Coleman

Chenxu Li

2021 年 10 月 4 日

1 Continuous Symmetry & Noether Theorem

经典场论的动力学变量是场量。我们定义对其的变换为单参映射

$$\phi^a(x) \to \Phi^a(s,x), \qquad \Phi^a(0,x) = \phi^a(x)$$

这相当于是诱导了一个单参数微分同胚群。注意这个变换是相当广义的，既可以通过操作场量本身（让场变形），也可以通过调整时空坐标来实现（让场移动）。

称一个（无穷小）变换是一个对称，当且仅当

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(\Phi^a(s,x), \partial_\mu \Phi^a(s,x)) = \partial_\mu K^\mu$$

成立，其中 $K^\mu = K^\mu(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$。从最小作用量原理来看，对称变换只会让作用量改变一个局域函数，所以不改变动力学。

变换是对称的等价条件是下式成立：

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)}\frac{\partial \Phi^a}{\partial s} - K^\mu\right) = 0$$

对于最简单的情况，没有时空坐标的变化而只有场的变化。那么 $\Phi^a(s,x) = \phi^a(x) + s\delta\phi^a(x)$，我们得到了 Noether 定理的特殊形式：

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}\delta\phi^a - K^\mu\right) = 0$$

一个一般意义上的对称作为无穷小变换既改变时空坐标，又改变场本身。这会对 $\frac{\partial \Phi^a}{\partial s}$ 的计算带来非常大的困难，而且 ∂_μ 也会变成 $\partial_{\tilde{\mu}}$，不一定再与 $\frac{\partial}{\partial s}$ 对易。所以我们只能用比较暴力的思路，来显式地写下这样的无穷小变换：$\tilde{x^\mu} = x^\mu + \delta x^\mu, \tilde{\phi^a}(\tilde{x}) = \phi^a(x) + \delta\phi^\alpha(x)$

定义等时空变分 $\bar{\delta}\phi^a(x) = \tilde{\phi^a}(x) - \phi^a(x)$。这么做的好处在于固定了一个时空点，所以不会产生 $\partial/\partial x^\mu \to \partial/\partial\tilde{x}^\mu$ 这样的麻烦，从而保证了 $\bar{\delta}$ 和 ∂_μ 是对易的，和经典力学中的结果相同。

在无穷小变换下，有近似

$$\delta\phi^a(x) = \bar{\delta}\phi^a(x) + \partial_\mu\tilde{\phi^a}(x)\delta x^\mu \simeq \bar{\delta}\phi^a(x) + \partial_\mu\phi^a(x)\delta x^\mu$$

将 $\delta\mathcal{L}$ 展开成 $\bar{\delta}\mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu$，再将得到的 $\bar{\delta}\phi^a$ 变回 $\delta\phi^a$，最后得到一般的 Noether 定理：

$$\partial_\mu\left[\left(\eta^\mu{}_\nu\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\partial_\nu\phi^a\right)\delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\delta\phi^a - K^\mu\right] = 0$$

Noether 定理描述了 Noether 流 J^μ 的守恒性质。这也意味着 Lorentz 标量 $Q = \int d^3\vec{x}J^0$ 是守恒量，它被称作守恒荷或者 Noether 荷。

2 Poincare Invariance of Classical Field Theory

经典场在时空平移下的行为是相对简单的。此时有 $\delta x^\mu = a^\mu, \delta\phi^a = \tilde{\phi}^a(\tilde{x}) - \phi^a(x) = 0$。
代入到 Noether 流中[1]，得到

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu(\eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}) = 0$$

$T^{\mu\nu}$ 被称作能动张量。其对应的守恒荷为

$$P^\mu = \int d^3\vec{x}T^{0\mu}$$

它被定义为场的四维动量，因为

$$P^0 = \int d^3\vec{x}(\pi_a\partial_0\phi^a - \mathcal{L}) = H, \qquad P^i = \int d^3\vec{x}\left(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^a)}\partial^i\phi^a\right) = -\int d^3\vec{x}\pi_a\partial_i\phi^a$$

有一族能动张量都能够得到相同的守恒荷，它们之间通过 Belinfante 张量相联系：

$$T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \partial_\rho\psi^{\rho\mu\nu}, \qquad \psi^{\rho\mu\nu}\text{关于前两个指标反对称}$$

场在 boost 下的变换要复杂很多，具体来说是因为 $\bar{\delta}\phi^a(x)$ 项非平凡，它依赖于我们讨论的场具体位于 Lorentz 群的哪个表示:

$$\tilde{\phi}^a(\tilde{x} = \Lambda x) = (\exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}))^a{}_b\phi^b(x)$$

这就是 $\bar{\delta}\phi^a(x)$ 非平凡的原因。除非是一个标量场，此时这个矩阵恒为 1。
一个无穷小的 boost 写作 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega_{\mu\nu}$，其中 $\omega_{\mu\nu}$ 是一个二阶反对称张量。

$$\delta x^\mu = \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad \delta\phi^a(x) = \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})^a{}_b\phi^b(x)$$

代入 Noether 定理即可得到

$$\partial_\mu\left[T^{\mu\nu}x^\sigma + \frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}(J^{\nu\sigma})^a{}_b\phi^b(x)\right]\delta\omega_{\nu\sigma}$$

因为 $\omega_{\nu\sigma}$ 关于 ν,σ 反对称，所以我们可以把方括号中的表达式关于这两个指标进行反对称化，并将它作为 Lorentz 变换下的守恒流。

最后，我们得到了一个一般的场的角动量张量

$$J^{\nu\sigma} = -\int d^3\vec{x}\left[T^{0\nu}x^\sigma - T^{0\sigma}x^\nu + i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^a)}(J^{\nu\sigma})^a{}_b\phi^b(x)\right]$$

它被分为了两个部分，一个有着 $\vec{x}\times\vec{p}$ 的形式，被称作轨道角动量，与经典角动量对应。还有一个和 $J^{\nu\sigma}$ 相关的项，这与场的内禀性质（处于 Lorentz 群的何种表示）有关，被称作自旋角动量。

[1] 下面都将把 K^μ 忽略，认为其不产生额外的物理。虽然将来在讨论量子对称性时并不总是如此

3 Classical-Quantum Correspondence

下面的讨论并不能作为正则量子化过程的理论基础，但是可以让它看起来不那么突兀一些。

作为最简单的例子，考虑 Klein-Gordon 场 $\phi(x)$。

我们在上一讲中得到了用玻色子产生湮灭算符书写的 Hamiltonian。现在我们又定义了场的动量，可以如法炮制：

$$P=-\int d^3\vec{x}\partial_0\phi\nabla\phi\to\int\tilde{d}k\vec{k}a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})+\frac{1}{2}\int\tilde{d}k\vec{k}\delta(\vec{0})$$

计算场算符和四维动量算符的对易子：

$$[\phi(x),P^\mu]=\int\tilde{d}kk^\mu[a(\vec{k})e^{ik\cdot x}-a^\dagger\vec{k}e^{-ik\cdot x}]=-i\partial^\mu\phi(x)$$

这是四维协变形式的 Heisenberg 运动方程。在非相对论量子力学等领域中，其空间分量被用来作为动量算符的定义。

上述推导是从经典到量子，下面则是从量子到经典：

形式地讲可以定义作用在经典 KG 场上的变换群

$$\{\alpha(\Lambda,a)|\,\Lambda\in SO^+(3,1),a\in\mathbb{R}^4\}$$

它的意义是对 $\phi(x)$ 的宗量进行变换

$$\alpha(\Lambda,0)\phi(x)=\phi(\Lambda^{-1}x),\qquad\alpha(I,a)\phi(x)=\phi(x-a),\qquad\alpha(\Lambda',a')\alpha(\Lambda,a)=\alpha(\Lambda'\Lambda,\Lambda'a+a')$$

为了简便起见，只考虑 $\alpha(I,a)$ 的情况，原则上对 $\alpha(\Lambda,0)$ 的处理也是相似的。

$\phi(x)$ 是一个 c 数，因此作用的结果就是 Taylor 展开

$$\alpha(I,a)\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}a^{\mu_1}\cdots a^{\mu_n}\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_n}\phi(x)$$

对于量子场论来说，$\phi(x)$ 变成了 Heisenberg 绘景下的算符（q 数）。这时按照第一讲的思路同样可以引入 $\alpha(\Lambda,a)$，使得

$$\alpha(I,a)\phi(x)=U^{-1}(I,a)\phi(x)U^(I,a)=\phi(x-a)$$

$U(I,a)$ 是由 $\alpha(I,a)$ 诱导出的酉算子。设它的生成元是 P，那么可以利用 Baker-Campell-Hausdorff 公式，将其展开为

$$e^{iP\cdot a}\phi(x)e^{-iP\cdot a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}[P^{\mu_1}a_{\mu_1},\cdots,[P^{\mu_n}a_{\mu_n},\phi(x)]]$$

发现如果我们把量子化后的四维动量算符代入的话，会发现上式回到了 $\phi(x-a)$ 的 Taylor 展开。

这暗示着我们一个重要的结论：Poincare 群的 Noether 荷量子化后得到 Poincare 群在 Hilbert 空间上表示的相应生成元。这可以看做是对应原理的又一次体现。