

Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα Δεύτερη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Οκτώβριος 2019

1. Find a differentiable function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that f does not have an extremum at its critical point.

2. Given a positive integer S , which decompositions $a_1 + \dots + a_n = S$ with the a_i positive integers have the largest product $a_1 \dots a_n$?

3. Find the optimal solution to the Diet Problem when the cost function is $\text{Cost}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

4. Let $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Show that the traditional way of computing their product AB requires a total of $(2n - 1)n^2$ arithmetic operations.

Οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί ($n \times n$), δηλαδή αποτελούνται από n γραμμές και από n στήλες, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} = Z$$

Για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων A και B αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την:

1η γραμμή του A με την 1η στήλη του B , για το $z_{11} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις
 1η γραμμή του A με την 2η στήλη του B , για το $z_{12} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις
 1η γραμμή του A με την n στήλη του B , για το $z_{1n} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις

$\left. \vphantom{\begin{matrix} 1η γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το z_{11} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 1η γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το z_{12} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 1η γραμμή του A με την n στήλη του B, για το z_{1n} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{matrix}} \right\} n(n+(n-1))$

2η γραμμή του A με την 1η στήλη του B , για το $z_{21} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις
 2η γραμμή του A με την 2η στήλη του B , για το $z_{22} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις
 2η γραμμή του A με την n στήλη του B , για το $z_{2n} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις

$\left. \vphantom{\begin{matrix} 2η γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το z_{21} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 2η γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το z_{22} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 2η γραμμή του A με την n στήλη του B, για το z_{2n} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{matrix}} \right\} n(n+(n-1))$

...

...

...

n γραμμή του A με την 1η στήλη του B , για το $z_{n1} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις
 n γραμμή του A με την 2η στήλη του B , για το $z_{n2} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις
 n γραμμή του A με την n στήλη του B , για το $z_{nn} \rightarrow n$ γινόμενα και $(n-1)$ προσθέσεις

$\left. \vphantom{\begin{matrix} n γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το z_{n1} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ n γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το z_{n2} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ n γραμμή του A με την n στήλη του B, για το z_{nn} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{matrix}} \right\} n(n+(n-1))$

Η κάθε γραμμή του πίνακα A πολλαπλασιάζεται με όλες τις στήλες του B και προκύπτει μία νέα γραμμή στον πίνακα Z . Η παραπάνω διαδικασία απαιτεί $n(n+(n-1))$ αριθμητικές παραστάσεις και επειδή αυτό θα συμβεί n φορές απαιτούνται συνολικά $n^2(n + (n - 1)) = n^2(2n - 1)$.

5. Consider the problem of solving a system of n linear equations in n unknowns. Show that the Gaussian elimination method requires $O(n^3)$ arithmetic operations in order to either compute a solution or to decide that no solution exist.

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss είναι μία μέθοδος για την επίλυση πυκνών γραμμικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων που ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων στοιχείων αποτελείται κυρίως από μη μηδενικά στοιχεία.

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της πολυπλοκότητας της μεθόδου, θα εξηγήσουμε πως δουλεύει η μέθοδος.

Στόχος της απαλοιφής του Gauss είναι να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ και $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Για να λύσουμε το σύστημα αυτό, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss προχωρά σε τριγωνοποίηση του πίνακα A , κι έτσι ο πίνακας γίνεται άνω τριγωνικός, κι έπειτα με προς τα πίσω αντικατάσταση βρίσκουμε τους αγνώστους.

Πιο αναλυτικά, έστω ότι βρισκόμαστε στο k -οστό βήμα της μεθόδου (αυτό σημαίνει ότι κοιτάμε την k γραμμή του πίνακα A). Τα βήματα που ακολουθούμε εδώ είναι:

1. Βρίσκουμε $(n-k)$ το πλήθος πολλαπλασιαστές m , όπου $m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ για $i = k+1, k+2, \dots, n$.
2. Εφαρμόζουμε τον τύπο $a_{ij}^{new} = a_{ij}^{old} + m_{ik} \times a_{kj}^{(k)}$ για $i = k+1, k+2, \dots, n$ και $j = k, k+1, \dots, n$
3. Εφαρμόζουμε τον τύπο $b_i^{new} = b_i^{old} + m_{ik} \times b_k^{(k)}$ για $i = k+1, k+2, \dots, n$

Για την εύρεση της πολυπλοκότητας θα αναφερθούμε αρχικά στη γενική περίπτωση επίλυσης l το πλήθος γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα αγνώστων A . Άλλωστε, η "βαρια" υπολογιστικά εργασία είναι η τριγωνοποίηση του πίνακα A . Έπειτα θα περάσουμε στην περίπτωση όπου το $l = 1$.

Έστω πάλι ότι βρισκόμαστε στο k βήμα της μεθόδου:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3k} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3n} \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & 0 & & \ddots & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ & & & & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & 0 & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(l)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(l)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & \dots & x_3^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_k^{(1)} & x_k^{(2)} & \dots & x_k^{(l)} \\ x_{k+1}^{(1)} & x_{k+1}^{(2)} & \dots & x_{k+1}^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \dots & b_1^{(l)} \\ b_2^{(1)} & b_2^{(2)} & \dots & b_2^{(l)} \\ b_3^{(1)} & b_3^{(2)} & \dots & b_3^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_k^{(1)} & b_k^{(2)} & \dots & b_k^{(l)} \\ b_{k+1}^{(1)} & b_{k+1}^{(2)} & \dots & b_{k+1}^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_n^{(1)} & b_n^{(2)} & \dots & b_n^{(l)} \end{bmatrix}$$

Για να εκτελέσουμε το βήμα 1 και να καταφέρουμε να μηδενίσουμε τα $a_{k+1,k}, \dots, a_{nk}$, πρέπει να βρούμε $(n-k)$ το πλήθος πολλαπλασιαστές τύπου m . Αρα, σε αυτό το βήμα θα εκτελεστούν $(n-k)$ διαιρέσεις.

Για να εκτελεστεί τα βήματα 2 και 3:

-για το γινόμενο ma θα εκτελεστούν $(n-k+l)$ γινόμενα $(n-k)$ φορές

-για την πρόσθεση $a + ma$ θα εκτελεστούν $(n - k + l)$ προσθαφαιρέσεις $(n - k)$ φορές.

Συνεπώς, για την πλήρη εκτέλεση του αλγορίθμου θα χρειαστούν:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k) \text{ διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + l) \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + l) \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Κάνοντας χρήση των:

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ και } \sum_{k=1}^m k^2$$

προκύπτει τελικά ότι για την τριγωνοποίηση του πίνακα A χρειαζόμαστε:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= n(n - 1) - \frac{(n - 1)(n - 1 + 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2} - \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + l) = \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - nk + nl - kn + k^2 - kl) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} nk + \sum_{k=1}^{n-1} nl + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kl =$$

$$= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2n \sum_{k=1}^{n-1} k + nl \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - l \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= n^2(n - 1) - 2n \frac{(n - 1)n}{2} + nl(n - 1) + \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6} - l \frac{(n - 1)n}{2} =$$

$$= n^2(n - 1) - n^2(n - 1) + \frac{1}{2}nl(n - 1) + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} =$$

$$= \frac{nl(n - 1)}{2} + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} = \frac{3nl(n - 1)}{6} + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n - 1)(3l + 2n - 1)}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + l) = \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - nk + nl - kn + k^2 - kl) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} nk + \sum_{k=1}^{n-1} nl + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kl = \\
&= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2n \sum_{k=1}^{n-1} k + nl \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - l \sum_{k=1}^{n-1} k = \\
&= n^2(n-1) - 2n \frac{(n-1)n}{2} + nl(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - l \frac{(n-1)n}{2} = \\
&= n^2(n-1) - n^2(n-1) + \frac{1}{2}nl(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\
&= \frac{nl(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{3nl(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\
&= \frac{n(n-1)(3l+2n-1)}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}
\end{aligned}$$

ενώ για τον υπολογισμό των x απαιτούνται:

$$l \sum_{k=1}^n 1 \text{ διαιρέσεις}$$

$$l \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$l \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Δηλαδή:

$$nl \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)l}{2} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)l}{2} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Συνεπώς, το σύνολο των πράξεων είναι:

$$\frac{n(n-1+2l)}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6l)}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6l)}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Αν $l = 1$ απαιτούνται:

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Άρα, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων απαιτεί $O(n^3)$.

6. Suppose that we are given a set of vectors in R^n that form a basis and let y be an arbitrary vector in R^n . We wish to express y as a linear combination of the basis vectors. How can this be accomplished?

Έστω ότι τα b_1, b_2, \dots, b_n είναι το σύνολο που αποτελούν τη βάση.

Βάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν το V . Με άλλα λόγια το σύνολο $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ είναι βάση του V αν:

1. $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$
2. b_1, b_2, \dots, b_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (τα b_1, b_2, \dots, b_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν η σχέση $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ ισχύει μόνο για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$)
3. $\forall b \in V, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τω $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$.

Για να εκφράσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^n$ πρέπει να βρούμε κατάλληλους συντελεστές τω

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_i b_j^i \quad \forall j \leq n$$

όπου το j δηλώνει το j -οστό στοιχείο των διανυσμάτων y και b .

Θα αποδείξουμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν μοναδική λύση.

Έστω διάνυσμα $z \in \mathbb{R}^n$ και έστω ότι μπορεί να αναπαρασταθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

$$z = d_1 b_1 + d_2 b_2 + \dots + d_n b_n \quad (1)$$

$$z = m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n \quad (2)$$

με $d_i, m_i \in \mathbb{R}$. Επειδή, όμως, $(1) = (2)$ έχουμε:

$$d_1 b_1 + d_2 b_2 + \dots + d_n b_n = m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n \Leftrightarrow$$

$$(d_1 - m_1) b_1 + (d_2 - m_2) b_2 + \dots + (d_n - m_n) b_n = 0$$

και επειδή τα b_1, b_2, \dots, b_n είναι διανύσματα βάσης, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα:

$$(d_1 - m_1) = 0, (d_2 - m_2) = 0, \dots, (d_n - m_n) = 0$$

$$d_1 = m_1, d_2 = m_2, \dots, d_n = m_n$$

Συνεπώς, οι δύο αναπαραστάσεις του διανύσματος z είναι ίδιες και η αναπαράστασή του από διανύσματα βάσης είναι μοναδική.

Για να βρούμε λοιπόν τα μοναδικά a_i για να εκφράσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα y ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε μία συνάρτηση, που υπόκειται σε αυτούς τους περιορισμούς.

7. Study the paper with title: Do dogs know Calculus? found in the Readings folder.