Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα
Πέμπτη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Δεκέμβριος 2019

1. Consider the linear programming problem min $x1 - x2$ s.t. $2x1 + 3x2 - x3 + x4 \leq 0$ $3x1 + x2 + 4x3 - 2x4 \geq 3$ $-x1 - x2 + 2x3 + x4 = 6$ $x \leq 0$ $x2, x3 \geq 0$ Write down the corresponding dual problem.

2. Consider the primal problem min $c'x$ s.t. $Ax \geq b$ $x \geq 0$ Form the dual problem and convert it into an equivalent minimization problem. Derive a set of conditions on the matrix A and the vectors b,c under which the dual is identical to the primal.

3. The purpose of this exercise is to show that solving linear programming problems is no harder than solving systems of linear inequalities. Suppose that we are given a subroutine which, given a system of linear inequalities either produces a solution or decides that no solution exists. Construct a simple algorithm that uses a single call to this subroutine and which finds an optimal solution to any linear programming problem that has an optimal solution.

Έστω το εξής πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} \max \ & c{\cdot}x \\ s.t. & \\ A{\times}x &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

και το δϋικό του

$$\begin{aligned} \min \ & y{\cdot}b \\ s.t. & \\ A^T{\times}y &\leq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Ορίζουμε το παρακάτω σύστημα γραμμικών ανισώσεων

$$\begin{aligned} A{\times}x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ A^T{\times}y &\leq c \\ y &\geq 0 \\ c \cdot x &\geq y \cdot b \end{aligned}$$

- Οι 4 πρώτες ανισώσεις εξασφαλίζουν, όπως είναι προφανές, την εφικτότητα των λύσεων.
- Η τελευταία ανίσωση εξασφαλίζει τη βελτιστότητα των λύσεων.

  Από το Θεώρημα Ασθενούς Δϋικότητας γνωρίζουμε ότι αν τα x και y αποτελούν δυνατές λύσεις του πρωτεύοντος και του δϋικού προβλήματος αντίστοιχα τότε ισχύει $c \cdot x \leq y \cdot b$.

  Επομένως η ανίσωση $c{\cdot}x \geq y{\cdot}b$ ισχύει αποκλειστικά στην περίπτωση $c{\cdot}x = y{\cdot}b$, γεγονός που συνεπάγεται, λόγω του Θεώρημα Ισχυρής Δϋικότητας, ότι τα x και y αποτελούν βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δϋικού προβλήματος αντίστοιχα.

Έτσι, δοθέντος οποιουδήποτε προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού αρκεί να ορίσουμε το αντίστοιχο σύστημα γραμμικών ανισώσεων, όπως παραπάνω, και να καλέσουμε την υπορουτίνα μας επί αυτού.

Αν η υπορουτίνα αποφανθεί ότι δεν υπάρχει λύση στο σύστημα γραμμικών ανισώσεων, αυτό συνεπάγεται ότι είτε δεν υπάρχει εφικτή λύση για το δοθέν γραμμικό προβλήμα ή ότι δεν υπάρχει βέλτιση λύση.

Διαφορετικά επιστρέφονται οι βέλτιστες λύσεις τόσο του πρωτεύοντος όσο και του δϋικού προβλήματος.

4. Let A be a symmetric matrix. Consider the linear program min $c'x$ s.t. $Ax \geq c$ $x \geq 0$ Prove that if $x*$ satisfies $Ax* = c$ and $x* \geq 0$ then $x*$ is an optimal solution.

5. Write down the proof of the *Complimentary Slackness Theorem*.

Έστω το πρωτεύον πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max\ & c \cdot x \\ A \times x &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

και το δϋικό του

$$\begin{aligned} \min\ & b \cdot y \\ A^T \times y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Έστω x και y εφικτές λύσεις στο πρωτεύον και στο δϋικό πρόβλημα αντίστοιχα.

Το x και το y αποτελούν βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δϋικού αν και μόνο αν ισχύει ότι:

- $(b_i - \sum j = 1na_{ij} \cdot x_j) \cdot y_i = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$
- $(\sum i = 1na_{ji} \cdot y_i - c_j) \cdot x_j = 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Δεδομένου ότι οι λύσεις x και y είναι εφικτές έχουμε:

$$\left. A^T \times y \geq cx \quad \geq 0 \right\} \Rightarrow$$
$$x^T \times A^T \times y \geq x^T \times c = c \cdot x$$

$$\left. \begin{array}{r} A \times x \leq b \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$y^T \times A \times x \leq y^T \times b = b \cdot y$$

Από τα παραπάνω, δεδομένου ότι $x^T \times A^T \times y$ είναι ένας 1×1 πίνακας και ως εκ τούτου $x^T \times A^T \times y = (x^T \times A^T \times y)^T = y^T \times A \times x$ προκύπτει

$$c \cdot x = x^T \times c \leq x^T \times A^T \times y = y^T \times A \times x \leq y^T \times b = b \cdot y$$

Βάσει Ισχυρής Δϋικότητας, τα x και y αποτελούν βέλτιστες λύσεις στα αντίστοιχα γραμμικά προβλήματα αν και μόνο αν $c\dot{x} = b \cdot y$ και άρα αν και μόνο αν

- $x^T \times c = x^T \times A^T \times y \Leftrightarrow x \cdot (A^T \times y - c) = 0$

- $y^T \times A \times x = y^T \times b \Leftrightarrow y \cdot (b - A \times x) = 0$

Σημειώνουμε ότι

$$0 = x \cdot (A^T \times y - c) = \sum_{j=1}^{n} (x_j \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i - c_j))$$

και δεδομένου ότι $x_j \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i - c_j \geq 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$x_j \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i - c_j) \geq 0 \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι υποχρεωτικά ίσος με 0 που αντιστοιχεί στην πρώτη προϋπόθεση του Θεωρήματος.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$y \cdot (b - A \times x) = 0 \Leftrightarrow y_i \cdot (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$