

Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα Πρώτη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Οκτώβριος 2019

1. Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be a *convex* set with $x_1, \dots, x_k \in C$ and let $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{R}$ satisfy $\theta_i \geq 0$ and $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$. Show that $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \in C$.

Θα αποδειξουμε την παραπάνω πρόταση με επαγωγή στο k .

Για $k = 2$ ισχύει από τον ορισμό του *convex* συνόλου, καθώς κάθε *convex* σύνολο περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα, που ορίζεται από δύο οποιαδήποτε σημεία του.

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Για $k = 3$ έχουμε

$$\begin{aligned}\theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 + \theta_3 \cdot x_3 &= x \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3 &\geq 0 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= 1\end{aligned}$$

Σίγουρα ένα εκ των $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θα είναι διάφορο του 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\theta_1 \neq 1$, επομένως

$$\begin{aligned}x &= \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 + \theta_3 \cdot x_3 = \theta_1 \cdot x_1 + (1 - \theta_1) \cdot \lambda_2 \cdot x_2 + (1 - \theta_1) \cdot \lambda_3 \cdot x_3 \\ \lambda_2 &= \frac{\theta_2}{(1 - \theta_1)} \\ \lambda_3 &= \frac{\theta_3}{(1 - \theta_1)}\end{aligned}$$

Αν το ευθύγραμμο τμήμα, που ορίζεται από τα x_2 και x_3 ανήκει στο C , τότε και το

$$\theta_1 \cdot x_1 + (1 - \theta_1) \cdot (\lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3)$$

θα ανήκει στο C . Θέλουμε να δείξουμε ότι $y = \lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3$ ανήκει στο C .

$$\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\theta_2}{(1 - \theta_1)} + \frac{\theta_3}{(1 - \theta_1)} = \frac{\theta_2 + \theta_3}{(1 - \theta_1)} = \frac{(1 - \theta_1)}{(1 - \theta_1)} = 1$$

Συνεπώς, αφού $x_2, x_3 \in C$, το y ανήκει στο C , άρα και το x ανήκει στο C , αφού $x_1 \in C$.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Υποθέτω ότι $\theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_{n-1} \cdot x_{n-1}$ ανήκει στο C με $\theta_i \geq 0$ για $1 \leq i \leq n-1$ και $\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i = 1$ ανήκει στο C .

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Θα δείξουμε ότι $z = \theta_1 \cdot x_1 + \dots + \theta_{n-1} \cdot x_{n-1} + \theta_n \cdot x_n$ ανήκει στο C .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\theta_n \neq 1$

$$\begin{aligned}z &= \theta_n \cdot x_n + (1 - \theta_n) \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1}) \\ \lambda_i &= \frac{\theta_i}{(1 - \theta_n)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

Όμως, $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1}$ από επαγωγική υπόθεση ανήκει στο C .

Άρα, και το z ανήκει στο C .

2. Show that a set is *convex* if and only if its intersection with any line is *convex*.

- Αν έχουμε ένα *convex* σύνολο, τότε η τομή του *convex* σύνολο με μία τυχαία ευθεία είναι *convex*.

Αρχικά, να επισημανθεί ότι μία ευθεία είναι *convex* σύνολο, καθώς αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε σημεία που ανήκουν στην ευθεία, τότε ανήκει και το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από αυτά. Συνεπώς, η ευθεία είναι *convex* σύνολο.

Θα αποδείξουμε ότι η τομή δύο *convex* συνόλων είναι *convex* σύνολο

Έστω A και B είναι δύο *convex* σύνολα.

$\forall p_i, p_j \in (A \cap B)$ το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{p_i p_j}$ ανήκει εξ ολοκλήρου στο A , επειδή A είναι *convex* σύνολο και ανήκει εξ ολοκλήρου στο B , επειδή B είναι *convex* σύνολο, άρα ανήκει εξ ολοκλήρου και στο $A \cap B$. Συνεπώς, το $A \cap B$ είναι *convex* σύνολο.

Συνεπώς, η τομή ενός *convex* συνόλου και μιας ευθείας είναι *convex* σύνολο.

- Αν η τομή ενός συνόλου με οποιαδήποτε ευθεία είναι *convex* σύνολο, τότε το σύνολο είναι *convex*.

$\forall x_1, x_2$ που ανήκουν στο σύνολο, η τομή του συνόλου με την ευθεία, που ορίζεται από τα σημεία x_1 και x_2 είναι *convex*, άρα

$\forall \theta$ με $0 \leq \theta \leq 1$ τα σημεία $\theta \cdot x_1 + (1 - \theta) \cdot x_2$ ανήκουν στην τομή τους κι ως εκ τούτου και στο σύνολο.

Συνεπώς, το σύνολο είναι *convex*.

3. Show that a set is *affine* if and only if its intersection with any line is *affine*.

- Έστω ένα *affine* σύνολο S . Θα δείξουμε ότι η τομή του με οποιαδήποτε ευθεία είναι *affine* σύνολο.

Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία είναι *affine* σύνολο. Θεωρούμε τυχαία ευθεία l και βαφτίζουμε S_l την αναπαράστασή της ως *affine* σύνολο.

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in S \cap S_l$. Δεδομένου ότι τα S και S_l είναι *affine* σύνολα έχουμε

$$\left. \begin{aligned} x_1, x_2 \in S \cap S_l &\implies x_1 \in S \wedge x_2 \in S \implies \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 \in S \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \\ x_1, x_2 \in S \cap S_l &\implies x_1 \in S_l \wedge x_2 \in S_l \implies \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 \in S_l \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \implies$$

$$x_1, x_2 \in S \cap S_l \implies \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 \in S \cap S_l \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, η τομή του *affine* συνόλου S με οποιαδήποτε ευθεία είναι *affine* σύνολο.

- Έστω σύνολο S , τέτοιο ώστε η τομή του με οποιαδήποτε ευθεία να είναι *affine* σύνολο. Θα δείξουμε ότι το σύνολο S είναι *affine*.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, κάθε ευθεία είναι *affine* σύνολο. Έστω, το *affine* σύνολο S_l , που αντιστοιχεί στην ευθεία l που ορίζεται από δύο τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in S$.

Αφού, είναι γνωστό από υπόθεση πως το σύνολο $S \cap S_l$ είναι *affine*, έχουμε

$$x_1, x_2 \in S \cap S_l \implies \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 \in S \cap S_l \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

και ως εκ τούτου

$$x_1, x_2 \in S \implies \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 \in S \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, το σύνολο S είναι *affine*.

4. A set C is midpoint *convex*, if whenever two points $a, b \in C$, the average or midpoint $(a + b) / 2 \in C$. Obviously, a *convex* set is midpoint *convex*. Prove that if C is closed and midpoint *convex*, then C is *convex*.

Έστω σημεία $a, b \in C$ και m ένα οποιαδήποτε σημείο επί του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα σημεία a και b . Ορίζουμε την ακολουθία

$$m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

όπου

$$a_i = \begin{cases} a, & i = 0 \\ a_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} > m \\ m_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} \leq m \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} b, & i = 0 \\ m_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} > m \\ b_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} \leq m \end{cases}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

- $a_i, b_i, m_i \in C \quad \forall i$

Αυτό αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή στο i ως εξής:

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Η πρόταση προς απόδειξη ισχύει για $i = 0$, καθώς

$a_0 = a \in C$	από υπόθεση
$b_0 = b \in C$	από υπόθεση
$m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{a + b}{2} \in C$	λόγω midpoint convexity

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Έστω ότι $a_i, b_i, m_i \in C \quad \forall i \leq n$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Θα δείξουμε ότι $a_{n+1}, b_{n+1}, m_{n+1} \in C$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m_n > m$. Έτσι έχουμε

$a_{n+1} = a_n \in C$	από επαγωγική υπόθεση
$b_{n+1} = m_n \in C$	από επαγωγική υπόθεση
$m_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \frac{a_n + m_n}{2} \in C$	λόγω midpoint convexity

• Το σημείο m βρίσκεται πάντα επί του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{a_i b_i}$, γεγονός προφανές από τον ορισμό της ακολουθίας m_i . Επομένως, ισχύει η ανισότητα $\|m_i - m\| \leq \|a_i - b_i\|$.

Θα αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή στο i , ότι $\|a_i - b_i\| = \|a - b\| \cdot 2^{-i}$

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Για $i = 0$, έχουμε: $\|a_0 - b_0\| = \|a - b\| = \|a - b\| \cdot 2^{-0}$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Έστω ότι $\|a_i - b_i\| = \|a - b\| \cdot 2^{-i} \quad \forall i \leq n$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m_n > m$, όπως και παραπάνω, για $i = n + 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a_n - m_n\| && \Leftrightarrow \\ \|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\| a_n - \frac{a_n + b_n}{2} \right\| && \Leftrightarrow \\ \|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\| \frac{b_n - a_n}{2} \right\| && \Leftrightarrow \\ \|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\| \frac{a_n - b_n}{2} \right\| && \Leftrightarrow \\ \|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a_n - b_n\| \cdot 2^{-1} && \Leftrightarrow \\ \|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a - b\| \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-1} && \Leftrightarrow \\ \|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a - b\| \cdot 2^{-(n+1)} && \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε $0 \leq \|m_i - m\| \leq \|x - y\| \cdot 2^{-i}$

Είναι προφανές πως η ακολουθία $\|m_i - m\|$ είναι φθίνουσα και λόγω του ότι είναι και φραγμένη συγχλίνει στο μέγιστο κάτω φράγμα της, δηλαδή

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|m_i - m\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m$$

Τέλος, επειδή το σύνολο είναι κλειστό περιέχει τα όρια ακολουθιών στοιχείων του και αφού, όπως δείξαμε $m_i \in C \quad \forall i$, συνεπάγεται ότι $m \in C$. Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε σημείο m επί του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{\alpha\beta}$. Επομένως

$$a, b \in C \implies m = \theta_1 \cdot a + \theta_2 \cdot b \in C \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, αν ένα σύνολο είναι κλειστό και midpoint convex, τότε το σύνολο αυτό είναι convex.

5. Show that the *convex hull* of a set S is the intersection of all *convex* sets that contain S . (The same method can be used to show that the conic, or *affine*, or linear hull of a set S is the intersection of all conic sets, or *affine* sets, or subspaces that contain S .)

Το *convex hull* ενός συνόλου S , ορίζεται ως εξής:

$$\text{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot s_i \mid s_i \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

• Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η τομή όλων των *convex* υπερσυνόλων του S , είναι υπερσύνολο του *convex hull* του.

Έστω *convex* σύνολο C , τέτοιο ώστε $C \supseteq S$.

Δεδομένου ότι το σύνολο C είναι *convex*, ισχύει

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot c_i \in C \text{ όπου } c_i \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Δεδομένου τώρα ότι $C \supseteq P$, ισχύει

$$s_i \in S \Rightarrow s_i \in C \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot s_i \in C$$

Ως εκ τούτου, προκύπτει $C \supseteq \text{conv}(S)$ και αφού αυτό ισχύει για οποιαδήποτε *convex* υπερσύνολο του S συνεπάγεται πως και η τομή αυτών των συνόλων είναι υπερσύνολο του $\text{conv}(S)$.

• Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το *convex hull* του συνόλου S είναι υπερσύνολο της τομής όλων των *convex* υπερσυνόλων του.

Είναι προφανές πως $\text{conv}(S) \supseteq S$. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\text{conv}(S)$ είναι *convex*, καθώς σε αυτή την περίπτωση θα ανήκει στο σύνολο *convex* υπερσυνόλων του S και ως εκ τούτου θα είναι υπερσύνολο και της τομής τους.

Έστω δύο σημεία x_1 και x_2 , τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot s_i && \in \text{conv}(S) \\ x_2 &= \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot s_i && \in \text{conv}(S) \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\theta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\theta \cdot x_1 + (1 - \theta) \cdot x_2 &= \theta \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot s_i + (1 - \theta) \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot s_i && \Leftrightarrow \\ \theta \cdot x_1 + (1 - \theta) \cdot x_2 &= \sum_{i=1}^n (\theta \cdot \lambda_i + (1 - \theta) \cdot \mu_i) \cdot s_i\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (\theta \cdot \lambda_i + (1 - \theta) \cdot \mu_i) &= \theta \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \theta) \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i && \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n (\theta \cdot \lambda_i + (1 - \theta) \cdot \mu_i) &= \theta \cdot 1 + (1 - \theta) \cdot 1 && \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n (\theta \cdot \lambda_i + (1 - \theta) \cdot \mu_i) &= 1\end{aligned}$$

και

$$\theta \cdot \lambda_i + (1 - \theta) \cdot \mu_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα $\theta \cdot x_1 + (1 - \theta) \cdot x_2 \in \text{conv}(S)$ και άρα το σύνολο $\text{conv}(S)$ είναι *convex* και ως εκ τούτου είναι και υπερσύνολο της τομής των *convex* υπερσυνόλων του S .

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\begin{aligned}\text{conv}(S) &\supseteq \bigcap C \text{ όπου } C \text{ οποιοδήποτε } \text{convex} \text{ υπερσύνολο του } S \\ \text{conv}(S) &\subseteq \bigcap C \text{ όπου } C \text{ οποιοδήποτε } \text{convex} \text{ υπερσύνολο του } S\end{aligned} \Rightarrow$$

$$\text{conv}(S) \equiv \bigcap C \text{ όπου } C \text{ οποιοδήποτε } \text{convex} \text{ υπερσύνολο του } S$$

6. What is the distance between two parallel hyperplanes $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b_1\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b_2\}$?

Τα δύο hyperplanes, έστω B_1 και B_2 είναι μεταξύ τους παράλληλα, άρα έχει νόημα να μελετήσουμε την απόσταση μεταξύ τους. Αν δεν ήταν παράλληλα, η απόσταση μεταξύ των B_1 και B_2 θα ήταν 0, αφού θα υπήρχε σημείο τομής ανάμεσα τους.

Έστω ένα σημείο x_1 που ανήκει στο B_1 και έστω μία ευθεία E , η οποία διέρχεται από το x_1 και είναι κάθετη στο B_1 .

Η E τέμνει το B_2 στο σημείο x_2 επίσης κάθετα, γιατί τα δύο hyperplanes είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Αρκεί να βρούμε την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων x_1 και x_2 , δηλαδή να βρούμε την $\|x_1 - x_2\|_2$.

Η ευθεία E έχει ίδια κατεύθυνση με το α , γιατί και το α και η ευθεία E είναι κάθετα στα δύο hyperplanes, συνεπώς την ευθεία μπορούμε να την γράψουμε ως: $\alpha y + x_1$.

Η τομή της E με το B_2 είναι

$$\begin{aligned} \alpha^T \cdot x = b_2 &\Leftrightarrow \alpha^T \cdot (\alpha y + x_1) = b_2 \Leftrightarrow \alpha^T \cdot \alpha \cdot y + \alpha^T \cdot x_1 = b_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{b_2 - \alpha^T \cdot x_1}{\alpha^T \cdot \alpha} \Leftrightarrow y = \frac{b_2 - b_1}{\alpha^T \cdot \alpha} \end{aligned}$$

Άρα

$$x_2 = \alpha \cdot y + x_1 \Leftrightarrow x_2 = \alpha \cdot \frac{b_2 - b_1}{\alpha^T \cdot \alpha} + x_1.$$

Συνεπώς

$$\|x_1 - x_2\|_2 = \left\| x_1 - \frac{b_2 - b_1}{\alpha^T} - x_1 \right\|_2 = \left\| -\frac{b_2 - b_1}{\alpha^T} \right\|_2 = \frac{|b_2 - b_1|}{\|\alpha\|_2}$$

7. Let a and b be distinct points in \mathbb{R}^n . Show that the set of all points that are closer (in Euclidean Norm) to a than b is a halfspace.

Έστω $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2\}$ το σύνολο των σημείων $x \in \mathbb{R}^n$, τα οποία βρίσκονται πιο κοντά στο a , σε σχέση με το b βάσει Ευκλείδειας Νόρμας.

$$\begin{aligned}
\|x - a\|_2 &\leq \|x - b\|_2 && \Leftrightarrow \\
\|x - a\|_2^2 &\leq \|x - b\|_2^2 && \Leftrightarrow \\
(x - a)^T \cdot (x - a) &\leq (x - b)^T \cdot (x - b) && \Leftrightarrow \\
x^T \cdot x - x^T \cdot a - a^T \cdot x + a^T \cdot a &\leq x^T \cdot x - x^T \cdot b - b^T \cdot x + b^T \cdot b && \Leftrightarrow \\
2 \cdot b^T \cdot x - 2 \cdot a^T \cdot x &\leq b^T \cdot b - a^T \cdot a && \Leftrightarrow \\
(2 \cdot (b - a))^T \cdot x &\leq b^T \cdot b - a^T \cdot a
\end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\begin{aligned}
c &= 2 \cdot (b - a) \\
d &= b^T \cdot b - a^T \cdot a
\end{aligned}$$

λαμβάνουμε την ανισότητα $c^T \cdot x \leq d$, η οποία ορίζει έναν κλειστό halfspace.