Coleman

Zean

2021 年 10 月 9 日

第六章　内部对称性

在考察了涉及时空变化的对称性之后，我们接下来考虑不涉及时空变化的对称性. 我们称这些对称性为内部对称性. 与先前考虑的时空对称性不同, 我们并不要求是普适的, 每种场都有它自己的内部对称性.

6.1　连续对称性

有了上次得到的诺特定理, 我们就可以小试牛刀了.

6.1.1　SO(2)

首先试试两个一样的实标量场, 拉格朗日量为:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a - m^2 \phi^a \phi^a\right) \tag{6.1}$$

其中 $a = 1, 2$. 显然如果我们对 ϕ^1, ϕ^2 做个转动:

$$\phi^1(x) \mapsto \phi^1(x)\cos\lambda + \phi^2(x)\sin\lambda \tag{6.2}$$

$$\phi^2(x) \mapsto \phi^2(x)\cos\lambda - \phi^1(x)\sin\lambda \tag{6.3}$$

拉格朗日量是不变的.

取小量 λ 带入我们之前的定义就是:

$$\delta\phi^1(x) = \lambda\phi^2(x) \tag{6.4}$$

$$\delta\phi^2(x) = -\lambda\phi^1(x) \tag{6.5}$$

$$\delta x = 0 \tag{6.6}$$

于是守恒流就是:

$$J^\mu = (\partial^\mu\phi^1)\phi^2 - (\partial^\mu\phi^2)\phi^1 \tag{6.7}$$

那么这样的对称性导致守恒律是不是能够提升到量子版本呢? 事实上对于这样简单的自由场总是可以的. 只要我们定义 J^μ 的算符提升为:

$$J^\mu =: (\partial^\mu\phi^1)\phi^2 - (\partial^\mu\phi^2)\phi^1 : \tag{6.8}$$

这里出现了 normal order, 我们复习并加深一下 normal order 的含义. 首先我们回忆什么是一个量子场, 其实就是满足我们第一章提出的那些要求的一个函子 $\mathcal{A}$. 我们为了得到量子场, 自然地想要从一个经典的场出发, 将它量子化, 也就是把经典的那些泛函 $\phi(x)$ 提升为算符, 这样就满足了给时空区域配上可观测量的要求. 但这还不够, 为了满足量子场中要求的时空对称性和因果律, 我们还得找一个满足洛伦兹对称性的作用量, 将它对应的李括号结构在提升过程中也保持下来, 最后根据提升后的守恒流对应的守恒荷重新构造出 α 同构, 这样提升后的算符 $\phi(x)$ 构造的可观测量就满足了一个量子场的所有条件.

由于我们滥用了一下符号, 对 $\phi(x)$ 看起来有两种乘法, 一种是提升为算符后的 $\phi(x)$ 的乘法, 一种是泛函 $\phi(x)$ 的乘法. 为更加清楚, 我们将提升为算符这个操作记作 Φ. 一个自然的问题是, 这两种乘法是不是一样的, 也即:

$$\Phi(\phi(x)\phi(y)) = \Phi(\phi(x))\Phi(\phi(y)) \tag{6.9}$$

是否成立?

很显然答案一定是否定的, 因为如果这样, 算符的乘法就一定是交换的, 以往为找到量子对易子所做的所有努力也就白费了.

这样的话为区分这两种乘积, 避免混淆, 我们引入一个记号:

$$:\phi(x)\phi(y) := \Phi(\phi(x)\phi(y)) \tag{6.10}$$

就是说先做经典乘积再做算符提升的算符用冒号括起来表示.

我们曾用 Fock 空间构建了一个最简单的标量场论, 不过那个时候我们只给出了 $\phi(x)$ 的形式, 而对于其他的经典的可观测量泛函我们没有仔细给出对应的算符, 不过现在我们就可以具体地写出它们了.

对于任意经典的可观测量 $A(x)$, 我们将它提升为算符 $:A(x):$. 不过这好像是一句废话, 但是注意到我们可以给这里的冒号两重含义, 第一重是我们刚刚叙述的, 另一重则是 Fock 空间中对产生湮灭算符的重新排序.

由于对于自由场, 所有的经典守恒流及其守恒荷对 $\phi(x)$ 都是二次的, 就会发现对于它们来说:

$$[A(x), B(y)] = i\hbar\{A(x), B(y)\} + O(\hbar^2) \tag{6.11}$$

是精确成立的, 那么所有的经典守恒量由于和哈密顿量对易, 在量子意义下也一定是守恒量.

我们回过头看我们的两个具有相同质量的标量场, 如果我们分别将 ϕ^1, ϕ^2 量子化为:

$$\phi^1(x) = a(x) + a^\dagger(x) \tag{6.12}$$

$$\phi^1(x) = b(x) + b^\dagger(x) \tag{6.13}$$

那么, 守恒荷就会被量子化为:

$$Q = \int d\mathbf{x} J^0(x) = \int d\mathbf{x} : \left((\partial_0\phi^1)\phi^2 - (\partial_0\phi^2)\phi^1\right) : \tag{6.14}$$

$$= i\int d\mu(p)\left(a^\dagger(p)b(p) - b^\dagger(p)a(p)\right) \tag{6.15}$$

但是我们看到, Q 并不是 $a^\dagger a$ 和 $b^\dagger b$ 组合的形式, 也就是说, a, b 这两对产生湮灭算符生成的态不是它的本征态, 但是我们又知道 $[Q, H] = 0$, 所以我们一定可以找到一组 Q, H 的共同本征态, 而且只要组合 H 的本征值对应的本征空间的基即可.

具体地, 我们定义一组新的产生湮灭算符为:

$$c(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((a(x) + ib(x)\right) \tag{6.16}$$

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((a(x) - ib(x)\right) \tag{6.17}$$

用这组产生湮灭算符表示 H, Q 就得到了:

$$H = \int d\mu(p)\omega_{\mathbf{p}}\left(c^\dagger(p)c(p) + d^\dagger(p)d(p)\right) \tag{6.18}$$

$$Q = \int d\mu(p)\left(c^\dagger(p)c(p) - d^\dagger(p)d(p)\right) \tag{6.19}$$

6.1.2 U(1)

由于我们转动了 a, b 定义了 c, d, 而且其中出现了复数, 我们可以构建一个复标量场 ψ:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi^1(x) + i\phi^2(x)\right) \tag{6.20}$$

$$\psi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi^1(x) - i\phi^2(x)\right) \tag{6.21}$$

两个实标量场的拉格朗日量可以用 ψ 写作:

$$\mathcal{L} = |\partial\psi|^2 - m^2|\psi|^2 \tag{6.22}$$

注意到我们要把 ψ, ψ^* 视作两个独立的场. 原先的 SO(2) 对称性看起来也就变成了 U(1) 对称性.

最后对应的量子化就是:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi^1(x) + i\phi^2(x)\right) = c(x) + d^\dagger(x) \tag{6.23}$$

$$\psi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi^1(x) - i\phi^2(x)\right) = c^\dagger(x) + d(x) \tag{6.24}$$

6.2 守恒荷的性质

由于:

$$\int_O dx\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{6.25}$$

由斯托克斯定理:

$$\int_{\partial O} dS \cdot J = 0 \tag{6.26}$$

取两个同时面 Σ_1, Σ_2, 以及它们之间的区域 O, 就有:

$$\int_{\partial O} dS \cdot J = 0 \tag{6.27}$$

$$\int_{\Sigma_1} dS \cdot J = \int_{\Sigma_2} dS \cdot J \tag{6.28}$$

其中 dS 定向取向相同.

6.3 离散对称性

拉格朗日量往往还有一些不连续的对称性, 我们现在就来考察这些对称性能否提升为算符形式.

6.3.1 $\mathcal{C}$

对于两个相同质量的实标量场我们有 SO(2) 对称性, 对于一个复标量场, 我们有 U(1) 对称性, 但是对于这两种情况, 经典地, 我们还有离散的对称性, 就是镜面反射和取复共轭, 具体地:

$$\phi^1 \mapsto \phi^1 \tag{6.29}$$

$$\phi^2 \mapsto -\phi^2 \tag{6.30}$$

以及:

$$\psi \mapsto \psi^* \tag{6.31}$$

$$\psi^* \mapsto \psi \tag{6.32}$$

那么这个对称性如何提升为量子版本的呢? 我们只要简单地定义一个算符 $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}c^\dagger(p_1)\cdots c^\dagger(p_m)d^\dagger(q_1)\cdots d^\dagger(q_n)|\Omega\rangle = d^\dagger(p_1)\cdots d^\dagger(p_n)c^\dagger(q_1)\cdots c^\dagger(q_m)|\Omega\rangle \tag{6.33}$$

即可.

6.3.2 $\mathcal{P}$

回想我们的四维闵氏时空的等度规群, 事实它上比 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 要大一些, 我们现在考虑先前忽略的空间反射操作 $\mathcal{P}$.

如果我们的拉格朗日量允许一个 $\mathcal{P}$ 作为对称操作, 通过 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 中的乘法, 我们得到 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 的李代数元素与 $\mathcal{P}$ 之间的关系:

$$\mathcal{P}iP^i\mathcal{P}^{-1} = -iP^i \tag{6.34}$$

$$\mathcal{P}iH\mathcal{P}^{-1} = iH \tag{6.35}$$

$$\mathcal{P}iL\mathcal{P}^{-1} = iL \tag{6.36}$$

$$\mathcal{P}iK\mathcal{P}^{-1} = -iK \tag{6.37}$$

那么如何具体表示出它呢? 因为我们的自由场都是实现在若干个 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 的不可约表示的 Fock 空间上的, 例如复标量场就是两个质量相同的正质量零自旋 Fock 空间上实现的. 如果我们设定 $\mathcal{P}$ 是一个一般的酉算子, 那就意味着对于一个 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 的表示来说:

$$\mathcal{P}|p_0,\sigma\rangle = \mathcal{P}^{\sigma'}{}_{\sigma}|\mathcal{P}p_0,\sigma'\rangle \tag{6.38}$$

$$\mathcal{P}|p,\sigma\rangle = \mathcal{P}U(\Lambda_{p,p_0})|p_0,\sigma\rangle \tag{6.39}$$

$$= \mathcal{P}U(\Lambda_{p,p_0})\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}|p_0,\sigma\rangle \tag{6.40}$$

$$= U(\mathcal{P}\Lambda_{p,p_0}\mathcal{P}^{-1})\mathcal{P}|p_0,\sigma\rangle \tag{6.41}$$

而且由于 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 的李代数元素与 $\mathcal{P}$ 之间的关系已经确定, 我们可以通过在与 little group 作用的关系具体确定 ${\mathcal{P}^{\sigma'}}_{\sigma}$ 的形式. 不过可能会出现不确定的系数, 这要视先前保持拉格朗日量不变的 $\mathcal{P}$ 的具体形式而定.

具体举例来说, 如果拉格朗日量里出现:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\partial^\rho\phi\partial^\sigma\phi \tag{6.42}$$

那我们就必须要求在 $\mathcal{P}$ 操作下 $\phi(t,\mathbf{x})$ 变为 $-\phi(t,-\mathbf{x})$, 对应的算符 $\mathcal{P}$ 就需要有性质:

$$\mathcal{P}\phi(t,\mathbf{x})\mathcal{P}^{-1}=-\phi(t,-\mathbf{x}) \tag{6.43}$$

具体到表示上就是:

$${\mathcal{P}^{\sigma'}}_{\sigma}=-1 \tag{6.44}$$

注. *当然往往为了使得 $\mathcal{P}$ 不得不取某些特殊形式, 得构造一些奇怪的明显不是自由场的拉格朗日量, 那实际上也不能在 Fock 空间上实现它们严格的量子化. 不过我们往往只能做微扰论, 所以这样的表示仍旧是需要考察的.*

6.3.3　$\mathcal{T}$

接下来就轮到另一个四维闵氏时空的等度规群中的元素, 时间反演了. 对于它相似地有:

$$\mathcal{T}iP^i\mathcal{T}^{-1}=iP^i \tag{6.45}$$

$$\mathcal{T}iH\mathcal{T}^{-1}=-iH \tag{6.46}$$

$$\mathcal{T}iL\mathcal{T}^{-1}=-iL \tag{6.47}$$

$$\mathcal{T}iK\mathcal{T}^{-1}=iK \tag{6.48}$$

这里出现了一个问题, 如果我们要求 $\mathcal{T}$ 如正常一样是线性的话, 由于 $\mathcal{T}H\mathcal{T}=-H$ 它就会把正能量的态映射到负能量上去. 由于我们不希望出现负能量态, 所以我们要求 $\mathcal{T}$ 是共轭线性的算符. 也就是说要求:

$$\mathcal{T}c=c^*\mathcal{T} \tag{6.49}$$

同样地我们也能解出在一个具体的不可约表示上, $\mathcal{T}$ 的形式. 比较有意思的是, 对于 H_m^+ 轨道上对应于它的 little group SU(2) 的不同自旋的表示, 如果自旋是半奇数, $\mathcal{T}^2 = -I$, 如果是整数, $\mathcal{T}^2 = I$.

其实对于 little group SU(2), 由于 $\mathcal{T}$ 与其中元素都是互易的, 而 $\mathcal{T}$ 又是一个共轭线性算符, $\mathcal{T}^2$ 实际上只能是 $\pm I$, 而这实际上标记了 SU(2) 的不同自旋的表示是实表示或是四元数表示. I 代表实表示, $-I$ 代表四元数表示.