Coleman

Zean

2021 年 10 月 1 日

附录 A 洛伦兹群的表示

找出 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 的所有不可约表示, 或者说找到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\ltimes\mathbb{R}^4$ 的所有不可约表示其实是一个相当繁琐的工作, 不过我们可以牺牲一些严格性, 以较有启发性的方式简单简单介绍这个流程.

A.1 从 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\ltimes\mathbb{R}^4$

首先我们具体构造出正文中隐去不谈的从 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 到 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 的双重覆盖映射 π.

对于任意 $\mathbb{R}^4$ 元素 x, $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 的元素 (Λ,a) 作用的结果是 $\Lambda x+a$. 同时, 我们考察一个矩阵:

$$\check{x}=x^0\sigma^0+\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{A.1}$$

我们发现:

$$\det\check{x}=x^2 \tag{A.2}$$

我们还可以利用求迹定义一个内积:

$$\langle\check{x},\check{y}\rangle=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\check{x}\check{y}) \tag{A.3}$$

可以简单验证

$$\langle\sigma^\mu,\sigma^\nu\rangle=\delta^{\mu\nu} \tag{A.4}$$

这也就是说我们可以借对各个 σ^μ 求迹的操作来得到一个 $\check{x}$ 对应的四矢量的各个分量.

注. 这个内积实际定义在所有二维厄密矩阵的构成的线性空间上, 因为厄密性质 $X^\dagger = X$, 最常用的矩阵空间内积 $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}(X^\dagger Y)$ 其实就变成了我们现在定义的这个, 无非差了个系数.

然后我们定义 π 为:

$$\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(3,1) : \pi(A)x = A\check{x}A^\dagger \tag{A.5}$$

可以验证若取:

$$A = e^{i\theta/2}\frac{1}{2}(1+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + e^{-i\theta/2}\frac{1}{2}(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{A.6}$$

且 $|\mathbf{n}| = 1$, 则对应于 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 中绕 $\mathbf{n}$ 轴旋转 θ 角的群元. 若取:

$$A = e^{\theta/2}\frac{1}{2}(1+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + e^{-\theta/2}\frac{1}{2}(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{A.7}$$

且 $|\mathbf{n}| = 1$, 则对应于 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 中速度为 $\mathbf{n}\tanh\theta$ 的 boost.

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$ 中的乘法事实上定义为:

$$(A,a)(B,b) = (AB, a+\pi(A)b) \tag{A.8}$$

A.2　$\mathbb{R}^4$ 的表示

显然 $\mathrm{SO}^+(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$ 或者 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$ 中都有一个非常简单的阿贝尔子群 $\mathbb{R}^4$, 如果我们想要得到 $\mathrm{SO}^+(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$ 或者 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$ 的表示, 我们不妨从这个最简单的阿贝尔子群入手.

对于 $\mathbb{R}^4$, 它最简单的不可约表示就是简单的一维表示:

$$U_p : \mathbb{R}^4 \to \mathrm{GL}(V_p) : x \mapsto e^{ipx} \tag{A.9}$$

我们用 p 标记了这些不可约表示.

A.3 组合 $\mathbb{R}^4$ 的表示

因为 $\mathrm{SO}^+(3,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ 或者 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\ltimes\mathbb{R}^4$ 都要比 $\mathbb{R}^4$ 大, 那么我们都有一个预感, 更大的对称性导致更大的表示, 就像有限群里那样. 一个群的子群的不可约表示往往要做直和才能得到原本群的不可约表示. 在这个精神的指导之下, 我们试图组合上面得到的 V_p 空间, 形式上写成 $\bigoplus_p V_p^{\oplus a_p}$, a_p 为 V_p 出现的次数.

那么要组合那些 V_p 呢? 那当然要考察之前没考察的 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 或者 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 部分了:

$$U(\Lambda)PU^{-1}(\Lambda)|p\rangle=\Lambda^{-1}P|p\rangle=\Lambda^{-1}p|p\rangle \tag{A.10}$$

其中 $|p\rangle$ 是一个 $V_p^{\oplus a_p}$ 中的向量, P 如往常一样是平移的生成元, 而在 $\bigoplus_p V_p^{\oplus a_p}$ 上就只不过是相应地是子空间 V_p 上的直和而已, 而在 V_p 上的形式其实已经知道, 由于 $U_p:\mathbb{R}^4\to\mathrm{GL}(V_p):x\mapsto e^{ipx}$, 对 x 求导就得到:

$$P=p \tag{A.11}$$

也就是:

$$P|p\rangle=p|p\rangle \tag{A.12}$$

所以这告诉我们, $U(\Lambda)$ 会把不同的 $V_p^{\oplus a_p}$ 联系起来, 而且有:

$$U(\Lambda)V_p^{\oplus a_p}=V_{\Lambda p}^{\oplus a_{\Lambda p}} \tag{A.13}$$

这同时告诉我们, 所有的 a_p 是一样的.

但是我们知道, Λ 并不能将一个任意的 $\mathbb{R}^4$ 的矢量转到另一个 $\mathbb{R}^4$ 中的矢量上, 能相互转化的 $\mathbb{R}^4$ 的矢量是分成若干区域的. 由于:

$$(\Lambda p)^2=p^2 \tag{A.14}$$

$\mathbb{R}^4$ 实际上被分为:

(i) $H_m^+ = \{p : p^2 = m^2 > 0, p^0 > 0\}$

(ii) $H_m^- = \{p : p^2 = m^2 > 0, p^0 < 0\}$

(iii) $H_{im}^+ = \{p : p^2 = -m^2 < 0\}$

(iv) $\partial V^+ = \{p : p^2 = 0, p^0 > 0\}$

(v) $\partial V^- = \{p : p^2 = 0, p^0 < 0\}$

(vi) $\{0\}$

也就是说, 这些区域以内的 p 可以通过 Λ 相互变化, 而不能跨区域变化. 这其实也就是 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 在 $\mathbb{R}^4$ 上作用的各个轨道.

于是对于每一种轨道, 有一种 $\bigoplus_p V_p^{\oplus a_p}$ 中 p 取值的要求. 那么接下来的问题就是如何确定 $a = a_p$, 以及群表示的具体形式.

A.4 所谓 little group

因为 $U(\Lambda)V_p^{\oplus a} = V_{\Lambda p}^{\oplus a}$, 显然若 $\Lambda p = p$, 那么 $U(\Lambda)V_p^{\oplus a} = V_p^{\oplus a}$. 也就是说每个 $V_p^{\oplus a}$ 上都承载了一个 $\{\Lambda : \Lambda p = p\}$ 这一子群的表示. 又因为对于同一个轨道中的不同 p 与 p', 可以用某个 $\Lambda_{p',p}$ 将他们联系起来. 所以对于同一个轨道上的 p 有

$$\Lambda_{p',p}^{-1}\{\Lambda : \Lambda p' = p'\}\Lambda_{p',p} = \{\Lambda : \Lambda p = p\} \tag{A.15}$$

这些相互同构的群也就是所谓的这个轨道对应的 little group, 数学上也就是该轨道对应的稳定子群.

那么为了考察轨道对应的 little group, 我们就可以先固定一个形式上简单的 p_0, 然后对于每个 p, 选择一套确定的 Λ_{p,p_0}. 注意这个选择方式是不唯一的, 因为总可以在 Λ_{p,p_0} 后面复合上一个 $\{\Lambda : \Lambda p_0 = p_0\}$ 的元素. 这实

际上确定了 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 对轨道 O 的稳定子群的一套左陪集分解:

$$\mathrm{SO}^+(3,1) = \bigcup_{p\in O} \Lambda_{p,p_0}\,\mathrm{SO}^+(3,1)_{p_0} \tag{A.16}$$

这样一来, 我们可以把 $V_p^{\oplus a}$ 直接视作 $U(\Lambda_{p,p_0})V_{p_0}^{\oplus a}$, 也就是定义:

$$U(\Lambda_{p,p_0})|p_0,\sigma\rangle = |p,\sigma\rangle \tag{A.17}$$

σ 标记确定了 p 后剩余的 a 维, $|p,\sigma\rangle$ 构成 $\bigoplus_p V_p^{\oplus a_p}$ 的基. 自然地也就有了:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p,\sigma\rangle &= U(\Lambda)U(\Lambda_{p,p_0})|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.18)}\\ &= U(\Lambda\Lambda_{p,p_0})|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.19)}\\ &= U(\Lambda_{p',p_0}\Lambda')|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.20)}\\ &= U(\Lambda_{p',p_0})U(\Lambda')|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.21)}\\ &= U(\Lambda')|p',\sigma\rangle && \text{(A.22)} \end{aligned}$$

其中 Λ' 是轨道 O 的稳定子群的元素, 所以 $\Lambda\Lambda_{p,p_0} = \Lambda_{p',p_0}\Lambda'$ 也就是将 $\Lambda\Lambda_{p,p_0}$ 放到由预先确定的一组 $\{\Lambda_{p,p_0}\}$ 确定的陪集分解中, 这样的匹配一定是唯一的. 这样一来只要我们确定了是轨道 O 的稳定子群在 $V_{p_0}^{\oplus a}$ 上的表示, 自然地我们就有了 $\mathrm{SO}^+(3,1)$ 在 $\bigoplus_p V_p^{\oplus a_p}$ 上的表示.

进一步我们把平移加入:

$$\begin{aligned} U(\Lambda,a)|p,\sigma\rangle &= U(\Lambda,a)U(\Lambda_{p,p_0})|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.23)}\\ &= U(\Lambda\Lambda_{p,p_0},a)|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.24)}\\ &= U(\Lambda_{p',p_0}\Lambda',a)|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.25)}\\ &= U(\Lambda_{p',p_0})U(\Lambda',\Lambda_{p',p_0}^{-1}a)|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.26)}\\ &= U(\Lambda_{p',p_0})U(\Lambda')e^{ip_0\left(\Lambda_{p',p_0}^{-1}a\right)}|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.27)}\\ &= U(\Lambda_{p',p_0})U(\Lambda')e^{ip'a}|p_0,\sigma\rangle && \text{(A.28)}\\ &= U(\Lambda')e^{ip'a}|p',\sigma\rangle && \text{(A.29)} \end{aligned}$$

所以总结一下, 最后我们只要知道所谓 little group 的表示, 并选定一组陪集分解, 就得到了完整的 $\mathrm{SO}^+(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$ 或 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$ 的表示.

注. 其实整个流程就是用子群的表示诱导出原来那个群的表示. 我们最后的构造也就是 Ind_H^G 的定义. 当然至此为止, 我们也还不知道我们的表示到底是不是不可约的, 同时也不知道这样构造的 $\bigoplus_p V_p^{\oplus a_p}$ 上是不是可以有一个内积, 最终使得 U 是连续的酉表示. 对于前一个问题, 既然我们的构造基本上可以说处处是不得不这样做的, 或者说没有引入什么冗余, 大概也能让自己相信这的确是所有的不可约表示了. 对于第二个问题, 很幸运的是, 我们的确能引入一个内积, 而且就像读者想到的那样, 对于 H_m^+, 就是那个 $\langle p,\sigma'|q,\sigma\rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta_{\sigma'\sigma}$.