

# Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα Δεύτερη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος  
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Οκτώβριος 2019

1. Find a differentiable function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $f$  does not have an extremum at its critical point.

2. Given a positive integer  $S$ , which decompositions  $a_1 + \dots + a_n = S$  with the  $a_i$  positive integers have the largest product  $a_1 \dots a_n$ ?

3. Find the optimal solution to the Diet Problem when the cost function is  $\text{Cost}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ .

**4. Let  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Show that the traditional way of computing their product  $AB$  requires a total of  $(2n - 1)n^2$  arithmetic operations.**

Οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι τετραγωνικοί ( $n \times n$ ), δηλαδή αποτελούνται από  $n$  γραμμές και από  $n$  στήλες, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} = Z$$

Για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων  $A$  και  $B$  αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την:

1η γραμμή του  $A$  με την 1η στήλη του  $B$ , για το  $z_{11} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις  
 1η γραμμή του  $A$  με την 2η στήλη του  $B$ , για το  $z_{12} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις  
 1η γραμμή του  $A$  με την  $n$  στήλη του  $B$ , για το  $z_{1n} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις

$\left. \vphantom{\begin{matrix} 1η γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το z_{11} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 1η γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το z_{12} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 1η γραμμή του A με την n στήλη του B, για το z_{1n} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{matrix}} \right\} n(n+(n-1))$

2η γραμμή του  $A$  με την 1η στήλη του  $B$ , για το  $z_{21} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις  
 2η γραμμή του  $A$  με την 2η στήλη του  $B$ , για το  $z_{22} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις  
 2η γραμμή του  $A$  με την  $n$  στήλη του  $B$ , για το  $z_{2n} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις

$\left. \vphantom{\begin{matrix} 2η γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το z_{21} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 2η γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το z_{22} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 2η γραμμή του A με την n στήλη του B, για το z_{2n} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{matrix}} \right\} n(n+(n-1))$

...

...

...

$n$  γραμμή του  $A$  με την 1η στήλη του  $B$ , για το  $z_{n1} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις  
 $n$  γραμμή του  $A$  με την 2η στήλη του  $B$ , για το  $z_{n2} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις  
 $n$  γραμμή του  $A$  με την  $n$  στήλη του  $B$ , για το  $z_{nn} \rightarrow n$  γινόμενα και  $(n-1)$  προσθέσεις

$\left. \vphantom{\begin{matrix} n γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το z_{n1} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ n γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το z_{n2} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ n γραμμή του A με την n στήλη του B, για το z_{nn} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{matrix}} \right\} n(n+(n-1))$

Η κάθε γραμμή του πίνακα  $A$  πολλαπλασιάζεται με όλες τις στήλες του  $B$  και προκύπτει μία νέα γραμμή στον πίνακα  $Z$ . Η παραπάνω διαδικασία απαιτεί  $n(n+(n-1))$  αριθμητικές παραστάσεις και επειδή αυτό θα συμβεί  $n$  φορές απαιτούνται συνολικά  $n^2(n + (n - 1)) = n^2(2n - 1)$ .

**5. Consider the problem of solving a system of  $n$  linear equations in  $n$  unknowns. Show that the Gaussian elimination method requires  $O(n^3)$  arithmetic operations in order to either compute a solution or to decide that no solution exist.**

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss είναι μία μέθοδος για την επίλυση πυκνών γραμμικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων που ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων στοιχείων αποτελείται κυρίως από μη μηδενικά στοιχεία.

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της πολυπλοκότητας της μεθόδου, θα εξηγήσουμε πως δουλεύει η μέθοδος.

Στόχος της απαλοιφής του Gauss είναι να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα  $Ax = b$ , όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  και  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Για να λύσουμε το σύστημα αυτό, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss προχωρά σε τριγωνοποίηση του πίνακα  $A$ , κι έτσι ο πίνακας γίνεται άνω τριγωνικός, κι έπειτα με προς τα πίσω αντικατάσταση βρίσκουμε τους αγνώστους.

Πιο αναλυτικά, έστω ότι βρισκόμαστε στο  $k$ -οστό βήμα της μεθόδου (αυτό σημαίνει ότι κοιτάμε την  $k$  γραμμή του πίνακα  $A$ ). Τα βήματα που ακολουθούμε εδώ είναι:

1. Βρίσκουμε  $(n-k)$  το πλήθος πολλαπλασιαστές  $m$ , όπου  $m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$  για  $i = k+1, k+2, \dots, n$ .
2. Εφαρμόζουμε τον τύπο  $a_{ij}^{new} = a_{ij}^{old} + m_{ik} \times a_{kj}^{(k)}$  για  $i = k+1, k+2, \dots, n$  και  $j = k, k+1, \dots, n$
3. Εφαρμόζουμε τον τύπο  $b_i^{new} = b_i^{old} + m_{ik} \times b_k^{(k)}$  για  $i = k+1, k+2, \dots, n$

Για την εύρεση της πολυπλοκότητας θα αναφερθούμε αρχικά στη γενική περίπτωση επίλυσης  $l$  το πλήθος γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα αγνώστων  $A$ . Άλλωστε, η "βαρια" υπολογιστικά εργασία είναι η τριγωνοποίηση του πίνακα  $A$ . Έπειτα θα περάσουμε στην περίπτωση όπου το  $l = 1$ .

Έστω πάλι ότι βρισκόμαστε στο  $k$  βήμα της μεθόδου:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3k} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3n} \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & 0 & & \ddots & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ & & & & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & 0 & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(l)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(l)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & \dots & x_3^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_k^{(1)} & x_k^{(2)} & \dots & x_k^{(l)} \\ x_{k+1}^{(1)} & x_{k+1}^{(2)} & \dots & x_{k+1}^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \dots & b_1^{(l)} \\ b_2^{(1)} & b_2^{(2)} & \dots & b_2^{(l)} \\ b_3^{(1)} & b_3^{(2)} & \dots & b_3^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_k^{(1)} & b_k^{(2)} & \dots & b_k^{(l)} \\ b_{k+1}^{(1)} & b_{k+1}^{(2)} & \dots & b_{k+1}^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_n^{(1)} & b_n^{(2)} & \dots & b_n^{(l)} \end{bmatrix}$$

Για να εκτελέσουμε το βήμα 1 και να καταφέρουμε να μηδενίσουμε τα  $a_{k+1,k}, \dots, a_{nk}$ , πρέπει να βρούμε  $(n-k)$  το πλήθος πολλαπλασιαστές τύπου  $m$ . Αρα, σε αυτό το βήμα θα εκτελεστούν  $(n-k)$  διαιρέσεις.

Για να εκτελεστεί τα βήματα 2 και 3:

-για το γινόμενο  $ma$  θα εκτελεστούν  $(n-k+l)$  γινόμενα  $(n-k)$  φορές

-για την πρόσθεση  $a + ma$  θα εκτελεστούν  $(n - k + l)$  προσθαφαιρέσεις  $(n - k)$  φορές.

Συνεπώς, για την πλήρη εκτέλεση του αλγορίθμου θα χρειαστούν:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k) \text{ διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + l) \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + l) \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Κάνοντας χρήση των:

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ και } \sum_{k=1}^m k^2$$

προκύπτει τελικά ότι για την τριγωνοποίηση του πίνακα A χρειαζόμαστε:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= n(n - 1) - \frac{(n - 1)(n - 1 + 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2} - \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + l) = \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - nk + nl - kn + k^2 - kl) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} nk + \sum_{k=1}^{n-1} nl + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kl =$$

$$= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2n \sum_{k=1}^{n-1} k + nl \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - l \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= n^2(n - 1) - 2n \frac{(n - 1)n}{2} + nl(n - 1) + \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6} - l \frac{(n - 1)n}{2} =$$

$$= n^2(n - 1) - n^2(n - 1) + \frac{1}{2}nl(n - 1) + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} =$$

$$= \frac{nl(n - 1)}{2} + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} = \frac{3nl(n - 1)}{6} + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n - 1)(3l + 2n - 1)}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + l) = \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - nk + nl - kn + k^2 - kl) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} nk + \sum_{k=1}^{n-1} nl + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kl = \\
&= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2n \sum_{k=1}^{n-1} k + nl \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - l \sum_{k=1}^{n-1} k = \\
&= n^2(n-1) - 2n \frac{(n-1)n}{2} + nl(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - l \frac{(n-1)n}{2} = \\
&= n^2(n-1) - n^2(n-1) + \frac{1}{2}nl(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\
&= \frac{nl(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{3nl(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\
&= \frac{n(n-1)(3l+2n-1)}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}
\end{aligned}$$

ενώ για τον υπολογισμό των x απαιτούνται:

$$l \sum_{k=1}^n 1 \text{ διαιρέσεις}$$

$$l \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$l \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Δηλαδή:

$$nl \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)l}{2} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)l}{2} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Συνεπώς, το σύνολο των πράξεων είναι:

$$\frac{n(n-1+2l)}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6l)}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6l)}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Αν  $l = 1$  απαιτούνται:

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$



$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Άρα, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων απαιτεί  $O(n^3)$ .

6. Suppose that we are given a set of vectors in  $\mathbb{R}^n$  that form a basis and let  $y$  be an arbitrary vector in  $\mathbb{R}^n$ . We wish to express  $y$  as a linear combination of the basis vectors. How can this be accomplished?

7. Study the paper with title: Do dogs know Calculus? found in the Readings folder.