Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα
Πέμπτη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Δεκέμβριος 2019

1. Consider the linear programming problem

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_2 \\
\textbf{s.t.} \quad & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\
& 3 \cdot x_1 + \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 \geq 3 \\
& -x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 \leq 0 \\
& x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Write down the corresponding dual problem.

Θέτω:

$$
\begin{aligned}
c &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
b &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Το δυικό πρόβλημα θα είναι:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3 \cdot p_2 + 6 \cdot p_3 \\
\text{s.t.} \quad & p_1 \leq 0 \\
& p_2 \geq 0 \\
& p_3 \quad free \\
& 2 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 - p_3 \geq 1 \\
& 3 \cdot p_1 + p_2 - p_3 \leq -1 \\
& -p_1 + 4 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 \leq 0 \\
& p_1 - 2 \cdot p_2 + p_3 = 0
\end{aligned}
$$

2. Consider the primal problem

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T \cdot x \\ \textbf{s.t.} \quad & A \cdot x \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Form the dual problem and convert it into an equivalent minimization problem. Derive a set of conditions on the matrix A and the vectors b,c under which the dual is identical to the primal.

Το δυικό πρόβλημα είναι το εξής:

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T \cdot b \\ \text{s.t.} \quad & p^T \cdot A \leq c^T \\ & p \geq 0 \end{aligned}$$

Το ισοδύναμο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του δυικού προβλήματος που μολις αναφέραμε είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & -p^T \cdot b \\ \text{s.t.} \quad & -p^T \cdot A \geq -c^T \\ & p \geq 0 \end{aligned}$$

Για να μπορεί το παραπάνω πρόβλημα ελαχιστοποίησης να είναι ισοδύναμο με το αρχικό πρέπει να ισχύουν τα εξής:

- $b = -c$
- ο πίνακας A πρέπει να είναι αντισυμμετρικός

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι αντισυμμετρικός είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, ο οποίος είναι ίσος με τον αρνητικό του ανάστροφο, δηλαδή

$$A = -A^T$$

Αν ισχύουν τα παρπάνω, ισχύει και ότι:

$$\begin{aligned} -p^T \cdot A \geq -c^T &\Leftrightarrow \\ -A^T \cdot p \geq -c &\Leftrightarrow \\ A \cdot p \geq b & \end{aligned}$$

και επίσης ισχύει και ότι:

$$\begin{aligned} -p^T \cdot b &= \\ -p^T \cdot (-c) &= \\ p^T \cdot c &= \\ c^T \cdot p & \end{aligned}$$

Συνεπώς το ισοδύναμο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του δυικού ταυτίζεται με το αρχικό πρόβλημα αν ισχύουν οι παραπάνω δύο ειδικές συνθήκες.

3. The purpose of this exercise is to show that solving linear programming problems is no harder than solving systems of linear inequalities. Suppose that we are given a subroutine which, given a system of linear inequalities either produces a solution or decides that no solution exists. Construct a simple algorithm that uses a single call to this subroutine and which finds an optimal solution to any linear programming problem that has an optimal solution.

Έστω το εξής πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} \max \quad & c \cdot x \\ \text{s.t.} \quad & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

και το δϋικό του

$$\begin{aligned} \min \quad & y \cdot b \\ \text{s.t.} \quad & A^T \cdot y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Ορίζουμε το παρακάτω σύστημα γραμμικών ανισώσεων

$$\begin{aligned} A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ A^T \cdot y &\leq c \\ y &\geq 0 \\ c \cdot x &\geq y \cdot b \end{aligned}$$

- Οι 4 πρώτες ανισώσεις εξασφαλίζουν, όπως είναι προφανές, την εφικτότητα των λύσεων.
- Η τελευταία ανίσωση εξασφαλίζει τη βελτιστότητα των λύσεων.

  Από το Θεώρημα Ασθενούς Δϋικότητας γνωρίζουμε ότι αν τα x και y αποτελούν δυνατές λύσεις του πρωτεύοντος και του δϋικού προβλήματος αντίστοιχα τότε ισχύει $c \cdot x \leq y \cdot b$.

  Επομένως η ανίσωση $c \cdot x \geq y \cdot b$ ισχύει αποκλειστικά στην περίπτωση $c \cdot x = y \cdot b$, γεγονός που συνεπάγεται, λόγω του Θεώρημα Ισχυρής Δϋικότητας, ότι τα x και y αποτελούν βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δϋικού προβλήματος αντίστοιχα.

Έτσι, δοθέντος οποιουδήποτε προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού αρκεί να ορίσουμε το αντίστοιχο σύστημα γραμμικών ανισώσεων, όπως παραπάνω, και να καλέσουμε την υπορουτίνα μας επί αυτού.

Αν η υπορουτίνα αποφανθεί ότι δεν υπάρχει λύση στο σύστημα γραμμικών ανισώσεων, αυτό συνεπάγεται ότι είτε δεν υπάρχει εφικτή λύση για το δοθέν γραμμικό προβλήμα ή ότι δεν υπάρχει βέλτιση λύση.

Διαφορετικά επιστρέφονται οι βέλτιστες λύσεις τόσο του πρωτεύοντος όσο και του δϋικού προβλήματος.

4. Let A be a symmetric matrix. Consider the linear program

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T \cdot x \\ \textbf{s.t.} \quad & A \cdot x \geq c \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Prove that if $x*$ satisfies $A \cdot x* = c$ and $x* \geq 0$ then $x*$ is an optimal solution.

Αν υποθέσουμε ότι $x*$ ικανοποιεί το $A \cdot x* = c$ και ότι $x* \geq 0$, πρέπει να αποδείξουμε ότι το $x*$ είναι βέλτιστη λύση.

Ο πίνακας A είναι συμμετρικός (άρα και τετραγωνικός) και συνεπώς ισχύει ότι είναι ίσος με τον ανάστροφό του

$$A = A^T$$

Σχηματίζουμε το δυικό του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ως εξής

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T \cdot x \\ \text{s.t.} \quad & p^T \cdot A \leq c \\ & p \geq 0 \end{aligned}$$

Αν η βέλτιστη λύση του δυικού $p*$ είναι ίδια με τη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος, $x*$, τότε ισχυεί ότι

$$p* = x* \geq 0$$

Θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & p*^T \cdot A = A^T \cdot p* \Leftrightarrow \\ & p*^T \cdot A = A \cdot p* \Leftrightarrow \\ & p*^T \cdot A = A \cdot x* \Leftrightarrow \\ & p*^T \cdot A = c \end{aligned}$$

Επίσης, ισχυει ότι

$$\begin{aligned} & c^T \cdot x* = x*^T \cdot c \Leftrightarrow \\ & c^T \cdot x* = p*^T \cdot c \end{aligned}$$

Ξέρουμε ότι αν $x*$ και $p*$ είναι εφικτές λύσεις στο αρχικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και στο δυικό του αντίστοιχα και $p*^T \cdot b = c^T \cdot x*$, τότε τα $x*$ και τα $p*$ είναι οι βέλτιστες λύσεις.

Συνεπώς, η $x*$ είναι βέλτιστη λύση για το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

5. Write down the proof of the *Complimentary Slackness Theorem*.

Έστω το πρωτεύον πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max \quad & c \cdot x \\ \text{s.t.} \quad & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

και το δϋικό του

$$\begin{aligned} \min \quad & b \cdot y \\ \text{s.t.} \quad & A^T \cdot y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω x και y εφικτές λύσεις στο πρωτεύον και στο δϋικό πρόβλημα αντίστοιχα.

Το x και το y αποτελούν βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δϋικού αν και μόνο αν ισχύει ότι:

- $(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j) \cdot y_i = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$
- $(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot y_i - c_j) \cdot x_j = 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Δεδομένου ότι οι λύσεις x και y είναι εφικτές έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} A^T \cdot y \geq c \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$$x^T \cdot A^T \cdot y \geq x^T \cdot c = c \cdot x$$

$$\left.\begin{matrix} A \cdot x \leq b \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$$y^T \cdot A \cdot x \leq y^T \cdot b = b \cdot y$$

Από τα παραπάνω, δεδομένου ότι $x^T \cdot A^T \cdot y$ είναι ένας 1×1 πίνακας και ως εκ τούτου $x^T \cdot A^T \cdot y = (x^T \cdot A^T \cdot y)^T = y^T \cdot A \cdot x$ προκύπτει

$$c \cdot x = x^T \cdot c \leq x^T \cdot A^T \cdot y = y^T \cdot A \cdot x \leq y^T \cdot b = b \cdot y$$

Βάσει Ισχυρής Δϋικότητας, τα x και y αποτελούν βέλτιστες λύσεις στα αντίστοιχα γραμμικά προβλήματα αν και μόνο αν $c \cdot x = b \cdot y$ και άρα αν και μόνο αν

- $x^T \cdot c = x^T \cdot A^T \cdot y \Leftrightarrow x \cdot (A^T \cdot y - c) = 0$
- $y^T \cdot A \cdot x = y^T \cdot b \Leftrightarrow y \cdot (b - A \cdot x) = 0$

Σημειώνουμε ότι

$$0 = x \cdot (A^T \cdot y - c) = \sum_{j=1}^{n}(x_j \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i - c_j))$$

και δεδομένου ότι $x_j \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i - c_j \geq 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$x_j \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i - c_j) \geq 0 \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι υποχρεωτικά ίσος με 0 που αντιστοιχεί στην πρώτη προϋπόθεση του Θεωρήματος.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$y \cdot (b - A \cdot x) = 0 \Leftrightarrow y_i \cdot (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$