Coleman

Chenxu Li

2021 年 10 月 4 日

1 The Missing Box

QFT 的全称是“相对论性量子场论”。其中的三个部分：相对论、量子和场论可以看做是三个取 1 的 Boolean 变量。从 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 的所有路径构成一个交换图[1]。这允许了我们在构建理论的时候拥有若干的自由度。下面就是一种构建方式，它一般被称作正则量子化。

首先选定一个带有度规的流形 (M,g) 作为时空流形。对于相对论性量子场论来说，这个流形是 $(\mathbb{R}^4,\eta)$，其中 η 是 Minkowski 度规。作为对比，在凝聚态场论中则往往取非相对论性的时空。

其次定义（经典）场作为核心的研究对象。场的定义是时空流形 M 到目标流形 N 的映射

$$\phi : M \to N$$

对于作为特例的标量场和矢量场，这等价于为每个时空点赋予一个标量和矢量。选定 N 之后，定义 $\mathcal{C}$ 为所有场构型组成的空间。这里的场构型是包括时间的，不过当我们在谈论场的广义坐标的时候则是需要取一个等时面，然后认为 $\phi(\vec{x})$ 是广义坐标。不同等时面之间的场量通过时间演化相联系。

时间演化由动力学决定，它通过一个作用量泛函 $S : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ 来描述。经典物理学认为真实的动力学由最小作用量原理 $\delta S = 0$ 确定[2]。如果我们认为作用量可以写成 Lagrangian 密度的积分

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$$

那么这给出场的 Lagrange 方程作为其动力学方程。

通过 Legendre 变换，可以得到场的 Hamilton 力学。其中每个广义坐标 ϕ_a 对应一个与之相关的广义动量 π^a，它们之间有着 Poisson 括号描述的对易关系。动力学方程则变为 Hamilton 正则方程。

最后进行正则量子化程序。这一程序的核心就是在 Heisenberg 绘景下，将上面定义的经典场量和其广义动量提升为算符，并将 Poisson 括号量子化为等时量子对易子（还有可能有一些保证因果性原理和对应原理的补丁，来让我们的理论既相对论，也和经典场论兼容）。

以上就是正则量子化的整体图像。这一框架的普适性是相当大的，比如说单粒子的量子力学实际上可以看做是 0+1 维的量子场论。但我们还是把目光转向 3+1 维吧。

[1] 但愿如此。

[2] 如果我们在使用路径积分量子化的话，可以省略后面的正则量子化程序，直接将路径积分原理作为最小作用量原理的量子版本。

2 Classical Field Theory

除了在时空流形上空降一个场论，我们还可以从经典的质点力学出发来将其导出。比如说对于一个 N 粒子系统，它的构型空间由 N 个广义坐标 $q_i, i = 1, 2 \cdots N$ 张成。如果把离散指标 i 更换成连续指标 $\vec{x}$，而且 $\vec{x}$ 取值于整个空间，那么指标和空间就可以建立对应，解释为每个空间点上都有一个粒子。场论的引入就是转换一下视角，认为这描述了一个场 ϕ 在给定时间的构型。这时 $\phi(\vec{x}, t) := q_{\vec{x}}(t)$ 就成为了一个处于函数空间的广义坐标。从这个意义上来说，任何多自由度系统都可以当成某种广义的场论[3]。

在相对论性场论中，对系统的 Lagrangian 密度有三条限制：

- 具有局域性，即可写作 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x)$ 。这是因为我们可以先在同时面上对空间积分得到 Lagrangian，而因果性要求此时不能出现不同时空点之间的关联。
- 是一个 Lorentz 标量。这是因为 S 是实数，而 d^4x 是 Lorentz 标量。
- 不含有场量的二阶及以上导数。否则数学上证明了会出现 Ostrogradsky 不稳定性，此时能量不再正定。

在这三条限制下，作用量作为 Lagrangian 密度的积分，只能是第一节中给出的形式。

可以得到场的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi^a \right)} \right) = 0$$

定义 ϕ^a 所对应的正则动量为

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^a)}$$

仿照经典力学中的 Legendre 变换[4]，定义场的 Hamiltonian 为

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}(\phi^a, \pi_a, \partial_i \phi^a), \qquad \mathcal{H} = \pi_a \partial_0 \phi^a - \mathcal{L}$$

容易得到场的 Hamilton 正则方程

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi^a} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \phi^a)} \right) = -\partial_0 \pi_a, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} = \partial_0 \phi^\alpha$$

如果采用上节课介绍过的泛函导数，可以简记为

$$\frac{\delta H}{\delta \phi^a} = -\partial_0 \pi_a, \qquad \frac{\delta H}{\delta \pi_a} = \partial_0 \phi^a$$

形式上接近于经典力学的正则方程。此时 Poisson 括号被自然地定义成

$$\{A, B\} = \int d^3\vec{x} \left(\frac{\delta A}{\delta \phi^a} \frac{\delta B}{\delta \pi_a} - \frac{\delta A}{\delta \pi_a} \frac{\delta B}{\delta \phi^a} \right)$$

并有基本 Poisson 括号成立：

$$\{\phi^a(\vec{x}, t), \phi^b(\vec{x}', t)\} = 0 = \{\pi_a(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{x}', t)\}$$

$$\{\phi^a(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{x}', t)\} = \delta^a_b \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

[3]这和格点场论的基本思路是相通的。

[4]Coleman 花费了很大篇幅来强调 Hamilton 力学中的正则变量需要是完备而且独立的。完备是指 Hamiltonian 可以写成它们的函数，独立是指对 q^a 和 p_a 的任意变分都可以通过选取 q^a 和 $\dot{q}^a$ 的变分来实现。

3 Quantum Field Theory

在正则量子化框架下，把 Poisson 括号量子化为对易子：

$$[\phi^a(\vec{x},t),\phi^b(\vec{x}',t)] = 0 = [\pi_a(\vec{x},t),\pi_b(\vec{x}',t)]$$

$$[\phi^a(\vec{x},t),\pi_b(\vec{x}',t)] = i\delta^a_b\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

再次回到最简单的自由实标量场：Klein-Gordon 场，现在使用正则量子化程序进行处理。

经典场的 Lagrangian 密度和运动方程是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \qquad (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$$

进行空间上的 Fourier 变换，可以发现 $\phi(\vec{k},t)$ 满足

$$[\partial_t^2 + (|\vec{k}|^2 + m^2)]\phi(\vec{k},t) = 0$$

这是一个频率为 $\omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ 的谐振子。这意味着如果对场量进行 Fourier 变换，也就是试图用平面波解对其进行展开，四维波矢的 0 分量会被空间分量由在壳条件所确定。

这个展开的结果可以用 Lorentz 不变测度表示为

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left[a(\vec{k})e^{ik\cdot x} + a^\dagger(\vec{k})e^{-ik\cdot x}\right]$$

展开系数可以表示为

$$a(\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\left[\omega_k\phi(x) + i\partial_0\phi(x)\right]e^{-ik\cdot x}$$

下面把这个经典场进行量子化。经典的平面波振幅 $a(\vec{k})$ 由场量构成，因此也被提升成了算符。注意到对于 KG 场来说，其正则动量刚好就是 $\pi = \partial_0\phi$，那么由基本对易关系可以得到 $a(\vec{k})$ 和 $a^\dagger(\vec{k})$ 的对易关系

$$[a(\vec{k}, a^\dagger(\vec{k}'))] = (2\pi)^3 2\omega_k\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

经过计算，场的 Hamiltonian

$$H = \int d^3\vec{x}(\frac{1}{2}\partial^0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2)$$

可以表示成

$$\frac{1}{2}\int \tilde{dk}\omega_k\left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})\right]$$

使用一下对易关系换成正规序，会换出一个积分中的 $\delta(0)$。这个无穷大是我们遇到的第一个发散。它的物理意义是场的零点能，可以通过选择零点消除。

只需要验证一下 $a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k})$ 和能动量[5]的对易关系，其在 Poincare 变换下的关系，并与二次量子化中的情况比较，就能确定它们被提升成了系统的关于能量为 ω_k，动量为 $\vec{k}$ 的湮灭算符和产生算符。

这个物理图像就是前三章中我们所得到的自由标量场的图像，在正则量子化框架下显得程序化更多而启发性不足。但是在后面处理相互作用场以及更加复杂的问题时，这是我们不得不使用的方法。

[5]这里还没有定义场的动量，它的引入有两种，一是在经典场中由 Noether 定理作为平移的守恒荷，二是通过协变的 Heisenberg 方程由对易关系确定。