

# SUDOKU

Σιώρος Βασίλειος    Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Ιανουάριος, 2020

# Εισαγωγή(1)

- Το Sudoku είναι ένα πάζλ βασισμένο στη λογική.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Figure: Παράδειγμα κλασσικού SUDOKU  $9 \times 9$

- Στόχος του παιχνιδιού είναι ο παίκτης να συμπληρώσει τα κενά κελιά ενός ημιτελώς συμπληρωμένου πίνακα.

## Ορισμός 1: SUDOKU

Οι κανόνες για το κλασσικό SUDOKU σε έναν πίνακα μεγέθους  $n \times n$  με υποπίνακες μεγέθους  $m \times m$ , όπου  $m = \sqrt{n}$  είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους  $n$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους  $n$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους  $m \times m$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .

- Οι αριθμοί μπορούν να αντικατασταθούν με οποιαδήποτε ομάδα συμβόλων, χωρίς να προκαλέσουν καμμία επίπτωση στην επίλυση, στη δημιουργία ή στη μαθηματική μοντελοποίηση του παζλ.
- Υπάρχουν διαθέσιμα SUDOKU παζλ με βάση κινέζικα σύμβολα, κινέζικους αριθμούς και σύμβολα που αναπαριστούν μερίδες σουσί.

- Δημιουργός του εν λόγω παιχνιδιού υπήρξε ο Αμερικανός αρχιτέκτονας Howard Garns (Μάρτιος 1905 - Οκτώβριος 1989) το 1979.
- Το παιχνίδι αρχικά ονομάστηκε “Number Place” και δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Dell Pencil Puzzles & Word Games.
- Ένα χρόνο μετά το παιχνίδι έγινε ιδιαίτερα δημοφιλές στην Ιαπωνία και μετονομάστηκε σε “suji wa dokushin ni kagiru” (SUDOKU).



Figure: Howard Garns

- Το SUDOKU έγινε ιδιαίτερα αγαπητό στην Ιαπωνία, με τις μηνιαίες πωλήσεις SUDOKU περιοδικών να ανέρχονται στα 600.000 αντίτυπα κάθε μήνα.
- Οι Ιάπωνες υιοθέτησαν το SUDOKU ως συνήθεια για δύο βασικούς λόγους:
  - η γλώσσα τους δεν ήταν κατάλληλη για την ανάπτυξη σταυρόλεξων, οπότε υστερούσαν σε αυτά και
  - συνηθίζουν να μετακινούνται με τρένα και λεωφορεία.

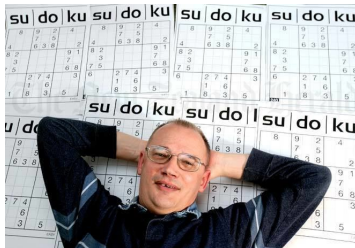


Figure: Wayne Gould

- Ο Wayne Gould , Νεοζηλανδός δικαστής, έφερε πίσω στον Δυτικό κόσμο το SUDOKU.
- Το 1997 βρισκόταν στο Τόκιο και ανακάλυψε ένα SUDOKU.
- Έφτιαξε το πρώτο πρόγραμμα που δημιουργούσε SUDOKU παζλ.



Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε σε βάθος:

- Μαθηματικές μεθοδολογίες για την επίλυση sudoku.
  - Μοντελοποίηση του προβλήματος της επίλυσης του παζλ ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
  - Επαλήθευση με χρήση Python .
  - Παραλλαγές του κλασσικού sudoku.
- Μαθηματικές τεχνικές για τη δημιουργία sudoku.
  - Κριτήρια sudoku παζλ.
  - Δημιουργία sudoku με bruteforce.
  - Δημιουργία sudoku από προγενέστερο παζλ.
  - Δημιουργία SUDOKU παζλ βάση λογικών στρατηγικών .
- Επίπεδα δυσκολίας SUDOKU παζλ
  - Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας στην επίλυση SUDOKU παζλ από τον άνθρωπο
  - Στατιστική προσέγγιση
  - Επίπεδο δυσκολίας και δεδομένοι όροι στο παζλ.

- Μοντελοποίηση του προβλήματος της επίλυσης του παζλ ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
- Επαλήθευση με χρήση Python .
- Παραλλαγές του κλασσικού sudoku.

- Η μαθηματική μοντελοποίηση καθιστά δυνατή την εύρεση της λύσης του παζλ, αν υπάρχει, από έναν μαθηματικό αλγόριθμο.
- Το πρόβλημα επίλυσης ενός SUDOKU παζλ είναι πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών.

- Ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών ορίζεται από δύο σύνολα:
  - το σύνολο μεταβλητών,  $X_1, X_2, \dots, X_t$ ,
  - το σύνολο περιορισμών,  $C_1, C_2, \dots, C_z$
- Κάθε μεταβλητή  $X_i$  με  $1 \leq i \leq t$  λαμβάνει τιμές από ένα πεδίο  $D_i$ .
- Κάθε περιορισμός  $C_j$  με  $1 \leq j \leq z$  αφορά κάποιο υποσύνολο των μεταβλητών και καθορίζει ποιος είναι ο επιτρεπτός συνδυασμός τιμών για αυτό το υποσύνολο μεταβλητών.

- Έστω, ο  $n \times n$  πίνακας SUDOKU και οι υποπίνακες του μεγέθους  $m \times m$ .
- Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης ως εξής:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{αν το κελι } (i,j) \text{ του πίνακα περιέχει τον ακέραιο } k \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} & \min \quad 0^T x \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n \end{aligned}$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε γραμμή του πίνακα

# Μαθηματική μοντελοποίηση(5)

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος  $k$  σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in 0, 1$$

# Επαλήθευση μαθηματικής μοντελοποίησης με Python



# Μαθηματική μοντελοποίηση παραλλαγμένων SUDOKU παζλ

- Υπάρχουν παραλλαγές του κλασσικού παζλ SUDOKU,
- Η επίλυσή τους είναι πιο απαιτητική σε σχέση με το κλασσικό παζλ.
- Η μοντελοποίησή του δε διαφέρει ιδιαίτερα από τη μοντελοποίηση για τα κλασσικά παζλ SUDOKU.

- Το SUDOKU X είναι μία παραλλαγή του κλασσικού SUDOKU.
- Έχει τον επιπλέον κανόνα ότι οι δύο μεγάλες διαγώνιοι του πίνακα πρέπει να περιέχουν κάθε ψηφίο από το 1 μέχρι το  $n$  ακριβώς μία φορά η κάθε μία.

# SUDOKU X

4		3						
							6	
	2	8		6	3		9	
					1	2		
	1	7		9				3
				3		5		
	7							

**Figure:** Παράδειγμα ενός SUDOKU X παζλ. Οι δύο μεγάλες διαγώνιοι είναι σημειωμένες με μωβ χρώμα. Η κάθε μία πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9 ακριβώς μία φορά τον καθέναν.

**Ορισμός 2: SUDOKU X**

Οι κανόνες για το SUDOKU X σε έναν πίνακα μεγέθους  $n \times n$  με υποπίνακες μεγέθους  $m \times m$ , όπου  $m = \sqrt{n}$  είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους  $n$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους  $n$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους  $m \times m$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .
- Η διαγώνιος του πίνακα που ξεκινά από το κελί  $(1,1)$  και καταλήγει στο κελί  $(n,n)$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .
- Η διαγώνιος του πίνακα που ξεκινά από το κελί  $(1,n)$  και καταλήγει στο κελί  $(n,1)$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε γραμμή του πίνακα

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος  $k$  σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{r=1}^n x_{rrk} = 1 \quad k = 1 : 9$$

μόνο ένα  $k$  στην κύρια διαγώνιο

$$\sum_{r=1}^n x_{r(n+1-r)k} = 1 \quad k = 1 : 9$$

μόνο ένα  $k$  στη δευτερεύουσα διαγώνιο

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

# Four Square SUDOKU

- Το Four Square SUDOKU είναι μία παραλλαγή του κλασσικού SUDOKU.
- Υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε παζλ  $9 \times 9$ .
- Ο επιπλέον κανόνας εδώ σχετίζεται με τέσσερις επιπλέον υποπεριοχές στον πίνακα μεγέθους  $3 \times 3$ . Στίς περιοχές αυτές πρέπει να περιέχονται όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από το 1 ως το 9.



# Four Square SUDOKU

		7			4			1
			2	8				
2		6			9			
	5					2		6
	1			2			9	
6		4					7	
			8			9		2
				7	2			
8			4			6		

**Figure:** Παράδειγμα ενός Four Square SUDOKU παζλ. Οι τέσσερις περιοχές είναι σημειωμένες με μωβ χρώμα. Η κάθε μία πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9 ακριβώς μία φορά τον καθέναν.

## Ορισμός 3: Four Square SUDOKU

Οι κανόνες για το Four Square SUDOKU σε έναν πίνακα μεγέθους  $9 \times 9$  με υποπίνακες μεγέθους  $3 \times 3$  είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους  $3 \times 3$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπεριοχή μεγέθους  $3 \times 3$  να περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 ως το 9.

# Four Square SUDOKU

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε γραμμή του πίνακα

# Four Square SUDOKU

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος  $k$  σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{r=i}^{i+2} \sum_{c=j}^{j+2} x_{rck} = 1 \quad i = 2, 6; \quad j = 2, 6; \quad k = 1 : 9$$

μόνο ένας ακέραιος  $k$  σε κάθε υποπεριοχή

# Four Square SUDOKU

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in 0, 1$$

# Four Pyramids SUDOKU

- Το Four Pyramids SUDOKU είναι μία παραλλαγή του κλασσικού SUDOKU.
- Υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε παζλ  $9 \times 9$ .
- Η παραλλαγή είναι παρόμοια με την παραλλαγή στο Four Square SUDOKU , με τη διαφορά ότι εδώ οι επιπλέον υποπεριοχές του πίνακα έχουν τριγωνική μορφή.

# Four Pyramids SUDOKU

				5				
			1		6			
		4				1		
			4	6	8			
		2				6		
	9						3	
		6	7		9	4		
	8						6	
	7						2	

**Figure:** Παράδειγμα ενός Four Pyramids SUDOKU παζλ. Οι τέσσερις τριγωνικές περιοχές είναι σημειωμένες με γκρι χρώμα. Η κάθε μία πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9 ακριβώς μία φορά τον καθέναν.

## Ορισμός 4: Four Pyramids SUDOKU

Οι κανόνες για το Four Pyramids SUDOKU σε έναν πίνακα μεγέθους  $9 \times 9$  με υποπίνακες μεγέθους  $3 \times 3$  είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους  $3 \times 3$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπεριοχή μεγέθους  $3 \times 3$  να περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 ως το 9.



- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε γραμμή του πίνακα

# Four Pyramids SUDOKU

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος  $k$  σε κάθε υποπίνακα

# Four Pyramids SUDOKU

$$\sum_{r=1}^3 \sum_{c=3+r}^{9-r} x_{rck} = 1 \quad k = 1 : 9$$

η πρώτη πυραμίδα να έχει μόνο ένα k

$$\sum_{c=1}^3 \sum_{r=1+c}^{7-c} x_{rck} = 1 \quad k = 1 : 9$$

η δεύτερη πυραμίδα να έχει μόνο ένα k

$$\sum_{r=7}^9 \sum_{c=11-r}^{r-7} x_{rck} = 1 \quad k = 1 : 9$$

η τρίτη πυραμίδα να έχει μόνο ένα k

$$\sum_{c=7}^9 \sum_{r=13-c}^{c-1} x_{rck} = 1 \quad k = 1 : 9$$

η τέταρτη πυραμίδα να έχει μόνο ένα k

# Four Pyramids SUDOKU

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

- Το Position SUDOKU είναι μία παραλλαγή του κλασσικού SUDOKU.
- Υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε παζλ  $9 \times 9$ .
- Τα κελιά  $(1,1)$  σε όλους τους  $3 \times 3$  υποπίνακες πρέπει να περιέχουν όλους τους ακέραιους από το 1 ως το 9 ακριβώς μια φορά, αντίστοιχα τα κελιά  $(1,2)$  όλων των υποπινάκων κοκ.

# Position SUDOKU

		6	7				8	1
	4					9		
	8				3			
	5			7				
		3	5		6	7		
				3			5	
			8				6	
		2					9	
5	6				9	3		

**Figure:** Παράδειγμα ενός Position SUDOKU παζλ. Κάθε κελί με το ίδιο χρώμα πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9 ακριβώς μία φορά τον καθέναν.

## Ορισμός 5: Position SUDOKU

Οι κανόνες για το Position SUDOKU σε έναν πίνακα μεγέθους  $9 \times 9$  με υποπίνακες μεγέθους  $3 \times 3$  είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους  $3 \times 3$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε κελί  $(i,j)$  με  $i=1:9$  και  $j=1:9$  σε όλους τους υποπίνακες  $3 \times 3$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε γραμμή του πίνακα



$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος  $k$  σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{i=c}^9 \sum_{j=z}^9 x_{ijk} = 1 \quad c = 1 : (3) : 9 \quad j = 1 : (3) : 9 \quad k = 1 : 9$$

μόνο ένα  $k$  σε κελιά υποπινάκων με ίδιες συντεταγμένες

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in 0, 1$$

# Three Magic SUDOKU

- Το Three Magic SUDOKU είναι μία παραλλαγή του κλασσικού SUDOKU.
- Υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε παζλ  $9 \times 9$ .
- Στα σημειωμένα  $3 \times 3$  κουτιά (magic) οι 3 αριθμοί σε κάθε στήλη και οι 3 αριθμοί σε κάθε γραμμή αν αθροιστούν δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

# Three Magic SUDOKU

	8							
3	5				7			
		9			1			
						6	4	
	1	4						
			3			5		
			9				1	6
							8	

**Figure:** Παράδειγμα ενός Three Magic SUDOKU παζλ. Οι 3 αριθμοί σε κάθε στήλη και οι 3 αριθμοί σε κάθε γραμμή στα πράσινα  $3 \times 3$  κουτιά πρέπει αν προτεθούν να δίνουν τον ίδιο αριθμό.

## Ορισμός 6: Three Magic SUDOKU

Οι κανόνες για το Three Magic SUDOKU σε έναν πίνακα μεγέθους  $9 \times 9$  με υποπίνακες μεγέθους  $3 \times 3$  είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους  $3 \times 3$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Σε κάθε μαγικό κουτί το άθροισμα των στηλών και των γραμμών πρέπει να είναι το ίδιο.

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα  $k$  σε κάθε γραμμή του πίνακα

# Three Magic SUDOKU

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος  $k$  σε κάθε υποπίνακα

.....

# Three Magic SUDOKU

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in 0, 1$$



- Κριτήρια sudoku παζλ.
- Δημιουργία sudoku με bruteforce.
- Δημιουργία sudoku από προγενέστερο παζλ.
- Δημιουργία SUDOKU παζλ βάση λογικών στρατηγικών .

- Ενα παζλ SUDOKU οφείλει να πληρεί ορισμένες βασικές προϋποθέσεις,
  - για να έχει λύση
  - για να επιθυμεί κάποιος να ενασχοληθεί με αυτό.
- Τα κριτήρια είναι:

- Να έχει μοναδική λύση.
- Να μην απαιτεί από τον λύτη να μπαίνει σε διαδικασία να μαντέψει αν η λύση είναι σωστή ή όχι μία δεδομένη στιγμή.
- Να κατατάσσεται ορθά σε επίπεδα δυσκολίας.
- Να έχει την ίδια διαβαθμωση δυσκολίας κατά τη διαδικασία επίλυσής του.
- Να έχει απλή μορφή.
- Να είναι συμμετρικό.

# Δημιουργία SUDOKU παζλ με bruteforce

- Σε έναν πίνακα μεγέθους  $n \times n$  τοποθετούμε τυχαία αριθμούς από το 1 ως το  $n$  στα κελιά του.
- Ελέγχουμε αν ο τελικός πίνακας συμμορφώνεται με τους κανόνες του SUDOKU.
- Η τεχνική αυτή δημιουργεί περίπου  $n^n$  διαφορετικούς πίνακες και φυσικά δε συμμορφώνονται όλοι τους με τους κανόνες του SUDOKU.

# Δημιουργία SUDOKU παζλ από προγενέστερα παζλ

- Δημιουργία νέων παζλ βασισμένοι σε κάποιο άλλο SUDOKU παζλ.
- Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να διατυπώσουμε μερικούς μαθηματικούς ορισμούς και θεωρήματα.

## Ορισμός 7: SUDOKU πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $S$  είναι SUDOKU πίνακας αν ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν το μέγεθος του πίνακα είναι  $n$ , τότε θα πρέπει να ισχύει ότι  $n = m^2$ , όπου το  $m$  μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός.
- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους  $n$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους  $n$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους  $m \times m$  να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το  $n$ .

# Δημιουργία SUDOKU παζλ από προγενέστερα παζλ

- Μία πολύ απλή προσέγγιση είναι από ένα παζλ  $S$  να καταλήξουμε σε ένα νέο παζλ  $\bar{S}$  αντιστρέφοντας τον πίνακα  $S$ .

## Ορισμός 8: Θεώρημα

Αν ο  $S$  είναι ένας πίνακας SUDOKU, τότε και ο  $S^T$  είναι πίνακας SUDOKU.



# Δημιουργία SUDOKU παζλ από προγενέστερα παζλ

- Μία εξίσου έξυπνη ιδέα είναι να αλλάξουμε τις γραμμές με τις στήλες από ένα παζλ  $S$  και να καταλήξουμε σε ένα νέο παζλ  $\bar{S}$ .
- Με αυτόν τον τρόπο παράγουμε περισσότερα από ένα παζλ.

## Ορισμός 9: Θεώρημα

Αν  $S$  είναι ένας πίνακας SUDOKU, τότε ένας νέος πίνακας SUDOKU  $\bar{S}$  μπορεί να δημιουργηθεί αλλάζοντας τη θέση σε γραμμές και στήλες σε επίπεδο υποπίνακα.

# Δημιουργία SUDOKU παζλ από προγενέστερα παζλ

- Άλλη μία προσέγγιση είναι να αλλάξουμε τους αριθμούς του παζλ.

## Ορισμός 10: Θεώρημα

Αν  $S$  είναι ένας πίνακας SUDOKU, τότε ένας νέος πίνακας SUDOKU  $\overline{S}$  μπορεί να δημιουργηθεί αλλάζοντας τους ακέραιους αριθμούς του  $S$ , με ένα προς ένα αντιστοίχιση ανάμεσα στο σύνολο  $\alpha = (1, 2, \dots, n)$  που κατασκευάζει το  $S$  και στο σύνολο  $\beta$ , που είναι υπεύθυνο για την κατασκευή του  $\overline{S}$  και είναι μία μετάθεση του συνόλου  $\alpha$ .

- Κατασκευή πίνακα και συμπλήρωσή του, βάση λογικών στρατηγικών, με όλους τους αριθμούς από το 1 ως το  $n$ .
- Αφαίρεση ψηφίων από τον πίνακα, για να οδηγηθούμε στη τελική μορφή του παζλ.
- Έπειτα από κάθε αφαίρεση, έλεγχος αν το προκύπτον παζλ είναι επιλύσιμο, αλλιώς επανατοποθέτηση.

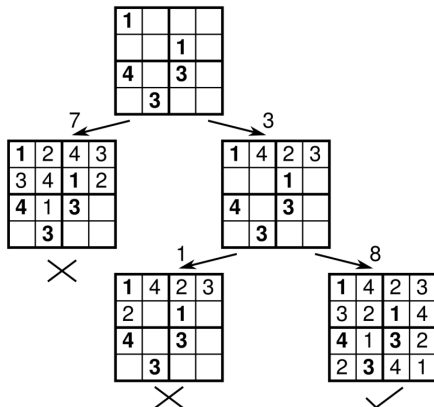
- Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας στην επίλυση SUDOKU παζλ από τον άνθρωπο
- Στατιστική προσέγγιση
- Επίπεδο δυσκολίας και δεδομένοι όροι στο παζλ.

- Ορίζουμε το πρόβλημα επίλυσης SUDOKU παζλ ως πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών.
- Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για την επίλυση ενός προβλήματος απόφασης για SUDOKU παζλ,
  - backtracking
  - constraint propagation

- Το backtracking είναι ουσιαστικά ένας bruteforce τρόπος επίλυσης προβλημάτων περιορισμών.
- Ξεκινά με μία κενή ανάθεση τιμών στις μεταβλητές του προβλήματος και αναθέτοντας τιμές τη μία μετά την άλλη επιχειρεί να καταλήξει σε λύση.
- Η τεχνική αυτή είναι σίγουρο πως θα καταλήξει σε λύση, αφού ουσιαστικά ελέγχει όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να συμπληρωθεί ένα παζλ.



# Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας



**Figure:** Μέρος της διαδικασίας επίλυσης ενός  $4 \times 4$  SUDOKU με την τεχνική backtracking

- Με την constraint propagation τεχνική χρησιμοποιούμε τη λογική για να βρούμε την τιμή κάποιων μεταβλητών, εξετάζοντας τους περιορισμούς.
- Για κάθε μεταβλητή ορίζουμε ένα σύνολο τιμών που μπορεί να λάβει χωρίς να προκαλέσει την παραβίαση κανενός περιορισμού.
- Η τεχνική αυτή δεν είναι βέβαιο πως θα οδηγήσει σε λύση, αλλά σίγουρα είναι πιο αποδοτική.
- Μπορεί να συνδυαστεί με backtracking για καλύτερα αποτελέσματα.

<b>1</b>	2,4	2,4	2,3, 4
2 <b>3</b>	2,4	<b>1</b>	2,3, 4
<b>4</b>	<b>1</b> 2	<b>3</b>	1,2
②	<b>3</b>	2,4	1,2, 4

Figure: Μέρος της διαδικασίας επίλυσης ενός  $4 \times 4$  SUDOKU με την τεχνική constraint propagation

- Το constraint propagation είναι η τεχνική που χρησιμοποιεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος για να επιλύσει ένα SUDOKU παζλ.
- Συγκεκριμένα ο άνθρωπος χρησιμοποιεί δύο είδη τεχνικών:
  - Naked single technique: όπου για ένα δεδομένο κελί του πίνακα υπάρχει μόνο μία τιμή που μπορεί να ανατεθεί, καθώς όλες οι υπόλοιπες τιμές πλήττουν κάποιον περιορισμό
  - Hidden single technique: όπου για μία συγκεκριμένη γραμμή ή στήλη ή για έναν συγκεκριμένο υποπίνακα του παζλ υπάρχει μόνο ένα κελί που μπορεί να φιλοξενήσει μία συγκεκριμένη τιμή.

- Το πείραμα που πραγματοποιήθηκε για να συσχετίσει τη συμπεριφορά των ανθρώπων απέναντι σε παζλ, ώστε να προκύψουν συμπεράσματα για τα επίπεδα δυσκολίας τους αντλεί δεδομένα από τον παγκόσμιο ιστό.
- Ως μέτρο για την εκτίμηση της δυσκολίας των ανθρώπων να λύσουν ένα παζλ SUDOKU χρησιμοποιήθηκε ο μέσος χρόνος επίλυσης.

# Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας

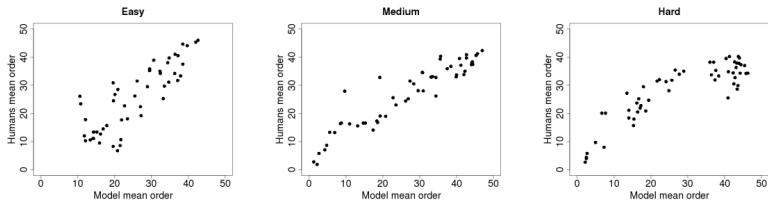
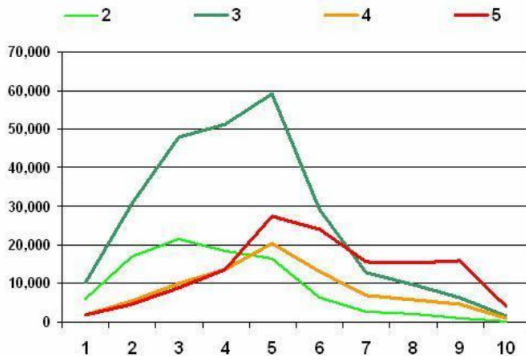


Figure: Αποτελέσματα του πειράματος

- Παραθέτουμε στατιστική μελέτη του ζητήματος της ταξινόμησης των SUDOKU παζλ ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους, που πραγματοποιήθηκε με πραγματικά δεδομένα από το διαδίκτυο.
- Τα εν λόγω δεδομένα ήταν ορθές καταχωρήσεις λυμένων παζλ από χρήστες του Διαδικτύου σε ένα καθημερινό διαγωνισμό.
- Καθημερινά συγκεντρώνονταν 2000 με 3000 καταχωρήσεις σωστά λυμένων παζλ.

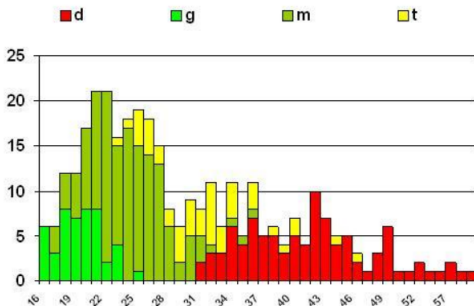
- Τα επίπεδα δυσκολίας ήταν από πριν καθορισμένα και η μελέτη αυτή ήρθε να επιβεβαιώσει την κατηγοριοποίηση τους σε "Gentle", "Moderate", "Tough" και "Diabolical".
- Αφού οι άνθρωποι έλυναν κάποιο/-α παζλ έπειτα έπρεπε να δηλώσουν τον χρόνο που χρειάστηκαν, για να καταφέρουν να φτάσουν στη λύση.
- Η επιλογή έγινε από συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα,
- Παραθέτουμε τα αποτελέσματα της μελέτης.



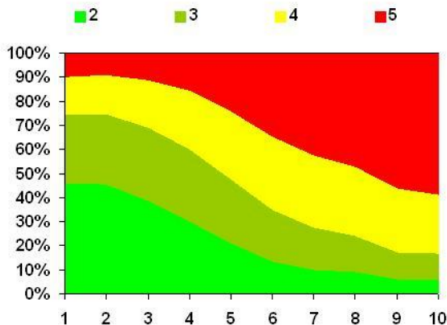


**Figure:** Γράφημα της στατιστικής μελέτης για την ταξινόμηση των SUDOKU ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους. Gentle = ανοιχτό πράσινο, Moderate = σκούρο πράσινο, Tough = κίτρινο, Diabolical = κόκκινο

# Στατιστική μελέτη



**Figure:** Γράφημα της στατιστικής μελέτης για την ταξινόμηση των SUDOKU ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους . Gentle = ανοιχτό πράσινο, Moderate = σκούρο πράσινο, Tough = κίτρινο, Diabolical = κόκκινο



**Figure:** Γράφημα της στατιστικής μελέτης για την ταξινόμηση των SUDOKU ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους . Gentle = ανοιχτό πράσινο, Moderate = σκούρο πράσινο, Tough = κίτρινο, Diabolical = κόκκινο

- Τα συμπληρωμένα κελιά ενός παζλ καθορίζουν σημαντικά τα επίπεδα δυσκολίας ενός παζλ.
- Το πλήθος των συμπληρωμένων κελιών, καθώς επίσης και οι θέσεις τους στον πίνακα παίζουν καθοριστικό ρόλο για το πώς θα χαρακτηριστεί ένα παζλ.
- Οι παρακάτω πίνακες συνοψίζουν τη σχετική γνώση.

# Δεδομένοι όροι στο παζλ

Επίπεδο δυσκολίας	Πλήθος δεδομένων κελιών
Πολύ εύκολο	Περισσότερα από 46
Εύκολο	36-46
Μέτριο	32-35
Δύσκολο	28-31
Πολύ δύσκολο	17-27

# Δεδομένοι όροι στο παζλ

Επίπεδο δυσκολίας	Ελάχιστος δεδομένα κελιά ανά γραμμή/στήλη
Πολύ εύκολο	5
Εύκολο	4
Μέτριο	3
Δύσκολο	2
Πολύ δύσκολο	0

- *Sudoku Creation and Grading*, Andrew C. Stuart, Φεβρουάριος 2007 - ενημερώθηκε τον Ιανουάριος 2012
- *An Exhaustive Study on different Sudoku Solving Techniques*, Arnab Kumar Maji, Sunanda Jana, Sudipta Roy, Rajat Kumar Pal, *International Journal of Computer Science Issues*, Vol. 11, Issue 2, No 1, Μάρτιος 2014
- *Human Problem Solving:Sudoku Case Study*, Radek Pelánek, Ιανουάριος 2011

- *"The History of Sudoku"*, [www.sudoku.com](http://www.sudoku.com),  
<https://sudoku.com/how-to-play/the-history-of-sudoku/>
- *"Howard Garns"*,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Howard\\_Garns](https://en.wikipedia.org/wiki/Howard_Garns)
- *Binary Integer Programming and its Use for EnvelopeDetermination*, Vladimir Y. Lunin, Alexandre Urzhumtsev, Alexander Bockmayr
- *An Integer Programming Model for the Sudoku Problem*, Andrew C. Bartlett, Timothy P. Chartier, Amy N. Langville, Timothy D. Rankin, 3 Μάη 2008



- *Τεχνητή Νοημοσύνη Μία σύγχρονη προσέγγιση, Δεύτερη Αμερικανική έκδοση, εκδόσεις Κλειδάριθμος, Stuart Russell, Peter Norvig, ISBN: 960-209-873-2, Κεφάλαιο 5 Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών, σελ.:179,180,181*
- *The number of  $9 \times 9$  Latin squares, Discrete Mathematics, Stanley Bammel and Jermome Rothstein, 1975*
- *There are 6670903752021072936960 Sudoku grids, Bertram Felgenhauer and Frazer Jarvis, <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/>*
- *There are 5472730538 essentially different Sudoku grids . . . and the Sudoku symmetry group, Ed Russell and Frazer Jarvis, <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html/>*