Cuaterniones

February 8, 2018

Por fin, cuaterniones

William Hamilton, el inventor de los horribles, *horribles* cuaterniones.

Por fin, cuaterniones

William Hamilton, el inventor de los horribles, *horribles* cuaterniones.

Hamilton buscaba esto:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j}$$

(a, b, c son números reales)

Por fin, cuaterniones

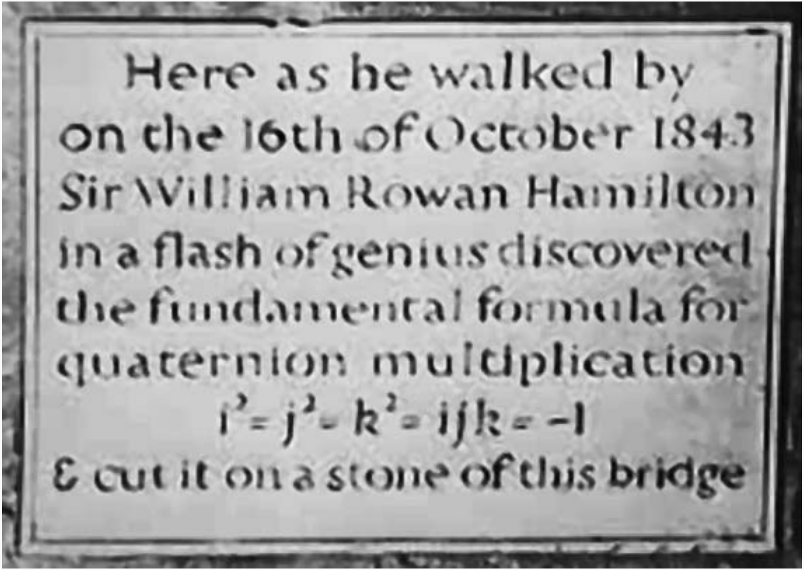
William Hamilton, el inventor de los horribles, *horribles* cuaterniones.

Hamilton buscaba esto:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j}$$

(a, b, c son números reales)

...pero no funcionó.


Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

Cuaterniones

Un cuaternión tiene esta pinta:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

(a, b, c, d son números reales)
($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son números 'imaginarios')

Reglas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

Cuaterniones

Un cuaternión tiene esta pinta:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

(a, b, c, d son números reales)
($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son números 'imaginarios')

Reglas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

Cuaterniones

Un cuaternión tiene esta pinta:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

(a, b, c, d son números reales)
($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son números 'imaginarios')

Reglas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

Una representación alternativa

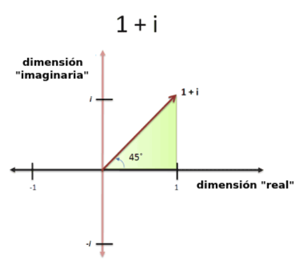
Así como a un número complejo lo podíamos marcar en un plano (2 dimensiones), un cuaternión es como un vector de 4 dimensiones (no dibujable) y se puede escribir así:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \approx (\mathbf{a}, b, c, d)$$

Resumencito

Los números complejos:

- Se pueden marcar sumar, restar, multiplicar, dividir.
- Se pueden marcar en un plano.
- Se les puede medir la longitud y obtener el ángulo.
- Los de módulo 1 representan rotaciones
- Para éstos, el conjugado es el inverso



Resumencito II

- Las rotaciones en $3D$ son girar alrededor de un eje por un ángulo fijo (un pisapapas).
- Los cuaterniones nos van a servir para representarlas.
- Los cuaterniones son como los complejos pero con 2 letras más y por ende más reglas que solamente $i^2 = -1$.
- Así como los complejos se pueden ver como puntos en un plano ($2D$), los cuaterniones se pueden ver como puntos de 4 dimensiones (4 números).

Tarea =)

¿Cómo se multiplican dos cuaterniones? ¡Usar las reglas que vimos!

$$(2 + 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} - 4 \cdot \mathbf{k}) \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j} + 4 \cdot \mathbf{k}) = ???$$

¿Preguntas?

¡Cuidado!

Ojo: El producto de cuaterniones en general no es conmutativo.