双射在划分计数上的应用

周航锐

杭州学军中学教育集团文渊中学

2022 年 1 月

目录

1

五边形数定理

定义 λ 为一个 n 的划分（记作 $\lambda \vdash n$），当且仅当 $\sum \lambda_i = n$ 且 $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$。
众所周知，划分数的 OGF 是 $\prod_{i=1} \frac{1}{1-x^i}$。
而五边形数定理就是：

$$F(x) = \prod_{i=1}(1 - x^i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i x^{i(3i-1)/2}$$

如此，我们就可以高效的计算划分数了（$O(n \log n)$ 或 $O(n\sqrt{n})$）。

证明

- 考虑这个等式的组合意义，$[x^n]F(x)$ 即为把 n 划分成若干个**不同**正整数的所有方案中，长度为偶数的划分数 $-$ 长度为奇数的划分数。

证明

- 考虑这个等式的组合意义，$[x^n]F(x)$ 即为把 n 划分成若干个**不同**正整数的所有方案中，长度为偶数的划分数 $-$ 长度为奇数的划分数。
- 于是我们考虑在两者之间建立一个双射关系。

- 考虑如下一个映射，对于不重划分 $\lambda \vdash n$，记 $c(\lambda)$ 为最大的 k 满足 $\lambda_i = \lambda_1 + 1 - i (i \in [1, k])$，$l$ 为划分的大小。
  - 如果 $c(\lambda) \geq \lambda_l$，则删去 λ_l，并对 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\lambda_l}$ 加一。
  - 如果 $c(\lambda) < \lambda_l$，则对 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{c(\lambda)}$ 减一，并在划分末尾加上 $c(\lambda)$。

- 考虑如下一个映射，对于不重划分 $\lambda \vdash n$，记 $c(\lambda)$ 为最大的 k 满足 $\lambda_i = \lambda_1 + 1 - i (i \in [1, k])$，$l$ 为划分的大小。
  - 如果 $c(\lambda) \geq \lambda_l$，则删去 λ_l，并对 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\lambda_l}$ 加一。
  - 如果 $c(\lambda) < \lambda_l$，则对 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{c(\lambda)}$ 减一，并在划分末尾加上 $c(\lambda)$。
- 这个映射**几乎**是合法的，并且，对于合法部分这是一个双射。
  对于第一种情况，若 $\lambda_i = 2l - i$，由于删去了一个元素，序列长度减小后加一将会失败。
  对于第二种情况，若 $\lambda_i = 2l + 1 - i$，由于最后一个元素减小了，加入新元素后不再互不相同。
  两种情况分别对应了 $\frac{k(3k-1)}{2}$ 和 $\frac{k(3k+1)}{2}$。

2 一道例题

对于划分 λ 和正整数 k，定义 $f(\lambda,k)=\sum[\lambda_i=k]$，$g(\lambda,k)=\sum_i[k\le(\sum_j[\lambda_j=i])]$。
组合证明：

$$\sum_{\lambda\vdash n} f(\lambda,k)=\sum_{\lambda\vdash n} g(\lambda,k)$$

证明

我们考虑把 a 个 k 变为 k 个 a。但这其实并不是一个映射，对于某个划分，a 的取值可能有多个。

但是我们把这样的映射关系建成一张有向图，可以发现，一个划分的入度即为 $g(\lambda, k)$，出度即为 $f(\lambda, k)$，自然有入度和等于出度和。

3

另一道例题

组合证明：把 n 划分成互不相同的数的方案数和把 n 划分成若干奇数的方案数相同。

证明

考虑一个从右到左的映射，把奇数二进制合并成若干不同的数，比如 6 个 3 将被合并成 $12, 6$。可以发现这是一个双射。

4

另另一道例题

给定 n,r，求有多少组合对象 $\begin{bmatrix} c\dots c & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{matrix} \end{bmatrix}$ 满足：

- $\sum a_i + \sum b_i + c \times r = n$
- $c \ge a_1, c \ge b_1$
- $a_i \ge a_{i+1}, b_i \ge b_{i+1}$

$n \le 5 \times 10^5, r \le 500$。

- 首先我们考虑 $r=1$ 怎么做。

- 首先我们考虑 $r=1$ 怎么做。
- 考虑如下映射：

$$\begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \dots \\ & b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} c & a_1 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$

- 首先我们考虑 $r=1$ 怎么做。
- 考虑如下映射：

$$\begin{bmatrix} c & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{matrix} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} c & a_1 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$

- 这是一个单射**但不满**。没有原像的元素形如 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}(a_1 < b_1)$。

  我们将这些元素重写为 $\begin{bmatrix} b_1 & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_2 & b_3 & \dots \end{matrix} \end{bmatrix}(b_1 > a_1)$。

- 再次构造映射：

$$\begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \dots \\ & b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} (c > a_1) \mapsto \begin{bmatrix} c-1 & a_1 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$

- 再次构造映射：

$$\begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \dots \\ & b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} (c > a_1) \mapsto \begin{bmatrix} c-1 & a_1 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$

- 这次没有原像的元素形如 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} (a_1 + 1 < b_1)$，将它写为 $\begin{bmatrix} b_1 & a_1+1 & a_2 & \dots \\ & b_2 & b_3 & \dots \end{bmatrix} (b_1 > a_1 + 1 > a_2)$。

- 再再次构造映射：

$$\begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \dots \\ & b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} (c > a_1 > a_2) \mapsto \begin{bmatrix} c-2 & a_1-1 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$

- 再再次构造映射：

$$\begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \dots \\ & b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} (c > a_1 > a_2) \mapsto \begin{bmatrix} c-2 & a_1-1 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$

- 之后的流程是类似的，不断递归，我们便可以得到 $r=1$ 时的 OGF：

$$(\sum_{i=0}(-1)^i x^{i(i+1)/2})P^2(x)$$

其中 $P(x)$ 是划分数的 OGF。

- 再考虑 $r=2$ 怎么做。

- 再考虑 $r=2$ 怎么做。
- 依然是构造映射：

$$\begin{bmatrix} c & c & \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} & \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} c & a_1 & \dots \\ c & b_1 & \dots \end{bmatrix}$$

没有原像的元素为：$2 \times \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix} (a_1 < b_1)$。这在前面已经介绍过如何计算。

- 考虑扩展到任意 r。

- 考虑扩展到任意 r。
- 记对于某个 r，答案关于 n 的 OGF 为 $F_r(x)$。
  同样的，我们构造映射：

$$\begin{bmatrix} \dots & c & c & c & \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} & \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \dots & c & \begin{matrix} c \\ c \end{matrix} & \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \end{bmatrix}$$

  没有原像的元素有两种：
  - $\begin{bmatrix} \dots & c & \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} & \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \end{bmatrix} (c > a_1, c > b_1)$，这种的贡献为 $x^{r-2}F_{r-2}(x)$。
  - $2 \times \begin{bmatrix} \dots & c & \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} & \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \end{bmatrix} (c = a_1, c > b_1)$，这种的贡献为 $2F_{r-1}(x) - 2F_r(x)$。

于是我们有

$$F_r(x)+x^{r-2}F_{r-2}(x)+2F_{r-1}(x)-2F_r(x)=F_{r-2}(x)$$

，即

$$F_r(x)=2F_{r-1}(x)+(x^{r-2}-1)F_{r-2}(x)$$

递推求出 $F_r(x)=AF_1(x)+BF_2(x)$ 即可。
时间复杂度 $O(n\log n+r^3)$。

卡特兰数有至少 214 种组合意义，你知道吗?
双射证明方法是一把双刃剑，一方面它非常精巧，可以非常简洁的证明一些奇怪的等式，但是另一方面，双射方法较难推广，每一个问题几乎都需要从头想起。
大家平时遇到只会打表证的等式，不妨试试双射！（雾
遇到会用形式幂级数证的等式，不妨也试试双射！（大雾
前两道例题均选自 BIJECTIVE PROOF PROBLEMS，欢迎大家来玩！

谢谢大家！