

Examples of Linear Programming Problems Pattern Classification

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Νοέμβριος 2019

1 Introduction to Feature Vectors

Έστω \mathbf{m} αντικείμενα, τα οποία επιθυμούμε να ταξινομήσουμε σε δύο διακριτές ομάδες, με κάθε αντικείμενο να ανήκει αυστηρά σε μία μόνο ομάδα.

Παραδείγματος χάριν φυτά, που επιθυμούμε να διαχωρίσουμε σε εσπεριδοειδή και μη.

Θεωρούμε πως τα αντικείμενα αυτά περιγράφονται επαρκώς από \mathbf{n} το πλήθος χαρακτηριστικά.

Στην περίπτωση της ταξινόμησης φυτών, σε εσπεριδοειδή και μη, τα χαρακτηριστικά αυτά θα μπορούσαν να είναι το ύψος του δέντρου, αν είναι φυλλοβόλο ή όχι, δηλαδή αν ρίχνει τα φύλλα του το χειμώνα και σε τι κλίμα ευδοκίμει.

Μπορούμε λοιπόν, να αναπαραστήσουμε κάθε αντικείμενο με ένα \mathbf{n} -διάστατο διάνυσμα.

Παραδείγματος χάριν, έστω ένα στιγμιότυπο x της κλάσης των εσπεριδοειδών με τα εξής 3 χαρακτηριστικά

Ύψος : $8m$

Φυλλοβόλο : Όχι

Κλίμα : Τροπικό \vee Υποτροπικό \vee Εύκρατο

τότε, το παραπάνω αντικείμενο μπορεί να αναπαρασταθεί από το 3-διάστατο διάνυσμα

$$x^* = [8m, \text{Όχι}, \text{Τροπικό} \vee \text{Υποτροπικό} \vee \text{Εύκρατο}]$$

Είναι προφανές από το προηγούμενο παράδειγμα, ότι τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων μπορεί να είναι μη αριθμητικά. Ωστόσο, υπάρχουν μέθοδοι μετατροπής τους σε αριθμητικά κι ως εκ τούτου, το παραπάνω διάνυσμα μπορεί εύκολα να απεικονιστεί στον \mathbb{R}^3 . Λοιπόν, θα εστιάσουμε στην περίπτωση των αριθμητικών χαρακτηριστικών.

2 Introduction to Pattern Classification

Δεδομένης της προηγούμενως ορισθείσας αναπαράστασης αντικειμένων, θεωρούμε τα σύνολα

$$K = \{K_1, K_2, \dots, K_{l_k}\}$$

$$\text{όπου } K_i \in \mathbb{R}^n \quad \forall i \in [1, \dots, l_k]$$

$$N = \{N_1, N_2, \dots, N_{l_n}\}$$

$$\text{όπου } N_i \in \mathbb{R}^n \quad \forall i \in [1, \dots, l_n]$$

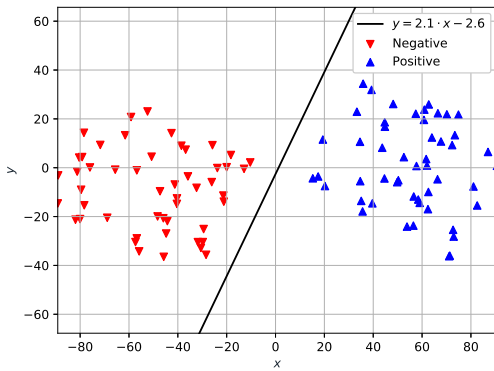
Γνωρίζουμε ότι, ένα υπερεπίπεδο διαχωρίζει ένα αφινικό χώρο σε δύο ημιχώρους.

Τα σύνολα K και N χαρακτηρίζονται γραμμικά διαχωρίσιμα, αν υπάρχει υπερεπίπεδο, τέτοιο ώστε τα αντικείμενα, που ανήκουν στο σύνολο K να εντοπίζονται στον έναν ημιχώρο και τα αντικείμενα, που ανήκουν στο σύνολο N στον άλλον ημιχώρο.

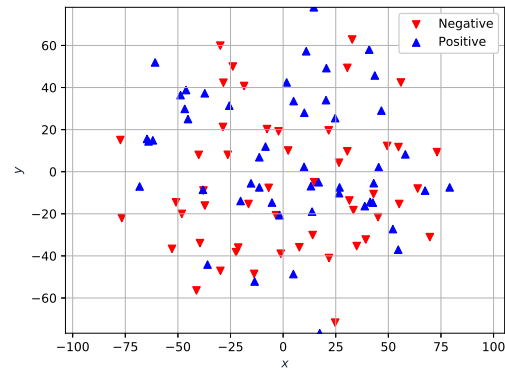
Πιο τυπικά θα λέγαμε ότι τα σύνολα K και N χαρακτηρίζονται γραμμικά διαχωρίσιμα, αν υπάρχουν $a \in \mathbb{R}^n$ και $b \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^T \cdot x \geq b\}$$

$$N \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a^T \cdot x < b\}$$



(a) Γραμμικά διαχωρίσιμα σύνολα



(b) Μη γραμμικά διαχωρίσιμα σύνολα

3 Pattern Classification via Linear Programming

Ένας γραμμικός ταξινομητής αρχικά τροφοδοτείται με ένα σύνολο αντικειμένων, η κλάση των οποίων είναι γνωστή, εκ των προτέρων. Βάσει αυτού του συνόλου υπολογίζονται τα $a \in \mathbb{R}^n$ και $b \in \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό αποτελεί το σύνολο εκπαίδευσης του ταξινομητή.

Για κάθε αταξινόμητο αντικείμενο x , το πρόσημο της παράστασης $a^T \cdot x - b$ υποδεικνύει σε ποια ομάδα ανήκει.

4 Coding