Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα - Πρώτη Άσκηση

Βασίλης Σιώρος
Χριστίνα Ανδρινοπούλου

Οκτώβριος 2019

1. Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be a convex set with $x_1, ..., x_k \in C$ and let $\theta_1, ..., \theta_k \in \mathbb{R}$ satisfy $\theta_i \geq 0$ and $\theta_1 + ... + \theta_k = 1$. Show that $\theta_1 x_1 + ... + \theta_k x_k \in C$.

Θα αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση με επαγωγή στο k. Για $k = 2$ ισχύει από ορισμό. Κάθε convex set περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα που κατασκευάζεται από δύο οποιαδήποτε σημεία του.

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: για $k = 3$: $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 = x$ με $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq 0$ και $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$.
Σίγουρα ένα εκ των $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θα είναι διάφορο του 1. Χβτγ έστω $\theta_1 \neq 1$, άρα:
$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 = \theta_1 x_1 + (1 - \theta_1)\lambda_2 x_2 + (1 - \theta_1)\lambda_3 x_3$
με $\lambda_2 = \frac{\theta_2}{(1-\theta_1)}$ και $\lambda_3 = \frac{\theta_3}{(1-\theta_1)}$

Αν το ευθύγραμμο τμήμα που σχηματίζεται από τα x_2 και x_3 ανήκει στο C, τότε και το:
$\theta_1 x_1 + (1 - \theta_1)(\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)$ θα ανήκει στο C. Πρέπει νδο $\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = y$ ανήκει στο C.
$\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\theta_2}{(1-\theta_1)} + \frac{\theta_3}{(1-\theta_1)} = \frac{\theta_2+\theta_3}{(1-\theta_1)} = \frac{(1-\theta_1)}{(1-\theta_1)} = 1$
Συνεπώς, αφού $x_2, x_3 \in C$, το y ανήκει στο C, άρα και το x ανήκει στο C, αφού $x_1 \in C$.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Υποθέτω ότι $\theta_1 x_1 + ... + \theta_{n-1} x_{n-1}$ ανήκει στο C με $\theta_i \geq 0$ για $1 \leq i \leq n - 1$ και $\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i = 1$ ανήκει στο C.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Θδο $\theta_1 x_1 + ... + \theta_{n-1} x_{n-1} + \theta_n x_n = z$ ανήκει στο C.
Χβτγ έστω ότι $\theta_n \neq 1$: $z = \theta_n x_n + (1 - \theta_n)(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1})$
με $\lambda_i = \frac{\theta_i}{(1-\theta_n)}$ για $1 \leq i \leq n - 1$.
Όμως, $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1}$ από επαγωγική υπόθεση ανήκει στο C. Άρα, και το z ανήκει στο C.

2. Show that a set is convex if and only if its intersection with any line is convex.

• Αν έχουμε ένα convex set, τότε η τομή του convex set με μία τυχαιά ευθεία είναι convex.

Αρχικά, να επισημανθεί ότι μία ευθεία είναι convex set, διότι αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε σημεία που ανήκουν στην ευθεία, τότε ανήκει και το ευθύγραμμο τμήμα που κατασκευάζεται από αυτά. Συνεπώς, η ευθεία είναι convex set.
Θα αποδείξουμε ότι η τομή δύο convex set είναι convex:
Έστω A και B είναι δύο convex set. $\forall p_i, p_j \in (A \cap B)$ το ευθύγραμμο τμήμα $p_i p_j$ ανήκει εξ ολοκλήρου στο A, επειδή A είναι convex set και ανήκει εξ ολοκλήρου στο B, επειδή B είναι convex set, άρα ανήκει εξ ολοκλήρου και στο $A \cap B$. Συνεπώς, το $A \cap B$ είναι convex set.

Συνεπώς, η τομή του convex set και μιας ευθείας είναι covex.

• Αν η τομή ενός συνόλου με οποιοαδήποτε ευθεία είναι convex σύνολο, τότε το σύνολο είναι convex.

$\forall x_1, x_2$ που ανήκουν στο set, η τομή του set με την ευθεία που διέρχεται από τα x_1 και x_2 είναι convex (από υπόθεση). (...................)

3. Show that a set is affine if and only if its intersection with any line is affine.

• Έστω ένα affine σύνολο S. Θα δείξουμε ότι η τομή του με οποιαδήποτε ευθεία είναι affine σύνολο.

Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία είναι affine σύνολο. Έστω $S^{'}$ το affine σύνολο που αντιστοιχεί σε κάποια τυχαία ευθεία. Τότε έχουμε:

$x_1 \in S \cap S^{'} \implies x_1 \in S \wedge x_1 \in S^{'}$
$x_2 \in S \cap S^{'} \implies x_2 \in S \wedge x_2 \in S^{'}$

Δεδομένου ότι τα S και $S^{'}$ είναι affine σύνολα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \in S \wedge x_2 \in S &\implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S,\ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 \in S^{'} \wedge x_2 \in S^{'} &\implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S^{'},\ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x_1 \in S \cap S' \wedge x_2 \in S \cap S' \implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S \cap S', \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως, η τομή του affine συνόλου S με οποιαδήποτε ευθεία είναι affine σύνολο.

• Έστω σύνολο S, τέτοιο ώστε η τομή του με οποιαδήποτε ευθεία να είναι affine σύνολο. Θα δείξουμε ότι το σύνολο S είναι affine.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, κάθε ευθεία είναι affine σύνολο. Έστω, το affine σύνολο S', που αντιστοιχεί στην ευθεία που ορίζεται από δύο τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in S$.

Αφού από υπόθεση το σύνολο $S \cap S'$ είναι affine, έχουμε:

$x_1, x_2 \in S \cap S' \implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S \cap S', \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

και ως εκ τούτου:

$x_1, x_2 \in S \implies \theta_1 \times x_1 + \theta_2 \times x_2 \in S, \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

Επομένως, το σύνολο S είναι affine.

4. A set C is midpoint convex, if whenever two points $a, b \in C$, the average or midpoint $(a+b)/2$ is in C. Obviously, a convex set is midpoint convex. Prove that if C is closed and midpoint convex, then C is convex.

Έστω σημεία $a, b \in C$ και m ένα οποιαδήποτε σημείο επί του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα σημεία a και b. Ορίζουμε την ακολουθία:

$$m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

όπου

$$a_i = \left\{ \begin{array}{ll} a, & \text{i} = 0 \\ a_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} > m \\ m_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} \leq m \end{array} \right\}$$

$$b_i = \left\{ \begin{array}{ll} b, & \text{i} = 0 \\ m_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} > m \\ b_{i-1}, & i \geq 1 \wedge m_{i-1} \leq m \end{array} \right\}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

- $a_i, b_i, m_i \in C \ \forall i$

Αυτό αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή στο i ως εξής:

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Η πρόταση προς απόδειξη ισχύει για i = 0, καθώς

$$\begin{aligned}
a_0 &= a \in C && \text{από υπόθεση}\\
b_0 &= b \in C && \text{από υπόθεση}\\
m_0 &= \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{a+b}{2} \in C && \text{λόγω midpoint covexivity}
\end{aligned}$$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Έστω ότι $a_i, b_i, m_i \in C \ \forall i \leq n$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Θα δείξουμε ότι $a_{n+1}, b_{n+1}, m_{n+1} \in C$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m_n > m$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n \in C && \text{από επαγωγική υπόθεση}\\
b_{n+1} &= m_n \in C && \text{από επαγωγική υπόθεση}\\
m_{n+1} &= \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} = \frac{a_n + m_n}{2} \in C && \text{λόγω midpoint covexivity}
\end{aligned}$$

- Το σημείο m βρίσκεται πάντα επί του ευθύγραμμου τμήματος $\overleftrightarrow{a_i b_i}$, γεγονός προφανές από τον ορισμό της ακολουθίας m_i. Επομένως, ισχύει η ανισότητα $\|m_i - m\| \leq \|a_i - b_i\|$.

Θα αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή στο i, ότι $\|a_i - b_i\| = \|a - b\| \times 2^{-i}$

ΒΑΣΗ ΕΠΑΓΩΓΗΣ: Για i = 0, έχουμε: $\|a_0 - b_0\| = \|a - b\| = \|a - b\| \times 2^{-0}$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ: Έστω ότι $\|a_i - b_i\| = \|a - b\| \times 2^{-i} \ \forall i \leq n$

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m_n > m$, όπως και παραπάνω, για i = n + 1, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a_n - m_n\| && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\|a_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right\| && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\|\frac{b_n - a_n}{2}\right\| && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \left\|\frac{a_n - b_n}{2}\right\| && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a_n - b_n\| \times 2^{-1} && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a - b\| \times 2^{-n} \times 2^{-1} && \Leftrightarrow \\
\|a_{n+1} - b_{n+1}\| &= \|a - b\| \times 2^{-(n+1)} && \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Έτσι, έχουμε: $0 \leq \|m_i - m\| \leq \|x - y\| \times 2^{-i}$

Είναι προφανές πως η ακολουθία $\|m_i - m\|$ είναι φθίνουσα και λόγω του ότι είναι και φραγμένη συγκλίνει στο μέγιστο κάτω φράγμα της, δηλαδή:

$\lim_{i\to\infty} \|m_i - m\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{i\to\infty} m_i = m$

Τέλος, επειδή το σύνολο είναι κλειστό περιέχει τα όρια ακολουθιών στοιχείων του και αφού, όπως δείξαμε $m_i \in C \ \forall i$, συνεπάγεται ότι $m \in C$. Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε σημείο m επί του ευθύγραμμου τμήματος $\overleftrightarrow{\alpha\beta}$ και άρα $a, b \in C \implies m = \theta_1 \times a + \theta_2 \times b \in C \ \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

5. Show that the convex hull of a set S is the intersection of all convex sets that contain S.(The same method can be used to show that the conic, or affine, or linear hull of a set S is the intersection of all conic sets, or affine sets, or subspaces that contain S.

Το convex hull ενός συνόλου S, ορίζεται ως εξής:

$conv(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times s_i \mid s_i \in S,\ n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0 \ \forall i,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$

• Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η τομή όλων των convex υπερσυνόλων του S, είναι υπερσύνολο του convex hull του.

Έστω convex σύνολο C, τέτοιο ώστε $C \supseteq S$.

Δεδομένου ότι το σύνολο C είναι convex, ισχύει:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i * c_i \in C$ όπου $c_i \in S,\ n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Δεδομένου τώρα ότι $C \supseteq P$, ισχύει:

$s_i \in S \Rightarrow s_i \in C \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times s_i \in C$

Ως εκ τούτου, προκύπτει $C \supseteq conv(S)$ και αφού αυτό ισχύει για οποιαδήποτε convex υπερσύνολο του S συνεπάγεται πως και η τομή αυτών των συνόλων είναι υπερσύνολο του conv(S).

• Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το convex hull του συνόλου S είναι υπερσύνολο της τομής όλων των convex υπερσυνόλων του.

Είναι προφανές πως $conv(S) \supseteq S$. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο conv(S) είναι convex, καθώς σε αυτή την περίπτωση θα ανήκει στο σύνολο convex υπερσυνόλων του S και ως εκ τούτου θα είναι υπερσύνολο και της τομής τους.

Έστω δύο σημεία x_1 και x_2, τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times s_i && \in conv(S) \\ x_2 &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \times s_i && \in conv(S) \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\theta \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \theta \times x_1 + (1-\theta) \times x_2 &= \theta \times \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times s_i + (1-\theta) \times \sum_{i=1}^{n} \mu_i \times s_i && \Leftrightarrow \\ \theta \times x_1 + (1-\theta) \times x_2 &= \sum_{i=1}^{n} (\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i) \times s_i \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}(\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i) = \theta \times \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-\theta) \times \sum_{i=1} n\mu_i \quad \Leftrightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n}(\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i) = \theta \times 1 + (1-\theta) \times 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n}(\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i) = 1$$

και

$\theta \times \lambda_i + (1-\theta) \times \mu_i \geq 0 \ \forall i \in \{1 \dots n\}$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα $\theta \times x_1 + (1-\theta) \times x_2 \in conv(S)$ και άρα το σύνολο conv(S) είναι convex και ως εκτούτου είναι και υπερσύνολο της τομής των convex υπερσυνόλων του S.

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l} conv(S) \supseteq \bigcap C \text{ όπου C οποιοδήποτε convex υπερσύνολο του S} \\ conv(S) \subseteqq \bigcap C \text{ όπου C οποιοδήποτε convex υπερσύνολο του S} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$conv(S) \equiv \bigcap C$ όπου C οποιοδήποτε convex υπερσύνολο του S

6. What is the distance between two parallel hyperplanes $x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_1$ and $x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_2$?

Τα δύο hyperplanes, έστω B_1 και B_2 είναι μεταξύ τους παράλληλα, άρα έχει νόημα να μελετήσουμε την απόσταση μεταξύ τους. Αν δεν ήταν παράλληλα, η απόσταση μεταξύ των B_1 και B_2 θα ήταν 0, αφού θα υπήρχε σημείο τομής ανάμεσα τους.
Έστω ένα σημείο x_1 που ανήκει στο B_1 και έστω μία ευθεία Ε, η οποία διέρχεται από το x_1 και είναι κάθετη στο B_1. Η Ε τέμνει το B_2 στο σημείο x_2 επίσης κάθετα, γιατί τα δύο hyperplanes είναι μεταξύ τους παράλληλα. Αρκεί να βρούμε την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων x_1 και x_2, δηλαδη να βρούμε την $\|x_1 - x_2\|_2$.
Η ευθεία Ε έχει ίδια κατεύθυνση με το α, γιατί και το α και η ευθεία Ε είναι κάθετα στα δύο hyperplanes, συνεπώς την ευθεία μπορούμε να την γράψουμε ως: $\alpha y + x_1$.

Η τομή της Ε με το B_2 είναι: $\alpha^T x = b_2 \Leftrightarrow \alpha^T(\alpha y + x_1) = b_2 \Leftrightarrow \alpha^T \alpha y + \alpha^T x_1 = b_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = \frac{b_2 - \alpha^T x_1}{\alpha^T \alpha} \Leftrightarrow y = \frac{b_2 - b_2}{\alpha^T \alpha}$
Άρα, $x_2 = \alpha y + x_1 \Leftrightarrow x_2 = a\frac{b_2 - b_1}{\alpha^T \alpha} + x_1$.
Συνεπώς, $\|x_1 - x_2\|_2 = \left\|x_1 - \frac{b_2 - b_1}{\alpha^T} - x_1\right\|_2 = \left\|-\frac{b_2 - b_1}{\alpha^T}\right\|_2 = \frac{|b_2 - b_1|}{\|\alpha\|_2}$

7. Let a and b be distinct points in $\mathbb{R}^n$. Show that the set of all points that are closer (in Euclidean norm) to a than b is a halfspace.

Έστω $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2\}$ το σύνολο των σημείων $x \in \mathbb{R}$, τα οποία βρίσκονται πιο κοντά στο a, σε σχέση με το b βάσει Ευκλείδιας Νόρμας.

$$\begin{aligned}
\|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2 && \Leftrightarrow \\
\|x - a\|_2^2 \leq \|x - b\|_2^2 && \Leftrightarrow \\
(x - a)^T \times (x - a) \leq (x - b)^T \times (x - b) && \Leftrightarrow \\
x^T \times x - x^T \times a - a^T \times x + a^T \times a \leq x^T \times x - x^T \times b - b^T \times x + b^T \times b && \Leftrightarrow \\
2 \times b^T \times x - 2 \times a^T \times x \leq b^T \times b - a^T \times a && \Leftrightarrow \\
2 \times (b - a)^T \times x \leq b^T \times b - a^T \times a &&
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$c = 2 \times (b - a)$$
$$d = b^t \times b - a^T \times a$$

και λαμβάνουμε την ανισότητα $c^T \times x \leq d$, η οποία ορίζει έναν κλειστό ημιχώρο.