Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα
Δεύτερη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Οκτώβριος 2019

1. Find a differentiable function f : R R such that f does not have an extremum at its critical point.

2. Given a positive integer S, which decompositions a1 + + an = S with the ai positive integers have the largest product a1 an?

3. Find the optimal solution to the Diet Problem when the cost function is Cost(x1, x2) = x1 + x2.

4. Let A,B $\mathbb{R}^{n\times n}$. Show that the traditional way of computing their product AB requires a total of $(2n-1)n^2$ arithmetic operations.

Οι πίνακες Α και Β είναι τετραγωνικοί $(n \times n)$, δηλαδή αποτελόυνται από n γραμμές και από n στήλες, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & .... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & .... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .... & b_{2n} \\ . & . & .... & . \\ b_{n1} & b_{n2} & .... & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & .... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & .... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .... & b_{2n} \\ . & . & .... & . \\ b_{n1} & b_{n2} & .... & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{22} & .... & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & .... & z_{2n} \\ . & . & .... & . \\ z_{n1} & z_{n2} & .... & z_{nn} \end{bmatrix} = Z$$

Για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων Α και Β αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την:

$$\left.\begin{array}{r} \text{1η γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το } z_{11} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \text{1η γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το } z_{12} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \\ \text{1η γραμμή του A με την n στήλη του B, για το } z_{1n} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \end{array}\right\} n(n+(n-1))$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{2η γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το } z_{21} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \text{2η γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το } z_{22} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \\ \text{2η γραμμή του A με την n στήλη του B, για το } z_{2n} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \end{array}\right\} n(n+(n-1))$$

...

...

...

$$\left.\begin{array}{r} \text{n γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το } z_{n1} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \text{n γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το } z_{n2} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \\ \text{n γραμμή του A με την n στήλη του B, για το } z_{nn} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \end{array}\right\} n(n+(n-1))$$

Η κάθε γραμμή του πίνακα Α πολλαπλασιάζεται με όλες τις στήλες του Β και προκύπτει μία νέα γραμμή στον πίνακα Ζ. Η παραπάνω διαδικασία απαιτεί n(n+(n-1)) αριθμητικές παραστάσεις και επειδή αυτό θα συμβεί n φορές απαιτούνται συνολικά $n^2(n+(n-1)) = n^2(2n-1)$.

5. Consider the problem of solving a system of n linear equations in n unknowns. Show that the Gaussian elimination method requires O(n3) arithmetic operations in order to either compute a solution or to decide that no solution exist.

6. Suppose that we are given a set of vectors in Rn that form a basis and let y be an arbitrary vector in Rn. We wish to express y as a linear combination of the basis vectors. How can this by accomplished?

7. Study the paper with title: Do dogs know Calculus? found in the Readings folder.