Coleman

Billy Shen

2021 年 10 月 25 日

第八章 Wick Diagrams

8.1 相互作用

Coleman 给了我们一些拉格朗日量中的额外项，并称它们为相互作用。可是它们为什么是相互作用？是谁和谁在作用？我们从两种角度给出解释：

1. 从经典力学的角度来看，我们认为无相互作用的拉格朗日量给出的解之间是独立的，因此两个解的和也是一个解。比如经典 KG 场 $(\Box^2+m^2)\phi=0$ 显然就是一个齐次方程。而加入"相互作用"后，如 Model1，动力学方程变为 $(\Box^2+m^2)\phi=-g\rho(x)$ 不再满足齐次性。也就是说，两个解的和不再是一个解。这部分偏离就是解与解之间的相互作用。

2. 从量子的角度来看（这里会提前用到后面的知识），传播子 $U_I(\infty,-\infty)$ 的展开中存在一系列的产生湮灭算符。它们就相当于那些被湮灭的粒子"相互作用"而产生了新的粒子。

8.2 Wick 定理

散射理论的核心目的是求解散射矩阵：

$$S=U_I(\infty,-\infty)=T\exp(-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I(t)) \tag{8.1}$$

这是一个 time-ordered 的量，而我们希望得到 normal-ordered 的量。因此，我们用 Wick 定理把一个 time-ordered 的量转换成一系列 normal-ordered 的量之和。

首先考虑最简单的情况，只有两个算符。定义缩并：

$$\overbrace{A(x)B}(y)\equiv T(A(x)B(y))-:A(x)B(y): \tag{8.2}$$

经过计算，可以得到最重要的两个基石：

$$\overbrace{\phi(x)\phi}(y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\frac{i}{p^2-\mu^2+i\epsilon} \tag{8.3}$$

$$\overbracket{\psi^*(x)\psi}(y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{8.4}$$

其它可能出现的缩并结果都是 0。所有的缩并结果都是 c-number，因此它们的顺序无关紧要。

定义多个算符中的缩并：

$$: A(x)\overbracket{B(y)C(z)D}(w) :\equiv: A(x)C(z) : \overbracket{B(y)D}(w) \tag{8.5}$$

最终，通过数学归纳法得到 Wick 定理：

$$T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n) =: \phi_1\phi_2\cdots\phi_n : + \text{所有次数的可能的缩并} \tag{8.6}$$

定义 Wick 展开算符 $W(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n)$ 为 (8.6) 式的右侧所有项。

8.3 Wick 图

将 (8.1) 进一步展开：

$$\begin{aligned}
S &= T\exp(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t)) \\
&= T\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int\cdots\int dt_1\cdots dt_n H_I(t_1)H_I(t_2)\ldots H_I(t_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int\cdots\int dt_1\cdots dt_n W(H_I(t_1)H_I(t_2)\ldots H_I(t_n))
\end{aligned} \tag{8.7}$$

发现其中 $W(H_I(t_1)H_I(t_2)\ldots H_I(t_n))$ 这一项具有比较好的特征，是多个相同结构的算符的连接。为了更好地表达这种特殊结构，我们引入 Wick 图。

一个 n 阶的 Wick 图代表了 $W(H_I(t_1)H_I(t_2)\ldots H_I(t_n))$ 中的一项。简单起见，我们假设 H_I 中不存在加法。具体的对应规则如下：

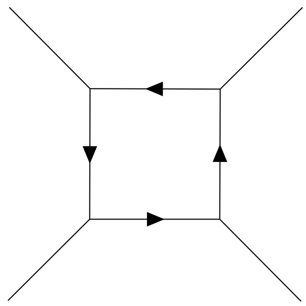
1. 一阶微扰对应一个点，每个点上有标号表示 t_n 中的 n
2. H_I 中的一个实数场对应点连出一条无向直线，代表 ϕ
3. H_I 中的一个复数场对应点连出一条有向直线，代表 ψ^*；并连进一条直线，代表 ψ
4. 连接代表算符的缩并；同一个点上的线可以互相连接
5. 无向直线只能和对应的无向直线（同一个场）相连，有向直线只能和对应的有向直线按照方向连接

这样 Wick 展开中的每一项都和 Wick 图 (Wick Graph) 一一对应。我们可以赋予 Wick Graph 物理意义，就是一些粒子被湮灭，又产生了一些粒子。一幅 Wick Graph 对应的物理过程不是唯一的，只要是符合拉格朗日量所必须遵守的守恒律的物理过程都是被允许的。

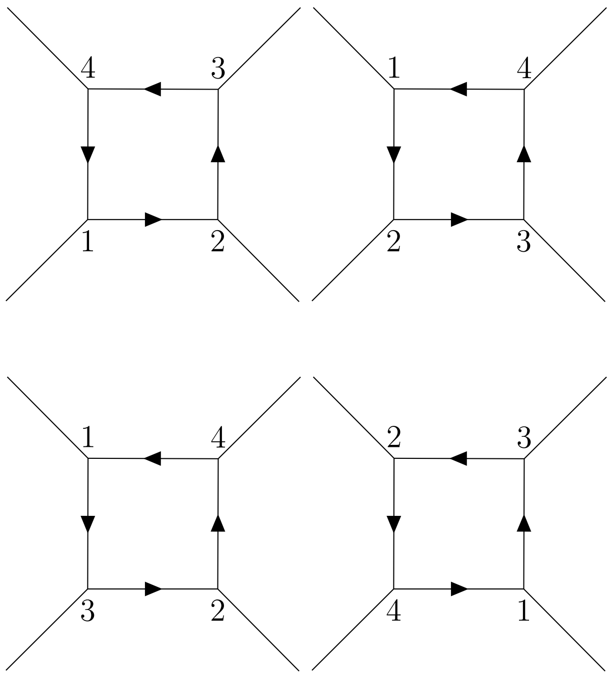
8.4 Wick 图的连通性

这部分的概念比较复杂，我们有必要在一开始就清晰地定义要研究的对象：

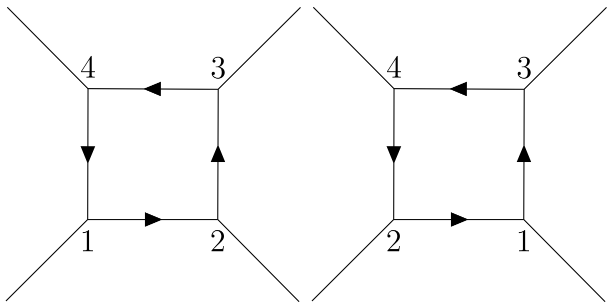
- Pattern ：只有点和线的图像



- Diagram ：每个点都有数字标记的 Pattern



- Graph(New) ：一类 Diagram，其中的任意两个 Diagram 都对应了同样的算符



对于一个 Pattern，我们无法确定它所对应的算符。而对于一个 Diagram 或者 Graph，它确定了唯一的算符。我们定义对应于 Graph G 的算符为 $F(G)$。对于 Diagram $D \in G$，也可以定义 $F(D) = F(G)$。

对于某个从图生成的算符 $F(G)$，我们一定可以直接读出该如何把它积分，然后取 normal-order。对于一个 n 阶图 G_n，这个积分结果是:

$$\frac{(-i)^n}{n!}\int F(G_n) = \frac{(-i)^n}{n(P)!}\int F(G_n) \tag{8.8}$$

这里的 $n!$ 来源于 exp 的泰勒展开。下面的定理是显然的：如果两个 Graph $G1, G2$ 属于同一个 Pattern P，那么它们的积分结果是相同的。

我们已经发现，对于一个 P，它所有可能对应的 G 有 $n(P)!$ 种，而其中有许多对应了同一个算符，因此有大量的冗余。去除了这部分冗余，我们就可以只研究 Graph 而不必再研究 Diagram。具体来说，一个 $G \in P$ 对应了 $S(P)$ 个不同的 Diagram，因此一个 P 只有 $\frac{n(P)!}{S(P)}$ 个不同的 G。

我们仍不满足。定理告诉我们，所有的 $G \in P$ 都会给出一样的积分结果，那我们是不是可以抛弃所有的编号只研究 P 而不再研究 G？当然可以。利用 (8.8) 我们得到：

$$\begin{aligned}\sum_{\text{in}P}\text{Wick Graphs} &= \sum_r \frac{(-i)^n}{n(P)!}\int F(G_r) \\ &= \frac{n(P)!}{S(P)}\frac{(-i)^n}{n(P)!}\int F(G_0) \\ &= \frac{(-i)^n}{S(P)}\int F(G_0) \qquad \equiv \frac{O(P)}{S(P)}\end{aligned} \tag{8.9}$$

其中 G_0 是 P 对应的任意一个 G。这就说明对于一个 P 能为 S 矩阵的展开提供的所有项只和它的对称性有关。

下面考虑连通图与非连通图的关系。设非连通图为 $P^{(d)}$，所有连通图的集合为 $P_r^{(c)}$，$P^{(d)} = \sum\limits_r n_r P_r^{(c)}$。那么在考虑 $S(P^{(d)})$ 时，不仅需要考虑单个连通图内部的对称性，还需要考虑同一连通图之间的对称性。对于每一幅连通图，这种互相交换的对称性会提供一个 $n_r!$。因此，我们得到：

$$S(P^{(d)}) = \prod_r n_r! S(P_r^{(c)})^{n_r} \tag{8.10}$$

这样，当我们对所有的图求和时，结果会只剩下对连通图的求和：

$$
\begin{aligned}
\sum \text{all Pattern} &= \sum_P \frac{O(P)}{S(P)} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \frac{\prod_r O(P_r^{(c)})^{n_r}}{\prod_r n_r! S(P_r^{(c)})^{n_r}} \\
&= \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} \frac{1}{n_r!} \left(\frac{O(P_r^{(c)})}{S(P_r^{(c)})} \right)^{n_r} \\
&= \prod_r \exp \left(\frac{O(P_r^{(c)})}{S(P_r^{(c)})} \right) \\
&= \exp \left(\sum_r \frac{O(P_r^{(c)})}{S(P_r^{(c)})} \right)
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

对于只有 ϕ 的相互作用，$S(P^{(c)})$ 有一种比较统一的计数方法：

1. 对于从一个点到它自身的缩并，提供对称因子 2
2. 对于两点之间的缩并，如果有 n 条线，则提供对称因子 $n!$
3. 对于 Pattern 本身的对称性，如果交换顶点的 indice 而不改变算符，则提供这种交换的个数 p
4. 总的对称因子为上面所有项的乘积

8.5 Model1 的解

这里只强调结果的物理意义：

$$
O_1 = \int d^3\mathbf{p} \left[-h(\mathbf{p})^* a_{\mathbf{p}} + h(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \right] \tag{8.12}
$$

其中

$$
h(\mathbf{p}) \equiv \frac{-ig\tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega_{\mathbf{p}})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \tag{8.13}
$$

只有 $\tilde{\rho}$ 当在能壳 $p^2 = \mu^2$ 上不为 0 时才会对 O_1 有贡献。

如果 $|i\rangle = |0\rangle$，那么我们关心的末态在无相互作用基下的展开为：

$$
\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n | f \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n | S | 0 \rangle = A h(\mathbf{p}_1) h(\mathbf{p}_2) \ldots h(\mathbf{p}_n) \tag{8.14}
$$

这里的 $h(\mathbf{p})$ 像是单粒子的概率幅。

末态具有 n 个粒子的概率为:

$$P(n) = \frac{|A|^2}{n!}\left[\int d^3\mathbf{p}\,|h(\mathbf{p})|^2\right]^n \tag{8.15}$$

所有的 $P(n)$ 是归一的，由此确定常数：

$$|A|^2 = \exp\left(-\int d^3\mathbf{p}\,|h(\mathbf{p})|^2\right) \tag{8.16}$$

假设 $A = e^{\frac{1}{2}(-\alpha+i\beta)}$，那么可以得到：

$$\alpha = \int d^3\mathbf{p}\,|h(\mathbf{p})|^2 \tag{8.17}$$

把计算出的 α 代入之前的式子，可以得到粒子数符合泊松分布：

$$P(n) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!} \tag{8.18}$$

$$\langle N\rangle = \alpha \tag{8.19}$$

计算总能量和总动量的平均值：

$$\langle E\rangle = \int d^3\mathbf{p}\,|h(\mathbf{p})|^2\,\omega_{\mathbf{p}} \tag{8.20}$$

$$\langle \mathbf{p}\rangle = \int d^3\mathbf{p}\,|h(\mathbf{p})|^2\,\mathbf{p} \tag{8.21}$$

这两个量的形式看起来和单粒子无异，却代表了多粒子。

我们可以给这种情况一个解释：

1. $|f\rangle$ 中存在两个或多个相同动量的粒子是被允许的，但是所有的这些情况构成一个零测集，不应该产生任何影响

2. 不同粒子之间的独立的，没有关联

因此，$h(\mathbf{p})$ 就代表的出现动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子的概率幅，也就是它的粒子数期望。