# Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα
# Πρώτη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Οκτώβριος 2019

**1. Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be a *convex* set with $x_1, ..., x_k \in C$ and let $\theta_1, ..., \theta_k \in \mathbb{R}$ satisfy $\theta_i \geq 0$ and $\theta_1 + ... + \theta_k = 1$. Show that $\theta_1 x_1 + ... + \theta_k x_k \in C$.**

Θα αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση με επαγωγή στο $k$.

Για $k = 2$ ισχύει από τον ορισμό του *convex* συνόλου, καθώς κάθε *convex* σύνολο περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα, που ορίζεται από δύο οποιαδήποτε σημεία του.

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Για $k = 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 + \theta_3 \times x_3 = x \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq 0 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1 \end{aligned}$$

Σίγουρα ένα εκ των $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θα είναι διάφορο του 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\theta_1 \neq 1$, επομένως

$$x = \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 + \theta_3 \times x_3 = \theta_1 \times x_1 + (1 - \theta_1) \times \lambda_2 \times x_2 + (1 - \theta_1) \times \lambda_3 \times x_3$$
$$\lambda_2 = \frac{\theta_2}{(1 - \theta_1)}$$
$$\lambda_3 = \frac{\theta_3}{(1 - \theta_1)}$$

Αν το ευθύγραμμο τμήμα, που ορίζεται από τα $x_2$ και $x_3$ ανήκει στο C, τότε και το $\theta_1 \times x_1 + (1 - \theta_1) \times (\lambda_2 \times x_2 + \lambda_3 \times x_3)$ θα ανήκει στο C. Θέλουμε να δείξαμε ότι $\lambda_2 \times x_2 + \lambda_3 \times x_3 = y$ ανήκει στο C.

$$\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\theta_2}{(1 - \theta_1)} + \frac{\theta_3}{(1 - \theta_1)} = \frac{\theta_2 + \theta_3}{(1 - \theta_1)} = \frac{(1 - \theta_1)}{(1 - \theta_1)} = 1$$

Συνεπώς, αφού $x_2, x_3 \in C$, το y ανήκει στο C, άρα και το x ανήκει στο C, αφού $x_1 \in C$.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Υποθέτω ότι $\theta_1 \times x_1 + ... + \theta_{n-1} \times x_{n-1}$ ανήκει στο C με $\theta_i \geq 0$ για $1 \leq i \leq n - 1$ και $\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i = 1$ ανήκει στο C.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Θα δείξουμε ότι $\theta_1 \times x_1 + ... + \theta_{n-1} \times x_{n-1} + \theta_n \times x_n = z$ ανήκει στο C.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\theta_n \neq 1$

$$z = \theta_n \times x_n + (1 - \theta_n) \times (\lambda_1 \times x_1 + ... + \lambda_{n-1} \times x_{n-1})$$
$$\lambda_i = \frac{\theta_i}{(1 - \theta_n)} \ \forall \in \{1 \dots n\}$$

Όμως, $\lambda_1 \times x_1 + ... + \lambda_{n-1} \times x_{n-1}$ από επαγωγική υπόθεση ανήκει στο C. Άρα, και το z ανήκει στο $C$.

## 2. Show that a set is *convex* if and only if its intersection with any line is *convex.*

• Αν έχουμε ένα *convex* σύνολο, τότε η τομή του *convex* σύνολο με μία τυχαιά ευθεία είναι *convex.*

Αρχικά, να επισημανθεί ότι μία ευθεία είναι *convex* σύνολο, καθώς αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε σημεία που ανήκουν στην ευθεία, τότε ανήκει και το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από αυτά. Συνεπώς, η ευθεία είναι *convex* σύνολο.

Θα αποδείξουμε ότι η τομή δύο *convex* συνόλων είναι *convex* σύνολο

Έστω Α και Β είναι δύο *convex* σύνολα.

$\forall p_i, p_j \in (A \cap B)$ το ευθύγραμμο τμήμα $\overleftrightarrow{p_i p_j}$ ανήκει εξ ολοκλήρου στο Α, επειδή Α είναι *convex* σύνολο και ανήκει εξ ολοκλήρου στο Β, επειδή Β είναι *convex* σύνολο, άρα ανήκει εξ ολοκλήρου και στο $A \cap B$. Συνεπώς, το $A \cap B$ είναι *convex* σύνολο.

Συνεπώς, η τομή ενός *convex* συνόλου και μιας ευθείας είναι *covex* σύνολο.

• Αν η τομή ενός συνόλου με οποιοαδήποτε ευθεία είναι *convex* σύνολο, τότε το σύνολο είναι *convex.*

$\forall x_1, x_2$ που ανήκουν στο σύνολο, η τομή του συνόλου με την ευθεία, που ορίζεται από τα σημεία $x_1$ και $x_2$ είναι convex, άρα

$\forall \theta$ με $0 \leq \theta \leq 1$ τα σημεία $\theta \times x_1 + (1 - \theta) \times x_2$ ανήκουν στην τομή τους κι ως εκ τούτου και στο σύνολο.

Συνεπώς, το σύνολο είναι convex.

## 3. Show that a set is *affine* if and only if its intersection with any line is *affine.*

• Έστω ένα *affine* σύνολο S. Θα δείξουμε ότι η τομή του με οποιαδήποτε ευθεία είναι *affine* σύνολο.

Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία είναι *affine* σύνολο. Θεωρούμε τυχαία ευθεία l και βαφτίζουμε $S_l$ την αναπαράστασή της ως *affine* σύνολο.

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in S \cap S_l$. Δεδομένου ότι τα $S$ και $S_l$ είναι *affine* σύνολα έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} x_1, x_2 \in S \cap S_l \implies x_1 \in S \wedge x_2 \in S \implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \\ x_1, x_2 \in S \cap S_l \implies x_1 \in S_l \wedge x_2 \in S_l \implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S_l \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x_1, x_2 \in S \cap S_l \implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S \cap S_l \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, η τομή του *affine* συνόλου $S$ με οποιαδήποτε ευθεία είναι *affine* σύνολο.

• Έστω σύνολο $S$, τέτοιο ώστε η τομή του με οποιαδήποτε ευθεία να είναι *affine* σύνολο. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $S$ είναι *affine*.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, κάθε ευθεία είναι *affine* σύνολο. Έστω, το *affine* σύνολο $S_l$, που αντιστοιχεί στην ευθεία $l$ που ορίζεται από δύο τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in S$.

Αφού, είναι γνωστό από υπόθεση πως το σύνολο $S \cap S_l$ είναι *affine*, έχουμε

$$x_1, x_2 \in S \cap S_l \implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S \cap S_l \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

και ως εκ τούτου

$$x_1, x_2 \in S \implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, το σύνολο $S$ είναι *affine*.

**4. A set C is midpoint *convex*, if whenever two points $a, b \in C$, the average or midpoint $(a+b)\ /\ 2 \in C$. Obviously, a *convex* set is midpoint *convex*. Prove that if C is closed and midpoint *convex*, then C is *convex*.**

Έστω σημεία $a, b \in C$ και m ένα οποιαδήποτε σημείο επί του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα σημεία a και b. Ορίζουμε την ακολουθία

$$m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

όπου

$$a_i = \left\{ \begin{array}{ll} a, & \mathrm{i} = 0 \\ a_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} > m \\ m_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} \leq m \end{array} \right\}$$

$$b_i = \left\{ \begin{array}{ll} b, & \mathrm{i} = 0 \\ m_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} > m \\ b_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} \leq m \end{array} \right\}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

- $a_i, b_i, m_i \in C\ \forall i$

Αυτό αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή στο i ως εξής:

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Η πρόταση προς απόδειξη ισχύει για $\mathrm{i} = 0$, καθώς

$$\begin{aligned} a_0 &= a \in C && \text{από υπόθεση} \\ b_0 &= b \in C && \text{από υπόθεση} \\ m_0 &= \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{a+b}{2} \in C && \text{λόγω midpoint covexivity} \end{aligned}$$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Έστω ότι $a_i, b_i, m_i \in C\ \forall i \leq n$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Θα δείξουμε ότι $a_{n+1}, b_{n+1}, m_{n+1} \in C$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m_n > m$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \in C && \text{από επαγωγική υπόθεση} \\ b_{n+1} &= m_n \in C && \text{από επαγωγική υπόθεση} \\ m_{n+1} &= \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \frac{a_n + m_n}{2} \in C && \text{λόγω midpoint covexivity} \end{aligned}$$

• Το σημείο m βρίσκεται πάντα επί του ευθύγραμμου τμήματος $\overleftrightarrow{a_i b_i}$, γεγονός προφανές από τον ορισμό της ακολουθίας $m_i$. Επομένως, ισχύει η ανισότητα $\|m_i - m\| \leq \|a_i - b_i\|$.

Θα αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή στο i, ότι $\|a_i - b_i\| = \|a - b\| \times 2^{-i}$

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Για i = 0, έχουμε: $\|a_0 - b_0\| = \|a - b\| = \|a - b\| \times 2^{-0}$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Έστω ότι $\|a_i - b_i\| = \|a - b\| \times 2^{-i}\ \forall i \leq n$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m_n > m$, όπως και παραπάνω, για i = n + 1, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a_n - m_n\| && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\|a_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right\| && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\|\frac{b_n - a_n}{2}\right\| && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\|\frac{a_n - b_n}{2}\right\| && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a_n - b_n\| \times 2^{-1} && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a - b\| \times 2^{-n} \times 2^{-1} && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a - b\| \times 2^{-(n+1)} && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε $0 \leq \|m_i - m\| \leq \|x - y\| \times 2^{-i}$

Είναι προφανές πως η ακολουθία $\|m_i - m\|$ είναι φθίνουσα και λόγω του ότι είναι και φραγμένη συγκλίνει στο μέγιστο κάτω φράγμα της, δηλαδή

$$\lim_{i \to \infty} \|m_i - m\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{i \to \infty} m_i = m$$

Τέλος, επειδή το σύνολο είναι κλειστό περιέχει τα όρια ακολουθιών στοιχείων του και αφού, όπως δείξαμε $m_i \in C\ \forall i$, συνεπάγεται ότι $m \in C$. Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε σημείο m επί του ευθύγραμμου τμήματος $\overleftrightarrow{\alpha\beta}$. Επομένως

$$a, b \in C \implies m = \theta_1 \times a + \theta_2 \times b \in C\ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, αν ένα σύνολο είναι κλειστό και midpoint *convex*, τότε το σύνολο αυτό είναι *convex*.

**5. Show that the *convex hull* of a set S is the intersection of all *convex* sets that contain S. (The same method can be used to show that the conic, or *affine*, or linear hull of a set S is the intersection of all conic sets, or *affine* sets, or subspaces that contain S.)**

Το *convex hull* ενός συνόλου S, ορίζεται ως εξής:

$$conv(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times s_i \mid s_i \in S,\ n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

• Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η τομή όλων των *convex* υπερσυνόλων του $S$, είναι υπερσύνολο του *convex hull* του.
Έστω *convex* σύνολο $C$, τέτοιο ώστε $C \supseteq S$.

Δεδομένου ότι το σύνολο $C$ είναι *convex*, ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i * c_i \in C \text{ όπου } c_i \in S,\ n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Δεδομένου τώρα ότι $C \supseteq P$, ισχύει

$$s_i \in S \Rightarrow s_i \in C \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times s_i \in C$$

Ως εκ τούτου, προκύπτει $C \supseteq conv(S)$ και αφού αυτό ισχύει για οποιαδήποτε *convex* υπερσύνολο του $S$ συνεπάγεται πως και η τομή αυτών των συνόλων είναι υπερσύνολο του $conv(S)$.

• Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το *convex hull* του συνόλου $S$ είναι υπερσύνολο της τομής όλων των *convex* υπερσυνόλων του.

Είναι προφανές πως $conv(S) \supseteq S$. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $conv(S)$ είναι *convex*, καθώς σε αυτή την περίπτωση θα ανήκει στο σύνολο *convex* υπερσυνόλων του $S$ και ως εκ τούτου θα είναι υπερσύνολο και της τομής τους.

Έστω δύο σημεία $x_1$ και $x_2$, τέτοια ώστε

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times s_i \qquad \in conv(S)$$
$$x_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \times s_i \qquad \in conv(S)$$

Έστω τώρα $\theta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\theta \times x_1 + (1-\theta) \times x_2 &= \theta \times \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times s_i + (1-\theta) \times \sum_{i=1}^{n} \mu_i \times s_i && \Leftrightarrow \\
\theta \times x_1 + (1-\theta) \times x_2 &= \sum_{i=1}^{n} (\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i) \times s_i
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i) &= \theta \times \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-\theta) \times \sum_{i=1} n\mu_i && \Leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} (\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i) &= \theta \times 1 + (1-\theta) \times 1 && \Leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{n} (\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i) &= 1
\end{aligned}$$

και

$$\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i \geq 0 \; \forall i \in \{1 \ldots n\}$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα $\theta \times x_1 + (1-\theta) \times x_2 \in conv(S)$ και άρα το σύνολο $conv(S)$ είναι *convex* και ως εκ τούτου είναι και υπερσύνολο της τομής των *convex* υπερσυνόλων του $S$.

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\left.\begin{aligned}
conv(S) \supseteq \bigcap C \text{ όπου C οποιοδήποτε } \textit{convex} \text{ υπερσύνολο του S} \\
conv(S) \subseteqq \bigcap C \text{ όπου C οποιοδήποτε } \textit{convex} \text{ υπερσύνολο του S}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$conv(S) \equiv \bigcap C \text{ όπου C οποιοδήποτε } \textit{convex} \text{ υπερσύνολο του S}$$

## 6. What is the distance between two parallel hyperplanes $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b_1\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b_2\}$ ?

Τα δύο hyperplanes, έστω $B_1$ και $B_2$ είναι μεταξύ τους παράλληλα, άρα έχει νόημα να μελετήσουμε την απόσταση μεταξύ τους. Αν δεν ήταν παράλληλα, η απόσταση μεταξύ των $B_1$ και $B_2$ θα ήταν 0, αφού θα υπήρχε σημείο τομής ανάμεσα τους.

Έστω ένα σημείο $x_1$ που ανήκει στο $B_1$ και έστω μία ευθεία Ε, η οποία διέρχεται από το $x_1$ και είναι κάθετη στο $B_1$.

Η Ε τέμνει το $B_2$ στο σημείο $x_2$ επίσης κάθετα, γιατί τα δύο hyperplanes είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Αρκεί να βρούμε την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων $x_1$ και $x_2$, δηλαδη να βρούμε την $\|x_1 - x_2\|_2$.

Η ευθεία Ε έχει ίδια κατεύθυνση με το α, γιατί και το α και η ευθεία Ε είναι κάθετα στα δύο hyperplanes, συνεπώς την ευθεία μπορούμε να την γράψουμε ως: $\alpha y + x_1$.

Η τομή της Ε με το $B_2$ είναι

$$\alpha^T \times x = b_2 \Leftrightarrow \alpha^T \times (\alpha y + x_1) = b_2 \Leftrightarrow \alpha^T \times \alpha \times y + \alpha^T \times x_1 = b_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \tfrac{b_2 - \alpha^T \times x_1}{\alpha^T \times \alpha} \Leftrightarrow y = \tfrac{b_2 - b_2}{\alpha^T \times \alpha}$$

Άρα

$$x_2 = \alpha \times y + x_1 \Leftrightarrow x_2 = a \times \tfrac{b_2 - b_1}{\alpha^T \times \alpha} + x_1.$$

Συνεπώς

$$\|x_1 - x_2\|_2 = \left\|x_1 - \tfrac{b_2 - b_1}{\alpha^T} - x_1\right\|_2 = \left\|-\tfrac{b_2 - b_1}{\alpha^T}\right\|_2 = \tfrac{|b_2 - b_1|}{\|\alpha\|_2}$$

**7. Let a and b be distinct points in $\mathbb{R}^n$ . Show that the σύνολο of all points that are closer (in Euclidean norm) to a than b is a halfspace.**

Έστω $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-a\|_2 \leq \|x-b\|_2\}$ το σύνολο των σημείων $x \in \mathbb{R}$, τα οποία βρίσκονται πιο κοντά στο a, σε σχέση με το b βάσει Ευκλείδιας Νόρμας.

$$
\begin{aligned}
\|x-a\|_2 \leq \|x-b\|_2 & \quad \Leftrightarrow \\
\|x-a\|_2^2 \leq \|x-b\|_2^2 & \quad \Leftrightarrow \\
(x-a)^T \times (x-a) \leq (x-b)^T \times (x-b) & \quad \Leftrightarrow \\
x^T \times x - x^T \times a - a^T \times x + a^T \times a \leq x^T \times x - x^T \times b - b^T \times x + b^T \times b & \quad \Leftrightarrow \\
2 \times b^T \times x - 2 \times a^T \times x \leq b^T \times b - a^T \times a & \quad \Leftrightarrow \\
(2 \times (b-a))^T \times x \leq b^T \times b - a^T \times a &
\end{aligned}
$$

Θέτοντας

$$
\begin{aligned}
c &= 2 \times (b-a) \\
d &= b^T \times b - a^T \times a
\end{aligned}
$$

λαμβάνουμε την ανισότητα $c^T \times x \leq d$, η οποία ορίζει έναν κλειστό halfspace.