

Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα Δεύτερη Εργασία

Σιώρος Βασίλειος
Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Οκτώβριος 2019

1. Find a differentiable function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that f does not have an extremum at its critical point.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνωστό ότι είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Ωστόσο, για λόγους σαφήνειας, θα αποδείξουμε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα της στο $x = 0$.

• **Συνέχεια:**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

• **Παραγωγισιμότητα:**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Επομένως, δείξαμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$.

Το σημείο $x = 0$ αποτελεί κρίσιμο σημείο της f , αφού η παράγωγός της μηδενίζεται εκεί. Ωστόσο, όπως φαίνεται και από την ακόλουθη γραφική παράσταση, το σημείο $x = 0$ δεν αποτελεί ακρότατό της.

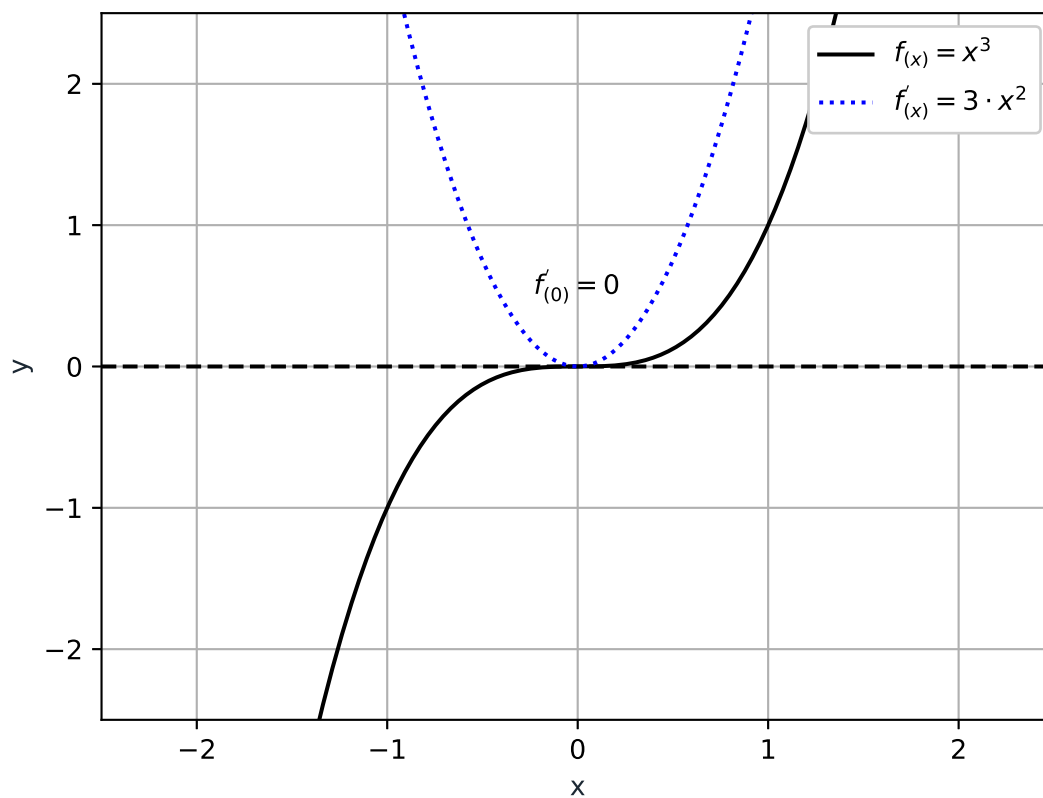


Figure 1: An example of a differentiable function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ which does not have an extremum at its critical point

2. Given a positive integer S , which decompositions

$$a_1 + \dots + a_n = S$$

with the a_i positive integers have the largest product $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$?

Αρχικά, μοντελοποιήσαμε το πρόβλημα σε *Python*, με στόχο να αναδείξουμε κάποιο πιθανό μοτίβο.

Παρατίθενται τα ευρήματά μας, όσον αφορά ακέραιες τιμές στο διάστημα $[10, 20]$.

```
Decomposition: 10 = 3 + 3 + 2 + 2  
Maximum Product: 36
```

```
Decomposition: 11 = 3 + 3 + 3 + 2  
Maximum Product: 54
```

```
Decomposition: 12 = 3 + 3 + 3 + 3  
Maximum Product: 81
```

```
Decomposition: 13 = 3 + 3 + 3 + 2 + 2  
Maximum Product: 108
```

```
Decomposition: 14 = 3 + 3 + 3 + 3 + 2  
Maximum Product: 162
```

```
Decomposition: 15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3  
Maximum Product: 243
```

```
Decomposition: 16 = 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2  
Maximum Product: 324
```

```
Decomposition: 17 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2  
Maximum Product: 486
```

```
Decomposition: 18 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3  
Maximum Product: 729
```

```
Decomposition: 19 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2  
Maximum Product: 972
```

```
Decomposition: 20 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2  
Maximum Product: 1458
```

Παρατηρούμε ότι, σε κάθε περίπτωση, η αποδόμηση του εκάστοτε αριθμού με το μέγιστο γινόμενο αποτελείται αποκλειστικά από 3 και 2. Θα δείξουμε ότι η παρατήρησή μας αυτή, αποτελεί κανόνα.

Θεωρούμε τυχαίο θετικό ακέραιο S και την αποδόμησης του

$$S = a_1 + \dots + a_n$$

με το μέγιστο γινόμενο

$$\prod_{i=1}^n a_i$$

Έστω ότι υπάρχει $1 \leq k \leq n$ τέτοιο ώστε $a_k \geq 4$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$\bullet a_k = 2 \cdot l \mid l \in \mathbb{N}^+$$

Δεδομένου ότι $a_k \geq 4$, έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} a_k \geq 4 \Leftrightarrow a_k - 4 \geq 0 \\ a_k \geq 4 \Leftrightarrow a_k - 4 \geq 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\times} \begin{array}{l} a_k \cdot (a_k - 4) \geq 0 \\ a_k^2 - 4 \cdot a_k \geq 0 \\ a_k^2 \geq 4 \cdot a_k \\ \frac{a_k^2}{4} \geq a_k \end{array} \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array}$$

Δεδομένου ότι

$$a_k = 2 \cdot l \mid l \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow a_k \in \mathbb{N}^+$$

μπορούμε να ορίσουμε μια νέα αποδόμηση του S , ως εξής

$$S = a_1 + \dots + \frac{a_k}{2} + \frac{a_k}{2} + \dots + a_n$$

Το γινόμενο της παραπάνω αποδόμησης είναι

$$\begin{array}{l} \prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times \dots \times \frac{a_k}{2} \times \frac{a_k}{2} \times \dots \times a_n \\ \prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times \dots \times \frac{a_k^2}{4} \times \dots \times a_n \\ \prod_{i=1}^n a_i \geq a_1 \times \dots \times a_k \times \dots \times a_n \\ \prod_{i=1}^n a_i \geq \prod_{i=1}^{max} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι δυνατόν, αφού βάσει της υπόθεσής μας το \prod^{max} είναι το μέγιστο γινόμενο αποδόμησης. Καταλήξαμε δηλαδή σε άτοπο, γεγονός που συνεπάγεται ότι η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη.

Ως εκ τούτου δεν υπάρχει $1 \leq k \leq n$ τέτοιο ώστε $a_k \geq 4$.

$$\bullet a_k = 2 \cdot l + 1 \mid l \in \mathbb{N}$$

Δεδομένου ότι $a_k \geq 4$, έχουμε

$$a_k = 2 \cdot l + 1 \geq 4 \Leftrightarrow l \geq 2$$

και άρα

$$\left. \begin{array}{l} l \geq 2 \quad \Leftrightarrow l \geq 1 \\ l \geq 2 \quad \Leftrightarrow l - 1 \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lll} l \cdot (l - 1) & \geq 1 & \Leftrightarrow \\ l^2 - l & \geq 1 & \Leftrightarrow \\ l^2 - l + 2 \cdot l & \geq 1 + 2 \cdot l & \Leftrightarrow \\ l^2 + l & \geq 1 + 2 \cdot l & \Leftrightarrow \\ l \cdot (l + 1) & \geq 2 \cdot l + 1 & \Leftrightarrow \\ l \cdot (l + 1) & \geq a_k & \end{array}$$

Δεδομένου ότι

$$l \in \mathbb{N} \cap l \geq 2 \Leftrightarrow l \in \mathbb{N}^+$$

μπορούμε να ορίσουμε μια νέα αποδόμηση του S , ως εξής

$$S = a_1 + \dots + l + (l + 1) + \dots + a_n$$

Το γινόμενο της παραπάνω αποδόμησης είναι

$$\begin{array}{ll} \prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times \dots \times l \times (l + 1) \times \dots \times a_n & \Leftrightarrow \\ \prod_{i=1}^n a_i \geq a_1 \times \dots \times a_k \times \dots \times a_n & \Leftrightarrow \\ \prod_{i=1}^n a_i \geq \prod^{max} & \end{array}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι δυνατόν, αφού βάσει της υπόθεσής μας το \prod^{max} είναι το μέγιστο γινόμενο αποδόμησης. Καταλήξαμε δηλαδή σε άτοπο, γεγονός που συνεπάγεται ότι η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη.

Ως εκ τούτου δεν υπάρχει $1 \leq k \leq n$ τέτοιο ώστε $a_k \geq 4$.

Η μονάδα, όντας το ουδέτερο στοιχείου το πολλαπλασιασμού, δεν συνεισφέρει στην αύξηση του τελικού γινομένου καμίας αποδόμησης που την εμπεριέχει κι ως εκ τούτου δεν θα εμφανίζεται σε καμία αποδόμηση μεγίστου γινομένου, πλην τετριμμένων περιπτώσεων.

Από τα πειράματά μας παρατηρούμε πως, ο αριθμός 2 δεν εμφανίζεται παραπάνω από 2 φορές σε καμία αποδόμηση μεγίστου γινομένου.

Αυτό είναι λογικό καθώς, δεδομένης μίας αποδόμησης ενός θετικού ακεραίου S της μορφής

$$S = a_1 + \dots + 2 + 2 + 2 + \dots + a_n$$

μπορούμε να ορίσουμε μία νέα αποδόμηση

$$S = a_1 + \dots + 3 + 3 + \dots + a_n$$

της οποίας το γινόμενο είναι

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_i &= a_1 \times \dots \times 3 \times 3 \times \dots \times a_n && \Leftrightarrow \\ \prod_{i=1}^n a_i &= a_1 \times \dots \times 9 \times \dots \times a_n && \Leftrightarrow \\ \prod_{i=1}^n a_i &\geq a_1 \times \dots \times 8 \times \dots \times a_n && \Leftrightarrow \\ \prod_{i=1}^n a_i &\geq a_1 \times \dots \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times a_n \end{aligned}$$

Έτσι η αποδόμηση μεγίστου γινομένου δίνεται από τη σχέση

$$S = 3 \cdot x + 2 \cdot \frac{S - 3 \cdot x}{2}$$

και το γινόμενο της από τη σχέση

$$\prod^{max} = 3^x \times 2^{\frac{S-3 \cdot x}{2}}$$

3. Find the optimal solution to the Diet Problem when the cost function is

$$Cost(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Οι περιορισμοί μας είναι οι εξής

$$30 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \geq 60$$

$$15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \geq 70$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

και επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$Cost(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

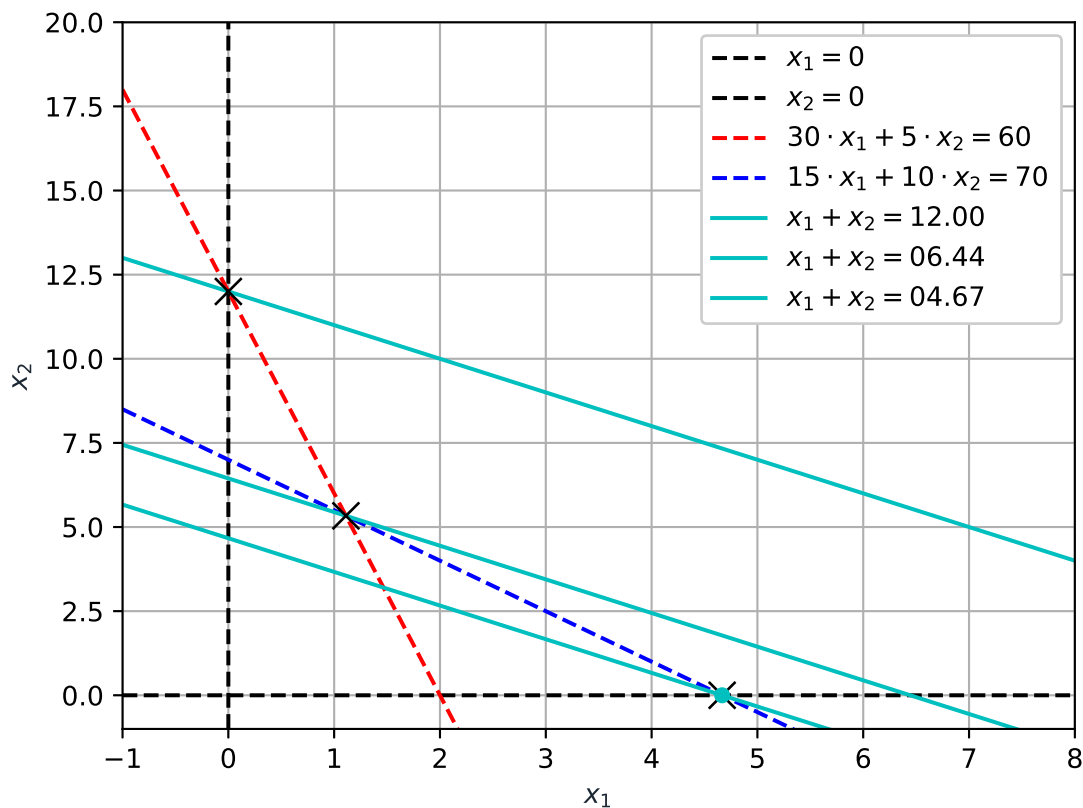


Figure 2: The Optimal Solution to the Diet Problem when the total cost is given by the function $Cost(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Παρατηρούμε ότι, δεν ορίζεται ευθεία, η οποία αντιστοιχεί σε κόστος χαμηλότερο του **4.67**, τέτοια ώστε, έστω και ένα σημείο της να πληροί κάθε περιορισμό. Ως εκ τούτου το σημείο τομής των ευθειών

$$15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 = 70$$

$$x_2 = 0$$

δηλαδή το σημείο **(4.67, 0)** αποτελεί τη βέλτιστη λύση.

4. Let $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Show that the traditional way of computing their product $A \times B$ requires a total of $(2 \cdot n - 1) \cdot n^2$ arithmetic operations.

Οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί ($n \times n$), δηλαδή αποτελούνται από n γραμμές και από n στήλες, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} = Z$$

Για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων A και B αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την:

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } 1^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{11} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 1^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } 2^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{12} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 1^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } n^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{1n} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{array} \right\} n(n+(n-1))$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } 1^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{21} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 2^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } 2^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{22} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ 2^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } n^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{2n} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{array} \right\} n(n+(n-1))$$

...

...

...

$$\left. \begin{array}{l} n^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } 1^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{n1} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ n^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } 2^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{n2} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \\ n^{\text{η}} \text{ γραμμή του } A \text{ με την } n^{\text{η}} \text{ στήλη του } B, \text{ για το } z_{nn} \rightarrow n \text{ γινόμενα και } (n-1) \text{ προσθέσεις} \end{array} \right\} n(n+(n-1))$$

Η κάθε γραμμή του πίνακα A πολλαπλασιάζεται με όλες τις στήλες του B και προκύπτει μία νέα γραμμή στον πίνακα Z.

Η παραπάνω διαδικασία απαιτεί $n(n+1)$ αριθμητικές παραστάσεις και επειδή αυτό θα συμβεί n φορές απαιτούνται συνολικά $n^2(n+1) = n^2(2n+1)$.

5. Consider the problem of solving a system of n linear equations in n unknowns. Show that the Gaussian elimination method requires $O(n^3)$ arithmetic operations in order to either compute a solution or to decide that no solution exist.

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss είναι μία μέθοδος για την επίλυση πυκνών γραμμικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων που ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων στοιχείων αποτελείται κυρίως από μη μηδενικά στοιχεία.

Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της πολυπλοκότητας της μεθόδου, θα εξηγήσουμε πως δουλεύει η μέθοδος.

Στόχος της απαλοιφής του Gauss είναι να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ και $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Για να λύσουμε το σύστημα αυτό, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss προχωρά σε τριγωνοποίηση του πίνακα A , κι έτσι ο πίνακας γίνεται άνω τριγωνικός, κι έπειτα με προς τα πίσω αντικατάσταση βρίσκουμε τους αγνώστους.

Πιο αναλυτικά, έστω ότι βρισκόμαστε στο k -οστό βήμα της μεθόδου (αυτό σημαίνει ότι κοιτάμε την k γραμμή του πίνακα A). Τα βήματα που ακολουθούμε εδώ είναι κατά σειρά:

- Βρίσκουμε $(n - k)$ το πλήθος πολλαπλασιαστές m , όπου $m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ για $i = k + 1, k + 2, \dots, n$.
- Εφαρμόζουμε τον τύπο

$$a_{ij}^{new} = a_{ij}^{old} + m_{ik} \times a_{kj}^{(k)}$$

για $i = k + 1, k + 2, \dots, n$ και $j = k, k + 1, \dots, n$

- Εφαρμόζουμε τον τύπο

$$b_i^{new} = b_i^{old} + m_{ik} \times b_k^{(k)}$$

για $i = k + 1, k + 2, \dots, n$

Για την εύρεση της πολυπλοκότητας θα αναφερθούμε αρχικά στη γενική περίπτωση επίλυσης l το πλήθος γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα αγνώστων A . Άλλωστε, η "βαριά" υπολογιστικά εργασία είναι η τριγωνοποίηση του πίνακα A . Έπειτα θα περάσουμε στην περίπτωση όπου το $l = 1$.

Έστω πάλι ότι βρισκόμαστε στο k βήμα της μεθόδου:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3k} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & 0 & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ & & & & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & 0 & & & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(l)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(l)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & \dots & x_3^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_k^{(1)} & x_k^{(2)} & \dots & x_k^{(l)} \\ x_{k+1}^{(1)} & x_{k+1}^{(2)} & \dots & x_{k+1}^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \dots & b_1^{(l)} \\ b_2^{(1)} & b_2^{(2)} & \dots & b_2^{(l)} \\ b_3^{(1)} & b_3^{(2)} & \dots & b_3^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_k^{(1)} & b_k^{(2)} & \dots & b_k^{(l)} \\ b_{k+1}^{(1)} & b_{k+1}^{(2)} & \dots & b_{k+1}^{(l)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_n^{(1)} & b_n^{(2)} & \dots & b_n^{(l)} \end{bmatrix}$$

Για να εκτελέσουμε το βήμα 1 και να καταφέρουμε να μηδενίσουμε τα $a_{k+1,k}, \dots, a_{nk}$, πρέπει να βρούμε $(n-k)$ το πλήθος πολλαπλασιαστές τύπου m . Αρα, σε αυτό το βήμα θα εκτελεστούν $(n-k)$ διαιρέσεις.

Για να εκτελεστεί τα βήματα 2 και 3:

- για το γινόμενο ma θα εκτελεστούν $(n-k+l)$ γινόμενα $(n-k)$ φορές
- για την πρόσθεση $a+ma$ θα εκτελεστούν $(n-k+l)$ προσθαφαιρέσεις $(n-k)$ φορές.

Συνεπώς, για την πλήρη εκτέλεση του αλγορίθμου θα χρειαστούν:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ διαιρέσεις} \\ & \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+l) \text{ πολλαπλασιασμοί} \\ & \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+l) \text{ προσθαφαιρέσεις} \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των:

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} \text{ και } \sum_{k=1}^m k^2$$

προκύπτει τελικά ότι για την τριγωνποίηση του πίνακα A χρειαζόμαστε:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k = \\ & = n(n-1) - \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ διαιρέσεις} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+l) &= \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - nk + nl - kn + k^2 - kl) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} nk + \sum_{k=1}^{n-1} nl + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kl = \\
&= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2n \sum_{k=1}^{n-1} k + nl \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - l \sum_{k=1}^{n-1} k = \\
&= n^2(n-1) - 2n \frac{(n-1)n}{2} + nl(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - l \frac{(n-1)n}{2} = \\
&= n^2(n-1) - n^2(n-1) + \frac{1}{2}nl(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\
&= \frac{nl(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{3nl(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\
&= \frac{n(n-1)(3l+2n-1)}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+l) &= \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - nk + nl - kn + k^2 - kl) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} nk + \sum_{k=1}^{n-1} nl + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kl = \\
&= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2n \sum_{k=1}^{n-1} k + nl \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - l \sum_{k=1}^{n-1} k = \\
&= n^2(n-1) - 2n \frac{(n-1)n}{2} + nl(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - l \frac{(n-1)n}{2} = \\
&= n^2(n-1) - n^2(n-1) + \frac{1}{2}nl(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\
&= \frac{nl(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{3nl(n-1)}{6} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \\
&= \frac{n(n-1)(3l+2n-1)}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}
\end{aligned}$$

ενώ για τον υπολογισμό των x απαιτούνται:

$$l \sum_{k=1}^n 1 \text{ διαιρέσεις}$$

$$l \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$l \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Δηλαδή:

$$nl \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)l}{2} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)l}{2} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Συνεπώς, το σύνολο των πράξεων είναι:

$$\frac{n(n-1+2l)}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6l)}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6l)}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Αν $l = 1$ απαιτούνται:

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \text{ διαιρέσεις}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ προσθαφαιρέσεις}$$

Άρα, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων απαιτεί $O(n^3)$.

6. Suppose that we are given a set of vectors in \mathbb{R}^n that form a basis and let y be an arbitrary vector in \mathbb{R}^n . We wish to express y as a linear combination of the basis vectors. How can this be accomplished?

Έστω ότι τα $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ είναι το σύνολο που αποτελούν τη βάση.

Βάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν το V . Με άλλα λόγια το σύνολο $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ είναι βάση του V αν:

- $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in V$
- $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τα $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν η σχέση $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \vec{0}$ ισχύει μόνο για $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
- $\forall b \in V, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τω $b = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$.

Για να εκφράσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ πρέπει να βρούμε κατάλληλους συντελεστές τω

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_i b_j^i \quad \forall j \leq n$$

όπου το j δηλώνει το j -οστό στοιχείο των διανυσμάτων \vec{y} και \vec{b} και $a_i \in \mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν μοναδική λύση.

Έστω διάνυσμα $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ και έστω ότι μπορεί να αναπαρασταθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

$$\vec{z} = d_1 \vec{b}_1 + d_2 \vec{b}_2 + \dots + d_n \vec{b}_n \quad (1)$$

$$\vec{z} = m_1 \vec{b}_1 + m_2 \vec{b}_2 + \dots + m_n \vec{b}_n \quad (2)$$

με $d_i, m_i \in \mathbb{R}$.

Επειδή, όμως, $(1) = (2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} d_1 \vec{b}_1 + d_2 \vec{b}_2 + \dots + d_n \vec{b}_n &= m_1 \vec{b}_1 + m_2 \vec{b}_2 + \dots + m_n \vec{b}_n \Leftrightarrow \\ (d_1 - m_1) \vec{b}_1 + (d_2 - m_2) \vec{b}_2 + \dots + (d_n - m_n) \vec{b}_n &= \vec{0} \end{aligned}$$

και επειδή τα $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ είναι διανύσματα βάσης, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα:

$$(d_1 - m_1) = 0, (d_2 - m_2) = 0, \dots, (d_n - m_n) = 0$$

$$d_1 = m_1, d_2 = m_2, \dots, d_n = m_n$$

Συνεπώς, οι δύο αναπαραστάσεις του διανύσματος \vec{z} είναι ίδιες και η αναπαράστασή του από διανύσματα βάσης είναι μοναδική.

Για να βρούμε τα μοναδικά a_i για να εκφράσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα \vec{y} ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης καταλήγουμε σε μια σχέση όπως αυτή:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + \dots + a_n \vec{b}_n \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} &= a_1 \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ n_n^{(1)} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ n_n^{(2)} \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \cdot \\ \cdot \\ n_n^{(n)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ y_1 &= a_1 b_1^{(1)} + a_2 b_1^{(2)} + \dots + a_n b_1^{(n)} \\ y_2 &= a_1 b_2^{(1)} + a_2 b_2^{(2)} + \dots + a_n b_2^{(n)} \\ &\dots \\ y_n &= a_1 b_n^{(1)} + a_2 b_n^{(2)} + \dots + a_n b_n^{(n)} \end{aligned}$$

Άρα, για την εύρεση των μοναδικών a_i μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε μία συνάρτηση, που υπόκειται σε αυτούς τους περιορισμούς.