Forma baricéntrica y "mejor aproximación"

Guillermo Mosse

Octubre 2017

Polinomio de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x)$$

donde

$$\ell_j(x) = \frac{\displaystyle\prod_{i \neq j} (x - x_i)}{\displaystyle\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}$$

¿Cuántas operaciones necesito para evaluar a p_n en un punto?

Polinomio de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x)$$

donde

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_i)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}$$

¿Cuántas operaciones necesito para evaluar a p_n en un punto?

$O(n^2)$

Escribamos "mejor" a $p_n(x)$

$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x)$

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j}(x - x_i)}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$$

Supongamos $x \neq x_j$ para $j = 0, \ldots, n$. Si definimos $\ell(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)$, se puede ver que el numerador de $\ell(x)$ se puede reescribir como $\frac{\ell(x)}{x - x_j}$

Por comodidad, llamemos $w_j = \frac{1}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$

Entonces $\ell_j(x) = \ell(x)\frac{w_j}{x - x_j}$

Luego $p_n(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j} y_j$,

llamada la primer forma de interpolación baricéntrica. ¿Qué ganamos?

Fórmula baricéntrica (II)

¡Hay un truquito más!

$$1 = \sum_{j=0}^{n} \ell_j(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}$$

Dividiendo la expresión de la primer forma de interpolación baricéntrica por esto, y tachando los $\ell(x)$ arriba y abajo, llegamos a la segunda forma de interpolación baricéntrica:

$$p_n(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j} y_j}{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}}$$

¿Qué ganamos?

Fórmula baricéntrica (II)

¡Hay un truquito más!

$$1 = \sum_{j=0}^{n} \ell_j(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}$$

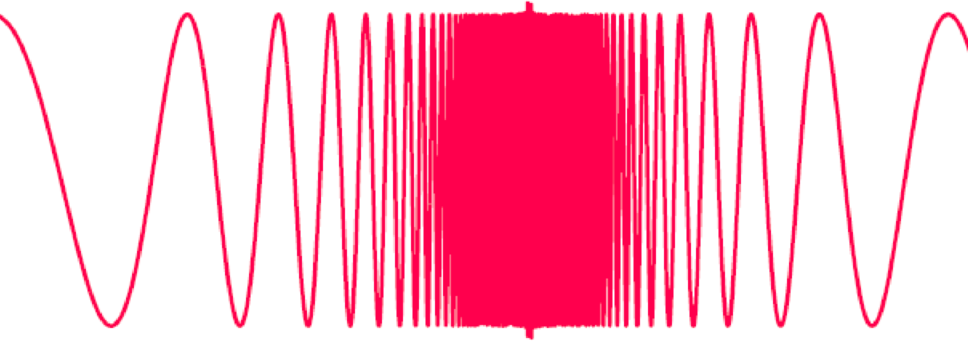
Dividiendo la expresión de la primer forma de interpolación baricéntrica por esto, y tachando los $\ell(x)$ arriba y abajo, llegamos a la segunda forma de interpolación baricéntrica:

$$p_n(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j} y_j}{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}}$$

¿Qué ganamos?
También se puede ver que es numéricamente estable: si $x \approx x_j$ pero $x \neq x_j$ el error "aparece" en el numerador y el numerador y se terminan cancelando (ver Higham).
Si $x = x_j$, en la práctica, se define aparte el valor de la función y listo.

Fórmula Baricéntrica (continuación)

La estabilidad y el poco costo de evaluar permite que tengamos lo siguiente:



$f(x) = sin(10/x), n = 10^6$, se plotean 2000 puntos cerca del origen.

Teorema (Equioscilación)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y g un polinomio de grado menor o igual a n. Entonces, son equivalentes:

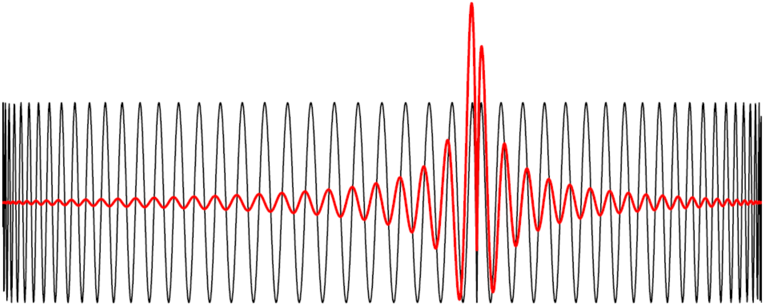
1) Entre todos los polinomios de grado $\leq n$, g minimiza $||f - g||_\infty$

2) Existen $n+2$ puntos $a \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n+1} \leq b$ tal que $f(x_i) - g(x_i) = \sigma\ (-1)^i ||f - g||_\infty$, con $\sigma = \pm 1$.

A g se lo suele llamar la mejor aproximación de f, y es costoso computarla.

¿Qué es mejor?

¿Qué conviene? ¿Usar la mejor aproximación o la fórmula baricéntrica en los polinomios de Chebyschev?



$f(x) = |x - 1/4|$, $x \in [-1, 1], n = 100$
En negro: error de la mejor aproximación
En rojo: error en los puntos de Chebyshev

Referencias:

- File.txt "Six Myths of Polynomial Interpolation and Quadrature" (Trefethen, 2011) `https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/publication/PDF/2011_139.pdf`
- Barycentric Lagrange Interpolation, (Berrut y Trefethen, 2004) `goo.gl/qZAjQ9`
- The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation (Higham, 2004) `goo.gl/UfbGf1`