Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα
Τέταρτη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Νοέμβριος 2019

1. Consider the problem

$$\min_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} 2\cdot x_1 + 3\cdot |x_2 - 10|$$
$$s.t.$$
$$|x_1 + 2| + |x_2| \leq 5$$

and reformulate it a linear programming problem.

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} |x| &\geq +x \\ |x| &\geq -x \end{aligned}$$

Θέτουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} a_1 &= |x_2 - 10| \\ a_2 &= |x_1 + 2| \\ a_3 &= |x_2| \end{aligned}$$

και προσθέτουμε τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} a_1 &\geq +x_2 - 10 \\ a_1 &\geq -x_2 + 10 \\ a_2 &\geq +x_1 + 2 \\ a_2 &\geq -x_1 - 2 \\ a_3 &\geq +x_2 \\ a_3 &\geq -x_2 \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, το δοθέν πρόβλημα εκφράζεται ως πρόβλημα γραμμικου προγραμματισμού ως εξής:

$$\min_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} 2\cdot x_1 + 3\cdot a_1$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} a_1 &\geq +x_2 - 10 \\ a_1 &\geq -x_2 + 10 \\ a_2 &\geq +x_1 + 2 \\ a_2 &\geq -x_1 - 2 \\ a_3 &\geq +x_2 \\ a_3 &\geq -x_2 \\ a_2 &+ a_3 \leq 5 \end{aligned}$$

2. (Road lighting) Consider a road divided in n segments that is illuminated by m lamps. Let p_j be the power of the jth lamp. The illumination I_i of the ith segment is assumed to be $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot p_j$ where a_{ij} are known coefficients. Let I_i^* be the desired illumination of road i. We are interested in choosing the lamp powers p_j so that the illuminations I_i are close to the desired I_i^*. Provide a reasonable linear programming formulation of this problem.

Έστω δρόμος χωρισμένος σε n κομμάτια.

Για να καταφέρουμε στο i κομμάτι του δρόμου ο υπάρχον φωτεισμός I_i να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στον επιθυμητό φωτισμό I_i^* πρέπει η διαφορά των δύο φωτεισμών να είναι η μικρότερη δυνατή.

Συνεπώς, πρεπει να διαλέξουμε:

$$\min \left|I_i^* - I_i\right| \text{ για } 1 \leq i \leq n$$

Συνολικά, για ολόκληρο τον δρόμο πρέπει:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left|I_i^* - I_i\right|$$

κι επειδή $I_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot p_j$ η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left|I_i^* - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot p_j\right|$$

Η μεταβλητή που ψάχνουμε είναι τα p_j.

Οι περιορισμοί είναι (για προφανείς λόγους):

$$p_j \geq 0 \text{για } 1 \leq j \leq m$$

3. Consider a school district with I neighborhoods, J schools and G grades at each school. Each school j has a capacity C_{jg} for grade g. In each neighborhood i, the student population of grade i is S_{ig} . Finally the distance of school j from neighborhood i is d_{ij} . Formulate a linear programming problem whose objective is to assign all students to schools, while minimizing the total distance traveled by all students. (You may ignore the fact that numbers of students must be integer).

Στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η απόσταση που διανύουν οι μαθητές για να φτάσουν στο σχολείο τους.

Οι περιορισμοί εδώ είναι:
- κάθε σχολείο μπορεί να δεχτεί συγκεκριμένο αριθμό μαθητών
- όλα τα παιδιά πρέπει να πηγαίνουν στο σχολείο.

Η κωδικοποίηση των απαραίτητων μεγεθών για το πρόβλημα είναι η εξής:
- I γειτονιές
- J σχολεία
- G τάξεις
- C_{jg} χωρητικότητα μαθητών στο σχολείο j στην τάξη g
- S_{ig} πληθυσμός παιδιών στη γειτονιά i στην τάξη g
- d_{ij} απόσταση γειτονιάς i από σχολείο j
- k_{igj} οι μαθητές τάξης g που μένουν στη γειτονιά i και πηγαίνουν στο σχολείο j

Θέλουμε να μειωθεί η συνολική απόσταση που διανύουν οι μαθητές, άρα:

$$\min \sum_{\forall i \in I} \sum_{\forall j \in J} \sum_{\forall g \in G} k_{igj} \cdot d_{ij}$$

Υπό τους περιορισμούς:
- : το σχολείο j μπορεί να δεχτεί μέχρι C_{jg} μαθητές στην τάξη g

$$\sum_{\forall i \in I} k_{igj} \leq C_{jg} \ \forall g \in G \ \forall j \in J$$

- Κάθε παιδί πρέπει να πηγαίνει σχολείο:

$$\sum_{\forall j \in J} k_{igj} = S_{ig} \ \forall g \in G \ \forall i \in I$$

- Δε μπορεί η αντιστοίχιση μαθητών σε σχολεία να είναι αρνητική:

$$k_{igj} \geq 0$$

4. Consider a set P described by linear inequality constraints

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T \cdot x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

A ball with center y and radius r is defined as the set of all points within distance r from y. We are interested in finding a ball with the largest possible radius, which is entirely contained within the set P. Provide a linear programming formulation of this problem.

Μια σφαίρα, η οποία βρίσκεται εξ ολοκλήρου εντός του συνόλου

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T \cdot x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

πρέπει να συμμορφώνεται στους εξής περιορισμούς:

1. Το κέντρο της σφαίρας πρέπει να ανήκει στο συνόλο P.
2. Η απόσταση, του κέντρου της σφαίρας από οποιοδήποτε ύπερεπίπεδο, αντιστοιχεί σε μία από τις εξισώσεις $a_i^T \cdot x = b_i,\ i = 1, \ldots, m$, που περιγράφουν το σύνολο P, πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με r.

Η απόσταση, μεταξύ ενός σημείου p και ενός ύπερεπιπέδου $\kappa \cdot x + \lambda$, δίνεται από την έκφραση

$$\frac{\left|\kappa \cdot p + \lambda\right|}{\|\kappa\|}$$

Λοιπόν, μπορούμε να εκφράσουμε μαθηματικά τους παραπάνω περιορισμούς ως εξής:

$$a_i^T \cdot c \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

$$\frac{\left|a_i^T \cdot c - b_i\right|}{\left\|a_i^T\right\|} \geq r \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{b_i - a_i^T \cdot c}{\left\|a_i^T\right\|} \geq r,\ i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

Τέλος, ως αντικειμενική συνάρτηση επιλέγουμε τη σχέση

$$\max_{c,r} r$$

Συνοψίζοντας, το δοθέν πρόβλημα εκφράζεται ως πρόβλημα γραμμικου προγραμματισμού ως εξής:

$$\max_{c,r} r$$

$$s.t.$$

$$a_i^T \cdot c \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m$$

$$\frac{b_i - a_i^T \cdot c}{\left\|a_i^T\right\|} \geq r,\ i = 1, \ldots, m$$