> 基本一致。

数据结构题二



给定一颗二叉树，每个点儿子个数为 0 或 2。

叶节点有个权值 $w_i = v_i$ ，非叶节点权值为

$$w_i = |w_{\text{leftson}_i} - w_{\text{rightson}_i}| + v_i。$$

有 q 个操作，每次修改一个 v_p ，修改后要输出新的 w_{root} 。

$1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5, 0 \leq v_i, k_i < 20。$

数据结构题二



用 $A[x][y]$ 表示节点 x 在操作 y 后的值。

用动态开点线段树维护 $A[x]$,

$A[x] = |A[\text{leftson}_x] - A[\text{rightson}_x]| + B[x]$, 其中 $B[x]$ 是 $v[x]$ 在各个时刻的值。

用线段树合并的方法合并 $A[\text{leftson}_x], A[\text{rightson}_x]$ 。

由于我们要求它们差的绝对值, 所以如果当前节点所在区间减完后符号一样, 就合并完后可以打个标记直接返回。不然递归合并, 这个区间的极差会减小。

定义势能为所有线段树所有节点对应区间内极差的和。

可以分析出复杂度为 $O(n \log_2 n * V)$, 假设 n, q 同阶。

「JOISC 2019 Day3」穿越时空 Bitaro



中国计算机学会
China Computer Federation



海狸岛包含了 N 个城市，编号由 1 到 N ，由 $N-1$ 条双向道路连接，第 i 条道路连接城市 i 及城市 $i+1$ ，通过每条道路都需要 1 秒。第 i 条道路只能在每天的 L_i 到 R_i 内通过。也就是说如果第 x 秒从 u 出发，第 $x+1$ 到达 v ，要满足 $L_i \leq x \leq R_i - 1$ 。

Bitaro 是岛上的的一只普通海狸。为了避免迟到，他学会了穿越。他可以在某一个城市使用技能，保持原位置，时间倒退到 1 秒前，但他不能回到前一天（如果他在时刻 0 和 1 之间使用技能，他会回到当天的最初时刻 0）。

「JOISC 2019 Day3」穿越时空 Bitaro



中国计算机学会
China Computer Federation



他想让你帮助他规划一下路线，并扔给了你 Q 条信息：

$T_j = 1$ 将 L_P, R_P 改为 S_j, E_j 。

$T_j = 2$ 在 B 时刻，他从 A 出发，想要在当天的 D 时刻到达 C 。请计算出他最少使用技能的次数。

请你写一个程序帮助一下 *Bitaro* 吧。

$1 \leq N, Q \leq 300000$ 。

「JOISC 2019 Day3」穿越时空 Bitaro



中国计算机学会
China Computer Federation



先平移一下后面的区间，这样就可以不用考虑走路的耗时了。
剩下的部分，可以变为线段树维护。
时间复杂度 $O(q \log_2 n)$ 。



CF GYM 102979 K. Knowledge Is...



简单转换题意后：
给定 n 个点，每个点对应一个区间，两个点之间有边当且仅当它们的区间不交。
求最大匹配。
 $1 \leq n \leq 3 \times 10^5$ 。

CF GYM 102979 K. Knowledge Is...



考虑把区间按左端点排序，一个个加入。
如果加入区间后匹配增大，选择右端点尽量大的。
不加入则尝试修改一下之前匹配偏左的区间。
可以证明正确性。
时间复杂度 $O(n \log_2 n)$ 。
存在很多可行的做法，如果有不同做法可以试试看。

CF GYM 102586 L. Yosupo's Algorithm



有红蓝两种颜色的点，每个点有个坐标 (rx_i, ry_i) 或 (bx_i, by_i) ，还有一个权值。

每次询问给定 (L, R) ，询问满足以下条件的点对的权的最大值，其中 (rx_j, ry_j) 必须是红点， (bx_k, by_k) 必须是蓝点：

1. $ry_j < by_k$
2. $(rx_j < L \text{ and } R < bx_k) \text{ or } (L < rx_j \text{ and } bx_k < R)$ 。

所有坐标， L, R 互不相同。

$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq q \leq 10^5$ 。

CF GYM 102586 L. Yosupo's Algorithm



分治，可以得到 $O(n \log_2 n)$ 种点对。

二维数点。

$O(n \log_2^2 n + q \log_2 n)$ 。

事实上可以只有 n 种点对。



P6580 [Ynoi2019] 美好的每一天 不连续的存在



给定一个数组 A ，以及一棵 n 个节点的树，每个点有一个颜色，颜色为 1 到 x 的整数。

有 m 次查询，每次查询树上只保留 $[l, r]$ 内的所有节点，设一个极大连通块中出现奇数次数的颜色个数为 t ，则其对答案的贡献为 A_t ，即答案是所有连通块贡献的和，询问间互相独立。

$1 \leq n, m \leq 10^5, 1 \leq x \leq 10^4$ 。

时间限制：3 秒。

Luogu P6580 [Ynoi2019] 美好的每一天 不连续的存在



中国计算机学会
China Computer Federation



如果只查询前缀，那么用启发式合并扫一遍就可以。
查询区间，考虑使用莫队。因为删除不方便，考虑用只有回退的莫队。

但是就算只有回退，每个块内回退耗时也不确定。
先处理出前缀每个位置启发式合并时间消耗，按时间消耗带权分块。
时间复杂度 $O(n \log_2 n \sqrt{m})$ ，需要好的启发式合并方式。