Cuaterniones

February 15, 2018

Segunda clase: cuaterniones!

Operatoria de cuaterniones

¿Cómo eran los cuaterniones?

Operatoria de cuaterniones

¿Cómo eran los cuaterniones?

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

Operatoria de cuaterniones

¿Cómo eran los cuaterniones?

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

- En general no conmutan (esa propiedad se pierde)
- El producto de un número real y un cuaternión sí conmutan.
- La suma de dos cuaterniones es conmutativa
- La suma y el producto es asociativo

Operatoria de cuaterniones

¿Cómo eran los cuaterniones?

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

- En general no conmutan (esa propiedad se pierde)
- El producto de un número real y un cuaternión sí conmutan.
- La suma de dos cuaterniones es conmutativa
- La suma y el producto es asociativo

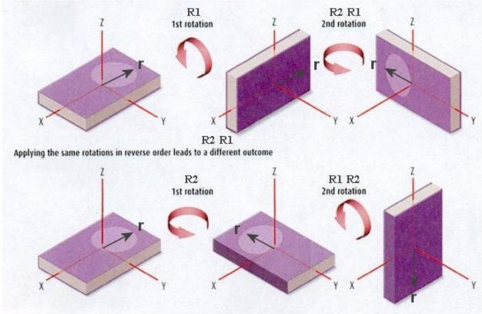
¿A ustedes como les aparecen cuando los usan?

¿Y por qué no conmutan?

¿Por qué en general $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$?

¿Y por qué no conmutan?

¿Por qué en general $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$?



Porque las rotaciones no conmutan.

¡Aun hay más!

$$\begin{array}{c} \textit{Sedeniones}\cancel{\text{(son una bosta)}} \\ \uparrow \\ \textit{Octoniones} \\ \uparrow o_1 \cdot (o_2 \cdot o_3) \neq (o_1 \cdot o_2) \cdot o_3 \\ \textit{Cuaterniones} \\ \uparrow q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1 \\ \textit{Complejos} \\ \uparrow \text{todo es lindo} \\ \textit{Reales} \end{array} \tag{1}$$

Cuaterniones como DigiEvolución de los números complejos

Igual a mí me gustaba más Pokemon.

En $2D$, si v, z son números complejos, cuando los multiplico me da v rotado en el ángulo de z

$$w = v \cdot z$$

Cuaterniones como DigiEvolución de los números complejos

Igual a mí me gustaba más Pokemon.

En $2D$, si v, z son números complejos, cuando los multiplico me da v rotado en el ángulo de z

$$w = v \cdot z$$

En $3D$, si v tiene 3 dimensiones y q es un cuaternión de longitud 1, esta cuenta me devuelve v rotado 'según' el cuaternión:

$$\hat{w} = q \cdot \hat{v} \cdot q^*$$

Cuaterniones como DigiEvolución de los números complejos

Igual a mí me gustaba más Pokemon.

En $2D$, si v, z son números complejos, cuando los multiplico me da v rotado en el ángulo de z

$$w = v \cdot z$$

En $3D$, si v tiene 3 dimensiones y q es un cuaternión de longitud 1, esta cuenta me devuelve v rotado 'según' el cuaternión:

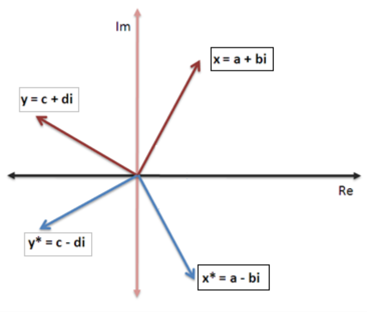
$$\hat{w} = q \cdot \hat{v} \cdot q^*$$

Conjugación

Dado $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$, definimos:

$q^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$ el conjugado de q.

Con los complejos era parecido pero había menos letras:



De paso: longitud de un cuaternión

Longitud de un número complejo $a + b \cdot \mathbf{i}$: $\sqrt{a^2 + b^2}$

'Longitud' de un cuaternión $a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

De paso: longitud de un cuaternión

Longitud de un número complejo $a + b \cdot \mathbf{i}$: $\sqrt{a^2 + b^2}$

'Longitud' de un cuaternión $a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Vale que si la longitud del cuaternión es 1, entonces el inverso multiplicativo es el conjugado.

¿Se acuerdan por qué valía con complejos?

'Aumentar' $v \in \mathbb{R}^3$ (3 dim) a $\hat{v} \in Cuat$

Dado $v = (v_1, v_2, v_3)$, defino $\hat{v} = 0 + v_1 \cdot \mathbf{i} + v_2 \cdot \mathbf{j} + v_3 \cdot \mathbf{k}$

'Aumentar' $v \in \mathbb{R}^3$ (3 dim) a $\hat{v} \in Cuat$

Dado $v = (v_1, v_2, v_3)$, defino $\hat{v} = 0 + v_1 \cdot \mathbf{i} + v_2 \cdot \mathbf{j} + v_3 \cdot \mathbf{k}$

Lo 'aumento' para que tenga 4 dimensiones.

Volvamos a la formulita

Si v es un vector de 3 dimensiones en el espacio y q es un cuaternión de longitud 1, esta cuenta me devuelve v rotado 'según' el cuaternión:

$$\hat{w} = q \cdot \hat{v} \cdot q^*$$

Volvamos a la formulita

Si v es un vector de 3 dimensiones en el espacio y q es un cuaternión de longitud 1, esta cuenta me devuelve v rotado 'según' el cuaternión:

$$\hat{w} = q \cdot \hat{v} \cdot q^*$$

Pasos:

- 'Aumento' al vector v
- Lo multiplico por q
- Lo multiplico por q^*, que es el conjugado de q
- Eso rota v, pero, el resultado queda 'aumentado' (o sea, la parte escalar, que no acompaña a ninguna letra, es 0)

Multiplicar los cuaterniones es como componer las rotaciones

¿Pero en qué orden?

Multiplicar los cuaterniones es como componer las rotaciones

¿Pero en qué orden?

Si tengo:

$$\hat{v}_2 = p \cdot \hat{v}_1 \cdot p^*$$

y luego hago:

$$\hat{v}_3 = q \cdot \hat{v}_2 \cdot q^*$$

Multiplicar los cuaterniones es como componer las rotaciones

¿Pero en qué orden?

Si tengo:

$$\hat{v}_2 = p \cdot \hat{v}_1 \cdot p^*$$

y luego hago:

$$\hat{v}_3 = q \cdot \hat{v}_2 \cdot q^*$$

Esto es lo mismo que:

$$\hat{v}_3 = qp \cdot \hat{v}_2 \cdot (qp)^*$$

$$C(\psi) = \psi_* :$$

such that the following diagram is comm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\psi"'] & {} \\ & L \end{tikzcd}$$

ms

s d. With

De Rham

By abstract nonsense, a Clifford algeb

unique isomorphism. Furthermore, it is

is generated by the image of ρ, i.e. by $\rho($

We shall write

Slide optativa: ¿por qué necesitamos dos números más que en $2D$?

Hay dos cuentas que muestran por qué no anda agregar sólo **i** y **j**:

- Porque necesitamos 4 letras para describir a todas las rotaciones en $3D$.

Slide optativa: ¿por qué necesitamos dos números más que en $2D$?

Hay dos cuentas que muestran por qué no anda agregar sólo $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$:

- Porque necesitamos 4 letras para describir a todas las rotaciones en $3D$.
- Si usáramos sólo $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ el álgebra se rompería. (Suponés que $\mathbf{ij} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j}$, multiplicás a izquierda por $\mathbf{i}$ y llegás a algo imposible)

Los cuaterniones como rotaciones (con ejemplo)

Si tenemos el eje (el mango del pisapapas) y el ángulo con que queremos rotar, es inmediato definirse el cuaternión que describe *esa rotación*:

Los cuaterniones como rotaciones (con ejemplo)

Si tenemos el eje (el mango del pisapapas) y el ángulo con que queremos rotar, es inmediato definirse el cuaternión que describe *esa rotación*:

Si $N = (n_x, n_y, n_z)$ es un punto (vector) de longitud 1 (el mango del pisapapas) y θ es un ángulo, entonces:

Los cuaterniones como rotaciones (con ejemplo)

Si tenemos el eje (el mango del pisapapas) y el ángulo con que queremos rotar, es inmediato definirse el cuaternión que describe *esa rotación*:

Si $N = (n_x, n_y, n_z)$ es un punto (vector) de longitud 1 (el mango del pisapapas) y θ es un ángulo, entonces:

$$q = cos(\theta/2) + sen(\theta/2)\ n_x\ \mathbf{i} + sen(\theta/2)\ n_y\ \mathbf{j} + sen(\theta/2)\ n_z\ \mathbf{k}$$

representa una rotación en los planos perpendiculares a $\hat{n}$ con ese ángulo.

Los cuaterniones como rotaciones (con ejemplo)

Si tenemos el eje (el mango del pisapapas) y el ángulo con que queremos rotar, es inmediato definirse el cuaternión que describe *esa rotación*:

Si $N = (n_x, n_y, n_z)$ es un punto (vector) de longitud 1 (el mango del pisapapas) y θ es un ángulo, entonces:

$$q = cos(\theta/2) + sen(\theta/2)\ n_x\ \mathbf{i} + sen(\theta/2)\ n_y\ \mathbf{j} + sen(\theta/2)\ n_z\ \mathbf{k}$$

representa una rotación en los planos perpendiculares a $\hat{n}$ con ese ángulo.

(¿con complejos era parecido?)

Los cuaterniones como rotaciones (con ejemplo)

Si tenemos el eje (el mango del pisapapas) y el ángulo con que queremos rotar, es inmediato definirse el cuaternión que describe *esa rotación*:

Si $N = (n_x, n_y, n_z)$ es un punto (vector) de longitud 1 (el mango del pisapapas) y θ es un ángulo, entonces:

$$q = cos(\theta/2) + sen(\theta/2)\ n_x\ \mathbf{i} + sen(\theta/2)\ n_y\ \mathbf{j} + sen(\theta/2)\ n_z\ \mathbf{k}$$

representa una rotación en los planos perpendiculares a $\hat{n}$ con ese ángulo.

(¿con complejos era parecido?)

Observaciones:

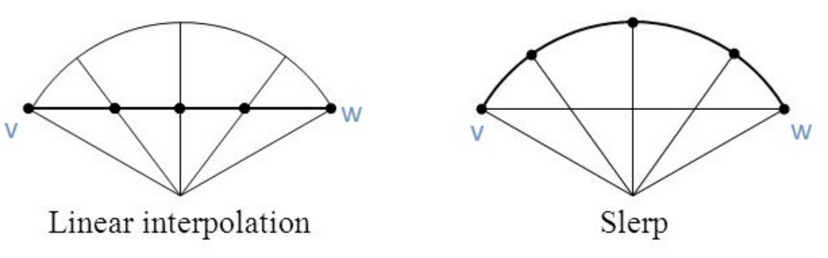
- Si uso q ó $-q$ obtengo la misma rotación. Pero, salvo esto, por cada rotación del espacio hay un sólo cuaternión que la representa.
- Con $q = 1 + 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ obtengo la rotación 'no hacer nada'.

¿Por qué multiplicamos el ángulo por 2?

Dos razones:

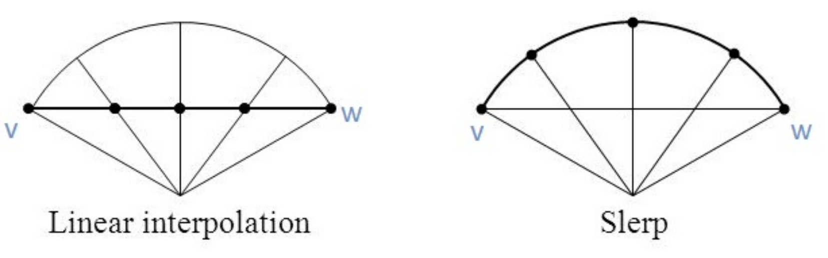
- como estamos multiplicando dos veces por el cuaternión necesitamos que cada uno 'tenga' la mitad del ángulo de rotación.
- Si **no** multiplicáramos el ángulo por dos, tendríamos el siguiente problema (dibujito)

SLERP: interpolación a velocidad constante



¿Cómo hacemos si queremos rotar un punto v a otro punto llamado w a velocidad constante?

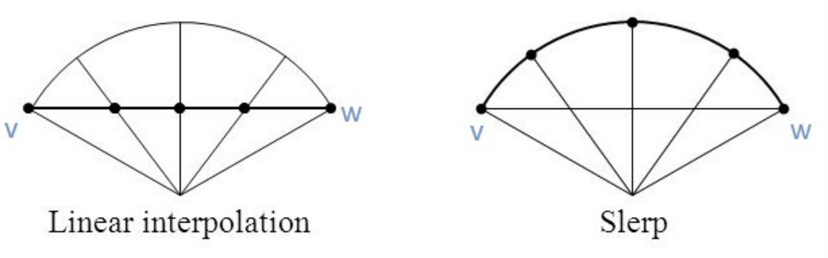
SLERP: interpolación a velocidad constante



¿Cómo hacemos si queremos rotar un punto v a otro punto llamado w a velocidad constante?

Necesariamente w debe ser v rotado, por un quaternión q. O sea, $\hat{w} = q\hat{v}q^{-1}$.

SLERP: interpolación a velocidad constante



¿Cómo hacemos si queremos rotar un punto v a otro punto llamado w a velocidad constante?

Necesariamente w debe ser v rotado, por un quaternión q. O sea, $\hat{w} = q\hat{v}q^{-1}$.

SLERP: interpolación a velocidad constante (cont)

Resolvamos un problema más 'genérico' (es más fácil así):

Tenemos $p\hat{v}p^{-1}$ y lo queremos mover a $q\hat{v}q^{-1}$.

(Si tomamos $p = 1$ recuperamos el problema original)

SLERP: interpolación a velocidad constante (cont)

Resolvamos un problema más 'genérico' (es más fácil así):

Tenemos $p\hat{v}p^{-1}$ y lo queremos mover a $q\hat{v}q^{-1}$.

(Si tomamos $p = 1$ recuperamos el problema original)

¿Cómo hacemos?

SLERP: interpolación a velocidad constante (cont)

Resolvamos un problema más 'genérico' (es más fácil así):

Tenemos $p\hat{v}p^{-1}$ y lo queremos mover a $q\hat{v}q^{-1}$.

(Si tomamos $p = 1$ recuperamos el problema original)

¿Cómo hacemos?

¡La idea va a ser olvidarnos del vector v y mover los cuaterniones!

Primero con numeritos

Queremos mover p a q. Finjamos primero que no son cuaterniones, sino numeritos reales.

Primero con numeritos

Queremos mover p a q. Finjamos primero que no son cuaterniones, sino numeritos reales.

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

$f'(t) = -p + q$: se mueve a velocidad constante.

Primero con numeritos

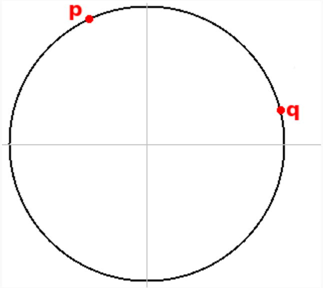
Queremos mover p a q. Finjamos primero que no son cuaterniones, sino numeritos reales.

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

$f'(t) = -p + q$: se mueve a velocidad constante.

Nota: la misma formulita en 3D anda bien.

Ahora en la circunferencia



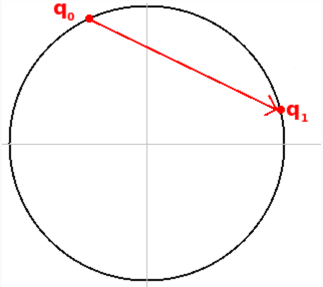
Quiero una función $f(t)$ tal que $f(0) = p, f(1) = q$, y además f' constante (para tener velocidad constante)

$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$ anda en el sentido de que también se mueve a velocidad constante.

Pero...no se queda en la circunferencia.

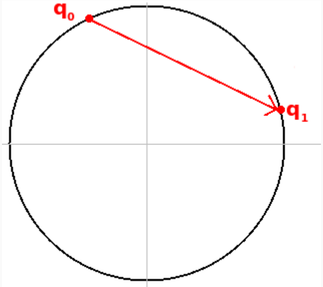
Ahora en la circunferencia (II)

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$



Ahora en la circunferencia (II)

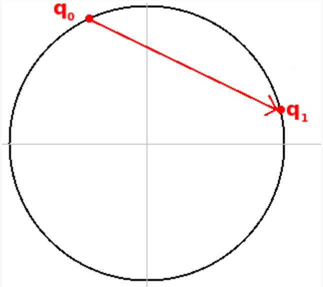
$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$



¿Cómo hacemos para que vaya por la circunferencia?

Ahora en la circunferencia (II)

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

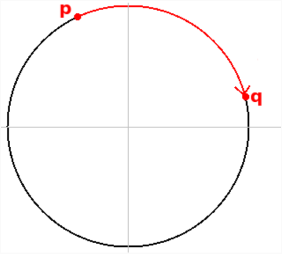


¿Cómo hacemos para que vaya por la circunferencia?

Ahora en la circunferencia(III)

- Los puntos de la circunferencia son los que tienen módulo 1
- Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\frac{(x,y)}{||(x,y)||}$ tiene módulo 1, y está en la circunferencia.

$$f(t) = \frac{(1-t)\cdot p + t \cdot q}{||(1-t)\cdot p + t\cdot q||}$$



Pero...no va a velocidad constante. Hay que arreglar un poco las cosas.

¿Y con cuaterniones?

$$(1-t)\cdot p + t\cdot q$$

Una vez arreglada la función para que la velocidad quede igual a 1, sirve para puntos en el plano, y también cuaterniones:

$$Slerp(p,q,t) = \frac{sen((\mathbf{1\text{-}t})\theta)}{sen(\theta)}p + \frac{sen(\mathbf{t}\theta)}{sen(\theta)}q$$

¿Y con cuaterniones?

$$(1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

Una vez arreglada la función para que la velocidad quede igual a 1, sirve para puntos en el plano, y también cuaterniones:

$$Slerp(p, q, t) = \frac{sen(\mathbf{(1\text{-}t)}\theta)}{sen(\theta)} p + \frac{sen(\mathbf{t}\theta)}{sen(\theta)} q$$

¡Fíjense la simetría que tiene!

(θ se obtiene a partir de p y q, es 'el ángulo' entre ellos)

Volvamos a interpolación de numeritos

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

Es lo mismo que:

$$f(t) = p - t \cdot p + t \cdot q = p + (-p + q) \cdot t$$

Volvamos a interpolación de numeritos

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

Es lo mismo que:

$$f(t) = p - t \cdot p + t \cdot q = p + (-p + q) \cdot t$$

Esa idea se puede trasladar a cuaterniones, miremos cómo:

$$f(t) = p(p^* q)^t$$

Volvamos a interpolación de numeritos

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

Es lo mismo que:

$$f(t) = p - t \cdot p + t \cdot q = p + (-p + q) \cdot t$$

Esa idea se puede trasladar a cuaterniones, miremos cómo:

$$f(t) = p(p^* q)^t$$

donde *elevar a la t* es algo parecido a la exponenciación que todos conocemos de los números reales.

Volvamos a interpolación de numeritos

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

Es lo mismo que:

$$f(t) = p - t \cdot p + t \cdot q = p + (-p + q) \cdot t$$

Esa idea se puede trasladar a cuaterniones, miremos cómo:

$$f(t) = p(p^* q)^t$$

donde *elevar a la t* es algo parecido a la exponenciación que todos conocemos de los números reales.

Y como al multiplicar dos cuaterniones se multiplican los módulos, todo anda bien.

Resumencito III

- Los cuaterniones son un upgrade de los complejos.
- Tienen más letras y eso les hace perder la conmutatividad.
- Necesitamos agregar dos letras más porque las necesitamos para 'describir' el **eje** de rotación y el **ángulo**
- Rotar con cuaterniones es como complejos pero un poco más feo, multiplicando a izquierda y a derecha por q y haciendo un par más de cosas
- Como multiplicamos dos veces por q, si queremos rotar en un ángulo θ, al cuaternión lo inventamos con $\theta/2$.
- Así como a los complejos se los puede describir con la longitud y el ángulo, a los cuaterniones se los puede describir con 'la normal' (o sea, 'el mango'), y el ángulo. Y de esa manera la rotación queda bien a la vista.
- Para rotar puntos a velocidad consante, rotamos los cuaterniones correspondientes a velocidad constante.

¿Preguntas?