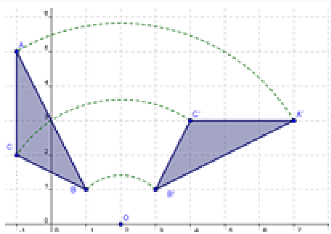
Cuaterniones

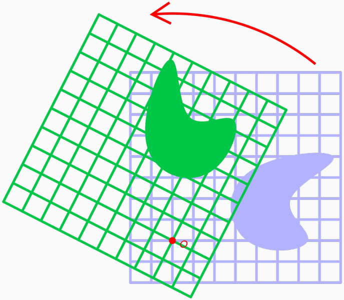
February 15, 2018

¿Qué es una rotación?

¿...?

- Después de una rotación, los cuerpos rígidos mantienen su forma.
- Siempre hay un punto que queda quieto en el sistema de referencia, al que llamamos origen, o centro.





Rotaciones en $2D$: con números complejos

Empecemos por las rotaciones en $2D$, usando números complejos.

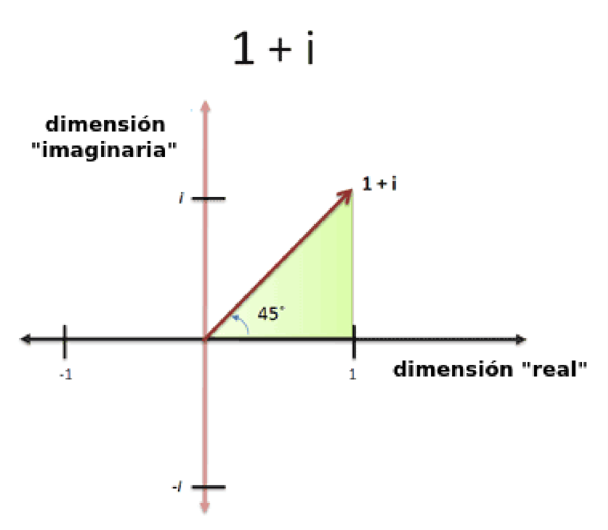
Nats $\rightarrow$ Enteros (tienen negativos)

Reales $\rightarrow$ Complejos ($\rightarrow$ ¡Cuaterniones!)

¿Cuánto vale $\sqrt{-1}$? Bueno, llamémoslo **i**

¿Y qué hacemos con eso? ¿Cómo hacemos cuentas?

Números complejos en el plano



- Longitud ('módulo'): $|1+\mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + |\mathbf{i}|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- Ángulo: $\alpha = cos^{-1}(\frac{CA}{HIP}) = cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

Forma trigonométrica

¡Tener un número complejo es lo mismo que tener su ángulo y su módulo!

De hecho si el número es $a + b \cdot i$ entonces:

$$cos(\text{ángulo}) \cdot \text{longitud} = a$$

$$sen(\text{ángulo}) \cdot \text{longitud} = b$$

¿Cómo operar?

Si z, w son complejos, entonces $z \cdot w$ 'es' sumar los ángulos y multiplicar las longitudes (los 'modulos').

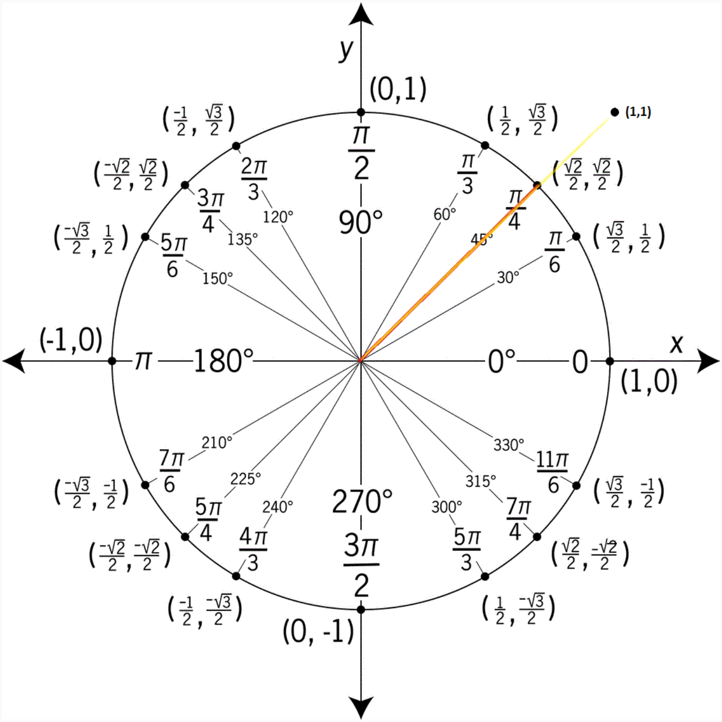
¡Hagamos un ejemplo! ¿Cuánto da $(1 + \mathbf{i}) \cdot \imath$?

Muy lindo, ¿pero y con las rotaciones qué onda?

Pensemos un poco cómo se relacionan.

Ejemplo

¿Cómo llevo el punto $(1,1)$ al punto $(-\sqrt{2},0)$?

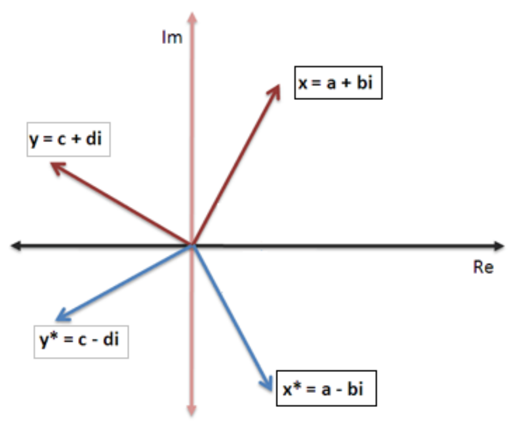


y
x
(0,1)
(1,1)
(-1,0)
(1,0)
(0, -1)
π/2
90°
π/3
60°
π/4
45°
π/6
30°
2π/3
120°
3π/4
135°
5π/6
150°
π
180°
0°
0
7π/6
210°
5π/4
225°
4π/3
240°
3π/2
270°
5π/3
300°
7π/4
315°
11π/6
330°
(1/2, √3/2)
(√2/2, √2/2)
(√3/2, 1/2)
(-1/2, √3/2)
(-√2/2, √2/2)
(-√3/2, 1/2)
(-√3/2, -1/2)
(-√2/2, -√2/2)
(-1/2, -√3/2)
(1/2, -√3/2)
(√2/2, -√2/2)
(√3/2, -1/2)

¿Cómo invierto una rotación?

¿Será difícil?

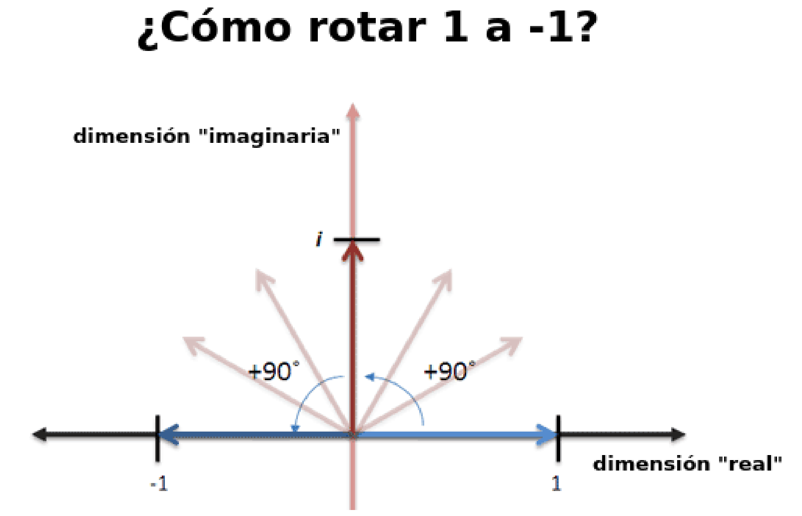
Si tengo $a + b \cdot \mathbf{i}$ con ángulo α y quiero otro número complejo con ángulo $-\alpha = 2\pi - \alpha$, lo conjugo, es decir, uso $a - b \cdot \mathbf{i}$



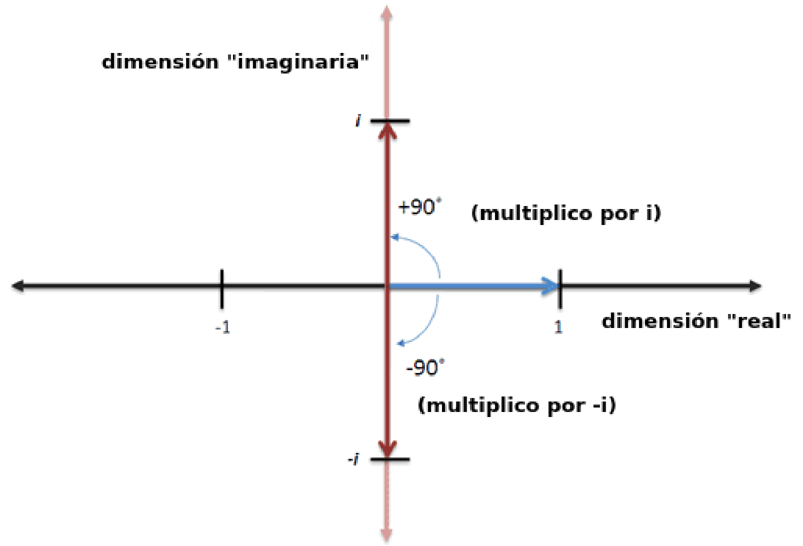
Volvamos a i

¿Cuál es la solución de $x^2 = -1$?

$1 \cdot x^2 = -1$

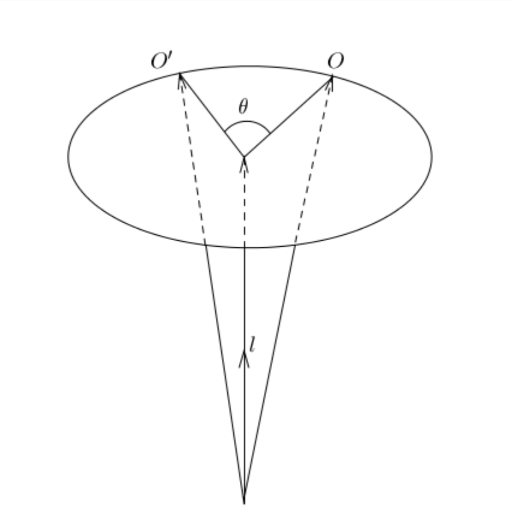


Volvamos a i (cont)



¿Qué es una rotación en $3D$?

¿Qué es una rotación en $3D$? Formalismo matemático



¿Qué es una rotación en $3D$? Un pisa papas

Otro pisa papas

Por fin, cuaterniones

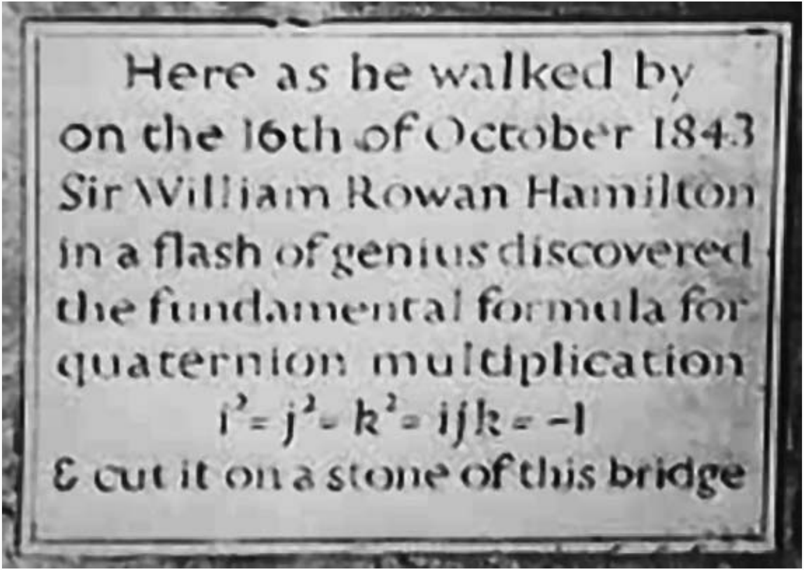
William Hamilton, el inventor de los horribles, *horribles* cuaterniones.

Hamilton buscaba esto:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j}$$

(a, b, c son números reales)

...pero no funcionó.


Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

Cuaterniones

Un cuaternión tiene esta pinta:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

(a, b, c, d son números reales)
($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son números 'imaginarios')

Reglas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

Una representación alternativa

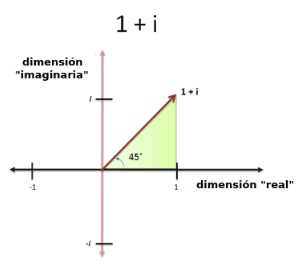
Así como a un número complejo lo podíamos marcar en un plano (2 dimensiones), un cuaternión es como un vector de 4 dimensiones (no dibujable) y se puede escribir así:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \approx (\mathbf{a}, b, c, d)$$

Resumencito

Los números complejos:

- Se pueden marcar sumar, restar, multiplicar, dividir.
- Se pueden marcar en un plano.
- Se les puede medir la longitud y obtener el ángulo.
- Los de módulo 1 representan rotaciones
- Para éstos, el conjugado es el inverso



Resumencito II

- Las rotaciones en $3D$ son girar alrededor de un eje por un ángulo fijo (un pisapapas).
- Los cuaterniones nos van a servir para representarlas.
- Los cuaterniones son como los complejos pero con 2 letras más y por ende más reglas que solamente $i^2 = -1$.
- Así como los complejos se pueden ver como puntos en un plano ($2D$), los cuaterniones se pueden ver como puntos de 4 dimensiones (4 números).

Tarea =)

¿Cómo se multiplican dos cuaterniones? ¡Usar las reglas que vimos!

$$(2 + 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} - 4 \cdot \mathbf{k}) \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j} + 4 \cdot \mathbf{k}) = ???$$

¿Preguntas?

¡Cuidado!

Ojo: El producto de cuaterniones en general no es conmutativo.

Segunda clase: cuaterniones!

Operatoria de cuaterniones

¿Cómo eran los cuaterniones?

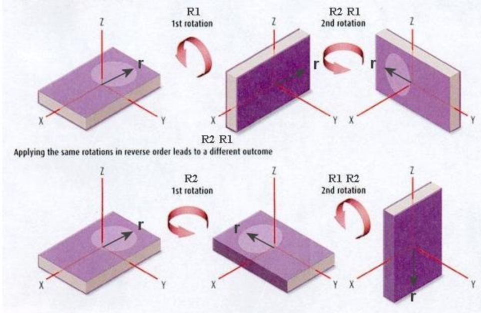
$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

- En general no conmutan (esa propiedad se pierde)
- El producto de un número real y un cuaternión sí conmutan.
- La suma de dos cuaterniones es conmutativa
- La suma y el producto es asociativo

¿A ustedes como les aparecen cuando los usan?

¿Y por qué no conmutan?

¿Por qué en general $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$?



Porque las rotaciones no conmutan.

¡Aun hay más!

$$
\begin{tikzcd}
\textit{Sedeniones}\cancel{\text{(son una bosta)}} \\
\textit{Octoniones} \arrow[u] \\
\textit{Cuaterniones} \arrow[u, "o_1\cdot(o_2\cdot o_3)\neq(o_1\cdot o_2)\cdot o_3"'] \\
\textit{Complejos} \arrow[u, "q_1\cdot q_2\neq q_2\cdot q_1"'] \\
\textit{Reales} \arrow[u, "\text{todo es lindo}"']
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Cuaterniones como DigiEvolución de los números complejos

Igual a mí me gustaba más Pokemon.

En $2D$, si v, z son números complejos, cuando los multiplico me da v rotado en el ángulo de z

$$w = v \cdot z$$

En $3D$, si v tiene 3 dimensiones y q es un cuaternión de longitud 1, esta cuenta me devuelve v rotado 'según' el cuaternión:

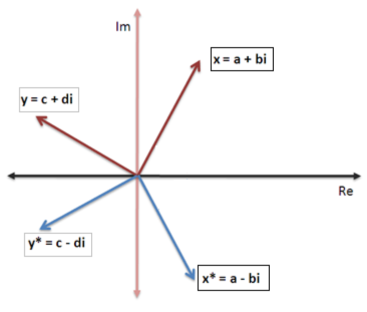
$$\hat{w} = q \cdot \hat{v} \cdot q^*$$

Conjugación

Dado $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$, definimos:

$q^* = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$ el conjugado de q.

Con los complejos era parecido pero había menos letras:



De paso: longitud de un cuaternión

Longitud de un número complejo $a + b \cdot \mathbf{i} : \sqrt{a^2 + b^2}$

'Longitud' de un cuaternión $a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} : \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Vale que si la longitud del cuaternión es 1, entonces el inverso multiplicativo es el conjugado.

¿Se acuerdan por qué valía con complejos?

'Aumentar' $v \in \mathbb{R}^3$ (3 dim) a $\hat{v} \in Cuat$

Dado $v = (v_1, v_2, v_3)$, defino $\hat{v} = 0 + v_1 \cdot \mathbf{i} + v_2 \cdot \mathbf{j} + v_3 \cdot \mathbf{k}$

Lo 'aumento' para que tenga 4 dimensiones.

Volvamos a la formulita

Si v es un vector de 3 dimensiones en el espacio y q es un cuaternión de longitud 1, esta cuenta me devuelve v rotado 'según' el cuaternión:

$$\hat{w} = q \cdot \hat{v} \cdot q^*$$

Pasos:

- 'Aumento' al vector v
- Lo multiplico por q
- Lo multiplico por q^*, que es el conjugado de q
- Eso rota v, pero, el resultado queda 'aumentado' (o sea, la parte escalar, que no acompaña a ninguna letra, es 0)

Multiplicar los cuaterniones es como componer las rotaciones

¿Pero en qué orden?

Si tengo:

$$\hat{v}_2 = p \cdot \hat{v}_1 \cdot p^*$$

y luego hago:

$$\hat{v}_3 = q \cdot \hat{v}_2 \cdot q^*$$

Esto es lo mismo que:

$$\hat{v}_3 = qp \cdot \hat{v}_2 \cdot (qp)^*$$

ms

s d. With

De Rham

$$C(\psi) = \psi_* :$$

such that the following diagram is comm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\psi"'] & {} \\ & L \end{tikzcd}$$

By abstract nonsense, a Clifford algeb

unique isomorphism. Furthermore, it is

is generated by the image of ρ, i.e. by $\rho($

We shall write

Slide optativa: ¿por qué necesitamos dos números más que en $2D$?

Hay dos cuentas que muestran por qué no anda agregar sólo $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$:

- Porque necesitamos 4 letras para describir a todas las rotaciones en $3D$.
- Si usáramos sólo $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ el álgebra se rompería. (Suponés que $\mathbf{ij} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j}$, multiplicás a izquierda por $\mathbf{i}$ y llegás a algo imposible)

Los cuaterniones como rotaciones (con ejemplo)

Si tenemos el eje (el mango del pisapapas) y el ángulo con que queremos rotar, es inmediato definirse el cuaternión que describe *esa rotación*:

Si $N = (n_x, n_y, n_z)$ es un punto (vector) de longitud 1 (el mango del pisapapas) y θ es un ángulo, entonces:

$$q = cos(\theta/2) + sen(\theta/2)\ n_x\ \mathbf{i} + sen(\theta/2)\ n_y\ \mathbf{j} + sen(\theta/2)\ n_z\ \mathbf{k}$$

representa una rotación en los planos perpendiculares a $\hat{n}$ con ese ángulo.

(¿con complejos era parecido?)

Observaciones:

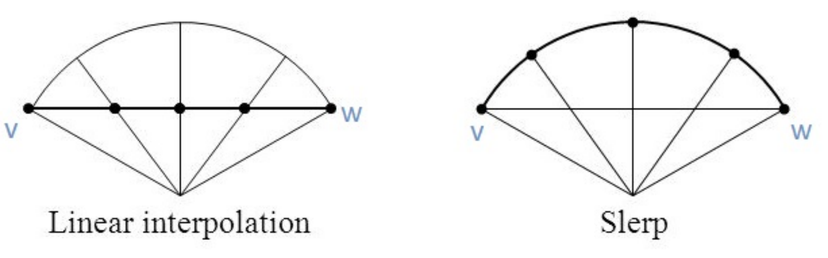
- Si uso q ó $-q$ obtengo la misma rotación. Pero, salvo esto, por cada rotación del espacio hay un sólo cuaternión que la representa.
- Con $q = 1 + 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ obtengo la rotación 'no hacer nada'.

¿Por qué multiplicamos el ángulo por 2?

Dos razones:

- como estamos multiplicando dos veces por el cuaternión necesitamos que cada uno 'tenga' la mitad del ángulo de rotación.
- Si **no** multiplicáramos el ángulo por dos, tendríamos el siguiente problema (dibujito)

SLERP: interpolación a velocidad constante



¿Cómo hacemos si queremos rotar un punto v a otro punto llamado w a velocidad constante?

Necesariamente w debe ser v rotado, por un quaternión q. O sea, $\hat{w} = q\hat{v}q^{-1}$.

SLERP: interpolación a velocidad constante (cont)

Resolvamos un problema más 'genérico' (es más fácil así):

Tenemos $p\hat{v}p^{-1}$ y lo queremos mover a $q\hat{v}q^{-1}$.

(Si tomamos $p = 1$ recuperamos el problema original)

¿Cómo hacemos?

¡La idea va a ser olvidarnos del vector v y mover los cuaterniones!

Primero con numeritos

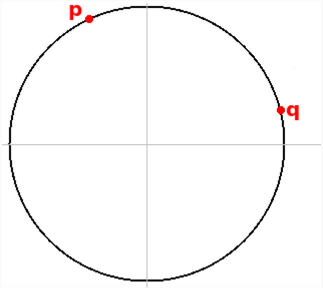
Queremos mover p a q. Finjamos primero que no son cuaterniones, sino numeritos reales.

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

$f'(t) = -p + q$: se mueve a velocidad constante.

Nota: la misma formulita en 3D anda bien.

Ahora en la circunferencia



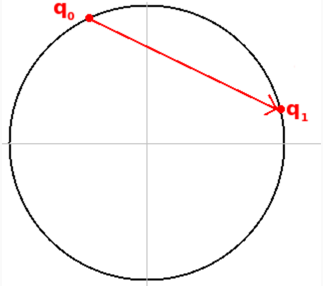
Quiero una función $f(t)$ tal que $f(0) = p, f(1) = q$, y además f' constante (para tener velocidad constante)

$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$ anda en el sentido de que también se mueve a velocidad constante.

Pero...no se queda en la circunferencia.

Ahora en la circunferencia (II)

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

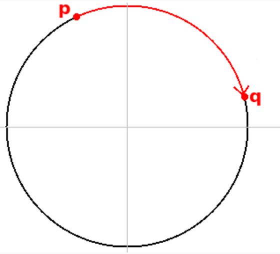


¿Cómo hacemos para que vaya por la circunferencia?

Ahora en la circunferencia(III)

- Los puntos de la circunferencia son los que tienen módulo 1
- Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\frac{(x,y)}{||(x,y)||}$ tiene módulo 1, y está en la circunferencia.

$$f(t) = \frac{(1-t) \cdot p + t \cdot q}{||(1-t) \cdot p + t \cdot q||}$$



Pero...no va a velocidad constante. Hay que arreglar un poco las cosas.

¿Y con cuaterniones?

$$(1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

Una vez arreglada la función para que la velocidad quede igual a 1, sirve para puntos en el plano, y también cuaterniones:

$$Slerp(p, q, t) = \frac{sen(\mathbf{(1\text{-}t)}\theta)}{sen(\theta)} p + \frac{sen(\mathbf{t}\theta)}{sen(\theta)} q$$

¡Fíjense la simetría que tiene!

(θ se obtiene a partir de p y q, es 'el ángulo' entre ellos)

Volvamos a interpolación de numeritos

$$f(t) = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$$

Es lo mismo que:

$$f(t) = p - t \cdot p + t \cdot q = p + (-p + q) \cdot t$$

Esa idea se puede trasladar a cuaterniones, miremos cómo:

$$f(t) = p(p^* q)^t$$

donde *elevar a la t* es algo parecido a la exponenciación que todos conocemos de los números reales.

Y como al multiplicar dos cuaterniones se multiplican los módulos, todo anda bien.

Resumencito III

- Los cuaterniones son un upgrade de los complejos.
- Tienen más letras y eso les hace perder la conmutatividad.
- Necesitamos agregar dos letras más porque las necesitamos para 'describir' el **eje** de rotación y el **ángulo**
- Rotar con cuaterniones es como complejos pero un poco más feo, multiplicando a izquierda y a derecha por q y haciendo un par más de cosas
- Como multiplicamos dos veces por q, si queremos rotar en un ángulo θ, al cuaternión lo inventamos con $\theta/2$.
- Así como a los complejos se los puede describir con la longitud y el ángulo, a los cuaterniones se los puede describir con 'la normal' (o sea, 'el mango'), y el ángulo. Y de esa manera la rotación queda bien a la vista.
- Para rotar puntos a velocidad consante, rotamos los cuaterniones correspondientes a velocidad constante.

¿Preguntas?