

Το Sudoku από τη σκοπιά του Γραμμικού Προγραμματισμού

Σιώρος Βασίλειος Ανδρινοπούλου Χριστίνα

Ιανουάριος, 2020

- Το Sudoku είναι ένα πάζλ βασισμένο στη λογική.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Figure: Παράδειγμα κλασσικού **Sudoku** 9×9

- Στόχος του παιχνιδιού είναι ο παίκτης να συμπληρώσει τα κενά κελιά ενός ημιτελώς συμπληρωμένου πίνακα.

Ορισμός 1: Sudoku

Οι κανόνες για το κλασσικό **Sudoku** σε έναν πίνακα μεγέθους $n \times n$ με υποπίνακες μεγέθους $m \times m$, όπου $m = \sqrt{n}$ είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους n να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους n να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους $m \times m$ να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .

- Οι αριθμοί μπορούν να αντικατασταθούν με οποιαδήποτε ομάδα συμβόλων, χωρίς να προκαλέσουν καμμία επίπτωση στην επίλυση, στη δημιουργία ή στη μαθηματική μοντελοποίηση του παζλ.
- Υπάρχουν διαθέσιμα **Sudoku** παζλ με βάση κινέζικα σύμβολα, κινέζικους αριθμούς και σύμβολα που αναπαριστούν μερίδες σουσί.

- Δημιουργός του εν λόγω παιχνιδιού υπήρξε ο Αμερικανός αρχιτέκτονας Howard Garns (Μάρτιος 1905 - Οκτώβριος 1989) το 1979.
- Το παιχνίδι αρχικά ονομάστηκε “Number Place” και δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Dell Pencil Puzzles & Word Games.
- Ένα χρόνο μετά το παιχνίδι έγινε ιδιαίτερα δημοφιλές στην Ιαπωνία και μετονομάστηκε σε “suji wa dokushin ni kagiru” (**Sudoku**).



Figure: Howard Garns

- Το **Sudoku** έγινε ιδιαίτερα αγαπητό στην Ιαπωνία, με τις μηνιαίες πωλήσεις **Sudoku** περιοδικών να ανέρχονται στα 600.000 αντίτυπα κάθε μήνα.
- Οι Ιάπωνες υιοθέτησαν το **Sudoku** ως συνήθεια για δύο βασικούς λόγους:
 - η γλώσσα τους δεν ήταν κατάλληλη για την ανάπτυξη σταυρόλεξων, οπότε υστερούσαν σε αυτά και
 - συνηθίζουν να μετακινούνται με τρένα και λεωφορεία.

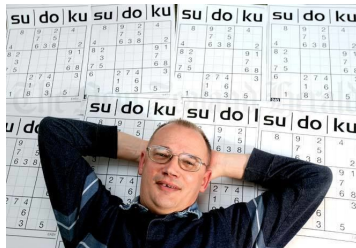


Figure: Wayne Gould

- Ο Wayne Gould , Νεοζηλανδός δικαστής, έφερε πίσω στον Δυτικό κόσμο το **Sudoku**.
- Το 1997 βρισκόταν στο Τόκιο και ανακάλυψε ένα **Sudoku**.
- Έφτιαξε το πρώτο πρόγραμμα που δημιουργούσε **Sudoku** παζλ.

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε σε βάθος:

- Μαθηματικές μεθοδολογίες για την επίλυση sudoku.
 - Μοντελοποίηση του προβλήματος της επίλυσης του παζλ ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
 - Παραλλαγές του κλασσικού sudoku.
 - Υλοποίηση σε **python**.
- Μαθηματικές τεχνικές για τη δημιουργία sudoku.
 - Κριτήρια sudoku παζλ.
 - Δημιουργία sudoku με bruteforce.
 - Δημιουργία sudoku από προγενέστερο παζλ.
 - Δημιουργία **Sudoku** παζλ βάση λογικών στρατηγικών.
 - Υλοποίηση σε **python**.
- Επίπεδα δυσκολίας **Sudoku** παζλ
 - Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας στην επίλυση **Sudoku** παζλ από τον άνθρωπο
 - Στατιστική προσέγγιση
 - Επίπεδο δυσκολίας και δεδομένοι όροι στο παζλ.

- Η μαθηματική μοντελοποίηση καθιστά δυνατή την εύρεση της λύσης του παζλ, αν υπάρχει, από έναν μαθηματικό αλγόριθμο.
- Το πρόβλημα επίλυσης ενός **Sudoku** παζλ είναι πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών.

- Ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών ορίζεται από δύο σύνολα:
 - το σύνολο μεταβλητών, X_1, X_2, \dots, X_t ,
 - το σύνολο περιορισμών, C_1, C_2, \dots, C_z
- Κάθε μεταβλητή X_i με $1 \leq i \leq t$ λαμβάνει τιμές από ένα πεδίο D_i .
- Κάθε περιορισμός C_j με $1 \leq j \leq z$ αφορά κάποιο υποσύνολο των μεταβλητών και καθορίζει ποιος είναι ο επιτρεπτός συνδυασμός τιμών για αυτό το υποσύνολο μεταβλητών.

- Έστω, ο $n \times n$ πίνακας **Sudoku** και οι υποπίνακες του μεγέθους $m \times m$.
- Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης ως εξής:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{αν το κελί } (i,j) \text{ του πίνακα περιέχει τον ακέραιο } k \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} & \min \quad 0^T x \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n \end{aligned}$$

μόνο ένα k σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε γραμμή του πίνακα

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος k σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in 0, 1$$

- Υπάρχουν παραλλαγές του κλασσικού παζλ **Sudoku**,
- Η επίλυσή τους είναι πιο απαιτητική σε σχέση με το κλασσικό παζλ.
- Η μοντελοποίησή του δε διαφέρει ιδιαίτερα από τη μοντελοποίηση για τα κλασσικά παζλ **Sudoku**.

- Το **Sudoku** Ξ είναι μία παραλλαγή του κλασσικού **Sudoku**.
- Έχει τον επιπλέον κανόνα ότι οι δύο μεγάλες διαγώνιοι του πίνακα πρέπει να περιέχουν κάθε ψηφίο από το 1 μέχρι το n ακριβώς μία φορά η κάθε μία.

Sudoku X

4		3						
							6	
	2	8		6	3		9	
					1	2		
	1	7		9				3
				3		5		
	7							

Figure: Παράδειγμα ενός **Sudoku X** παζλ. Οι δύο μεγάλες διαγώνιοι είναι σημειωμένες με μωβ χρώμα. Η κάθε μία πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9 ακριβώς μία φορά τον καθέναν.

Ορισμός 2: Sudoku X

Οι κανόνες για το **Sudoku** Ξ σε έναν πίνακα μεγέθους $n \times n$ με υποπίνακες μεγέθους $m \times m$, όπου $m = \sqrt{n}$ είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους n να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους n να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους $m \times m$ να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .
- Η διαγώνιος του πίνακα που ξεκινά από το κελί $(1,1)$ και καταλήγει στο κελί (n,n) να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .
- Η διαγώνιος του πίνακα που ξεκινά από το κελί $(1,n)$ και καταλήγει στο κελί $(n,1)$ να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} & \min \quad 0^T x \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n \end{aligned}$$

μόνο ένα k σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε γραμμή του πίνακα

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος k σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{r=1}^n x_{rrk} = 1 \quad k = 1 : 9$$

μόνο ένα k στην κύρια διαγώνιο

$$\sum_{r=1}^n x_{r(n+1-r)k} = 1 \quad k = 1 : 9$$

μόνο ένα k στη δευτερεύουσα διαγώνιο

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

Four Square **Sudoku**

- Το Four Square **Sudoku** είναι μία παραλλαγή του κλασσικού **Sudoku**.
- Υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε παζλ 9×9 .
- Ο επιπλέον κανόνας εδώ σχετίζεται με τέσσερις επιπλέον υποπεριοχές στον πίνακα μεγέθους 3×3 . Στίς περιοχές αυτές πρέπει να περιέχονται όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από το 1 ως το 9.

Four Square Sudoku

		7			4			1
			2	8				
2		6			9			
	5					2		6
	1			2			9	
6		4					7	
			8			9		2
				7	2			
8			4			6		

Figure: Παράδειγμα ενός Four Square **Sudoku** παζλ. Οι τέσσερις περιοχές είναι σημειωμένες με μωβ χρώμα. Η κάθε μία πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9 ακριβώς μία φορά τον καθέναν.

Ορισμός 3: Four Square Sudoku

Οι κανόνες για το Four Square **Sudoku** σε έναν πίνακα μεγέθους 9×9 με υποπίνακες μεγέθους 3×3 είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους 3×3 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπεριοχή μεγέθους 3×3 να περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 ως το 9.

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε γραμμή του πίνακα

Four Square Sudoku

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος k σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{r=i}^{i+2} \sum_{c=j}^{j+2} x_{rck} = 1 \quad i = 2, 6; \quad j = 2, 6; \quad k = 1 : 9$$

μόνο ένας ακέραιος k σε κάθε υποπεριοχή

Four Square Sudoku

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

Four Pyramids **Sudoku**

- Το Four Pyramids **Sudoku** είναι μία παραλλαγή του κλασσικού **Sudoku**.
- Υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε παζλ 9×9 .
- Η παραλλαγή είναι παρόμοια με την παραλλαγή στο Four Square **Sudoku** , με τη διαφορά ότι εδώ οι επιπλέον υποπεριοχές του πίνακα έχουν τριγωνική μορφή.

Four Pyramids Sudoku

				5				
			1		6			
		4				1		
			4	6	8			
		2				6		
	9						3	
		6	7		9	4		
	8						6	
	7						2	

Figure: Παράδειγμα ενός Four Pyramids **Sudoku** παζλ. Οι τέσσερις τριγωνικές περιοχές είναι σημειωμένες με γκρι χρώμα. Η κάθε μία πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9 ακριβώς μία φορά τον καθέναν.

Ορισμός 4: Four Pyramids **Sudoku**

Οι κανόνες για το Four Pyramids **Sudoku** σε έναν πίνακα μεγέθους 9×9 με υποπίνακες μεγέθους 3×3 είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους 3×3 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπεριοχή μεγέθους 3×3 να περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 ως το 9.

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε γραμμή του πίνακα

Four Pyramids Sudoku

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος k σε κάθε υποπίνακα

Four Pyramids Sudoku

$$\sum_{r=1}^3 \sum_{c=3+r}^{9-r} x_{rck} = 1 \quad k = 1 : 9$$

η πρώτη πυραμίδα να έχει μόνο ένα k

$$\sum_{c=1}^3 \sum_{r=1+c}^{7-c} x_{rck} = 1 \quad k = 1 : 9$$

η δεύτερη πυραμίδα να έχει μόνο ένα k

$$\sum_{r=7}^9 \sum_{c=11-r}^{r-7} x_{rck} = 1 \quad k = 1 : 9$$

η τρίτη πυραμίδα να έχει μόνο ένα k

$$\sum_{c=7}^9 \sum_{r=13-c}^{c-1} x_{rck} = 1 \quad k = 1 : 9$$

η τέταρτη πυραμίδα να έχει μόνο ένα k

Four Pyramids Sudoku

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

- Το Position **Sudoku** είναι μία παραλλαγή του κλασσικού **Sudoku**.
- Υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε παζλ 9×9 .
- Τα κελιά $(1,1)$ σε όλους τους 3×3 υποπίνακες πρέπει να περιέχουν όλους τους ακέραιους από το 1 ως το 9 ακριβώς μια φορά, αντίστοιχα τα κελιά $(1,2)$ όλων των υποπινάκων κ.ο.κ.

Position Sudoku

		6	7				8	1
	4					9		
	8				3			
	5			7				
		3	5		6	7		
				3			5	
			8				6	
		2					9	
5	6				9	3		

Figure: Παράδειγμα ενός Position **Sudoku** παζλ. Κάθε κελί με το ίδιο χρώμα πρέπει να περιέχει όλους τους αριθμούς από το 1 έως και το 9 ακριβώς μία φορά τον καθέναν.

Ορισμός 5: Position **Sudoku**

Οι κανόνες για το Position **Sudoku** σε έναν πίνακα μεγέθους 9×9 με υποπίνακες μεγέθους 3×3 είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους 3×3 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε κελί (i,j) με $i=1:9$ και $j=1:9$ σε όλους τους υποπίνακες 3×3 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε γραμμή του πίνακα

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος k σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{a=0}^2 \sum_{b=0}^2 x_{(3a+i)(3b+j)k} = 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad k = 1 : 9$$

μόνο ένα k σε κελιά υποπινάκων με ίδιες συντεταγμένες

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

Three Magic **Sudoku**

- Το Three Magic **Sudoku** είναι μία παραλλαγή του κλασσικού **Sudoku**.
- Υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε παζλ 9×9 .
- Στα σημειωμένα 3×3 κουτιά (magic) οι 3 αριθμοί σε κάθε στήλη και οι 3 αριθμοί σε κάθε γραμμή αν αθροιστούν δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Three Magic Sudoku

- Το αποτέλεσμα αυτό είναι ο αριθμός 15!
- Αν αθροίσουμε γραμμές και στήλες στα 3×3 κουτιά, κάθε αριθμός προστίθεται 2 φορές.
- Το άθροισμα των αριθμών από το 1 ως το 9 είναι 45.
- Άρα το παραπάνω άθροισμα είναι 90.
- Αν διαιρέσουμε το 90 με το 6 (3 στήλες και 3 γραμμές) προκύπτει το 15.

Three Magic Sudoku

	8							
3	5				7			
		9			1			
						6	4	
	1	4						
			3			5		
			9				1	6
							8	

Figure: Παράδειγμα ενός Three Magic **Sudoku** παζλ. Οι 3 αριθμοί σε κάθε στήλη και οι 3 αριθμοί σε κάθε γραμμή στα πράσινα 3×3 κουτιά πρέπει αν προτεθούν να δίνουν τον ίδιο αριθμό.

Ορισμός 6: Three Magic Sudoku

Οι κανόνες για το Three Magic **Sudoku** σε έναν πίνακα μεγέθους 9×9 με υποπίνακες μεγέθους 3×3 είναι:

- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους 9 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους 3×3 να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Σε κάθε μαγικό κουτί το άθροισμα των στηλών και των γραμμών πρέπει να είναι το ίδιο.

Three Magic Sudoku

- Η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι:

$$\min \quad 0^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ijk} = 1 \quad j = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε στήλη του πίνακα

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad k = 1 : n$$

μόνο ένα k σε κάθε γραμμή του πίνακα

Three Magic Sudoku

$$\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1 \quad k = 1 : n, \quad p = 1 : m, \quad q = 1 : m$$

μόνο ένας ακέραιος k σε κάθε υποπίνακα

$$\sum_{c=7}^9 \sum_{k=1}^9 kx_{rck} = 15 \quad r = 1 : 3$$

αθροίσματα γραμμών

$$\sum_{r=1}^3 \sum_{k=1}^9 kx_{rck} = 15 \quad c = 7 : 9$$

αθροίσματα στηλών

Three Magic Sudoku

$$\sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1 \quad i = 1 : n, \quad j = 1 : n$$

όλα τα κελιά του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν

$$x_{ijk} = 1 \forall (i, j, k) \in G$$

τα κελιά του πίνακα που είναι συμπληρωμένα είναι "on"

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

- Κριτήρια sudoku παζλ.
- Δημιουργία sudoku με bruteforce.
- Δημιουργία sudoku από προγενέστερο παζλ.
- Δημιουργία **Sudoku** παζλ βάση λογικών στρατηγικών .

- Ενα παζλ **Sudoku** οφείλει να πληρεί ορισμένες βασικές προϋποθέσεις,
 - για να έχει λύση
 - για να επιθυμεί κάποιος να ενασχοληθεί με αυτό.
- Τα κριτήρια είναι:

- Να έχει μοναδική λύση.
- Να μην απαιτεί από τον λύτη να μπαίνει σε διαδικασία να μαντέψει αν η λύση είναι σωστή ή όχι μία δεδομένη στιγμή.
- Να κατατάσσεται ορθά σε επίπεδα δυσκολίας.
- Να έχει την ίδια διαβαθμιση δυσκολίας κατά τη διαδικασία επίλυσής του.
- Να έχει απλή μορφή.
- Να είναι συμμετρικό.

Δημιουργία **Sudoku** παζλ με bruteforce

- Σε έναν πίνακα μεγέθους $n \times n$ τοποθετούμε τυχαία αριθμούς από το 1 ως το n στα κελιά του.
- Ελέγχουμε αν ο τελικός πίνακας συμμορφώνεται με τους κανόνες του **Sudoku**.
- Η τεχνική αυτή δημιουργεί περίπου n^n διαφορετικούς πίνακες και φυσικά δε συμμορφώνονται όλοι τους με τους κανόνες του **Sudoku**.

Δημιουργία **Sudoku** παζλ από προγενέστερα παζλ

- Δημιουργία νέων παζλ βασισμένοι σε κάποιο άλλο **Sudoku** παζλ.
- Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να διατυπώσουμε μερικούς μαθηματικούς ορισμούς και θεωρήματα.

Ορισμός 7: Sudoku πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας S είναι **Sudoku** πίνακας αν ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν το μέγεθος του πίνακα είναι n , τότε θα πρέπει να ισχύει ότι $n = m^2$, όπου το m μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός.
- Κάθε γραμμή του πίνακα μεγέθους n να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .
- Κάθε στήλη του πίνακα μεγέθους n να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το 9.
- Κάθε υποπίνακας μεγέθους $m \times m$ να περιέχει ακριβώς μια φορά κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 ως το n .

- Μία πολύ απλή προσέγγιση είναι από ένα παζλ S να καταλήξουμε σε ένα νέο παζλ \bar{S} αντιστρέφοντας τον πίνακα S .

Θεώρημα 1

Αν ο S είναι ένας πίνακας **Sudoku**, τότε και ο S^T είναι πίνακας **Sudoku**.

Δημιουργία **Sudoku** παζλ από προγενέστερα παζλ

- Μία εξίσου έξυπνη ιδέα είναι να αλλάξουμε τις γραμμές με τις στήλες από ένα παζλ S και να καταλήξουμε σε ένα νέο παζλ \bar{S} .
- Με αυτόν τον τρόπο παράγουμε περισσότερα από ένα παζλ.

Θεώρημα 2

Αν S είναι ένας πίνακας **Sudoku**, τότε ένας νέος πίνακας **Sudoku** \bar{S} μπορεί να δημιουργηθεί αλλάζοντας τη θέση σε γραμμές και στήλες σε επίπεδο υποπίνακα.

Δημιουργία **Sudoku** παζλ από προγενέστερα παζλ

- Άλλη μία προσέγγιση είναι να αλλάξουμε τους αριθμούς του παζλ.

Θεώρημα 3

Αν S είναι ένας πίνακας **Sudoku**, τότε ένας νέος πίνακας **Sudoku** \bar{S} μπορεί να δημιουργηθεί αλλάζοντας τους ακέραιους αριθμούς του S , με ένα προς ένα αντιστοίχιση ανάμεσα στο σύνολο $\alpha = (1, 2, \dots, n)$ που κατασκευάζει το S και στο σύνολο β , που είναι υπεύθυνο για την κατασκευή του \bar{S} και είναι μία μετάθεση του συνόλου α .

- Κατασκευή πίνακα και συμπλήρωσή του, βάση λογικών στρατηγικών, με όλους τους αριθμούς από το 1 ως το n .
- Αφαίρεση ψηφίων από τον πίνακα, για να οδηγηθούμε στη τελική μορφή του παζλ.
- Έπειτα από κάθε αφαίρεση, έλεγχος αν το προκύπτον παζλ είναι επιλύσιμο, αλλιώς επανατοποθέτηση.

- Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας στην επίλυση **Sudoku** παζλ από τον άνθρωπο
- Στατιστική προσέγγιση
- Επίπεδο δυσκολίας και δεδομένοι όροι στο παζλ.

- Ορίζουμε το πρόβλημα επίλυσης **Sudoku** παζλ ως πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών.
- Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις για την επίλυση ενός προβλήματος απόφασης για **Sudoku** παζλ,
 - backtracking
 - constraint propagation

- Το backtracking είναι ουσιαστικά ένας bruteforce τρόπος επίλυσης προβλημάτων περιορισμών.
- Ξεκινά με μία κενή ανάθεση τιμών στις μεταβλητές του προβλήματος και αναθέτοντας τιμές τη μία μετά την άλλη επιχειρεί να καταλήξει σε λύση.
- Η τεχνική αυτή είναι σίγουρο πως θα καταλήξει σε λύση, αφού ουσιαστικά ελέγχει όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να συμπληρωθεί ένα παζλ.

Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας

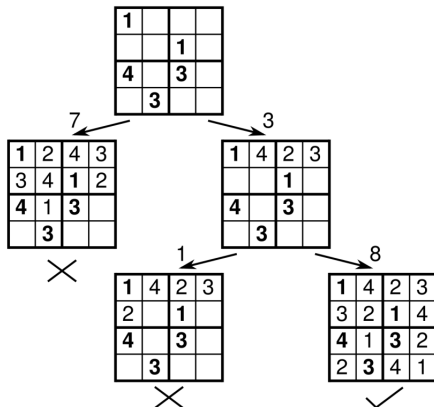


Figure: Μέρος της διαδικασίας επίλυσης ενός 4×4 **Sudoku** με την τεχνική backtracking

Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας

- Με την constraint propagation τεχνική χρησιμοποιούμε τη λογική για να βρούμε την τιμή κάποιων μεταβλητών, εξετάζοντας τους περιορισμούς.
- Για κάθε μεταβλητή ορίζουμε ένα σύνολο τιμών που μπορεί να λάβει χωρίς να προκαλέσει την παραβίαση κανενός περιορισμού.
- Η τεχνική αυτή δεν είναι βέβαιο πως θα οδηγήσει σε λύση, αλλά σίγουρα είναι πιο αποδοτική.
- Μπορεί να συνδυαστεί με backtracking για καλύτερα αποτελέσματα.

Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας

1	2,4	2,4	2,3, 4
2 3	2,4	1	2,3, 4
4	1 2	3	1,2
2	3	2,4	1,2, 4

Figure: Μέρος της διαδικασίας επίλυσης ενός 4×4 **Sudoku** με την τεχνική constraint propagation

- Το constraint propagation είναι η τεχνική που χρησιμοποιεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος για να επιλύσει ένα **Sudoku** παζλ.
- Συγκεκριμένα ο άνθρωπος χρησιμοποιεί δύο είδη τεχνικών:
 - Naked single technique: όπου για ένα δεδομένο κελί του πίνακα υπάρχει μόνο μία τιμή που μπορεί να ανατεθεί, καθώς όλες οι υπόλοιπες τιμές πλήττουν κάποιον περιορισμό
 - Hidden single technique: όπου για μία συγκεκριμένη γραμμή ή στήλη ή για έναν συγκεκριμένο υποπίνακα του παζλ υπάρχει μόνο ένα κελί που μπορεί να φιλοξενήσει μία συγκεκριμένη τιμή.

- Το πείραμα που πραγματοποιήθηκε για να συσχετίσει τη συμπεριφορά των ανθρώπων απέναντι σε παζλ, ώστε να προκύψουν συμπεράσματα για τα επίπεδα δυσκολίας τους αντλεί δεδομένα από τον παγκόσμιο ιστό.
- Ως μέτρο για την εκτίμηση της δυσκολίας των ανθρώπων να λύσουν ένα παζλ **Sudoku** χρησιμοποιήθηκε ο μέσος χρόνος επίλυσης.

Μελέτη των επιπέδων δυσκολίας

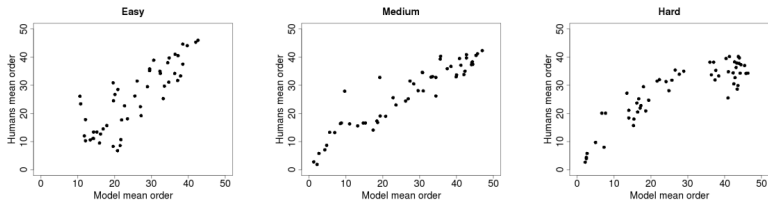


Figure: Αποτελέσματα του πειράματος

- Παραθέτουμε στατιστική μελέτη του ζητήματος της ταξινόμησης των **Sudoku** παζλ ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους, που πραγματοποιήθηκε με πραγματικά δεδομένα από το διαδίκτυο.
- Τα εν λόγω δεδομένα ήταν ορθές καταχωρήσεις λυμένων παζλ από χρήστες του Διαδικτύου σε ένα καθημερινό διαγωνισμό.
- Καθημερινά συγκεντρώνονταν 2000 με 3000 καταχωρήσεις σωστά λυμένων παζλ.

- Τα επίπεδα δυσκολίας ήταν από πριν καθορισμένα και η μελέτη αυτή ήρθε να επιβεβαιώσει την κατηγοριοποίηση τους σε "Gentle", "Moderate", "Tough" και "Diabolical".
- Αφού οι άνθρωποι έλυναν κάποιο/-α παζλ έπειτα έπρεπε να δηλώσουν τον χρόνο που χρειάστηκαν, για να καταφέρουν να φτάσουν στη λύση.
- Η επιλογή έγινε από συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα,
- Παραθέτουμε τα αποτελέσματα της μελέτης.

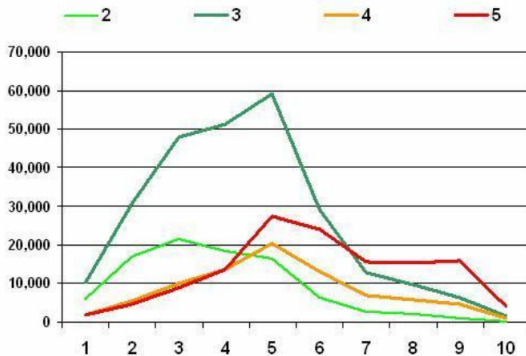


Figure: Γράφημα της στατιστικής μελέτης για την ταξινόμηση των **Sudoku** ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους. Gentle = ανοιχτό πράσινο, Moderate = σκούρο πράσινο, Tough = κίτρινο, Diabolical = κόκκινο

Στατιστική μελέτη

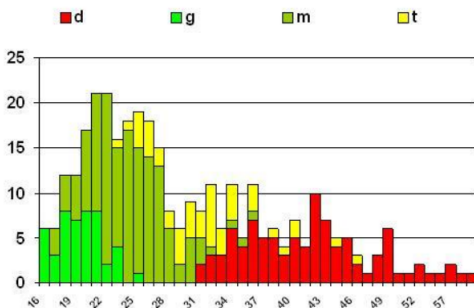


Figure: Γράφημα της στατιστικής μελέτης για την ταξινόμηση των **Sudoku** ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους . Gentle = ανοιχτό πράσινο, Moderate = σκούρο πράσινο, Tough = κίτρινο, Diabolical = κόκκινο

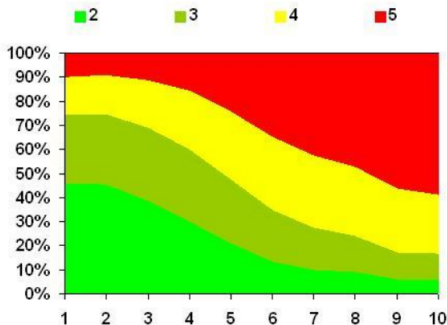


Figure: Γράφημα της στατιστικής μελέτης για την ταξινόμηση των **Sudoku** ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας τους . Gentle = ανοιχτό πράσινο, Moderate = σκούρο πράσινο, Tough = κίτρινο, Diabolical = κόκκινο

- Τα συμπληρωμένα κελιά ενός παζλ καθορίζουν σημαντικά τα επίπεδα δυσκολίας ενός παζλ.
- Το πλήθος των συμπληρωμένων κελιών, καθώς επίσης και οι θέσεις τους στον πίνακα παίζουν καθοριστικό ρόλο για το πώς θα χαρακτηριστεί ένα παζλ.
- Οι παρακάτω πίνακες συνοψίζουν τη σχετική γνώση.

Δεδομένοι όροι στο παζλ

Επίπεδο δυσκολίας	Πλήθος δεδομένων κελιών
Πολύ εύκολο	Περισσότερα από 46
Εύκολο	36-46
Μέτριο	32-35
Δύσκολο	28-31
Πολύ δύσκολο	17-27

Δεδομένοι όροι στο παζλ

Επίπεδο δυσκολίας	Ελάχιστος δεδομένα κελιά ανά γραμμή/στήλη
Πολύ εύκολο	5
Εύκολο	4
Μέτριο	3
Δύσκολο	2
Πολύ δύσκολο	0

- *Sudoku Creation and Grading*, Andrew C. Stuart,
Φεβρουάριος 2007 - ενημερώθηκε τον Ιανουάριος 2012
- *An Exhaustive Study on different Sudoku Solving Techniques*,
Arnab Kumar Maji, Sunanda Jana, Sudipta Roy, Rajat Kumar
Pal, *International Journal of Computer Science Issues*, Vol.
11, Issue 2, No 1, Μάρτιος 2014
- *Human Problem Solving:Sudoku Case Study*, Radek Pelánek,
Ιανουάριος 2011

- *"The History of Sudoku"*, www.sudoku.com,
<https://sudoku.com/how-to-play/the-history-of-sudoku/>
- *"Howard Garns"*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Howard_Garns
- *Binary Integer Programming and its Use for Envelope Determination*, Vladimir Y. Lunin, Alexandre Urzhumtsev, Alexander Bockmayr
- *An Integer Programming Model for the Sudoku Problem*, Andrew C. Bartlett, Timothy P. Chartier, Amy N. Langville, Timothy D. Rankin, 3 Μάη 2008

- Τεχνητή Νοημοσύνη Μία σύγχρονη προσέγγιση, Δεύτερη Αμερικανική έκδοση, εκδόσεις Κλειδάριθμος, Stuart Russell, Peter Norvig, ISBN: 960-209-873-2, Κεφάλαιο 5 Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών, σελ.:179,180,181
- The number of 9×9 Latin squares, Discrete Mathematics, Stanley Bammel and Jermome Rothstein, 1975
- There are 6670903752021072936960 Sudoku grids, Bertram Felgenhauer and Frazer Jarvis, <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/>
- There are 5472730538 essentially different Sudoku grids . . . and the Sudoku symmetry group, Ed Russell and Frazer Jarvis, <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html/>