Cuaterniones

February 8, 2018

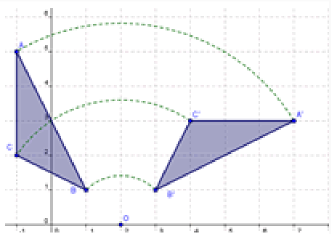
¿Qué es una rotación?

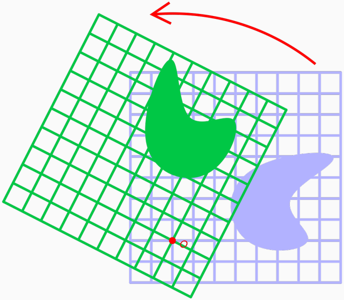
¿...?

¿Qué es una rotación?

¿...?

- Después de una rotación, los cuerpos rígidos mantienen su forma.
- Siempre hay un punto que queda quieto en el sistema de referencia, al que llamamos origen, o centro.





Rotaciones en $2D$: con números complejos

Empecemos por las rotaciones en $2D$, usando números complejos.

Rotaciones en $2D$: con números complejos

Empecemos por las rotaciones en $2D$, usando números complejos.

Nats $\rightarrow$ Enteros (tienen negativos)

Reales $\rightarrow$ Complejos ($\rightarrow$ ¡Cuaterniones!)

Rotaciones en $2D$: con números complejos

Empecemos por las rotaciones en $2D$, usando números complejos.

Nats $\rightarrow$ Enteros (tienen negativos)

Reales $\rightarrow$ Complejos ($\rightarrow$ ¡Cuaterniones!)

¿Cuánto vale $\sqrt{-1}$?

Rotaciones en $2D$: con números complejos

Empecemos por las rotaciones en $2D$, usando números complejos.

Nats $\rightarrow$ Enteros (tienen negativos)

Reales $\rightarrow$ Complejos ($\rightarrow$ ¡Cuaterniones!)

¿Cuánto vale $\sqrt{-1}$? Bueno, llamémoslo **i**

Rotaciones en $2D$: con números complejos

Empecemos por las rotaciones en $2D$, usando números complejos.

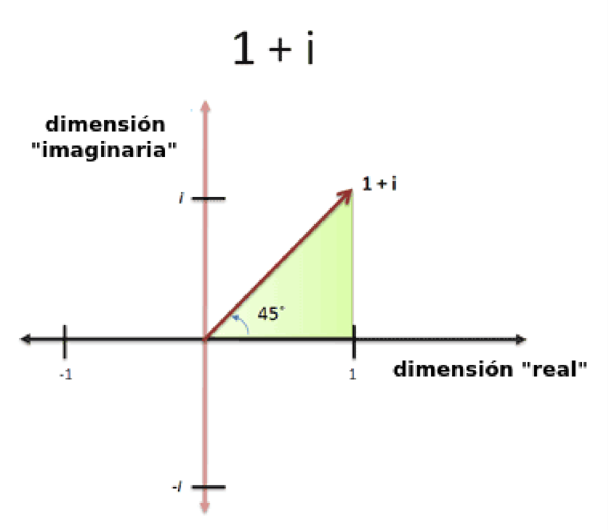
Nats $\rightarrow$ Enteros (tienen negativos)

Reales $\rightarrow$ Complejos ($\rightarrow$ ¡Cuaterniones!)

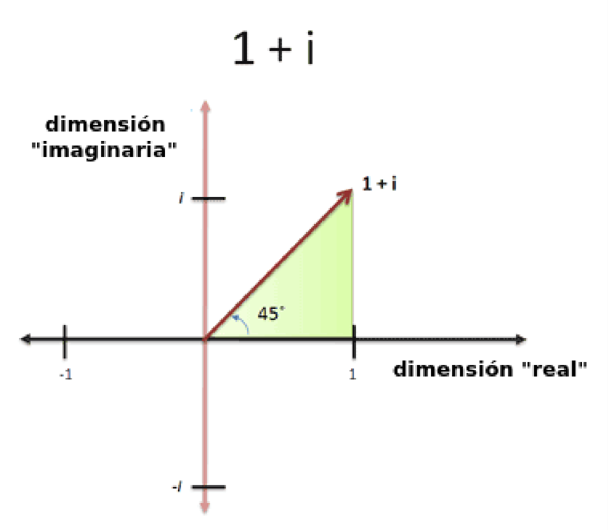
¿Cuánto vale $\sqrt{-1}$? Bueno, llamémoslo **i**

¿Y qué hacemos con eso? ¿Cómo hacemos cuentas?

Números complejos en el plano



Números complejos en el plano



- Longitud ('módulo'): $|1 + \mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + |\mathbf{i}|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- Ángulo: $\alpha = cos^{-1}(\frac{CA}{HIP}) = cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

Forma trigonométrica

¡Tener un número complejo es lo mismo que tener su ángulo y su módulo!

De hecho si el número es $a + b \cdot i$ entonces:

$$cos(\text{ángulo}) \cdot \text{longitud} = a$$

$$sen(\text{ángulo}) \cdot \text{longitud} = b$$

¿Cómo operar?

Si z, w son complejos, entonces $z \cdot w$ 'es' sumar los ángulos y multiplicar las longitudes (los 'modulos').

¿Cómo operar?

Si z, w son complejos, entonces $z \cdot w$ 'es' sumar los ángulos y multiplicar las longitudes (los 'modulos').

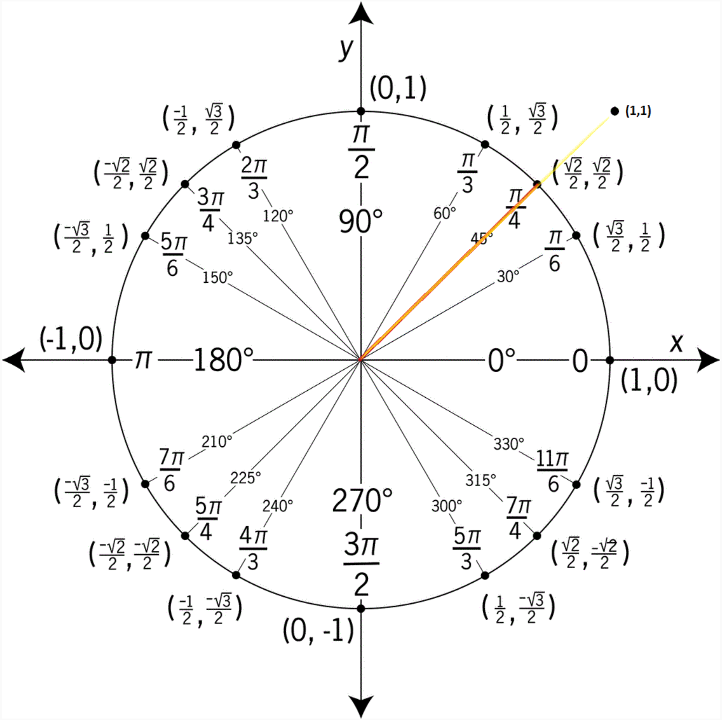
¡Hagamos un ejemplo! ¿Cuánto da $(1 + \mathbf{i}) \cdot \imath$?

Muy lindo, ¿pero y con las rotaciones qué onda?

Pensemos un poco cómo se relacionan.

Ejemplo

¿Cómo llevo el punto $(1, 1)$ al punto $(-\sqrt{2}, 0)$?


y
x
(0,1)
(1,1)
(-1,0)
(1,0)
(0, -1)
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\frac{\pi}{4}$ 45°
$\frac{\pi}{6}$ 30°
0 0°
$\frac{2\pi}{3}$ 120°
$\frac{3\pi}{4}$ 135°
$\frac{5\pi}{6}$ 150°
π 180°
$\frac{7\pi}{6}$ 210°
$\frac{5\pi}{4}$ 225°
$\frac{4\pi}{3}$ 240°
$\frac{3\pi}{2}$ 270°
$\frac{5\pi}{3}$ 300°
$\frac{7\pi}{4}$ 315°
$\frac{11\pi}{6}$ 330°

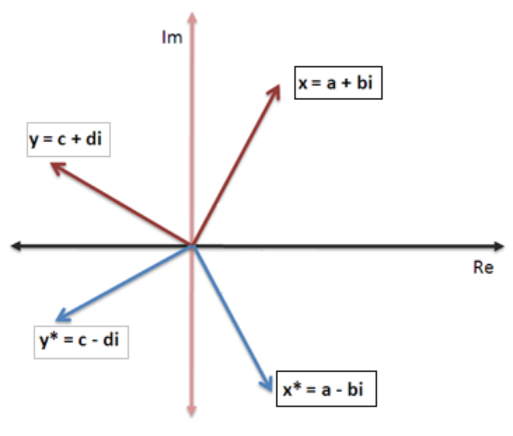
¿Cómo invierto una rotación?

¿Será difícil?

¿Cómo invierto una rotación?

¿Será difícil?

Si tengo $a + b \cdot \mathbf{i}$ con ángulo α y quiero otro número complejo con ángulo $-\alpha = 2\pi - \alpha$, lo conjugo, es decir, uso $a - b \cdot \mathbf{i}$



Volvamos a i

¿Cuál es la solución de $x^2 = -1$?

Volvamos a i

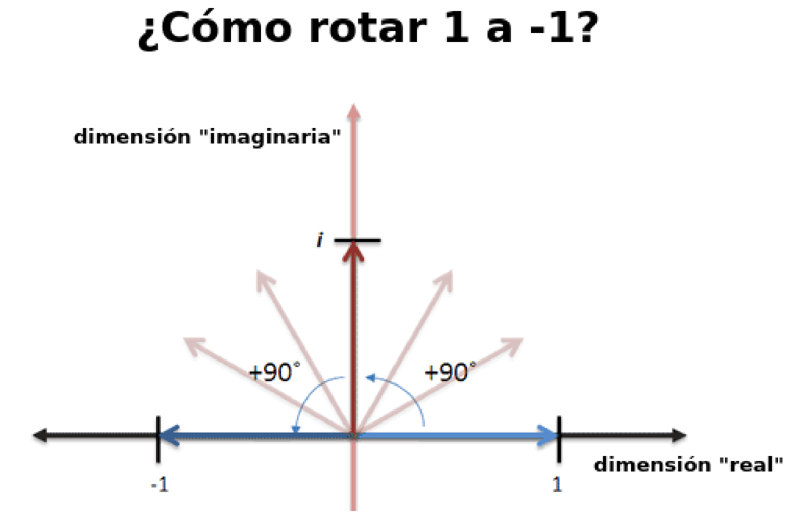
¿Cuál es la solución de $x^2 = -1$?

$1 \cdot x^2 = -1$

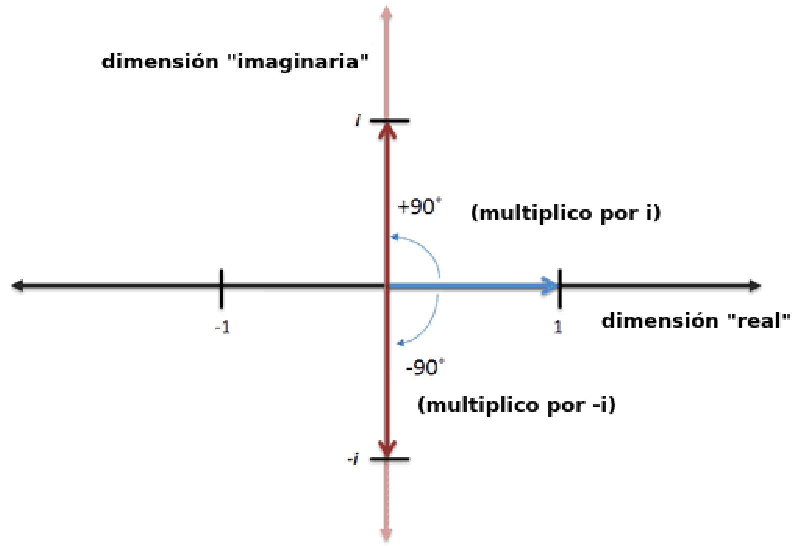
Volvamos a i

¿Cuál es la solución de $x^2 = -1$?

$1 \cdot x^2 = -1$

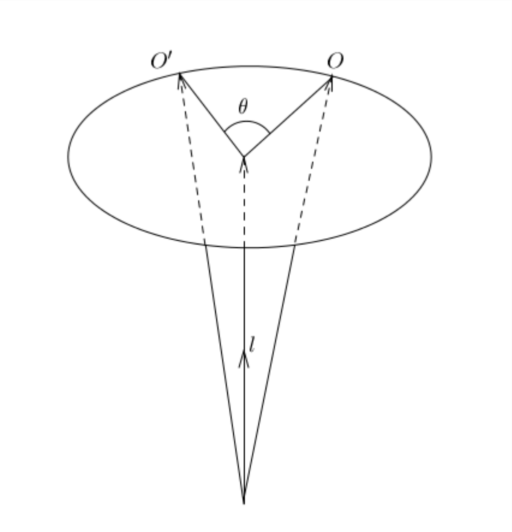


Volvamos a i (cont)



¿Qué es una rotación en $3D$?

¿Qué es una rotación en $3D$? Formalismo matemático



¿Qué es una rotación en $3D$? Un pisa papas

¿Qué es una rotación en $3D$? Un pisa papas

Otro pisa papas

Por fin, cuaterniones

William Hamilton, el inventor de los horribles, *horribles* cuaterniones.

Por fin, cuaterniones

William Hamilton, el inventor de los horribles, *horribles* cuaterniones.

Hamilton buscaba esto:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j}$$

(a, b, c son números reales)

Por fin, cuaterniones

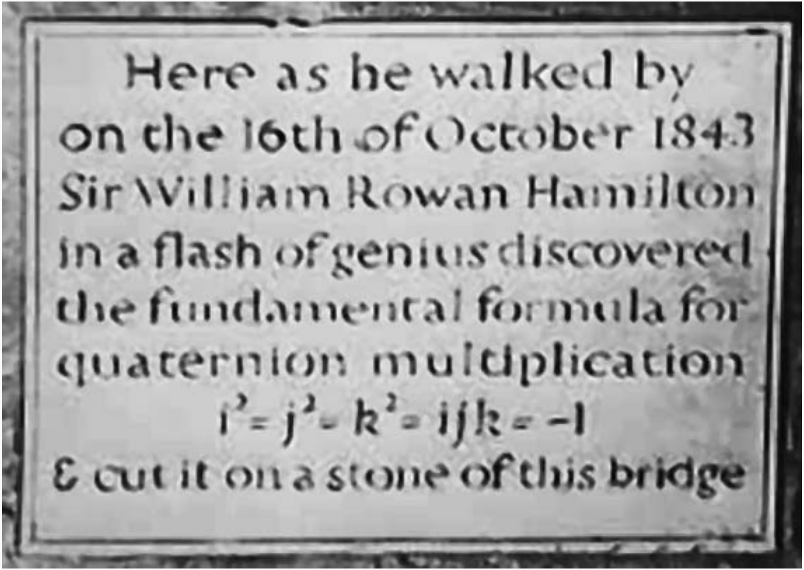
William Hamilton, el inventor de los horribles, *horribles* cuaterniones.

Hamilton buscaba esto:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j}$$

(a, b, c son números reales)

...pero no funcionó.


Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

Cuaterniones

Un cuaternión tiene esta pinta:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

(a, b, c, d son números reales)
($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son números 'imaginarios')

Reglas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

Cuaterniones

Un cuaternión tiene esta pinta:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

(a, b, c, d son números reales)
($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son números 'imaginarios')

Reglas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

Cuaterniones

Un cuaternión tiene esta pinta:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k}$$

(a, b, c, d son números reales)
($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son números 'imaginarios')

Reglas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

Una representación alternativa

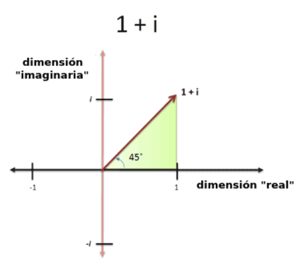
Así como a un número complejo lo podíamos marcar en un plano (2 dimensiones), un cuaternión es como un vector de 4 dimensiones (no dibujable) y se puede escribir así:

$$a + b \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j} + d \cdot \mathbf{k} \approx (\mathbf{a}, b, c, d)$$

Resumencito

Los números complejos:

- Se pueden marcar sumar, restar, multiplicar, dividir.
- Se pueden marcar en un plano.
- Se les puede medir la longitud y obtener el ángulo.
- Los de módulo 1 representan rotaciones
- Para éstos, el conjugado es el inverso



Resumencito II

- Las rotaciones en $3D$ son girar alrededor de un eje por un ángulo fijo (un pisapapas).
- Los cuaterniones nos van a servir para representarlas.
- Los cuaterniones son como los complejos pero con 2 letras más y por ende más reglas que solamente $i^2 = -1$.
- Así como los complejos se pueden ver como puntos en un plano ($2D$), los cuaterniones se pueden ver como puntos de 4 dimensiones (4 números).

Tarea =)

¿Cómo se multiplican dos cuaterniones? ¡Usar las reglas que vimos!

$$(2 + 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} - 4 \cdot \mathbf{k}) \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j} + 4 \cdot \mathbf{k}) = ???$$

¿Preguntas?