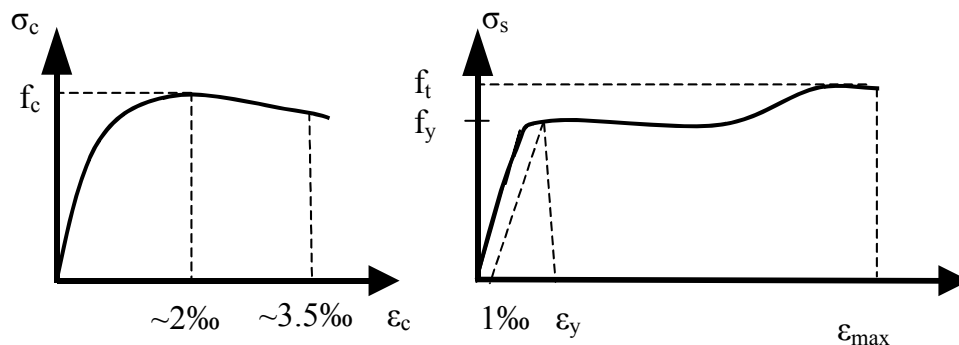


16.8 Υλικά – Κεντρική θλίψη – κεντρικός εφελκυσμός. Τριαξονική θλίψη

• **Μονοαξονική θλίψη:** Υπενθυμίζονται τα διαγράμματα τάσεων παραμορφώσεων των δύο υλικών: (συγκρίνατε τα διαγράμματα αυτά με τα **συμβατικά** διαγράμματα που χρησιμοποιούμε για την διαστασιολόγηση)



Η αντοχή του ωπλισμένου σκυροδέματος σε κεντρική θλίψη δίνεται από την σχέση:

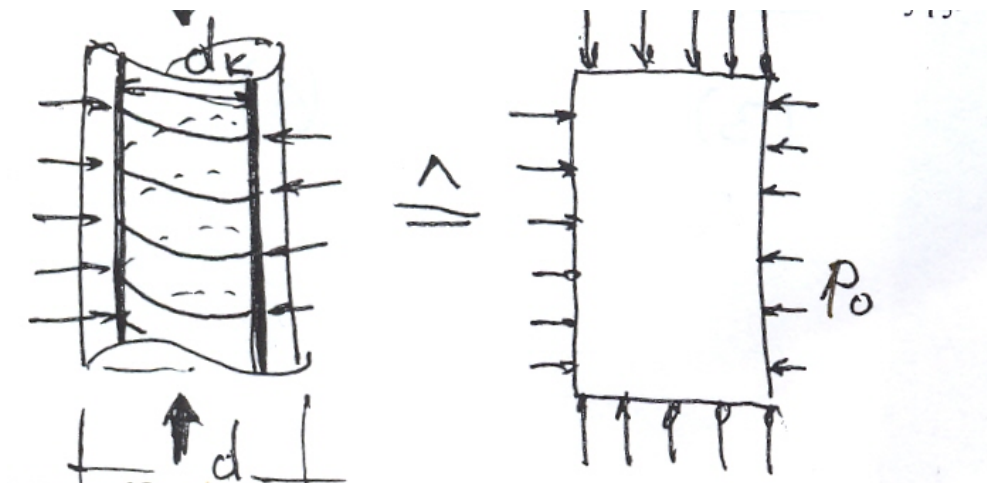
$$N_{Rd} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot A_c + f_{yd} \cdot A_s$$

όπου:

- ο συντελεστής 0.85 λαμβάνει υπόψη του την μείωση της αντοχής του σκυροδέματος υπό βραδεία φόρτιση (όπως είναι η φόρτιση στην πραγματική κατασκευή) σε αντίθεση με την αντοχή υπό ταχεία φόρτιση (όπως είναι η φόρτιση του συμβατικού δοκιμίου στην πρέσα του εργαστηρίου)
- $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = f_{ck} / 1.5$ η αντοχή **σχεδιασμού** (δείκτης d) του σκυροδέματος
- A_c η επιφάνεια του σκυροδέματος
- $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = f_{yk} / 1.15$ η αντοχή **σχεδιασμού** του χάλυβα (ή καλλίτερα η τιμή σχεδιασμού του ορίου διαρροής του χάλυβα)
- A_s η επιφάνεια του χάλυβα

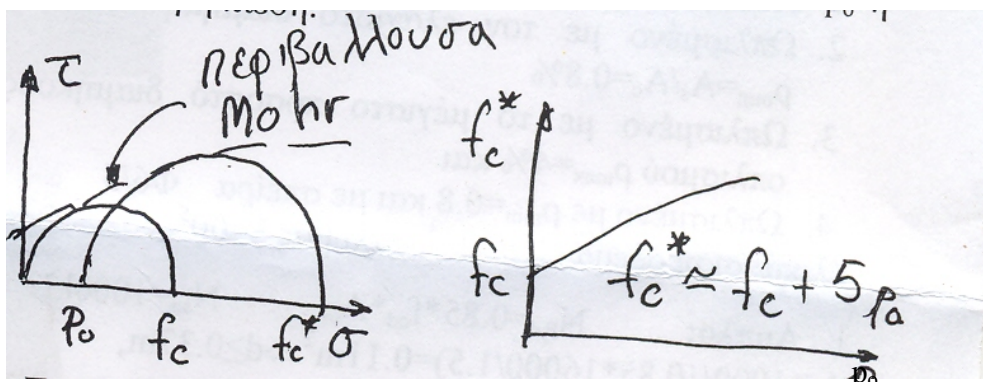
Η παραπάνω σχέση υποθέτει ότι αμφότερα τα υλικά φθάνουν ταυτόχρονα στην οριακή τους αντοχή (πλαστική θεώρηση): προσοχή να μην λυγίσουν τα σίδηρα: ανάγκη για πυκνούς συνδετήρες.

• **Τριαξονική ένταση:** Η τριαξονικότητα στα υποστυλώματα επιτυγχάνεται τοποθετώντας πολύ πυκνούς συνδετήρες, ή ακόμη καλλίτερα σπείρα με πολύ μικρό βήμα. Ο μηχανισμός θραύσεως είναι ο εξής:

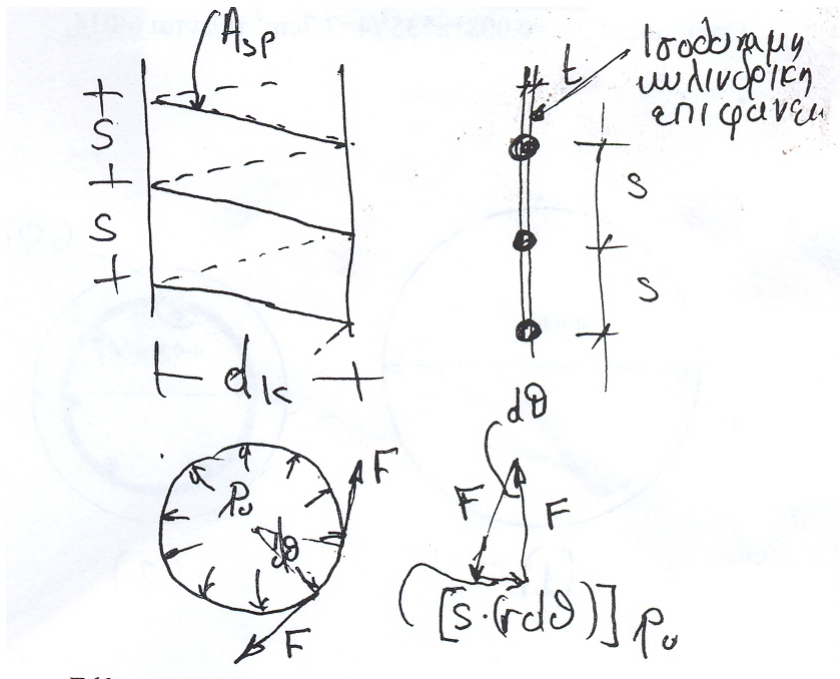


το σκυρόδεμα θλίβεται κατά τον διαμήκη άξονα, λόγω όμως του φαινομένου Poisson διογκώνεται κατά την εγκάρσια έννοια (ο συντελεστής Poisson είναι αρνητικός), η σπείρα ανθίσταται σ' αυτήν την διόγκωση και ασκεί στο σκυρόδεμα οριζόντιες πιέσεις, έτσι το σκυρόδεμα, παρ' όλο που εξωτερικώς του επιβάλλουμε μονοαξονική θλίψη, βρίσκεται σε τριαξονική θλιπτική επιπόνηση.

• Η αντοχή του σκυροδέματος υπό τριαξονική επιπόνηση είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αντοχή σε μονοαξονική επιπόνηση: από την περιβάλλουσα Mohr έχουμε ότι η αύξηση αυτή δίνεται από την σχέση $f_{ck}^* = f_{ck} + 5p_0$ όπου p_0 η παράπλευρη πίεση (παρατηρήσατε την σημαντική συμβολή της p_0).



• **Συμβολή της σπείρας:** υπό την προϋπόθεση ότι το βήμα της σπείρας είναι αρκετά μικρό¹, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σπείρα μπορεί να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη κυλινδρική επιφάνεια, το πάχος t της οποίας είναι τέτοιο ώστε: $t \cdot s = A_{sp}$ όπου A_{sp} είναι το εμβαδόν της διατομής του χάλυβα της σπείρας. Η δύναμη που αναπτύσσεται στην σπείρα λόγω της p_o είναι:



$$F d\theta = p_o r d\theta \Rightarrow F = p_o r d\theta / 2$$

$$\text{Αλλά η } F = A_{sp} f_{yk} \Rightarrow$$

Αρα, η δυναμένη να αναπτυχθεί p_o είναι:

$$p_o = 2 A_{sp} f_{yk} / \{d_k s\}$$

η οποία συμβάλλει στην αύξηση της αντοχής του σκυροδέματος κατά $5 p_o$, έτσι η αντοχή σε κεντρική θλίψη σπειροειδώς ωπλισμένων υποστυλωμάτων δίνεται από την σχέση:

$$N_{Rd} = \frac{0.85}{\gamma_c} \left(f_{ck} + 5 \frac{2 A_{sp} f_{yk}}{s d_k} \right) A_k + \frac{f_{yk}}{\gamma_s} A_s$$

όπου ως διατομή του σκυροδέματος τέθηκε το εμβαδόν του πυρήνα A_k και όχι το συνολικό εμβαδόν A_c μιας και στις πολύ μεγάλες παραμορφώσεις θα

¹ $s < \min(d_k/5 \text{ ή } 8 \text{ cm})$ όπου d_k η διάμετρος του πυρήνα

γίνει **αποφλοίωση** του μή περισφιγμένου σκυροδέματος και έτσι η επικάλυψη θα πάψει να συμβάλλει.

Άσκηση²: Εστω φορτίο σχεδιασμού $N_d=1000\text{kN}$ πρέπει να αναληφθεί από κυλινδρικό υποστυλώμα χωρίς κίνδυνο λυγισμού. Να εξετασθούν οι εξής τέσσερις περιπτώσεις:

1. Άοπλο σκυρόδεμα (!)
2. Ωπλισμένο με τον ελάχιστο διαμήκη οπλισμό $\rho_{\min}=A_s/A_c=0.8\%$
3. Ωπλισμένο με το μέγιστο ποσοστό διαμήκους οπλισμού $\rho_{\max}=4\%$ και
4. Ωπλισμένο με $\rho_{\min}=0.8$ και με σπείρα Φ6/5

Υλικά: σκυρόδεμα C16³/20⁴, χάλυβας S400⁵

1. **Άοπλο:** $N_{Rd}=0.85 \cdot f_{cd} \cdot A_c$, $N_{sd}=1000\text{kN} \Rightarrow$

2. $A_c \geq 1000 / \{0.85 \cdot 16000 / 1.5\} = 0.11\text{m}^2 \Rightarrow d \geq 0.37\text{m}$, **λαμβάνεται d=0.40m⁶**

3. **Ωπλισμένο με ρ_{\min} :** \Rightarrow

$$N_{Rd} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot A_c + f_{yd} \cdot A_s = \{0.85 f_{cd} + \rho_{\min} f_{yd}\} A_c =$$

$$= \{0.85 \cdot 10667 + 0.008 \cdot 400000 / 1.15\} A_c = \{9.067 + 2.783\} A_c$$

$$N_{sd} = 1000\text{kN} \Rightarrow A_c \geq 0.084\text{m}^2 \Rightarrow d \geq 0.33\text{m}$$

λαμβάνεται d=0.35m

Οπλισμός: $A_{s,\min} = 0.008 \cdot \pi \cdot 35^2 / 4 = 7.7\text{cm}^2$ τίθενται **6Φ14**.

4. **Ωπλισμένο με ρ_{\max} :** \Rightarrow

$$N_{Rd} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot A_c + f_{yd} \cdot A_s = \{0.85 f_{cd} + \rho_{\max} f_{yd}\} A_c =$$

$$= \{0.85 \cdot 10667 + 0.04 \cdot 400000 / 1.15\} A_c = \{9.067 + 13.913\} A_c$$

$$N_{sd} = 1000\text{kN} \Rightarrow A_c \geq 0.0435\text{m}^2 \Rightarrow d \geq 0.24\text{m}$$

λαμβάνεται d=0.25m

Οπλισμός: $A_{s,\max} = 0.04 \cdot \pi \cdot 25^2 / 4 = 19.6\text{cm}^2$ τίθενται **8Φ18**.

5. **Ωπλισμένο με ρ_{\min} και σπείρα**

Εστω $d_k = 0.8d \Rightarrow d = 1.25d_k$ Άρα:

² Η άσκηση είναι «σχολική» και πολλά από τα δεδομένα (αριθμητικά και άλλα) δεν ανταποκρίνονται στην πράξη: έτσι για παράδειγμα δεν υπάρχουν άοπλα υποστυλώματα, δεν τίθεται σε υποστυλώματα διαμήκης οπλισμός με διάμετρο μικρότερη από 14mm, δεν υπάρχει «κεντρική» θλίψη: πάντα συνυπάρχει και μια κάμψη, κλπ.

³ Χαρακτηριστική αντοχή κυλίνδρου σε MPa

⁴ Χαρακτηριστική αντοχή κύβου σε MPa

⁵ Χαρακτηριστική τιμή του ορίου διαρροής σε MPa

⁶ Συνήθως, στα υποστυλώματα στρογγυλεύουμε ανά 5cm

$$N_{Rd} = \frac{0.85}{\gamma_c} \left(f_{ck} + 5 \frac{2A_{sp}f_{yk}}{sd_k} \right) A_k + \frac{f_{yk}}{\gamma_s} A_s$$

$$N_{Rd} = \frac{0.85}{1.5} \left(16.000 + 5 \frac{2 * 0.28 * 40}{0.05 * d_k} \right) \frac{3.14}{4} d_k^2 +$$

$$+ \frac{400.000}{1.15} * 0.008 \frac{3.14}{4} (1.25 * d_k)^2$$

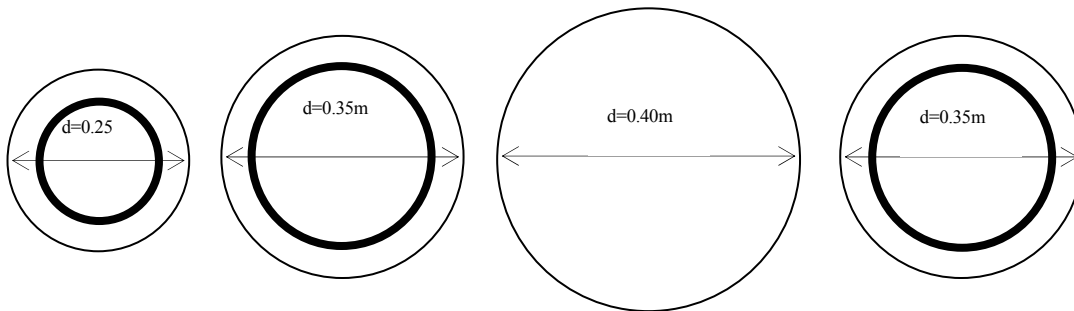
$$N_{Rd} = 7.117d_k^2 + 996d_k + 3.413d_k^2$$

$$N_{Rd} \geq N_{Sd} \Rightarrow$$

$$10530d_k^2 + 996d_k - 1000 \geq 0$$

$$d_k \geq 0.26m \Rightarrow d = 0.26/0.8 = 0.325 \text{ λαμβάνεται } \underline{d=0.35m}$$

$$\text{Οπλισμός: } A_{s,min} = 0.008 * \pi * 35^2 / 4 = 7.7 \text{ cm}^2 \text{ τίθενται } \underline{6\Phi 14}$$



$\rho_{max}=4\%$,
 $A_s=8\Phi 18$

$\rho_{min}=0.8\%$,
 $A_s=6\Phi 14$

$\rho=0$

σπείρα Φ6/5
 $\rho_{max}=4\%$,
 $A_s=8\Phi 18$

16.9 Έλεγχος ορθογωνικής διατομής έναντι κάμψεως (χωρίς πίνακες)

• **Σκοπός:** Σκοπός της ασκήσεως είναι να δούμε πώς μπορούμε να διαστασιολογήσουμε ή να ελέγξουμε μια δοκό έναντι κάμψεως χωρίς πίνακες ή βοηθήματα (σχεδόν με το «μάτι»).

• **Παραδοχές (γενικώς):** Υπενθυμίζεται ότι οι συνήθεις παραδοχές που κάνουμε στην οριακή κατάσταση αστοχίας από ορθή ένταση είναι:

1. Η διατομή παραμένει επίπεδη μέχρι την θραύση και κάθετη στον παραμορφωμένο άξονα του στοιχείου.
2. Κοινές ανηγμένες παραμορφώσεις σκυροδέματος και χάλυβα που βρίσκονται στην ίδια στάθμη: $\varepsilon_{ci} = \varepsilon_{si}$,
3. Αγνοείται η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος $f_{ct} = 0$
4. Η μέγιστη θλιπτική παραμόρφωση του σκυροδέματος είναι $\varepsilon_{c2} = 0.0035^7$
5. Η μέγιστη εφελκυστική παραμόρφωση του πλέον εφελκυσμένου οπλισμού είναι $\varepsilon_{s1} = 0.020^8$
6. Ισχύουν τα ιδεατά διαγράμματα τάσεων παραμορφώσεων των υλικών:
 - για το σκυρόδεμα: παραβολή-ορθογώνιο
 - για τον χάλυβα: ελαστοπλαστικό

• **Απλοποιητικές παραδοχές:** Προκειμένου να κάνουμε έναν γρήγορο έλεγχο (είτε να υπολογίσουμε τον απαιτούμενο οπλισμό είτε να υπολογίσουμε την ροπή αντοχής) κάνουμε τις εξής περαιτέρω απλοποιήσεις στις προηγούμενες παραδοχές:

- 6.α** Εάν η διατομή δεν βρίσκεται ολόκληρη υπό θλίψη, η κατανομή των θλιπτικών τάσεων μπορεί να ληφθεί ως εξής:
- σε ένα μήκος $0.2x$ από την ουδέτερη ζώνη η τάση είναι μηδέν, στο υπόλοιπο ύψος $0.8x$ η τάση είναι σταθερή και ίση με: $0.85f_{cd}^9$
 - αδιαφορούμε για την μέγιστη παραμόρφωση του χάλυβα (έτσι κι' αλλιώς η τιμή 0.0020 είναι συμβατική) και θεωρούμε ότι το σκυρόδεμα έχει παραμόρφωση $\varepsilon_{c2} = 0.0035^{10}$

⁷ Για θλίψη εκ κάμψεως. Για κεντρική θλίψη είναι $\varepsilon_{c2} = 0.002$

⁸ Η παραδοχή αυτή, παρόλο που αναφέρεται στον χάλυβα στην ουσία αφορά το εφελκυσμένο σκυρόδεμα. Είναι καθαρά συμβατική και έχει σκοπό να περιορίσει τις υπερβολικές ρηγματώσεις που θα καθιστούσαν το σκυρόδεμα μη επισκευάσιμο (BLR: Beyond Limit of Repair). Η τιμή $\varepsilon_{s1} = 0.020$ είναι αυθαίρετη: θα μπορούσε να ήταν και 0.005 ή 0.0010 χωρίς αυτό (όπως θα δούμε σε μελλοντική άσκηση) να επηρεάζει την ροπή αντοχής.

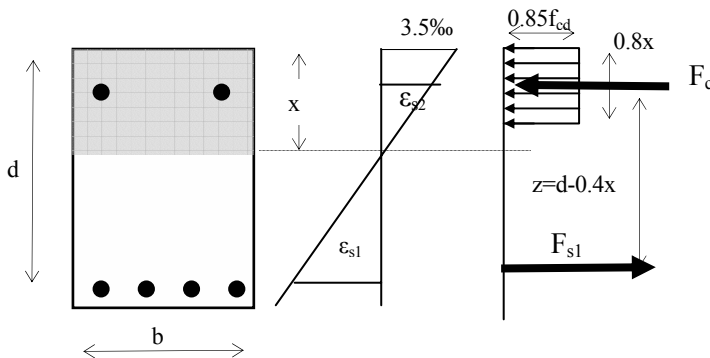
⁹ Για διατομές σταθερού θλιβόμενου πλάτους ή για πλάτος που αυξάνει προς την πλέον θλιβόμενη ίνα. Αν το πλάτος μειώνεται προς την πλέον θλιβόμενη ίνα τότε η τάση λαμβάνεται ίση με $0.80f_{cd}$.

1^η Εφαρμογή (έλεγχος): Πόση είναι η ροπή αντοχής διατομής $b/h/d=25/60/56$ με $4\Phi 14$ από C20/25 και S400 και $N=0$ (σχεδόν πάντα στις πλάκες και συνήθως στις δοκούς η αξονική δύναμη είναι μηδέν).

Από την ισοδυναμία των αξονικών δυνάμεων θα υπολογίσουμε το ύψος της θλιβόμενης ζώνης: έχουμε ότι

$$N_{εξ}=N_{εσ} \quad \text{ή} \quad 0=F_{s1}-F_c$$

$$\text{Είναι } F_{s1}=A_s\sigma_s \text{ και } F_c=A_c\sigma_c$$



Εστω ότι ο χάλυβας έχει διαρρεύσει¹¹ οπότε

$$\sigma_s=f_{yd}=f_{yk}/\gamma_s=400/1.15=348\text{MPa} \text{ ή } 34.8\text{kN/cm}^2.$$

$$A_s=4\cdot[\pi\cdot\Phi^2/4]=4\cdot[3.14\cdot1.4^2/4]=4\cdot1.54=6.15\text{cm}^2.$$

$$\text{Αρα } F_{s1}=6.15\text{cm}^2\cdot34.8\text{kN/cm}^2=214\text{kN}.$$

$$\text{Εξ άλλων: } F_c=(0.8x)\cdot b\cdot(0.85f_{cd})=0.68bx f_{cd}$$

όπου $b=0.25\text{m}$ και

$$f_{cd}=f_{ck}/\gamma_c=20/1.5=13.33\text{MPa}=13330\text{kN/m}^2.$$

Αρα το ύψος της θλιβόμενης ζώνης είναι:

$$214=0.68\cdot0.25\cdot13330\cdot x \Rightarrow x=0.094\text{m}$$

Μιας και δεν υπάρχει εξωτερική αξονική δύναμη, μπορούμε να υπολογίσουμε την ροπή ως προς οποιαδήποτε στάθμη. Ετσι διαλέγουμε την

¹⁰ Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρξουν και περιπτώσεις κατά τις οποίες θα προκύψει $\varepsilon_{s1}>0.0020$, πάντως η ροπή αντοχής δεν θα αυξηθεί (βλ υποσημείωση 2)

¹¹ Αυτή είναι μια παραδοχή που μας βολεύει διότι η τάση του χάλυβα είναι πλέον ανεξάρτητη της παραμορφώσεώς του. Βεβαίως όμως στο τέλος θα ελέγξουμε ότι πράγματι συμβαίνει αυτό!

θέση της συνισταμένης των θλιπτικών δυνάμεων. Ο μοχλοβραχίονας «z» των εσωτερικών δυνάμεων είναι: $z=0.56-0.5*(0.8*0.094)=\mathbf{0.522m^{12}}$.

Έτσι η ροπή των εσωτερικών δυνάμεων (ή όπως αλλιώς την λέμε η *ροπή αντοχής*) είναι:

$$M_{Rd}=F_{s1}*z=214*0.522=\mathbf{111.7kNm}$$

Πρέπει όμως να ελέγξουμε αν όντως ο χάλυβας έχει διαρρεύσει:

$$\frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{s12}} \Rightarrow \frac{x}{d-x} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{s1}}$$

άρα

$$\varepsilon_{s1}=\varepsilon_{c2}*(d-x)/x=3.5\text{‰}*(0.560-0.094)/0.094=17.35\text{‰}$$

η οποία είναι μεγαλύτερη από την παραμόρφωση διαρροής $\varepsilon_{yd}=348/200.000=1.74\text{‰}$. Άρα ορθώς είχαμε υποθέσει. Και βέβαια $17.35\text{‰}<20.00\text{‰}$

2^η Εφαρμογή (έλεγχος): Όπως και στην 1^η εφαρμογή αλλά τώρα έστω ότι υπάρχει και αξονική *θλιπτική* δύναμη $N=\mathbf{100kN}$.

Τώρα στην εξίσωση ισοδυναμίας των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων θα έχουμε και την εξωτερικώς δρώσα αξονική:

$$N_{εξ}=N_{εσ} \text{ ή } -100=F_{s1}-F_c^{13}$$

$$\text{Είναι } F_{s1}=A_s\sigma_s \text{ και } F_c=A_c\sigma_c$$

Έστω ότι ο χάλυβας έχει διαρρεύσει οπότε:

$$\sigma_s=f_{yd}=f_{yk}/\gamma_s=400/1.15=348\text{MPa ή } 34.8\text{kN/cm}^2.$$

$$A_s=4*[\pi*\Phi^2/4]=4*[3.14*1.4^2/4]=4*1.54=6.15\text{cm}^2.$$

$$\text{Άρα } F_{s1}=6.15\text{cm}^2*34.8\text{kN/cm}^2=\mathbf{214kN}.$$

$$\text{Εξ άλλου: } F_c=(0.8x)*b*(0.85f_{cd})=0.68bxf_{cd}$$

όπου $b=0.25\text{m}$ και

$$f_{cd}=f_{ck}/\gamma_c=20/1.5=13.33\text{MPa}=13330\text{kN/m}^2.$$

Άρα το ύψος της θλιβόμενης ζώνης είναι:

$$100+214=0.68*0.25*13330*x \Rightarrow \mathbf{x=0.139^{14}m}$$

¹² Σημειώνεται ότι ο λόγος z/d (εδώ $=0.522/0.560\approx 0.90$) δεν «πολυ-μεταβάλλεται» (είναι περίπου σταθερός) και έτσι θα μπορούσαμε να είχαμε πει εξ αρχής $z=0.9*0.56 \dots$ (αλλά ας μην το παρακάνουμε στις απλουστεύσεις!!)

¹³ Προσέξατε ότι θεωρήσαμε την θλίψη με αρνητικό πρόσημο: αυτό σημαίνει ότι στο αριστερό μέρος, των εξωτερικώς δρώντων μεγεθών, γράφουμε -100, ενώ στο δεξιό μέρος, των εσωτερικώς αναπτυσσομένων μεγεθών, την θλιπτική δύναμη του σκυροδέματος την βάζουμε με πρόσημο «-» και την εφελκυστική δύναμη του χάλυβα την βάζουμε με πρόσημο «+».

¹⁴ Παρατηρήστε ότι το ύψος της θλιβόμενης ζώνης αυξήθηκε σε σχέση με την 1^η εφαρμογή. Προφανώς. Γιατί?

Τώρα μιας και υπάρχει αξονική δύναμη στην διατομή έχει σημασία η στάθμη ως προς την οποία θα υπολογίσουμε τις ροπές. Από την στατική επίλυση τα εντατικά μεγέθη αναφέρονται συνήθως ως προς τον άξονα του Κ.Β. της διατομής, αυτό θα κάνουμε και εδώ¹⁵:

$$M_{Rd} = F_{s1} \cdot (h/2 - d_1) + F_c \cdot (h/2 - 0.4x) = 214 \cdot (0.30 - 0.04) + 314 \cdot [0.30 - 0.5 \cdot (0.8 \cdot 0.139)] = \underline{\underline{132.4 \text{ kNm}}}$$

Πρέπει και πάλι να ελέγξουμε αν όντως ο χάλυβας έχει διαρρεύσει:

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_c \cdot (d - x) / x = 3.5\text{‰} \cdot (0.560 - 0.139) / 0.139 =$$

$$= 10.6\text{‰} > 1.74\text{‰}. \text{ Καλώς. Και βέβαια } 10.6\text{‰} < 20\text{‰}$$

Ερωτήσεις κρίσεως: Γιατί η ροπή αντοχής αυξήθηκε? ($132.4 > 111.7$) Γιατί η παραμόρφωση του χάλυβα μειώθηκε? ($10.6\text{‰} < 17.35\text{‰}$)

3^η Εφαρμογή (έλεγχος): Όπως και στην 1^η εφαρμογή αλλά τώρα έστω ότι υπάρχει και **θλιβόμενος οπλισμός** $A_{s2} = 2\Phi 14$ με $d_2 = 0.04 \text{ m}$.

Τώρα στην εξίσωση ισοδυναμίας των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων θα έχουμε και την δύναμη του θλιβόμενου οπλισμού:

$$N_{εξ} = N_{εσ} \quad \text{ή} \quad 0 = F_{s1} - F_c - F_{s2}$$

$$\text{Είναι } F_{s1} = A_{s1} \sigma_{s1}, F_{s2} = A_{s2} \sigma_{s2} \text{ και } F_c = A_c \sigma_c$$

Εστω ότι αμφότεροι(?) οι χάλυβες έχουν διαρρεύσει οπότε

$$\sigma_s = f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 400 / 1.15 = 348 \text{ MPa} \quad \text{ή} \quad 34.8 \text{ kN/cm}^2.$$

$$A_{s1} = 4 \cdot [\pi \cdot \Phi^2 / 4] = 4 \cdot [3.14 \cdot 1.4^2 / 4] = 4 \cdot 1.54 = 6.15 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Αρα } F_{s1} = 6.15 \text{ cm}^2 \cdot 34.8 \text{ kN/cm}^2 = \underline{\underline{214 \text{ kN}}}, \text{ και } F_{s2} = \underline{\underline{107 \text{ kN}}}$$

$$\text{Εξ άλλου: } F_c = (0.8x) \cdot b \cdot (0.85 f_{cd}) = 0.68 b x f_{cd}$$

όπου $b = 0.25 \text{ m}$ και

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 20 / 1.5 = 13.33 \text{ MPa} = 13330 \text{ kN/m}^2.$$

Αρα το ύψος της θλιβόμενης ζώνης είναι:

$$-107 + 214 = 0.68 \cdot 0.25 \cdot 13330 \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{x = 0.047 \text{ m}}}$$

Από τα όμοια τρίγωνα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_c (x - d_2) / x = 3.5(0.047 - 0.040) / 0.047 = 0.52\text{‰} < 1.74\text{‰}$$

Αρα ο θλιβόμενος οπλισμός **δεν έχει διαρρεύσει** και άρα αλλάζει η εξίσωση ισοδυναμίας. Η τάση του είναι:

$$\sigma_{s2} = E_s \varepsilon_{s2} = 20 \cdot \varepsilon_c \cdot (x - d_2) / x = 20 \cdot 3.5 \cdot (1 - 0.04/x) \text{ (kN/cm}^2\text{)}$$

Ετσι η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$$0 = 214 - 3.08 \cdot 70 \cdot (1 - 0.04/x) - 0.68 \cdot 0.25 \cdot 13330 \cdot x$$

¹⁵ Πάντως, όπως θα δούμε, στην σχετική άσκηση «υπολογισμός με πίνακες», μας βολεύει να αναφέρουμε τις ροπές ως προς την στάθμη του εφελκόμενου οπλισμού.

¹⁶ Από την εξίσωση ισοδυναμίας των αξονικών δυνάμεων έχουμε ότι:

$$F_c = F_{s1} + N = 214 + 100 = 314 \text{ kN}$$

από την οποία προκύπτει ότι $x=0.061\text{m}$ και $\varepsilon_{s2}=1.22\text{‰}$, $\varepsilon_{s1}=3.5*(0.56-0.061)/0.061=28.6\text{‰}$. Παρατηρούμε ότι ο χάλυβας όχι μόνον έχει διαρρευσεί αλλά ξεπέρασε και την οριακή τιμή 20‰ άρα κακώς υποθέσαμε ότι $\varepsilon_c=3.5\text{‰}$. Θέτουμε λοιπόν $\varepsilon_{s1}=20\text{‰}$ και αναζητούμε το $\varepsilon_c<3.5\text{‰}$:

$$0=214-3.08*20*20*[x-d_2]/[d-x]-0.68*0.25*13333*x$$

από την οποία προκύπτει ότι $x=0.066\text{m}$ και $\varepsilon_c=2.67\text{‰}$. $\varepsilon_{s2}=1.05\text{‰}$. Οπότε: $F_{s1}=214\text{kN}$, $F_{s2}=1.05*20*3.08=64.7\text{kN}$, $F_c=149.3\text{kN}$.

Η ροπή αντοχής ως προς το Κ.Β. της διατομής είναι:

$$M_{Rd}=F_{s1}*(h/2-d_1)+F_c*(h/2-0.4x)+F_{s2}*(h/2-d_2)=$$

$$=214*(0.30-0.04)+149.3*(0.30-0.5*0.061)+64.7*0.26=\underline{\underline{113.6\text{kNm}}}$$

Ερωτήσεις κρίσεως: Γιατί η ροπή αντοχής αυξήθηκε? ($113.6>111.7$) Γιατί η αύξηση αυτή είναι πολύ μικρή?

Σημ: Αν είχαμε αγνοήσει προς στιγμήν ότι $28.6\text{‰}>20\text{‰}$

θα βρίσκαμε ότι: $F_{s1}=214\text{kN}$, $F_{s2}=1.22*20*3.08=75.2\text{kN}$, $F_c=138.8\text{kN}$, και η ροπή αντοχής ως προς το Κ.Β. της διατομής θα ήταν:

$$M_{Rd}=F_{s1}*(h/2-d_1)+F_c*8*(0.30-0.5*0.061)+75.2*0.26=\underline{\underline{112.6\text{kNm}}}$$
 η οποία λίγο διαφέρει από την προηγούμενη τιμή.

4^η Εφαρμογή (διαστασιολόγηση): Εστω πλάκα πάχους $h=0.15\text{m}$ ($d=0.13\text{m}$) με δρώσα ροπή σχεδιασμού $m_{sd}=30\text{kNm/m}$. Να βρεθεί ο απαραίτητος οπλισμός ανά τυπικό μέτρο πλάτους. C20/25, S400.

Από την εξίσωση ισοδυναμίας των αξονικών δυνάμεων έχουμε ότι: $F_{s1}=0.68x b f_{cd}$ ή $x=A_{s1} f_{yd}/0.68 b f_{cd}$ και παίρνοντας ροπές ως προς την F_c έχουμε ότι:

$m_{sd}=F_{s1} z=A_{s1} f_{yd}(d-0.4 A_{s1} f_{yd}/0.68 b f_{cd})$. Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς A_{s1} δίνει¹⁷:

$$A_{s1} = 0.85 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m_{sd}}{1.7bd^2 f_{cd}}} \right) \frac{bdf_{cd}}{f_{yd}}$$

$$A_{s1} = 0.85 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4*30}{1.7*1*0.13^2 13330}} \right) \frac{100*13*13.33}{348} = 7.25\text{cm}^2 / \text{m}$$

Τίθενται Φ12/15.5

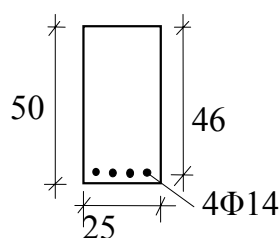
Ελέγξατε ότι οι παραμορφώσεις ε_c και ε_{s1} είναι εντός των ορίων.

¹⁷ Γενικότερα αποδεικνύεται ότι για καθαρή κάμψη ($N=0$) και χωρίς θλιβόμενο οπλισμό, η σχέση μεταξύ ανηγμένης ροπής «μ» και μηχανικού ποσοστού οπλισμού «ω» είναι: $\mu=\omega(1-0.588\omega)$ ή $\omega=0.85(1-\sqrt{1-2.353\mu})$ όπου $\mu=M/bd^2 f_{cd}$ και $\omega=(A_s f_{yd})/(bdf_{cd})$.

Να γνωρίζετε την απόδειξη των τύπων αυτών.

16.10 Ελεγχος και διαστασιολόγηση ορθογωνικών διατομών με: δοκιμές και με πίνακες CEB («ακριβές» διάγραμμα) και με το προσεγγιστικό διάγραμμα

16.10.1α) Ελεγχος ορθογωνικής διατομής (Παραβολικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος, 4Φ14)



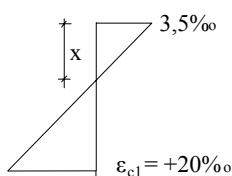
Δίδεται ορθογωνική διατομή 25/50 από σκυρόδεμα C20/25 και οπλισμό 4Φ14 από χάλυβα S400 χωρίς αξονική δύναμη και ζητείται η ροπή αντοχής $M_{Rd} = ?$

Λαδιακασία: Εδώ έχουμε τρεις αγνώστους: την ροπή αντοχής M_{Rd} και τις δύο παραμορφώσεις ϵ_{c2} και ϵ_{s1} . Διαθέτουμε δύο εξισώσεις: την ισοδυναμία των αξονικών δυνάμεων και την ισοδυναμία των ροπών. Η τρίτη

«εξίσωση» που διαθέτουμε είναι ότι, μιας και πρόκειται για κατάσταση αστοχίας, η μία από τις δύο παραμορφώσεις που αναζητούμε θα είναι ίση με την κρίσιμη (δηλαδή θα είναι ή: $\{ \epsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$ και $\epsilon_{s1} < 20\text{‰} \}$ ή $\{ \epsilon_{c2} < -3.5\text{‰}$ και $\epsilon_{s1} = 20\text{‰} \}$). Επειδή δεν ξέρουμε εκ των προτέρων ποια παραμόρφωση θα είναι κρίσιμη λύνουμε το πρόβλημα με δοκιμές ως ξής: αρχικώς κάνουμε μια «τυχαία» υπόθεση ως προς τις παραμορφώσεις (που να αντιστοιχούν βέβαια σε κατάσταση αστοχίας), ελέγχουμε την ορθότητα της υποθέσεως εξετάζοντας αν έχουμε ισοδυναμία των αξονικών δυνάμεων αν δεν έχουμε ισοδυναμία αξονικών δυνάμεων κάνουμε νέα υπόθεση περί των παραμορφώσεων μέχρις ότου επιτευχθεί ισοδυναμία). Όταν η ισοδυναμία των αξονικών δυνάμεων επιτευχθεί, τότε, από την εξίσωση ισοδυναμίας των ροπών, υπολογίζουμε την ροπή αντοχής.

Επίλυση με δοκιμές¹⁸:

1η Δοκιμή



$$\text{Εστω } \epsilon_{c2} = -3.5\text{‰} \quad \epsilon_{s1} = +20\text{‰}$$

$$x = 0.46 \frac{3.5}{3.5 + 20.0} = 0.069\text{m}$$

Για παραμόρφωση $\epsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$ από το διάγραμμα έχουμε: $\alpha = 0.81$

¹⁸ Για τον υπολογισμό της συνισταμένης θλιπτικής δυνάμεως και της θέσεως-της, χρησιμοποιούμε τα σχήματα 6.2.α και 6.2.β.

$$F_c = 0,81 \times 0,85 \times 0,25 \times 0,69 \times \frac{20.000}{1,5} = 158,4 \text{ kN}$$

$$F_{s1} = 4 \times 1,54 \times 34,8 = 214,4 \text{ kN}$$

Η εφελκυστική δύναμη του χάλυβα είναι μεγαλύτερη από την θλιπτική δύναμη του σκυροδέματος: $F_{s1} = 214,4 > 188,4 = F_c$ δηλαδή δεν έχουμε ισοδυναμία. Επειδή έχουμε περίσσεια εφελκυσμού η επόμενη υπόθεση που θα κάνουμε θα πρέπει να είναι προς την μείωση της ε_s .

2^η Δοκιμή

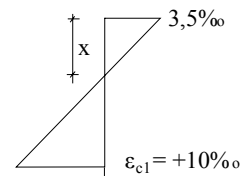
Εστω $\varepsilon_{c2} = 3,5\text{‰}$ $\varepsilon_{s1} = +10\text{‰}$

$$x = 0,46 \frac{3,5}{3,5 + 10,0} = 0,119 \text{ m}$$

$$F_c = 0,81 \times 0,85 \times 0,25 \times 0,119 \times \frac{20.000}{1,5} = 273,7 \text{ kN}$$

$$F_{s1} = 214,4 \text{ kN} \neq 273,7 \text{ kN}$$

Τώρα αντιθέτως έχουμε περίσσεια θλίψεως (μειώσαμε υπερβολικά την ε_s)



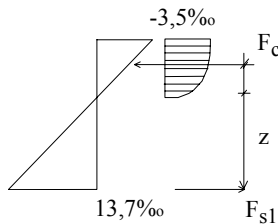
3^η Δοκιμή

Εστω $\varepsilon_{c2} = -3,5\text{‰}$ $\varepsilon_{s1} = 13,7\text{‰}$

$$x = 0,46 \frac{3,5}{3,5 + 13,7} = 0,094 \text{ m}$$

$$F_c = 0,81 \times 0,85 \times 0,25 \times 0,094 \times \frac{20.000}{1,5} = 214,8 \text{ kN}$$

$$F_{s1} = 214,4 \text{ kN} = 214,8 \text{ kN} = F_c$$



Δηλαδή πετύχαμε την ισοδυναμία των αξονικών δυνάμεων, οπότε η ροπή αντοχής υπολογίζεται ως εξής:

Για $\varepsilon_{c2} = -3,5\text{‰}$ είναι $\zeta' = 0,415$

$$M_{Rd} = F_{s1} \cdot z = 214,4 \times [0,46 - 0,094 \times 0,415] = 90,3 \text{ kNm}$$

16.10.1β) Ελεγχος με το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος Εδώ δεν χρειάζονται δοκιμές μιας και, λόγω του ορθογωνικού δ/τος, έχουμε κλειστές λύσεις:

$$\omega = 4 * 1.54 * 348 / [25 * 46 * 13.333] = 0.14 \text{ και}$$

$$\mu = \omega * (1 - \omega / 1.7) = 0.14 (1 - 0.14 / 1.7) = 0.128$$

οπότε:

$$M = \mu b d^2 f_{cd} = 0.128 * 0.25 * 0.46^2 * 13333 = 90.5 \text{ kNm}$$

και

$\xi = \omega / 0.68 = 0.14 / 0.68 = 0.206$ και αφού $\mu = 0.128 > 0.101^{19}$ κρίσιμη η παραμόρφωση του σκυροδέματος $\epsilon_c = 3.5\text{‰}$ και $\epsilon_{s1} = 3.5(1/\xi - 1) = 3.5(1/0.206 - 1) = 13.5\text{‰}$

16.10.2α) Παραλλαγή: Αν το (συμβατικό) όριο της ϵ_{s1} ήταν 10% αντί 20% και όλα τα άλλα όπως στην περίπτωση 1, πόση ροπή αντοχής θα είχαμε βρει;

1^η Δοκιμή Θα είχαμε ξεκινήσει από την 2^η δοκιμή της προηγούμενης περιπτώσεως, από την οποία θα είχαμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι έχουμε περίσσεια θλίψεως ($F_{s1} < F_c$) και άρα θα πρέπει να μειωθεί η ϵ_c :

2^η Δοκιμή

$$\text{Εστω } \epsilon_{c2} = -3\text{‰} \quad \epsilon_{s1} = 10\text{‰}$$

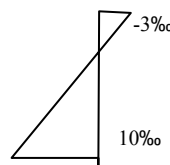
$$x = \frac{3}{3 + 10} x 0.46 = 0.106 \text{ m}$$

Για $\epsilon_{c2} = 3.00\text{‰}$ από τον πίνακα έχουμε $\alpha = 0.778$

$$F_c = 0.778 x 0.85 x 0.25 x 0.106 x \frac{20.000}{1.5} = 233.4 \text{ kN}$$

$$F_{s1} = 214.4 \text{ kN} < F_c = 233.4 \text{ kN}$$

άρα απαιτείται επιπλέον μείωση της ϵ_{c2}



3^η Δοκιμή

$$\text{Εστω } \epsilon_{c2} = -2.8\text{‰} \quad \epsilon_{s1} = 10\text{‰}$$

¹⁹ Η τιμή αυτή προκύπτει για παραμορφώσεις $\epsilon_{c2} = 3.5\text{‰}$, $\epsilon_{s1} = 20.0\text{‰}$ (οπότε $\xi = 0.149$ και $\mu_{kp} = 0.8 * 0.85 * 0.149 * [1 - 0.4 * 0.149] = 0.101$)

$$x = 0,46 \frac{2,8}{2,8+10} = 0,101m$$

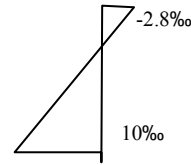
$$F_c = 0,76 \times 0,85 \times 0,25 \times 0,101 \times \frac{20.000}{1,5} = 218kN$$

$$F_{s1} = 214,4kN \cong 218kN = F_c \Rightarrow$$

$$M_{Rd} = 214,4 \times [0,46 - 0,101 \times 0,40] = 90,0kNm$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η μεταβολή του ορίου ε_{s1} από 10‰ σε 20‰ είχε πολύ μικρή επίπτωση στην αύξηση της ροπής. Γιατί;²⁰ (? Οριακώς θα μπορούσαμε να μην είχαμε θέσει κανένα όριο για το ε_{s1} ? δηλαδή $\varepsilon_{s1} \rightarrow \infty$?).

Πάντως: Θα μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε τους Πίνακες του βιβλίου παρ' όλο που είναι συντεταγμένοι με $\varepsilon_{s1} = +10\%$ ενώ το όριο του κανονισμού είναι +20‰.



16.10.3α. Ελέγχος ορθογωνικής διατομής (2Φ14)

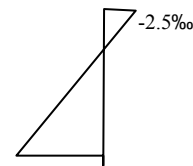
Εστω η διατομή της 1^{ης} περιπτώσεως αλλά με τον μισό οπλισμό: $A_{s1} = 2\Phi 14 \Rightarrow$ Πόση είναι η ροπή αντοχής $M_{Rd} = ?$

1η Δοκιμή

Εστω $\varepsilon_{c2} = -2.5\%$ $\varepsilon_{s1} = 20\%$

Για $\varepsilon_{c2} = -2.5\%$ η θέση της συνισταμένης δυνάμεως βρίσκεται για $\zeta' = 0.39$

$$M_{Rd} = 105,8 \times [0,46 - 0,051 \times 0,39] = 46,6kNm$$



16.10.3β) Ελεγχος με το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος:

$$\omega = 2 \times 1,54 \times 348 / [25 \times 46 \times 13,333] = 0,07$$

και

$$\mu = \omega \times (1 - \omega / 1,7) = 0,07 \times (1 - 0,07 / 1,7) = 0,067$$

οπότε

$$M = \mu b d^2 f_{cd} = 0,067 \times 0,25 \times 0,46^2 \times 13,333 = 47,3kNm$$

και $\xi = \omega / 0,68 = 0,07 / 0,68 = 0,103$ και αφού $\mu = 0,067 < 0,101$ κρίσιμη η παραμόρφωση του χάλυβα: $\varepsilon_{s1} = 20\%$ και

$$\varepsilon_c = 20 / (1/\xi - 1) = 20 / (1/0,103 - 1) = 2,29\%$$

16.10.4α. Ελέγχος ορθογωνικής διατομής (8Φ14)

²⁰ Μικρή μεταβολή του μοχλοβραχίονα των εσωτερικών δυνάμεων.

Εστω η διατομή της 1^{ης} περιπτώσεως αλλά με τον διπλό οπλισμό: A_{s1} 8Ø14 \Rightarrow Πόση είναι η ροπή αντοχής $M_{Rd}=?$

1η Δοκιμή

Εστω $\varepsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$ $\varepsilon_{s1} = 5.1\text{‰}$

$$x = 0.46 \frac{3.5}{3.5 + 5.1} = 0.186m \Rightarrow$$

$$F_c = 0.81 \times 0.85 \times 0.25 \times 0.186 \times 13333 = 428.7kN$$

$$F_{s1} = 8 \times 1.54 \times 34.8 = 428.7kN = F_c \Rightarrow$$

$$M_{Rd} = 428.7 \times [0.46 - 0.186 \times 0.415] = 164.1kNm$$

16.10.4β) Ελέγχος με το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος:

$$\omega = 8 \times 1.54 \times 348 / [25 \times 46 \times 13.333] = 0.28$$

$$\text{και } \omega = \omega \times (1 - \omega / 1.7) = 0.28 (1 - 0.28 / 1.7) = 0.234$$

$$\text{οπότε } M = \mu b d^2 f_{cd} = 0.234 \times 0.25 \times 0.46^2 \times 13333 = 165kNm$$

$$\text{και } \xi = \omega / 0.68 = 0.28 / 0.68 = 0.412$$

και αφού $\mu = 0.234 > 0.101$ κρίσιμη η παραμόρφωση του σκυροδέματος

$$\varepsilon_c = 3.5\text{‰} \text{ και } \varepsilon_{s1} = 3.5 (1 / \xi - 1) = 3.5 (1 / 0.412 - 1) = 5\text{‰}$$

16.10.5α Ελέγχος ορθογωνικής διατομής (16Φ14!!)

Εστω η διατομή της 1^{ης} περιπτώσεως αλλά με τον 4πλό οπλισμό: A_{s1} 16Ø14 (ας υποθέσουμε ότι χωράνε και ότι επιτρέπεται να θέσουμε τόσο πολύ οπλισμό)²¹ \Rightarrow Πόση είναι η ροπή αντοχής $M_{Rd}=?$

1η Δοκιμή

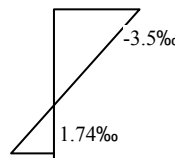
Εστω $\varepsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$ $\varepsilon_{s1} = 1.74\text{‰}$

$$x = 0.46 \times 3.5 / [3.5 + 1.74] = 0.307m$$

$$F_c = 0.81 \times 0.85 \times 0.25 \times 0.307 \times 13333kN$$

$$F_{s1} = 16 \times 1.54 \times 34.8 = 857kN$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε περίσσεια εφελκυσμού, άρα πρέπει να μειώσουμε επιπλέον την παραμόρφωση του εφελκυσμένου οπλισμού (κάτω και από την παραμόρφωση διαρροής).



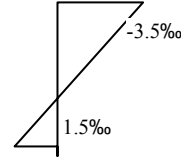
2^η Δοκιμή

²¹ Ο κανονισμός προβλέπει ένα μέγιστο ποσοστό οπλισμού ρ_{max} . Γιατί?

Εστω $\varepsilon_{c2} = -3,5\text{‰}$ $\varepsilon_{s1} = 1,5\text{‰}$

$$x = 0,46 \frac{3,5}{3,5 + 1,5} = 0,322m \Rightarrow$$

$$F_c = 0,81 \times 0,85 \times 0,25 \times 0,322 \times 13333 = 739kN$$



Ο οπλισμός δουλεύει με τάση:

$\sigma_s = 1,5\text{‰} \times 200 = 300\text{MPa} < f_{yd} = 348\text{MPa}$ (προσέξατε ότι δεν έχει διαρρεύσει)

και άρα $F_{S1} = 16 \times 1.54 \times 30 = 739.2kN$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε ισοδυναμία αξονικών δυνάμεων, οπότε:

$$M_{Rd} = 739 \times [0,46 - 0,322 \times 0,415] = \underline{\underline{241KNm}}$$

16.10.5β) Έλεγχος με το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος:

$$\omega = 16 \times 1.54 \times 348 / [25 \times 46 \times 13.333] = 0.56 \text{ και}$$

$$\mu = \omega \times (1 - \omega / 1.7) = 0.56(1 - 0.56 / 1.7) = 0.376$$

(εδώ κανονικά θα έπρεπε να είχαμε παρατηρήσει ότι η ροπή αυτή είναι μεγαλύτερη από την $\mu_{lim} = 0.333$ και άρα ο χάλυβας δεν έχει διαρρεύσει, αλλά ας αφήσουμε να το διαπιστώσουμε στην συνέχεια) οπότε

$$M = \mu b d^2 f_{cd} = 0.376 \times 0.25 \times 0.46^2 \times 13333 = 265kNm \text{ και}$$

$$\xi = \omega / 0.68 = 0.56 / 0.68 = 0.823$$

$$\text{και αφού } \mu = 0.376 > 0.101$$

κρίσιμη η παραμόρφωση του σκυροδέματος, άρα

$$\varepsilon_c = 3.5\text{‰} \text{ και}$$

$$\varepsilon_{s1} = 3.5(1/\xi - 1) = 3.5(1/0.823 - 1) = 0.75\text{‰} < 1.74\text{‰}$$

άρα ο χάλυβας δεν έχει διαρρεύσει και άρα η εξίσωση ισοδυναμίας των αξονικών δυνάμεων γράφεται (υπό ανηγμένη μορφή)

$$0.68\xi = \omega \times \varepsilon_s \times E_s(1/\xi - 1) / f_{yd} = \omega \times 700 \times (1/\xi - 1) / 348$$

ή

$$0.338\xi^2 \omega \xi - \omega = 0$$

οπότε

$$\xi = 0.702 \text{ και άρα}$$

$$\mu = 0.68\xi(1 - 0.4\xi) = 0.343 \text{ και άρα}$$

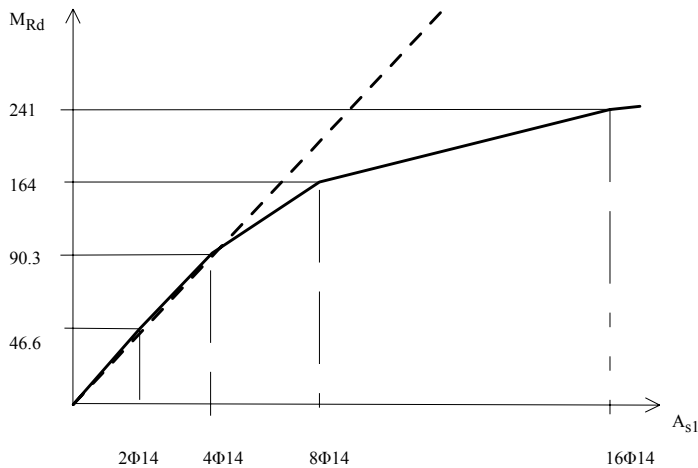
$$M = \mu b d^2 f_{cd} = 0.343 \times 0.25 \times 0.46^2 \times 13333 = 242kNm$$

και αφού $\mu = 0.343 > 0.101$ κρίσιμη η παραμόρφωση του σκυροδέματος

$$\varepsilon_c = 3.5\text{‰} \text{ και } \varepsilon_{s1} = 3.5(1/0.702 - 1) = 3.5(1/0.412 - 1) = 1.49\text{‰}$$

6) Τί παρατηρείτε από την σύγκριση του οπλισμού και της ροπής αντοχής (περιπτώσεις 1, 3, 4 και 5)

- «Περίπου» γραμμική σχέση μεταξύ οπλισμού και ροπής για μικρά ποσοστά οπλισμού
- Για πολύ μεγάλα ποσοστά οπλισμού η γραμμικότητα αυτή χάνεται: η ροπή είναι μικρότερη από αυτή που θα αντιστοιχούσε στην γραμμική σχέση. Γιατί?



16.10.7α) Διαστασιολόγηση ορθογωνικής διατομής (Με Πίνακες CEB Πιν. 6.2)

Εστω η διατομή της 1^{ης} περιπτώσεως η οποία καταπονείται με ροπή $M_{sd}=90.3\text{kNm}$. Να βρεθεί ο απαιτούμενος οπλισμός με χρήση του Πίνακα CEB (Πιν. 6.2)

$$\mu_{sd} = \frac{90,3}{0,25 \times 0,46^2 \times 13333} = 0,128 \Rightarrow \omega = 0,139$$

$$A_{s1} = \omega \frac{b d f_{cd}}{f_{yd}} = 0,13 \times 25 \times 46 \frac{13,333}{348} = 6,1 \text{ cm}^2 \text{ τίθενται 4Φ14}$$

16.10.7β) Διαστασιολόγηση με το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος Εδώ και πάλι δεν χρειάζονται δοκιμές μιας και λόγω του ορθογωνικού δ/τος έχουμε κλειστές λύσεις: $\mu_{sd}=0.128$ και $\omega=0.85 \{1-\sqrt{1-2.353\mu_{sd}}\}=0.139$ και άρα $A_{s1}=6.1\text{cm}^2$

16.10.8α) Διαστασιολόγηση ορθογωνικής διατομής (Με θλιπτική αξονική δύναμη) Εστω η διατομή της 1^{ης} περιπτώσεως η οποία καταπονείται με ροπή $M_d=90.3\text{kNm}$ και αξονική δύναμη $N=-100\text{kN}$ (θλιπτική). Να βρεθεί ο απαιτούμενος οπλισμός με χρήση του Πίνακα CEB (Πιν. 6.2)

Τα εντατικά μεγέθη που δίνονται αναφέρονται στο άξονα της διατομής (ο οποίος συνήθως θεωρείται ο κεντροβαρικός άξονας). Ανάγουμε τα εντατικά μεγέθη στην στάθμη του οπλισμού:

$$M_{sd} = M_d - N \cdot y_s = 90.3 - (-100 \times 0.21) = 121.3 \text{ kNm}$$

(προσέξτε: όταν η δύναμη είναι θλιπτική, η ροπή αυξάνεται) →

$$\mu_{sd} = \frac{121.3}{0.25 \times 0.46^2 \times 13333} = 0.172 \Rightarrow \omega = 0.195$$

Ο οπλισμός υπολογίζεται από την σχέση:

$$A_s = \omega b d f_{cd} / f_{yd} + N / f_{yd} \text{ άρα:}$$

$$A_s = 0.195 \times 25 \times 46 \frac{13.333}{348} - \frac{100}{34.8} = 8.6 - 2.87 = 5.7 \text{ cm}^2$$

$$(\leq 6.2 \text{ cm}^2 \text{ για } N_d = 0)$$

(ομοίως προσέξτε: όταν η δύναμη είναι θλιπτική, η συμβολή-της στον οπλισμό είναι μειωτική).

“Ρετσέτα”: όταν η αξονική αυξάνει την ροπή \Rightarrow μειώνει τα σίδερα

16.10.8β) Διαστασιολόγηση με το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων

σκυροδέματος: $\omega - \nu = 0.85(1 - \sqrt{1 - 2.353\mu_{sd}})$

$$\mu_{sd} = 0.172, \nu = 100 / [0.25 \times 0.46 \times 13333] = -0.065$$

και

$$\omega = -0.065 + 0.85 \{1 - \sqrt{1 - 2.353\mu_{sd}}\} = 0.129 \text{ και άρα}$$

$$A_{s1} = 5.7 \text{ cm}^2$$

16.10.9α) Διαστασιολόγηση ορθογωνικής διατομής (Με εφελκυστική δύναμη) Εστω η διατομή της 1^{ης} (ή της 9^{ης}) περιπτώσεως η οποία καταπονείται με ροπή $M_d = 90.3 \text{ kNm}$ και αξονική δύναμη $N = +100 \text{ kN}$ (εφελκυστική). Να βρεθεί ο απαιτούμενος οπλισμός με χρήση του Πίνακα CEB (Πιν. 6.2)

Τα εντατικά μεγέθη που δίνονται αναφέρονται στο άξονα της διατομής (ο οποίος συνήθως θεωρείται ο κεντροβαρικός άξονας). Ανάγουμε τα εντατικά μεγέθη στην στάθμη του οπλισμού:

$$M_{sd} = M_d - N \cdot y_s = 90.3 - (100 \times 0.21) = 69.3 \text{ kNm} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_{sd} = 0.098 \Rightarrow \omega = 0.10 \Rightarrow$$

$$A_{s1} = 0.10 \times 25 \times 46 \frac{13333}{348} + \frac{100}{34.8} = 4.4 + 2.87 = 7.3 \text{ cm}^2$$

$$\left(\geq 6.2 \text{ cm}^2 \text{ για } N_d = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \mu_{sd} = 0.098 \Rightarrow \omega = 0.10 \Rightarrow$$

$$A_{s1} = 0.10 \times 25 \times 46 \frac{13333}{348} + \frac{100}{34.8} = 4.4 + 2.87 = 7.3 \text{ cm}^2$$

$$\left(\geq 6.2 \text{ cm}^2 \text{ για } N_d = 0 \right)$$

16.10.9β) Διαστασιολόγηση με το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος: $\omega - \nu = 0.85(1 - \sqrt{1 - 2.353\mu_{sd}})$

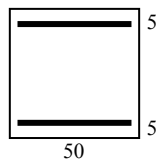
$$\mu_{sd} = 0.098, \nu = 100/[0.25 \times 0.46 \times 13333] = -0.065$$

και

$$\omega = +0.065 + 0.85 \{1 - \sqrt{1 - 2.353\mu_{sd}}\} = 0.169$$

$$\text{και άρα } A_{s1} = 7.4 \text{ cm}^2$$

16.10.10α) Έλεγχος ορθογωνικής διατομής (Με «πολύ μεγάλη» θλιπτική δύναμη, επίλυση με δοκιμές)



Δίδεται η τετραγωνική διατομή του σχήματος.

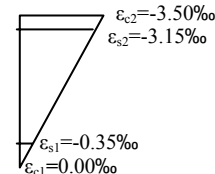
$$A_{s1} = A_{s2} = 19 \text{ cm}^2$$

C20/25, /S400, και

αξονική δύναμη

$$N_d = -3800 \text{ kN}$$

Να βρεθεί η ροπή αντοχής.



1η Δοκιμή²²

Εστω ότι $\varepsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$ και $\varepsilon_{c1} = 0\text{‰}$ (Προσέξτε ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε αυθαίρετα από οποιοδήποτε ζεύγος τιμών παραμορφώσεων αστοχίας). Εδώ θεωρήσαμε ότι όλη η διατομή θλίβεται. Στην περίπτωση αυτή

²² Πριν ξεκινήσουμε τις δοκιμές, ας αναζητήσουμε την μέγιστη θλιπτική δύναμη, N_{\max} , που μπορεί να αντέξει η διατομή σε κεντρική θλίψη (χωρίς καθόλου ροπή). Το νόημα αυτής της αναζήτησης είναι μήπως η αξονική που μας δόθηκε, $N_d = -3800 \text{ kN}$, είναι μεγαλύτερη ακόμη και από αυτήν την N_{\max} οπότε δεν έχει νόημα να ψάχνουμε να βρούμε πόση ροπή αντέχει αφού δεν θα αντέχει ούτε καν την αξονική. Προφανώς είναι:

$$N_{\max} = (0.85f_{cd})A_c + f_{yd}(A_{s1} + A_{s2}) = 0.85 \times 13333 \times 0.5 + (19 + 19) \times 34.8 = 2833 + 1322 = 4155 \text{ kN} > 3800 \text{ kN}$$

άρα έχει νόημα να συνεχίσουμε.

δεν ισχύει το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος. Θα χρησιμοποιήσουμε το «ακριβές» διάγραμμα.

$$x=h=0.50\text{m}$$

$$F_c=-0.81*0.85*0.50*0.50*13333\text{kN}=-2065\text{kN}$$

$$F_{s2}=-19*34.8=-661.2\text{kN}$$

$$F_{s1}=-19*(20*0.35)=-133\text{kN}$$

$$\text{Αρα } N_{\text{εσ}}=-2065-661.2-133=-2859.2>-3800\text{kN}$$

Παρατηρούμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις δεν δίνουν επαρκή θλίψη, άρα πρέπει να αυξήσουμε και άλλο την θλιπτική παραμόρφωση του κάτω πέλματος. Όταν όμως όλη η διατομή είναι σε θλίψη, τότε τα κριτήρια αστοχίας δεν είναι $\varepsilon_{c2}=-3.5\text{‰}$ είτε / και $\varepsilon_{s1}=20\text{‰}$ αλλά είναι εκείνα τα ζεύγη τιμών που αντιστοιχούν σε όλες τις θέσεις της εστραμμένης διατομής που διέρχονται από το σημείο C (παραμόρφωση 2‰ στο ύψος $3h/7$ (βλ. παρ. 5.1.3). Αυτό γίνεται για να περάσουμε, βαθμιαία, από την παραμόρφωση $\varepsilon_{c2}=-3.5\text{‰}$, που ισχύει για την θλίψη εκ κάμψεως, στην παραμόρφωση $\varepsilon_{c2}=-2.0\text{‰}$, που ισχύει για την κεντρική θλίψη. Ετσι λοιπόν, τα παρακάτω ζεύγη τιμών αντιστοιχούν σε κατάσταση αστοχίας όταν η διατομή είναι όλη σε θλίψη: ε_{c2} μεταξύ -2‰ και -3.5‰ και $\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{c2}-(2\text{‰}+\varepsilon_{c2})*7/3$. Π.χ. ενδεικτικά: για $\varepsilon_{c2}=-3.50\text{‰}$ θα είναι $\varepsilon_{c1}=0.0\text{‰}$ ή για $\varepsilon_{c2}=-3.00\text{‰}$ θα είναι $\varepsilon_{c1}=-1.17\text{‰}$, ή για $\varepsilon_{c2}=-2.50\text{‰}$ θα είναι $\varepsilon_{c1}=-1.33\text{‰}$, ή για $\varepsilon_{c2}=-2.0\text{‰}$ θα είναι $\varepsilon_{c1}=-2.0\text{‰}$.

2^η Δοκιμή

$$\text{εστω } \varepsilon_{c2}=-2.75\text{‰},$$

$$\varepsilon_{c1}=\varepsilon_{c2}-(2\text{‰}+\varepsilon_{c2})*7/3=-1\text{‰}$$

$$(\varepsilon_{s2}=-2.575\text{‰}, \varepsilon_{s1}=-1.175\text{‰})$$

Για $\varepsilon_{c2}=2.75\text{‰}$, έχουμε

$$\alpha=0.758, \text{ και } \zeta'=0.398$$

για $\varepsilon_{c2}=1.00\text{‰}$ έχουμε

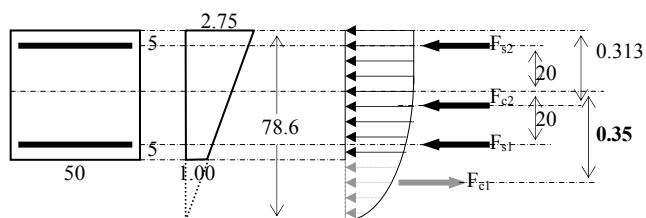
$$\alpha=0.420, \text{ και } \zeta'=0.35$$

$$F_{c2}=0.758*0.85*0.5*0.786*13333=3376\text{kN}^{23}$$

$$F_{s2}=19*34.8=661.2\text{kN}, F_{s1}=19*(20*1.175)=446.5\text{kN}$$

$$F_{c1}=0.420*0.85*0.5*0.286*13333=681\text{kN}^{24}$$

$$\text{Ελεγχος: } 3376+661.2+446.5-681=3803\text{kN}\sim 3800\text{kN}$$



²³ F_{c2} είναι η δύναμη που θα ανελάμβανε μια ορθογωνική διατομή με ύψος 78.6cm και μέγιστη παραμόρφωση σκυροδέματος $\varepsilon_{c2}=-2.75\text{‰}$

²⁴ F_{c1} είναι η δύναμη που θα ανελάμβανε μια ορθογωνική διατομή με ύψος 28.6cm και μέγιστη παραμόρφωση σκυροδέματος $\varepsilon_{c2}=-1.00\text{‰}$ και αντιπροσωπεύει την παραπανίσια δύναμη που θεωρήσαμε στην F_{c2} .

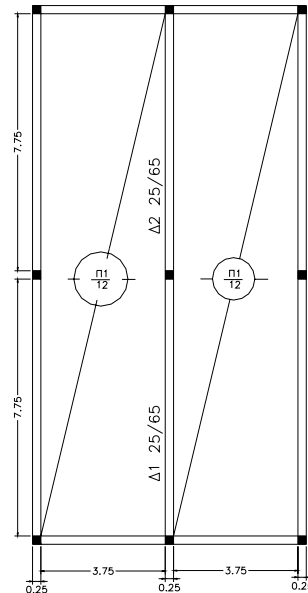
Εχουμε ισοδυναμία αξονικών δυνάμεων δηλαδή ορθώς υποθέσαμε ότι $\varepsilon_{c2} = -2.75\%$, και η ροπή αντοχής ως **προς το Κ.Β.**²⁵ της διατομής είναι:

$$M_R = 3376 \cdot (0.25 - 0.398 \cdot 0.786) + 661.2 \cdot 0.20 - 446.5 \cdot 0.2 + +681 \cdot (0.25 + 0.35 \cdot 0.286) = -212 + 132.2 - 89.3 + 238.4 = 69.2 \text{ kNm}$$

²⁵ Συνήθως στα υποστυλώματα (στοιχεία με μεγάλη αξονική δύναμη, με εναλλασσόμενη ροπή και τα οποία κατά κανόνα οπλίζονται συμμετρικώς) η ροπή αναφέρεται στο Κ.Β. της διατομής, ενώ στις δοκούς (στοιχεία με μικρή ή ανύπαρκτη αξονική δύναμη και τα οποία κατά κανόνα δεν οπλίζονται συμμετρικώς) η ροπή συνήθως ανάγεται στην στάθμη το εφελκόμενου οπλισμού (όταν συνυπάρχει και αξονική δύναμη. Όταν δεν υπάρχει αξονική δύναμη είναι αδιάφορο το πού θα γίνει η αναγωγή της ροπής.)

16.11 Οπλιση πλακών (περιβάλλουσες δρώσας ροπής και ροπής αντοχής)

• **Σκοπός:** Σκοπός της ασκήσεως είναι να δούμε πώς οπλίζουμε ένα σύστημα συνεχών πλακών και ειδικότερα πώς κάνουμε την διαβάθμιση του οπλισμού. Επίσης θα γίνει επιλογή του ύψους των δοκών με κριτήριο την μή τοποθέτηση θλιβόμενου οπλισμού (Στην πράξη πάντως, το ύψος των δοκών δεν επιλέγεται με αυτό το κριτήριο). Στην άσκηση αυτή οι πλάκες είναι αμφιέριστες (καμπτόμενες κατά μία διεύθυνση. Στην πράξη συνηθέστερον είναι να έχουμε πλάκες καμπτόμενες κατά δύο διευθύνσεις, το θέμα όμως αυτό θα το δούμε σε επόμενο εξάμηνο). Επίσης, για διδακτικούς λόγους, θα γίνουν δυσμενείς φορτίσεις των πλακών (στην πράξη για «συνήθη ανοίγματα»(?) και «συνήθη φορτία»(?) μπορούμε και να μην κάνουμε δυσμενείς φορτίσεις).



Ξυλότυπος οροφής ισογείου ΚΛ 1:50 (εδώ το σχέδιο είναι εκτός κλίμακος)²⁶ Επειδή οι πλάκες είναι ακριβώς ίδιες, μπορούν να έχουν τον ίδιο αριθμό και έτσι δεν θα χρειάζεται να ξανασχεδιασθούν οι οπλισμοί και στην δεύτερη πλάκα.

• **Δεδομένα:** C20/25, S400, $g'=1.2\text{kPa}$, $q=3.0\text{kPa}$

• **Ζητούνται:** 1) Ο υπολογισμός των πλακών και 2) το ύψος της μεσαίας δοκού ώστε να μην απαιτείται θλιβόμενος οπλισμός, το πλάτος της δοκού να ληφθεί 0.30m, να γίνει καθολική φόρτιση χωρίς δυσμενείς φορτίσεις.

1. Υπολογισμός πλακών

• **Φορτία:**

$$g=0.12 \cdot 25 = 3.0 \text{ kN/m}^2$$

$$g' = 1.2 \text{ kN/m}^2$$

$$q=3.0 \text{ kN/m}^2$$

Φορτία σχεδιασμού:

$$p_{d,\max}=1.35(g+g')+1.5q=1.35(3.0+1.2)+1.5 \cdot 3.0=10.17\text{kN/m}^{27}$$

²⁶ Για να είναι πιο ευανάγνωστο το σχέδιο, συνιστάται η διαφοροποίηση του πάχους των γραμμών ως εξής: ξυλότυπος κλπ 0.25mm, διαστάσεις 0.15mm, σίδερα 0.40mm.

²⁷ Θεωρούμε ένα τυπικό μέτρο πλάτους της πλάκας, γι' αυτό οι μονάδες είναι kN/m και όχι kN/m².

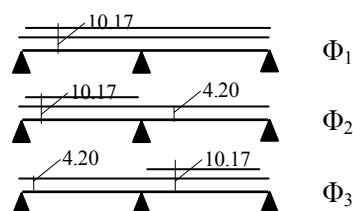
$$p_{d,min}=1.00(g+g')+0*q=1.00(3.0+1.2)+0*3.0 = 4.20\text{kN/m}^2$$

• **Στατικό σύστημα:** Συνεχής «δοκός» δύο ανοιγμάτων

• **Θεωρητικά ανοίγματα:** (§7.2.2)²⁸

$$l_1=l_2=l_n+0.5(0.25+0.25)=3.75+0.5(0.25+0.25)=4.00\text{m}$$

• **Δυσμενείς φορτίσεις:**



Λόγω αντισυμμετρίας, η φόρτιση Φ_3 θα μπορούσε να παραλειφθεί.

Ο φορέας είναι μια φορά υπερστατικός. Θεωρείται υπερστατικό μέγεθος η ροπή στηρίξεως M_B . Υπενθυμίζεται ότι:

$$M_B=-(p_1+p_2)*l^2/16$$

Έτσι για την:

$$\text{Φόρτιση } \Phi_1: m_B=-(10.17+10.17)*4^2/16=-20.34\text{kNm/m}$$

$$\text{Φόρτιση } \Phi_2: m_B=-(10.17+4.20)*4^2/16=-14.37\text{kNm/m}$$

$$\text{Φόρτιση } \Phi_3: m_B=-(4.20+10.17)*4^2/16=-14.37\text{kNm/m}$$

Για κάθε μία φόρτιση χαράσσονται²⁹ τα διαγράμματα ροπών κάμψεως και στην συνέχεια γίνεται υπέρθεση όλων των διαγραμμάτων σε ένα κοινό διάγραμμα (βλ σχήμα στο τέλος)

Υπολογισμός των απαιτούμενων οπλισμών: Είδαμε, σε προηγούμενη άσκηση, πώς υπολογίζουμε τους απαιτούμενους οπλισμούς μιας διατομής στην περίπτωση κάμψεως χωρίς αξονική δύναμη με την απλοποιημένη μέθοδο (ορθογωνικό διάγραμμα στα 0.8 της θλιβόμενης ζώνης).

²⁸ Οι παραπομπές αναφέρονται στον Κανονισμό Ωπλισμένου Σκυροδέματος (Έκδοση 2000) και δίνονται μόνον για λόγους πληρότητας. Εσείς, για το εξάμηνο αυτό, δεν απαιτείται να γνωρίζετε και να εφαρμόζετε τις κανονιστικές διατάξεις.

²⁹ Θεωρείται ικανοποιητική η, υπό κλίμακα, γραφική χάραξη του δ/τος από τις τρεις επαπτόμενες. «Κρεμάμε» την παραβολή με «βέλος» $ql^2/8$ από τις ροπές στηρίξεως κλπ... Η κλίμακα των μηκών μπορεί να είναι 1:50 ενώ η κλίμακα των υψών (ροπών) μπορεί να είναι 1cm:1 έως 4kNm/m.

Υπενθυμίζεται η σχέση μεταξύ ανηγμένης ροπής «μ» και μηχανικού ποσοστού οπλισμού «ω» που είχαμε βρει:

$$\mu = \omega(1 - 0.588\omega) \text{ ή } \omega = 0.85(1 - \sqrt{1 - 2.353\mu}) \quad (1)$$

όπου

$$\mu = M / b d^2 f_{cd} \text{ και}$$

$$\omega = (A_s f_{yd}) / (b d f_{cd}).$$

Από την τελευταία παραπάνω σχέση και για δεδομένη ανηγμένη ροπή "μ" υπολογίζεται αμέσως ο οπλισμός.³⁰

Στον παρακάτω πίνακα έχει πινακοποιηθεί η σχέση για διευκόλυνση των υπολογισμών.³¹

Πίνακας 1 Πίνακας για τον σχεδιασμό ορθογωνικών διατομών με την απλοποιημένη ορθογωνική κατανομή των θλιπτικών τάσεων (§10.4.3.2)³².

μ	ω	μ	ω	μ	ω
0.00	0.0000	0.12	0.1299	0.23	0.2742
0.01	0.0101	0.13	0.1418	0.24	0.2892
0.02	0.0202	0.14	0.1539	0.25	0.3046
0.03	0.0305	0.15	0.1663	0.26	0.3204
0.04	0.0410	0.16	0.1788	0.27	0.3367
0.05	0.0516	0.17	0.1916	0.28	0.3535
0.06	0.0623	0.18	0.2046	0.29	0.3710
0.07	0.0731	0.19	0.2179	0.30	0.3890
0.08	0.0842	0.20	0.2315	0.31	0.4079
0.09	0.0954	0.21	0.2454	0.32	0.4275
0.10	0.1067	0.22	0.2597	0.33	0.4481
0.11	0.1182				

Διαδικασία: Υπολογίζονται οι οπλισμοί όλων των ανοιγμάτων και στην συνέχεια οι οπλισμοί των στηρίξεων³³. Η πλάκα θεωρείται ορθογωνικής διατομής: με πλάτος $b=1.00\text{m}$, ύψος $h=0.12\text{m}$ και στατικό ύψος $d=0.10\text{m}$.

³⁰ Κανονικά πρέπει να ελέγχουμε και τις παραμορφώσεις

³¹ Συνιστάται ενθέρμως να αποδείξετε τις σχέσεις, να συντάξετε μόνοι σας τον πίνακα και να είστε σε θέση να απαντάτε σε ερωτήσεις του τύπου: με ποιες παραδοχές προέκυψε? γιατί δεν υπάρχουν τιμές του «μ» μεγαλύτερες από 0.33? κλπ.

³² Συγκρίνατε τον πίνακα αυτόν με τον πίνακα **6.2.α** του βιβλίου ο οποίος έχει προκύψει με το «παραβολικό-ορθογωνικό» διάγραμμα τάσεων. Προφανώς εννοείται ότι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τον πίνακα **6.2.α**.

Ανοίγμα AB:

$$\mu = m_{AB} / b d^2 f_{cd} = 13.77 / (1.00 * 0.10^2 * 13333) = 0.103$$

Από τον παραπάνω πίνακα (με γραμμική παρεμβολή ή από την (1)) έχουμε για $\mu = 0.103$ ότι $\omega = 0.11$ και άρα:

$$\omega = (A_s f_{yd}) / (b d f_{cd}) \Rightarrow$$

$$A_{sI} = 0.11 * 100 * 10 * 13.333 / 348 = 4.2 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Ελάχιστο ποσοστό οπλισμού:

$$\rho_{\min} = 1.5\% (\S 18.1.5.1) =$$

$$= 0.0015 * 100 * 10 = 1.5 \text{ cm}^2/\text{m} < 4.2 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

Η υλοποίηση αυτού του οπλισμού μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους συνδυάζοντας διαμέτρους και αποστάσεις: μπορούμε να θέσουμε Φ6/6.5 (δηλαδή $100/6.5 = 15.4$ ράβδους Φ6 ανά μέτρο πλάτους της πλάκας) ή Φ8/12 (δηλαδή $100/12 = 8.33$ ράβδους Φ8 ανά μέτρο) ή Φ10/18.5 (δηλαδή $100/18.5 = 5.4$ ράβδους Φ10 ανά μέτρο) ή Φ12/27 κλπ τα οποία είναι ισοδύναμα από πλευράς συνολικού εμβαδού ανά μέτρο. Εν γένει προτιμάμε τις μεγαλύτερες διαμέτρους σεβόμενοι όμως και τις κατασκευαστικές διατάξεις ως προς τις μέγιστες αποστάσεις. Έχουμε τους εξής κανονιστικούς περιορισμούς:

Μέγιστη απόσταση ράβδων κυρίως οπλισμού (§18.1.5.1) γενικώς $s_{\max} = 1.5d$ ενώ για πλάκες με πάχος μέχρι 0.12m είναι $s_{\max} = 12 \text{ cm}$

Ελάχιστη διάμετρος: ο Κανονισμός δεν προβλέπει τίποτα, αλλά δεν συνιστάται να χρησιμοποιείται διάμετρος μικρότερη από Φ8 έτσι τίθενται **Φ8/12 κάτω** ($= 4.2 \text{ cm}^2/\text{m}$)

Ανοίγμα BC: ομοίως: τίθενται **Φ8/12 κάτω**

Στήριγμα B: Επειδή έχουμε μονολιθική σύνδεση της πλάκας με το δοκάρι και στην περιοχή της στηρίξεως η πλάκα δεν έχει στατικό ύψος αυτό της πλάκας αλλά του δοκαριού που είναι πολύ μεγαλύτερο, γι' αυτό υπολογίζουμε τα σίδερα της στηρίξεως όχι με την ροπή 20.34kNm/m αλλά με την ροπή παρειάς:

$$m_{B, \text{παρ}} = m_B - v_{B, \text{αρ}} * (b/2) = 20.34 - 25.43 * 0.125 = 17.16 \text{ kNm/m}$$

$$\mu = m_{B, \text{παρ}} / b d^2 f_{cd} = 17.16 / (1.00 * 0.10^2 * 13333) = 0.129$$

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε για $\mu = 0.129$ (με γραμμική παρεμβολή) $\omega = 0.141$ και άρα:

³³ Αυτό συμβαίνει επειδή τα μισά σίδερα του κάθε ανοίγματος τα «σπάμε» κοντά στις στηρίξεις και τα ανεβάζουμε στο πάνω μέρος μιας και δεν χρειάζονται πλέον στο κάτω μέρος (βλ. περιβάλλουσα ροπών). Ετσι ξέρουμε πόσα σίδερα διατίθενται από τα εκατέρωθεν ανοίγματα και αποφασίζουμε για τα πρόσθετα σίδερα των στηρίξεων («καπάκια»).

$$\omega = (A_s f_{yd}) / (b d f_{cd}) \Rightarrow$$

$$A_{s1} = 0.141 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 13.333 / 348 = 5.4 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Μέχρι τώρα υπολογίσαμε τους οπλισμούς στις τρεις δυσμενέστερες διατομές. Με τις υπόλοιπες διατομές τί γίνεται; Μια πρώτη απάντηση θα ήταν να διατηρούσαμε τους οπλισμούς **σταθερούς σε όλο το μήκος**. Αυτό όμως θα ήταν μια ανώφελη σπατάλη. Μια άλλη απάντηση θα ήταν να υπολογίζαμε σε κάθε θέση τον απαιτούμενο οπλισμό και να βάζαμε τον **ακριβώς** απαιτούμενο! Αυτό θα ελαχιστοποιούσε θεωρητικώς τον συνολικό οπλισμό αλλά θα αύξανε υπερβολικά την εργατική δαπάνη. Στην πράξη ακολουθείται μια ενδιάμεση πρακτική σύμφωνα με την οποία: ο μέγιστος οπλισμός του ανοίγματος διατηρείται σταθερός μέχρι ενός σημείου, ενώ από το σημείο αυτό και πέρα ένα ποσοστό του οπλισμού κάμπτεται προς τα άνω για παραλαβή των ροπών που εφελκύουν τις πάνω ίνες. Το ποσοστό αυτό (αν δεν ορίζεται διαφορετικά) είναι συνήθως 50% (δηλαδή ένα-παρα-ένα σίδερο). Αρα στην στήριξη:

Διατίθενται:

$$\text{από το άνοιγμα AB } \Phi 8/24 = 2.08 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{από το άνοιγμα BC } \Phi 8/24 = 2.08 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{Σύνολον} \quad 4.16 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{Αρα πρόσθετα: } 5.4 - 4.16 = 1.24 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ τίθενται } \underline{\underline{\Phi 8/33 \text{ άνω}}}$$

Η ακριβής θέση στην οποία γίνεται η κάμψη των κάτω οπλισμών αλλά και το μέχρι πού θα επεκταθούν τα πάνω σίδερα προκύπτει από την περιβάλλουσα ως εξής:

Κατ' αρχάς κάνουμε την παραδοχή ότι η ροπή αντοχής είναι ανάλογη του οπλισμού. Έτσι, για παράδειγμα στο άνοιγμα AB, αν ο οπλισμός $\Phi 8/12$ αναλαμβάνει ροπή 13.77 kNm/m τότε ο μισός οπλισμός, δηλαδή $\Phi 8/24$, θα αναλαμβάνει ροπή $13.77/2 = 6.89 \text{ kNm/m}$. Η θέση από την οποία και πέρα μπορούμε να κάμψουμε τους μισούς οπλισμούς προσδιορίζεται γραφικά από την περιβάλλουσα³⁴. Η περιβάλλουσα της ροπής αντοχής στην θέση θλάσεως παρουσιάζει απότομη μείωση κατά 6.89 kNm/m . Η κάμψη αυτή γίνεται υπό γωνία 45° . Αυτό σημαίνει ότι τα σίδερα που κάμπτονται προς τα πάνω είναι ενεργά και μπορούν να αναλάβουν ροπή που εφελκύνει τις άνω ίνες σε απόσταση $x = d - d_2 = 10 - 2 = 8 \text{ cm}$ πέραν της θέσεως θλάσεως. Αντίστοιχα λοιπόν η περιβάλλουσα της ροπής θα παρουσιάζει άλμα στην νέα

³⁴ Στην πράξη, όταν δεν ελέγχεται με ακρίβεια η κάλυψη των ροπών, ο μισός οπλισμός μειώνεται στο μισό στις ακραίες λωρίδες πλάτους $c = 0.2 \min(I_x, I_y)$ (§18.1.5.1)

θέση κατά 6.89kNm/m. Με το ίδιο σκεπτικό αποφασίζουμε το μήκος των πρόσθετων οπλισμών στις στηρίξεις φροντίζοντας ώστε η περιβάλλουσα της ροπής αντοχής να υπερκαλύπτει την περιβάλλουσα της δρώσας ροπής. (Βέβαια στην στήριξη η περιβάλλουσα της ροπής αντοχής θα τμήσει την περιβάλλουσα της δρώσας ροπής στην περιοχή της στηρίξεως μιας και έχουμε οπλίσει την στήριξη με την μειωμένη ροπή παρειάς).

Τέλος, τα άκρα των οπλισμών επεκτείνονται κατά το «μήκος αγκυρώσεως» l_b πέρα από το σημείο που είναι απαραίτητα. Όπως θα δούμε, το μήκος αγκυρώσεως είναι $l_b = \Phi f_{yd} / (4 f_{bd})$, για C20/25 και S400 είναι: $l_b = \Phi 348 / (4 * 2.3) = 38\Phi$. Δηλαδή, για $\Phi 8$ θα επεκτείνουμε τον οπλισμό κατά 30cm.

Πάντως, ανεξαρτήτως του τί θα προκύψει από την ακριβή χάραξη της περιβάλλουσας, τα ελεύθερα άκρα των άνω οπλισμών θα επεκταθούν στο επόμενο φάτνωμα σε απόσταση, από την παρειά του στηρίγματος, τουλάχιστον 20% έως 25% του καθαρού μήκους του υπόψη φανώματος (π.χ. εδώ 0.75m). Έχοντας υπολογίσει τα ακριβή μήκη των οπλισμών (στο σχήμα της τελευταίας σελίδας) τα σχεδιάζουμε πλέον στον διπλανό ξυλότυπο.

Δευτερέων οπλισμός και οπλισμός αποσχίσεως.

Κάναμε την παραδοχή οι πλάκες είναι καμπτόμενες κατά μία διεύθυνση και αγνοήσαμε την ένταση κατά την άλλη διεύθυνση. Για την ανάληψη δευτερευουσών εγκαρσίων εντάσεων (π.χ. από ενδεχόμενη μή ομοιόμορφη φόρτιση) αλλά κυρίως για την ανάληψη θερμοκρασιακών δράσεων προβλέπεται (για τις πλάκες που δεν έχουν μελετηθεί ως καμπτόμενες κατά δύο διευθύνσεις) **δευτερέων οπλισμός**³⁵ 20% του κυρίως οπλισμού και πάντως όχι μικρότερος από $\Phi 8/25$ (§18.1.5.1). Εδώ έχουμε:

$$A_{s,δευτ} = 0.2 * 4.2 = 0.84 \text{ cm}^2/\text{m}. \text{ Τίθενται } \underline{\Phi 8/25 \text{ κάτω}}^{36}$$

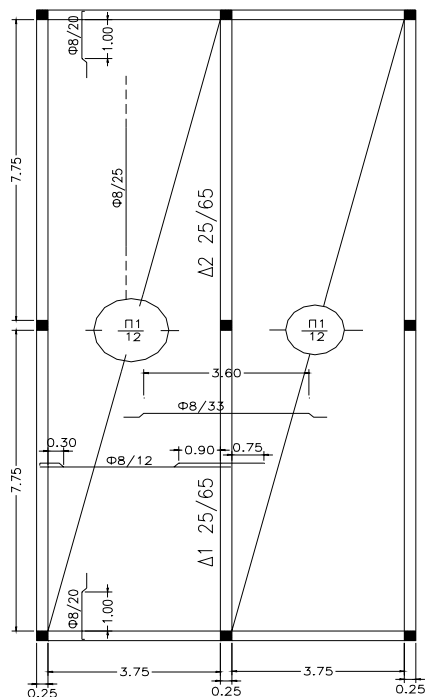
Τέλος, κοντά σε στηρίξεις οι οποίες δεν λήφθηκαν υπόψη στο στατικό προσομοίωμα (κυρίως δεν ελήφθη υπόψη η ενδεχόμενη μερική πάκτωση της πλάκας και κατά συνέπεια η ανάπτυξη αρνητικών ροπών στην περιοχή)

³⁵ Η μή τοποθέτηση του δευτερεύοντος οπλισμού θα είχε συνέπεια την ανάπτυξη ρωγμών παραλλήλων προς τον κύριο οπλισμό. Η ρηγμάτωση αυτή αν και δεν είναι ιδιαίτερα επικίνδυνη, προκαλεί ωστόσο λειτουργικά προβλήματα και κυρίως ψυχολογικά προβλήματα στους χρήστες.

³⁶ Επειδή ο οπλισμός αυτός τίθεται κυρίως για θερμοκρασιακούς λόγους δεν έχει και πολύ σημασία πού ακριβώς θα τεθεί. Μας βολεύει και τον τοποθετούμε κάτω. Πάντως σε πλάκες με πολύ μεγάλο πάχος θα τον τοποθετούσαμε σε δύο στρώσεις για έχουμε αμεσότερη ανάληψη των εφελκυστικών τάσεων.

πρέπει να προβλέπεται ένας άνω οπλισμός (*οπλισμός αποσχίσεως*) ίσος με το 25% του κυρίως οπλισμού. Ο οπλισμός αυτός πρέπει να εκτείνεται σε απόσταση $0.2l_{\min}$ από την παρειά του στηρίγματος. Εδώ έχουμε:

$$A_{s, \text{αποσχ}} = 0.25 \cdot 4.2 = 1.05 \text{ cm}^2/\text{m}. \text{ Τίθενται } \underline{\Phi 8/20 \text{ άνω}}$$



2. Δοκοί

• Στατικό σύστημα:

Η μεσαία δοκός είναι συνεχής δύο ανοιγμάτων. Θεωρητικά μήκη:
 $L = 7.75 + 2 \cdot (0.25/2) = 8.00 \text{ m}$

• Φορτία:

Η δοκός φορτίζεται από το ίδιο βάρος της καθώς και από την μεσαία αντίδραση της συνεχούς πλάκας³⁷. Για να λάβουμε υπόψη μας το ίδιο βάρος της δοκού εκτιμάμε ένα ύψος π.χ. $h = 0.60 \text{ m}$, άρα:

$$g_d = 1.35 \cdot 0.25 \cdot 0.60 \cdot 25 = 5.1 \text{ kN/m}$$

Από τις πλάκες:

³⁷ Δεν ξεχνάμε και το ι.β. του τοίχου, αν υπάρχει (συνήθως στις περιμετρικές δοκούς).

$$q=2*(p_d l/2+m_B/l)=2*(10.17*4/2+20.34/4)=50.85\text{kN/m}$$

$$\text{Αρα σύνολον: } q_d=55.95\text{kN/m}$$

• **Κριτήριο επιλογής του ύψους:**

Όπως θα δούμε, κριτήριο για την τοποθέτηση θλιβόμενου οπλισμού είναι να ελαχιστοποιείται το άθροισμα εφελκυσμένου και θλιβόμενου οπλισμού. Αυτό πρακτικώς συμβαίνει (για S400) για οριακή ανηγμένη ροπή $\mu_{lim}=0.33$ ³⁸ (αυτή η ροπή πρακτικώς συμπίπτει με εκείνη την ροπή πέραν της οποίας αν υπήρχε μόνον εφελκυσμένος οπλισμός θα λειτουργούσε με τάση μικρότερη της τάσεως διαρροής). Η μέγιστη ροπή είναι στο μεσαίο στήριγμα της συνεχούς δοκού, άρα αν εκεί δεν απαιτείται θλιβόμενος οπλισμός τότε πουθενά δεν θα απαιτείται θλιβόμενος οπλισμός³⁹.

$$M_B=q_d L^2/8=55.95*8^2/8=446.8\text{kNm}$$

Ροπή παρειάς:

$$M_{B,παρ}=M_B-(0.5*55.95*8+446.8/8)*0.125=411.8\text{ kNm}$$

$$\mu=M_{B,παρ}/(bd^2f_{cd})<0.33\Rightarrow$$

$$d^2>411.8/(0.33*0.25*13333)=0.374\text{m}^2\Rightarrow$$

$$d>0.61\text{m} \text{ άρα λαμβάνεται } h=0.65\text{m}.^{40}$$

Για εξάσκηση: Να βρεθεί το μέγιστο ωφέλιμο φορτίο που μπορεί να αναλάβει αμφιέρειστη δοκός μήκους 5.00m, διατομής 25/60 C20/25, S400 με 4Φ18, $\gamma_g=1.35$, $\gamma_q=1.50$ (κάθε άλλο απαραίτητο στοιχείο θα επιλεγεί ευλόγως από τον Μελετητή).

³⁸ Για χάλυβα S500 η οριακή ανηγμένη ροπή είναι $\mu_{lim}=0.32$

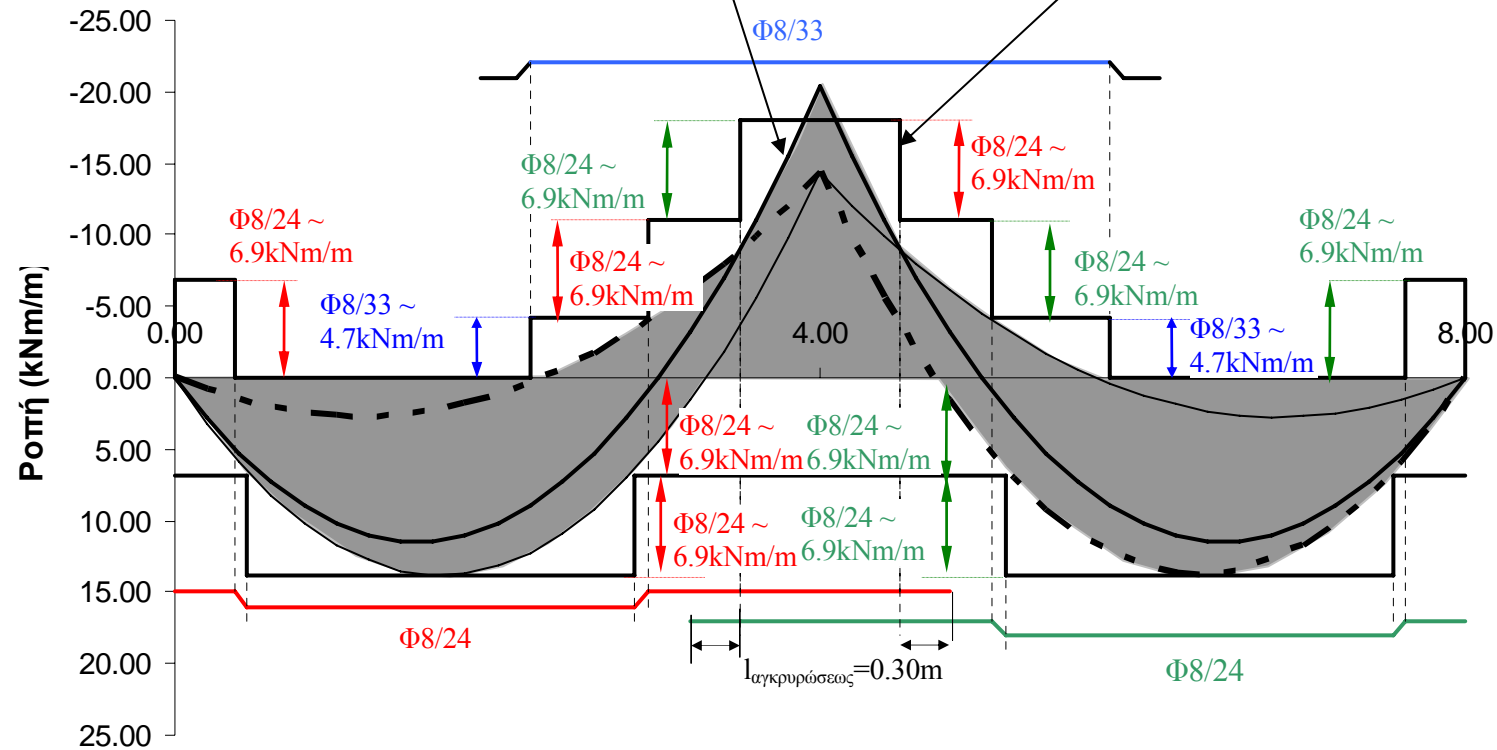
³⁹ Στα ανοίγματα η κατάσταση είναι ευνοϊκότερη: γιατί συνήθως και η ροπή είναι μικρότερη αλλά και η δοκός λειτουργεί ως "πλακοδοκός" όπως θα δούμε στα επόμενα.

⁴⁰ Εμείς βέβαια είχαμε υποθέσει $h=0.60\text{m}$ άρα, κανονικά, θα έπρεπε να επανέλθουμε διορθώνοντας το $i.b.$ και άρα την ροπή κλπ: Η ροπή παρειάς θα γινόταν 415kNm και άρα το ύψος $d>0.62\text{m}$ άρα πάλι $h=0.65\text{m}$ θα λαβαίναμε. Και ο απαιτούμενος οπλισμός θα ήταν: $\omega=0.448$ και άρα:

$A_{s1}=0.448*25*62*13.333/348=26.6\text{cm}^2$ π.χ. 7Φ22 σε δύο στρώσεις....Η συνέχεια στα επόμενα.

Περιβάλλουσα δράσας ροπής και ροπής αντοχής

391

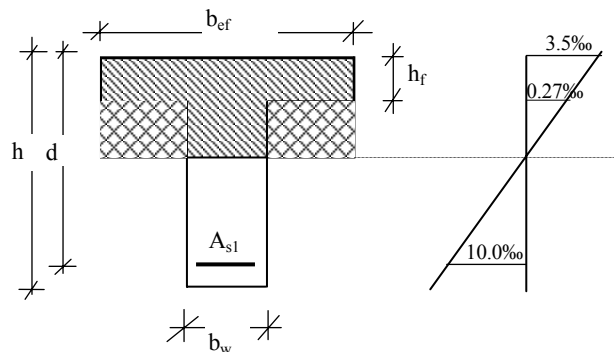


Παρατηρήσατε και συσχετίσατε τις θέσεις θάλασσας των οπλισμών (δηλαδή «πού σπάνε τα σίδερα») με τις θέσεις όπου η ροπή αντοχής παρουσιάζει άλματα.

16.12 Πλακοδοκός

Δίδονται: C20/25, S400,
 $h_f/h/d/b_w=0.12/0.55/0.50/0.25$
 $A_{s1}=15.7 \text{ cm}^2$ $N_d=0$,
 δοκός αμφιέρειστη $L=6.7\text{m}$

Ζητείται: η ροπή αντοχής
 M_{Rd}



Συνεργαζόμενο πλάτος πλακοδοκού:

$$b_{ef} = b_w + \frac{l_o}{4} \text{ όπου } l_o = \alpha \cdot L \text{ (εδώ } \alpha=1 \text{ για αμφιέρειστη δοκό)}$$

$$= 0.25 + 1.67 = 1.92 \text{ m}$$

Παραβολικό δ/μα σ_c - ϵ_c

Επίλυση με δοκιμές

1^η δοκιμή

$$\epsilon_{c2} = -3.5\text{‰} \text{ και } \epsilon_{s1} = 10\text{‰}^{41}$$

$$x = \frac{3.5}{3.5 + 10} \cdot 0.50 = 0.13 > h_f$$

$$F_{s1} = 15.7 \times 34.8 = 546 \text{ kN}$$

$$F_c = F_{c1} - F_{c2}$$

$$F_{c1} = 0.85 \cdot \alpha_1 \cdot b_{ef} \cdot f_{cd} = 0.85 \times 0.81 \times 1.92 \times 0.13 \cdot (-13.333) = -2291.3 \text{ kN}$$

$$F_{c2} = 0.85 \cdot \alpha_2 \cdot (b_{ef} - b_w) \cdot (x - h_f) \cdot f_{cd}^{42}$$

$$= 0.85 \times 0.13 \cdot (1.92 - 0.25) \cdot (0.13 - 0.12) \cdot (-13.333 \times 10^3) = -24.6 \text{ kN}$$

$$F_c = -2291.3 + 24.6 = -2266.7 \text{ kN}$$

Ελεγχος

$0 - (-2266.7) > 546$ έχουμε περίσσεια θλίψεως άρα μειώνουμε την παραμόρφωση του σκυροδέματος

2^η δοκιμή

$$\epsilon_{c2} = 1.2\text{‰} \text{ και } \epsilon_{s1} = 10\text{‰}$$

$$x = \frac{1.2}{1.2 + 10} \cdot 0.50 = 0.054 < h_f \Rightarrow^{43}$$

⁴¹ Η άσκηση αυτή είχε γραφτεί όταν ο κανονισμός προέβλεπε κρίσιμη παραμόρφωση χάλυβα 10‰ (και όχι 20‰ που είναι σήμερα). Πάντως, η άσκηση παραμένει διδακτική γιατί δείχνει πώς υπολογίζουμε την συνολική δύναμη του σκυροδέματος, πάνω σε μια μή ορθογωνική διατομή, ως διαφορά δύο ορθογωνίων.

⁴² Για $\epsilon_{c2} = 0.27\text{‰}$ είναι $\alpha = 0.13$

$$F_c = 0.85 \times 0.48 \times 0.054 \times 1.92 \times (-13.333 \times 10^3) = 564 \text{ kN}$$

$F_{s1} = 546 \text{ kN}$ όπως προηγουμένως

Ελεγχος $0 - (-564) \approx 546$ προσέγγιση ικανοποιητική. Άρα για $\varepsilon_{c2} = 1.2\text{‰}$
 $\zeta' = 0.354$ και άρα

Ροπή: $\underline{M_{Rd}} = F_{s2} \cdot z = 546(0.50 - 0.354 \times 0.054) = \underline{262 \text{ kNm}}$

Σημ: Εδώ προέκυψε τελικώς ύψος θλιβόμενης ζώνης μικρότερο από το πάχος της πλάκας, άρα η διατομή λειτουργεί ως ορθογωνική. Αν όμως το ύψος της θλιβόμενης ζώνης κατέβαινε στον κορμό της πλακοδοκού (όπως στην 1^η δοκιμή) τότε για τον υπολογισμό της ροπής θα λαβαίναμε χωριστά τις ροπές των F_{c1} και F_{c2}

Προσεγγιστική μέθοδος: Στις λεπτόκορμες πλακοδοκούς η προσεγγιστική μέθοδος υποθέτει ότι οι τάσεις είναι σταθερές σ' όλο το ύψος του πάχους της πλάκας ανεξαρτήτως του ύψους της θλιβόμενης ζώνης (και όχι στα $0.8x$ που ισχύει για τις ορθογωνικές διατομές)

$b_{eff}/b_w = 1.92/0.25 = 7.7 > 5$ Άρα λεπτόκορμη πλακοδοκός:

$$M_{Rd} = F_{s1} \left(d - \frac{h_f}{2} \right) = 546 \left(0.50 - \frac{0.12}{2} \right) = 240 \text{ kNm} \text{ (συγκρινόμενη με την}$$

τιμή 262 kNm)

Ελεγχος τάσεων σκυροδέματος:

$$\sigma_{cd} = \frac{240}{\left(0.50 - \frac{0.12}{2} \right) \cdot b \cdot h_f} = 2367.4 \text{ kN/m}^2$$

$$= 2.37 \text{ MPa} < 0.85 f_{cd} = 11.33 \text{ MPa} \text{ άρα έχει καλώς.}$$

Διαστασιολόγηση με πίνακες

Δίδεται $M_{Sd} = 262 \text{ kNm}$, $N_d = 0$ διατομή όπως προηγουμένως και ζητείται ο οπλισμός $A_{s1} = ?$

$$\mu_{sd} = \frac{M_{sd}}{b_{ef} \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{262}{1.92 \times 0.5^2 \times 13.333} = 0.041$$

$$\frac{h_f}{d} = \frac{12}{50} = 0.24, \quad \frac{b_{ef}}{b_w} = \frac{1.92}{0.25} = 7.8, \text{ από πίνακα 7.5 (σελ 135-136)} \Rightarrow \omega = 0.043,$$

$$A_{s1} = 0.043 \cdot 192 \cdot 50 \cdot \frac{13.333}{348} = 15.7 \text{ cm}^2 \text{ (5}\varnothing 20\text{)}$$

Επίδραση του συνεργαζόμενου πλάτους

Π.χ. για μια **ακραία** πλακοδοκό, με ίδιες κατά τα άλλα διαστάσεις, το συνεργαζόμενο πλάτος μειώνεται σε:

⁴³ Παρατηρήσατε ότι παρόλο που η διατομή είναι μορφής πλακοδοκού, ωστόσο λειτουργεί ως ορθογωνική

$$b_{ef} = b_w + \frac{1}{2} \frac{l_0}{3} = 0.25 + \frac{5.0}{6} = 1.08m$$

$$\mu_{sd} = \frac{262}{1.08 \cdot 0.52 \cdot 13.333 \cdot 10^3} = 0.073$$

$$\frac{b_{ef}}{b_w} = \frac{1.08}{0.25} = 4.3, \quad \frac{h_f}{d} = 0.24, \Rightarrow \omega = 0.077$$

$$A_{s1} = 0.077 \cdot 108 \cdot 50 \frac{13.333}{348} = 15.9 cm^2 \text{ περίπου } 15.7 cm^2 \text{ (δηλαδή παρόλο}$$

που το συνεργαζόμενο πλάτος μειώθηκε περίπου στο μισό, ο οπλισμός ελάχιστα μεταβλήθηκε)

Πλακοδοκός με θλιβόμενο οπλισμό (!)

Δίδεται: $M_d = 1500 \text{ kNm}$ $N_d = -1700 \text{ kN}$

$b/b_w = 1.25/0.25,$

$d/h_f/y_{s1}/d_2 = 1.00/0.10/0.58/0.05$

$M_{sd} = M_d - N_d \cdot y_{s1} = 1500 - (-1700) \cdot 0.58 = 2486 \text{ kNm}$

$$\mu_{sd} = \frac{2486}{1.25 \cdot 1.0^2 \cdot 13.333} = 0.149$$

$$\frac{h_f}{d} = 0.10$$

$$\frac{b_{ef}}{b_w} = \frac{1.25}{0.25} = 5 \Rightarrow \mu_{lim} = 0.131 < 0.149 \quad \omega_{lim} = 0.159$$

$$\Delta\mu = \mu_{sd} - \mu_{lim} = 0.149 - 0.131 = 0.018$$

$$\begin{aligned} A_{s1} &= \left[\omega_{lim} + \frac{\Delta\mu}{1 - d_2/d} \right] b_{ef} d \frac{f_{cd}}{f_{yd}} + \frac{N_d}{f_{yd}} = \\ &= \left[0.159 + \frac{0.018}{1 - 0.05} \right] 1.25 \cdot 100 \frac{13.333}{348} - \frac{1700}{34.8} \\ &= 85.22 - 48.85 = \underline{\underline{36.37 cm^2}} \end{aligned}$$

$$A_{s2} = \frac{\Delta\mu}{1 - d_2/d} b_{ef} d \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0.018}{1 - 0.05} 125 \cdot 100 \frac{13.333}{348} = \underline{\underline{9.07 cm^2}}$$

16.13 Διαστασιολόγηση ορθογωνικής διατομής με απαίτηση θλιβόμενου οπλισμού

Δίδεται ορθογωνική διατομή 25/50 ($d=46\text{cm}$), από σκυρόδεμα C20/25 και χάλυβα S400, με $N=0$ και $M=260\text{kNm}$. οπλισμού:

$$\omega_1 = 0.68 \cdot \xi_{\text{lim}} + \Delta\mu / [1 - d_1/d] = 0.68 \cdot 0.668 + (0.369 - 0.333) / [1 - 0.04/0.46] = 0.454 + 0.039 = 0.493$$

$$\omega_2 = \Delta\mu / [1 - d_1/d] = 0.039$$

Δηλαδή

$$A_{s1} = 0.493 \cdot 25 \cdot 46 \cdot 13.333 / 348 = \mathbf{21.7\text{cm}^2},$$

$$A_{s2} = 0.039 \cdot 25 \cdot 46 \cdot 13.333 / 348 = \mathbf{1.1\text{cm}^2},$$

16.13.1β) Διαστασιολόγηση με τους Πίνακες CEB (βλ 6.2α έως 6.2δ)

Υπολογίζουμε την ανηγμένη ροπή:
 $\mu = M / [bd^2 f_{cd}] = 260 / [0.25 \cdot 0.46^2 \cdot 13333] = 0.369$

και αν πηγαίναμε στον πίνακα 6.2α (ο οποίος ισχύει για όλες τις ποιότητες χάλυβα αλλά για μόνον εφελκόμενο οπλισμό) θα διαβάζαμε $\omega = 0.556$ και θα θέταμε μόνον εφελκόμενο οπλισμό $A_{s1} = 0.556 \cdot 25 \cdot 46 \cdot 13.333 / 348 = 24.5\text{cm}^2$, όμως παρατηρώντας την τελευταία στήλη του πίνακα 6.2α διαπιστώνουμε ότι για την ροπή αυτή ο χάλυβας Ζητείται ο οπλισμός.

16.13.1α) Διαστασιολόγηση με το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος

Υπολογίζουμε την ανηγμένη ροπή:
 $\mu = M / [bd^2 f_{cd}] = 260 / [0.25 \cdot 0.46^2 \cdot 13333] = 0.369$

Επειδή η ροπή αυτή είναι μεγαλύτερη από την μ_{lim} που αντιστοιχεί στο

$$\xi_{\text{lim}} = \min \left(\frac{0.0035}{0.0035 + \varepsilon_{yd}}, \frac{h}{1.6d} \right) = \min \left(\frac{0.0035}{0.0035 + 0.00174}, \frac{0.60}{1.6 \cdot 0.56} \right) =$$

$$\min(0.668, 0.670) = 0.668 \text{ οπότε } \mu_{\text{lim}} = 0.8 \cdot 0.85 \xi_{\text{lim}} (1 - 4 \xi_{\text{lim}}) = 0.68 \cdot 0.668 \cdot (1 - 4 \cdot 0.668) = 0.333$$

έπεται ότι είναι οικονομικότερη η τοποθέτηση και θλιβόμενου δεν έχει διαρρεύσει και άρα πρέπει να τοποθετήσουμε και θλιβόμενο οπλισμό, οπότε πηγαίνουμε στον αντίστοιχο πίνακα, Πίνακας 6.2γ, από όπου διαβάζουμε, για τον λόγο $d_2/d = 4/46 = 0.087$ ($= 0.10$ δυσμενέστερο) ότι: $\omega_1 = 0.498$ και $\omega_2 = 0.044$, οπότε

$$A_{s1} = 0.498 \cdot 25 \cdot 46 \cdot 13.333 / 348 = \mathbf{21.9\text{cm}^2},$$

$$A_{s2} = 0.044 \cdot 25 \cdot 46 \cdot 13.333 / 348 = \mathbf{1.9\text{cm}^2},$$

Παρατηρήσατε ότι $24.5 > 21.9 + 1.9$

Κανονιστικές – κατασκευαστικές παρατηρήσεις

- 1) Ως προς την υλοποίηση της όπλισης, θα διαλέγαμε π.χ. 7Φ20 ($=21.98\text{cm}^2$), τα οποία όμως δεν χωράνε σε μία στρώση (σε δοκό πλάτους 25cm χωρούν 5Φ20 βλ. Παράρτημα Ε). Αρα θα πρέπει να τα βάλουμε σε δύο στρώσεις και άρα θα μειωθεί λίγο το d λόγω του ότι θα ανέβει το Κ.Β. των οπλισμών. Κανονικά θα πρέπει να επαναλάβουμε την διαδικασία με μικρότερο d .
- 2) Ο θλιβόμενος οπλισμός πρέπει να προστατεύεται έναντι λυγισμού τοποθετώντας πυκνούς συνδετήρες.

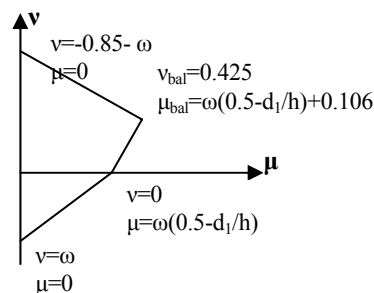
16.14 Υποστυλώμα – Συνδυασμοί φορτίσεως

Γενικές παρατηρήσεις:

1. Τα υποστυλώματα διαφοροποιούνται από τις άλλες διατομές που καταπονούνται από ορθή ένταση από το ότι υπάρχει (θλιπτική) αξονική δύναμη και ότι ο οπλισμός είναι (σχεδόν πάντα) συμμετρικός.
2. **Ελεγχος υποστυλωμάτων:** Δίδονται οι διαστάσεις, οι οπλισμοί και η αξονική N (ή η ροπή M) και ζητείται η ροπή αντοχής M (ή αξονική αντοχής N αντιστ.). Το πρόβλημα λύνεται κατά τα γνωστά με δοκιμές (βλ προηγούμενες ασκήσεις). Στις εξισώσεις ισοδυναμίας δεν ξεχνάμε ότι θα υπάρχει και αξονική δύναμη και ότι υπάρχει και θλιβόμενος οπλισμός του οποίου πρέπει να υπολογίσουμε την συμβολή.
3. **Διαστασιολόγηση υποστυλωμάτων Χωρίς πίνακες ή διαγράμματα αλληλεπιδράσεως:** Δίνονται οι διαστάσεις του υποστυλώματος και τα δρώντα εντατικά μεγέθη (ροπή M και αξονική N) και ζητείται ο οπλισμός. Χωρίς πίνακες η διαδικασία είναι επίπονη, αλλά πάντως έχουμε δυνατότητα να ακολουθήσουμε δύο μεθόδους:

a. Δοκιμαστικά: υποθέτουμε (αυθαίρετα) έναν οπλισμό (π.χ. $A_s=1\%A_c$ που είναι ο ελάχιστος οπλισμός) και έτσι μετατρέπουμε το πρόβλημα της διαστασιολόγησης σε πρόβλημα ελέγχου (βλ προηγούμενη παράγραφο 2). Αν δεν αντέχει αυξάνουμε τον οπλισμό και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία ελέγχου μέχρι να διαπιστώσουμε ότι αντέχει.

b. Συντάσσουμε μόνοι μας ένα προσεγγιστικό διάγραμμα αλληλεπιδράσεως: Εχουμε αποδείξει στην θεωρία ότι το δ/μα αλληλεπιδράσεως μπορεί να προσεγγισθεί από τα τέσσερα σημεία:



- Κεντρική θλίψη ($v=\omega, \mu=0$)
- Καθαρή κάμψη ($v=0, \mu=\omega(0.5-d_1/h)$)
- Μέγιστης ροπής ($v_{bal}=0.425, \mu_{bal}=\omega(0.5-d_1/h)+0.106$) και
- Κεντρική θλίψη ($v=-0.85-\omega, \mu=0$)

όπου:

$\omega=[A_s f_{yd}]/[b h f_{cd}]$ το μηχανικό ποσοστό οπλισμού

$v=N/[b h f_{cd}]$ η ανηγμένη αξονική δύναμη και

$\mu=M/[b h^2 f_{cd}]$ η ανηγμένη ροπή αδρανείας

Οπότε δίνουμε διάφορες τιμές στο "ω" μέχρις ότου το σημείο σχεδιασμού (ν, μ) βρεθεί εντός του διαγράμματος αλληλεπιδράσεως.

- 4. Πιθανοί συνδυασμοί:** Όταν έχουμε περισσότερες της μιας μεταβλητές δράσεις, τότε εξετάζονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί ώστε να προσδιορισθεί η «δυσμενέστερη ένταση⁴⁴». Κάθε μεταβλητή δράση Q_{1k} λαμβάνεται διαδοχικά ως βασική, ενώ οι άλλες θεωρούνται ως συνοδεύουσες δράσεις (παρ. 6.3.2.3 του κανονισμού ή παρ. 3.4 και 3.6 του βιβλίου). Στον συνδυασμό οι συνοδεύουσες δράσεις θα πολλαπλασιάζονται με τον μειωτικό συντελεστή ψ_1 (ο οποίος λαμβάνει υπόψη του την μειωμένη πιθανότητα να βρεθούν ταυτόχρονα όλες οι μεταβλητές δράσεις με την, μικρής πιθανότητας, τιμή σχεδιασμού). Ο συνδυασμός δράσεων γράφεται:

$$S_d = S(\gamma_g G_k + \gamma_q Q_{1k} + \gamma_q \psi_2 Q_{2k} + \gamma_q \psi_3 Q_{3k} + \dots)$$

όπου Q_{1k} είναι η βασική μεταβλητή δράση του εξεταζόμενου συνδυασμού.

Εφαρμογή:

Υποστύλωμα πρόβολος, ύψους 3.0m, καταπονείται με κατακόρυφα φορτία $G=600\text{kN}$ και $Q_1=300\text{kN}$, και με οριζόντιο φορτίο $Q_2=50\text{kN}$. Το φορτίο Q_1 προέρχεται από ωφέλιμα φορτία γραφείων (άρα $\psi_1=0.6$, βλ πίν. 3.2), ενώ το φορτίο Q_2 προέρχεται από άνεμο (άρα $\psi_1=0.5$, βλ πίν. 3.2). Υλικά C20/25, S400s, Αγνοούνται τα φαινόμενα δευτέρας τάξεως (λυγισμός).

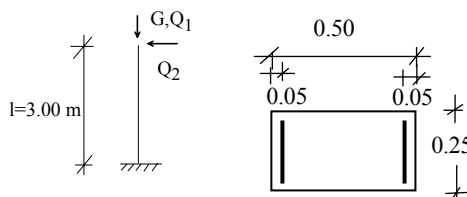
Παρακάτω φαίνονται οι συνδυασμοί που δίνουν την μέγιστη αξονική δύναμη (συνδυασμοί 1 και 2) καθώς και οι συνδυασμοί που δίνουν την μέγιστη ροπή (συνδυασμοί 3 και 4).

- **Μέγιστη αξονική και αντίστοιχη ροπή:**

$$\begin{array}{ll} 1) & N_d = 1.35G + 1.5Q_1 \\ & M_d = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2) & N_d = 1.35G + 1.5Q_1 \\ & M_d = \psi_o 1.5Q_2 l \end{array}$$

- **Μέγιστη ροπή και αντίστοιχη αξονική:**

$$\begin{array}{ll} 3) & M_d = 1.5Q_2 l \\ 4) & M_d = 1.5Q_2 l \end{array}$$



⁴⁴Όταν η ένταση είναι διανυσματική, δεν είναι προφανές, εκ των προτέρων, ποιος συνδυασμός είναι η δυσμενέστερος: π.χ. ο συνδυασμός που δίνει την μέγιστη αξονική ή ο συνδυασμός που δίνει την μέγιστη ροπή; Γι' αυτό στις περιπτώσεις αυτές, θα εξετασθούν όλοι οι συνδυασμοί, και δυσμενέστερος θα είναι αυτός από τον οποίο θα προκύψει ο περισσότερος οπλισμός.

$$N_d = G$$

$$N_d = 1.35 + \psi_0 1.5 Q_{21}$$

Για καθένα από τους παραπάνω συνδυασμούς υπολογίζονται οι οπλισμοί χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα αλληλεπιδράσεως⁴⁵: (συμμετρικός οπλισμός στις δύο παρειές)

1)

$$N_d = 1.35 \cdot 600 + 1.5 \cdot 300 = -1260 \text{ kN} \Rightarrow$$

$$v_d = -\frac{1260}{0.25 \cdot 0.5 \cdot 13.333} = -0.76$$

$$M_d = 0 \quad \mu_d = 0 \quad \text{προκύπτει} \Rightarrow \omega_{\text{tot}} \cong 0$$

2)

$$N_d = -1260 \quad v_d = -0.76$$

$$M_d = 0.5 \cdot 1.5 \cdot 3.0 \cdot 50 = 112.5 \text{ kNm} \Rightarrow$$

$$\mu_d = \frac{112.5}{0.25 \cdot 0.5^2 \cdot 13.333} = 0.135 \quad \text{προκύπτει} \Rightarrow \omega_{\text{tot}} \cong 0.30$$

3)

$$\left. \begin{array}{l} M_d = 0.5 \cdot 50 \cdot 3.0 = 225 \text{ kNm} \\ N_d = -600 \text{ kN} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu_d = 0.27 \\ v_d = -0.36 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_{\text{tot}} = 0.48$$

4)

$$\left. \begin{array}{l} M_d = 225 \text{ kNm} \\ N_d = -(1.35 \cdot 600 + 0.6 \cdot 1.5 \cdot 300) = -1080 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu_d = 0.27 \\ v_d = -0.65 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_{\text{tot}} = 0.66$$

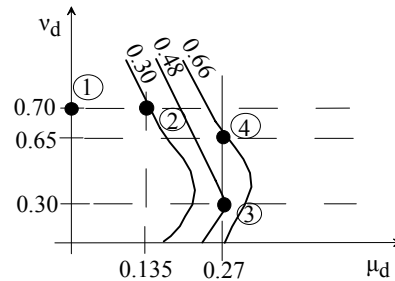
⁴⁵ Προσέξτε την διαφορά στην χρήση των δ/των (σχήματα 6.8 έως 6.16) ή πινάκων (πίν 6.5 έως 6.7) αλληλεπιδράσεως με τους πίνακες CEB (πίνακες 6.2α έως 6.2δ) Τα διαγράμματα (ή ισοδυνάμως οι πίνακες) αλληλεπιδράσεως χρησιμοποιούνται για την διαστασιολόγηση υποστυλωμάτων με συμμετρικό οπλισμό (υπάρχει πάντα θλιβόμενος οπλισμός ο οποίος μάλιστα είναι ίσος με τον εφελκόμενο οπλισμό) ενώ οι πίνακες CEB χρησιμοποιούνται για την διαστασιολόγηση δοκών και πλακών με, κατά κανόνα μόνο, εφελκόμενο οπλισμό και αν χρειασθεί τίθεται και θλιβόμενος οπλισμός ο οποίος συνήθως δεν είναι ίσος με τον εφελκόμενο.

Αρα δυσμενέστερος είναι ο 4^{ος} συνδυασμός για τον οποίο προκύπτει το μεγαλύτερο μηχανικό ποσοστό οπλισμού. Ο οπλισμός που προκύπτει είναι:

$$A_{\text{stot}} = 0.66 \times 25 \times 50 \times \frac{13.333}{348} = 31.6 \text{ cm}^2 \Rightarrow$$

2x5Ø20

Τίθενται 5Φ20 σε κάθε παρειά. Στις δύο άλλες παρειές επιπροσθέτως τίθενται, για κατασκευαστικούς λόγους (άνευ υπολογισμού) συνολικά 4Φ16. (συνολικός οπλισμός 39.4cm²)



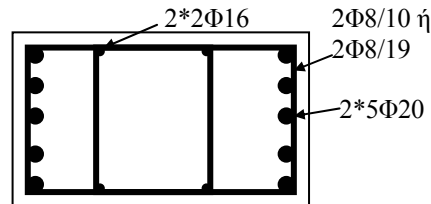
Κατασκευαστικές διατάξεις (βλ παρ. 18.4.3, 18.4.4 και 18.4.5 του κανονισμού)

$\rho = 39.4 / (25 \times 50) = 3.15\%$ (μεταξύ 0.8% και 4%) άρα καλώς.

Συνδετήρες⁴⁶: $\min \Phi = \max(8^{47} \text{ mm}, \Phi_{L, \max} / 4) = \max(8 \text{ mm}, 20 / 4) = 8 \text{ mm}$ σε απόσταση:

- στις κρίσιμες περιοχές:
 $s_{\max} = \min(8\Phi_{L, \min}, 0.5b_{\min} 100 \text{ mm}) = \min(8 \times 16, 0.5 \times 250, 100 \text{ mm}) = \min(128, 125, 100) = 100 \text{ mm}$
- στις μή κρίσιμες περιοχές:
 $s_{\max} = \min(12\Phi_{L, \min}, b_{\min} 300 \text{ mm}) = \min(12 \times 16, 250, 300 \text{ mm}) = \min(192, 250, 300) = 190 \text{ mm}$

Τίθενται 2Φ8/10 και 2Φ8/19 (οι συνδετήρες αυτοί πρέπει να ικανοποιούν τον έλεγχο περισφίγξεως παρ. 18.4.4.2 του κανονισμού) ο έλεγχος αυτός δεν αποτελεί αντικείμενο της ασκήσεως αυτής.



⁴⁶ Εδώ δεν εξετάζεται ο οπλισμός περισφίγξης (παρ. 18.4.4.2)

⁴⁷ Ο κανονισμός προβλέπει 6mm, αλλά συνιστάται 8mm.