Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα
Δεύτερη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Οκτώβριος 2019

1. Find a differentiable function f : R R such that f does not have an extremum at its critical point.

2. Given a positive integer S, which decompositions a1 + + an = S with the ai positive integers have the largest product a1 an?

3. Find the optimal solution to the Diet Problem when the cost function is Cost(x1, x2) = x1 + x2.

4. Let A,B $\mathbb{R}^{n\times n}$. Show that the traditional way of computing their product AB requires a total of $(2n-1)n^2$ arithmetic operations.

Οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί $(n \times n)$, δηλαδή αποτελούνται από n γραμμές και από n στήλες, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & .... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & .... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .... & b_{2n} \\ . & . & .... & . \\ b_{n1} & b_{n2} & .... & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & .... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & .... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .... & b_{2n} \\ . & . & .... & . \\ b_{n1} & b_{n2} & .... & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{22} & .... & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & .... & z_{2n} \\ . & . & .... & . \\ z_{n1} & z_{n2} & .... & z_{nn} \end{bmatrix} = Z$$

Για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων A και B αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την:

$$\left.\begin{array}{r} \text{1η γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το } z_{11} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \text{1η γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το } z_{12} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \\ \text{1η γραμμή του A με την n στήλη του B, για το } z_{1n} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \end{array}\right\} n(n+(n-1))$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{2η γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το } z_{21} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \text{2η γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το } z_{22} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \\ \text{2η γραμμή του A με την n στήλη του B, για το } z_{2n} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \end{array}\right\} n(n+(n-1))$$

...

...

...

$$\left.\begin{array}{r} \text{n γραμμή του A με την 1η στήλη του B, για το } z_{n1} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \text{n γραμμή του A με την 2η στήλη του B, για το } z_{n2} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \\ \\ \text{n γραμμή του A με την n στήλη του B, για το } z_{nn} \rightarrow \text{n γινόμενα και (n-1) προσθέσεις} \end{array}\right\} n(n+(n-1))$$

Η κάθε γραμμή του πίνακα A πολλαπλασιάζεται με όλες τις στήλες του B και προκύπτει μία νέα γραμμή στον πίνακα Z. Η παραπάνω διαδικασία απαιτεί n(n+(n-1)) αριθμητικές παραστάσεις και επειδή αυτό θα συμβεί n φορές απαιτούνται συνολικά $n^2(n+(n-1)) = n^2(2n-1)$.

5. Consider the problem of solving a system of n linear equations in n unknowns. Show that the Gaussian elimination method requires O(n^3) arithmetic operations in order to either compute a solution or to decide that no solution exist.

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss είναι μία μέθοδος για την επίλυση πυκνών γραμμικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων που ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων στοιχείων αποτελείται κυρίως από μη μηδενικά στοιχεία.
Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της πολυπλοκότητας της μεθόδου, θα εξηγήσουμε πως δουλεύει η μέθοδος.

Στόχος της απαλοιφής του Gauss είναι να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου $A\epsilon\mathbb{R}^{n\times n}$, $x\epsilon\mathbb{R}^{n\times 1}$ και $B\epsilon\mathbb{R}^{n\times 1}$. Για να λύσουμε το σύστημα αυτό, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss προχωρά σε τριγωνοποίηση του πίνακα A, κι έτσι ο πίνακας γίνεται άνω τριγωνικός, κι έπειτα με προς τα πίσω αντικατάσταση βρίσκουμε τους αγνώστους.

Πιο αναλυτικά, έστω ότι βρισκόμαστε στο k-οστό βήμα της μεθόδου (αυτό σημαίνει ότι κοιτάμε την k γραμμή του πίνακα A). Τα βήματα που ακολουθούμε εδώ είναι:
1. Βρίσκουμε $(n-k)$ το πλήθος πολλαπλασιαστές m, όπου $m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ για $i = k+1, k+2, ..., n$.
2. Εφαρμόζουμε τον τύπο $a_{ij}^{new} = a_{ij}^{old} + m_{ik} \times a_{kj}^{(k)}$
για $i = k+1, k+2, ..., n$ και $j = k, k+1, ..., n$
3. Εφαρμόζουμε τον τύπο $b_i^{new} = b_i^{old} + m_{ik} \times_k^{(k)}$
για $i = k+1, k+2, ..., n$

Για την εύρεση της πολυπλοκότητας θα αναφερθούμε αρχικά στη γενική περίπτωση επίλυσης l το πλήθος γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα αγνώστων A. Άλλωστε, η "βαρια" υπολογιστικά εργασία είναι η τριγωνοποίηση του πίνακα A. Έπειτα θα περάσουμε στην περίπτωση όπου το $l = 1$.
Έστω πάλι ότι βρισκόμαστε στο k βήμα της μεθόδου:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3k} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ & & & & . & . & & . \\ & 0 & & \ddots & . & . & & . \\ & & & & . & . & & . \\ & & & & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ & & & & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ & & & & . & . & & . \\ & 0 & & & . & . & & . \\ & & & & . & . & & . \\ & & & & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(l)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(l)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & \dots & x_3^{(l)} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_k^{(1)} & x_k^{(2)} & \dots & x_k^{(l)} \\ x_{k+1}^{(1)} & x_{k+1}^{(2)} & \dots & x_{k+1}^{(l)} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \dots & b_1^{(l)} \\ b_2^{(1)} & b_2^{(2)} & \dots & b_2^{(l)} \\ b_3^{(1)} & b_3^{(2)} & \dots & b_3^{(l)} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ b_k^{(1)} & b_k^{(2)} & \dots & b_k^{(l)} \\ b_{k+1}^{(1)} & b_{k+1}^{(2)} & \dots & b_{k+1}^{(l)} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ b_n^{(1)} & b_n^{(2)} & \dots & b_n^{(l)} \end{bmatrix}$$

Για να εκτελέσουμε το βήμα 1 και να καταφέρουμε να μηδενίσουμε τα $a_{k+1,k}, ..., a_{nk}$, πρέπει να βρόυμε $(n-k)$ το πλήθος πολλαπλασιαστές τύπου m. Αρα, σε αυτό το βήμα θα εκτελεστούν $(n-k)$ διαιρέσεις.
Για να εκτελεστεί τα βήματα 2 και 3:
-για το γινόμενο ma θα εκτελεστούν $(n-k+l)$ γινόμενα $(n-k)$ φορές

-για την πρόσθεση $a + ma$ θα εκτελεστούν $(n-k+l)$ προσθαφαιρέσεις $(n-k)$ φορές.

Συνεπώς, για την πλήρη εκτέλεση του αλγορίθμου θα χρειαστούν:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \text{ διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+l) \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+l) \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Κάνοντας χρήση των:

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ και } \sum_{k=1}^{m} k^2$$

προκύπτει τελικά ότι για την τριγωνοποίηση του πίνακα A χρειαζόμαστε:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= n(n-1) - \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+l) = \sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - nk + nl - kn + k^2 - kl) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} nk + \sum_{k=1}^{n-1} nl + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kl =$$

$$= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2n \sum_{k=1}^{n-1} k + nl \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - l \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= n^2(n-1) - 2n\frac{(n-1)n}{2} + nl(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - l\frac{(n-1)n}{2} =$$

$$= n^2(n-1) - n^2(n-1) + \frac{1}{2}nl(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{nl(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{3nl(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n-1)(3l+2n-1)}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+l) = \sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - nk + nl - kn + k^2 - kl) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} nk + \sum_{k=1}^{n-1} nl + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kl =$$

$$= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2n\sum_{k=1}^{n-1} k + nl\sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - l\sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= n^2(n-1) - 2n\frac{(n-1)n}{2} + nl(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - l\frac{(n-1)n}{2} =$$

$$= n^2(n-1) - n^2(n-1) + \frac{1}{2}nl(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{nl(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{3nl(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n-1)(3l+2n-1)}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

ενώ για τον υπολογισμό των x απαιτούνται:

$$l\sum_{k=1}^{n} 1 \text{ διαιρέσεις}$$

$$l\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$l\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Δηλαδή:

$$nl \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)l}{2} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)l}{2} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Συνεπώς, το σύνολο των πράξεων είναι:

$$\frac{n(n-1+2l)}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6l)}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6l)}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Αν $l = 1$ απαιτούνται:

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Άρα, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων απαιτεί $O(n^3)$.

6. Suppose that we are given a set of vectors in R^n that form a basis and let y be an arbitrary vector in R^n. We wish to express y as a linear combination of the basis vectors. How can this by accomplished?

Έστω ότι τα $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}$ είναι το σύνολο που αποτελούν τη βάση.
Βάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν το V. Με άλλα λόγια το σύνολο $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}\}$ είναι βάση του V αν:
1. $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n} \epsilon V$
2. $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (τα $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ανν η σχέση $\lambda_1\vec{b_1} + \lambda_2\vec{b_2} + ... + \lambda_n\vec{b_n} = \vec{0}$ ισχύει μόνο για $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$)
3. $\forall b \epsilon V$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \epsilon \mathbb{R}$ τω $b = \lambda_1\vec{b_1} + \lambda_2\vec{b_2} + ... + \lambda_n\vec{b_n}$.

Για να εκφράσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{y} \epsilon \mathbb{R}^n$ πρέπει να βρούμε κατάλληλους συντελεστές τω

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_i b_j^i \; \forall j \leq n$$

όπου το j δηλώνει το j-οστό στοιχείο των διανυσμάτων $\vec{y}$ και $\vec{b}$ και $a_i \epsilon \mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν μοναδική λύση.
Έστω διάνυσμα $\vec{z} \epsilon \mathbb{R}^n$ και έστω ότι μπορεί να αναπαρασταθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

$$\vec{z} = d_1\vec{b_1} + d_2\vec{b_2} + ... + d_n\vec{b_n}(1)$$
$$\vec{z} = m_1\vec{b_1} + m_2\vec{b_2} + ... + m_n\vec{b_n}(2)$$

με $d_i, m_i \epsilon \mathbb{R}$. Επειδή, όμως, (1) = (2) έχουμε:

$$d_1\vec{b_1} + d_2\vec{b_2} + ... + d_n\vec{b_n} = m_1\vec{b_1} + m_2\vec{b_2} + ... + m_n\vec{b_n} \Leftrightarrow$$
$$(d_1 - m_1)\vec{b_1} + (d_2 - m_2)\vec{b_2} + ... + (d_n - m_n)\vec{b_n} = 0$$

κι επειδή τα $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}$ είναι διανύσματα βάσης, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα:

$$(d_1 - m_1) = 0, (d_2 - m_2) = 0, ..., (d_n - m_n) = 0$$
$$d_1 = m_1, d_2 = m_2, ..., d_n = m_n$$

Συνεπώς, οι δύο αναπαραστάσεις του διανύσματος $\vec{z}$ είναι ίδιες και η αναπαράστασή του από διανύσματα βάσης είναι μοναδική.

Για να βρούμε τα μοναδικά a_i για να εκφράσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{y}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης καταλήγουμε σε μια σχέση όπως αυτή:

$$\vec{y} = a_1\vec{b_1} + a_2\vec{b_2} + ... + a_n\vec{b_n} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ n_n^{(1)} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ . \\ . \\ . \\ n_n^{(2)} \end{bmatrix} + ... + a_n \begin{bmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ . \\ . \\ . \\ n_n^{(n)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$y_1 = a_1 b_1^{(1)} + a_2 b_1^{(2)} + ... + a_n b_1^{(n)}$$
$$y_2 = a_1 b_2^{(1)} + a_2 b_2^{(2)} + ... + a_n b_2^{(n)}$$
$$...$$
$$y_n = a_1 b_n^{(1)} + a_2 b_n^{(2)} + ... + a_n b_n^{(n)}$$

Άρα, για την εύρεση των μοναδικών a_i μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε μία συνάρτηση, που υπόκειται σε αυτούς τους περιορισμούς.

7. Study the paper with title: Do dogs know Calculus? found in the Readings folder.