Coleman

Zean

2021 年 10 月 21 日

第七章　微扰论简介

先前我们成功量子化了自由实标量场和自由的复标量场, 然而对于实际的理论, 我们总是希望加入一些相互作用, 也就是向拉格朗日量里加入大于二次的相互作用项. 那么要如何量子化这样的场呢? 如果按照先前的步骤, 第一个问题就是得到相互作用版本的泊松括号, 这样就必须求解一个非线性的偏微分方程. 然后下一个问题是如何在什么希尔伯特空间上实现量子化. 这个问题一般来讲是极其困难的, 除去一些数学家做出来的低维例子以外, 在我们关心的现实的四维闵氏时空还不能做到这一点. 因此我们不得不退而求其次, 仍然使用对不加相互作用前的自由场量子化时使用的 Fock 空间. 加上相互作用之后最麻烦的其实是泊松括号的量子化, 但是我们不得不这样做, 因为只有这样才能将经典的对称性提升为量子的.

首先我们在经典层面上思考, 经典地如果我们有一个泛函之间的映射 $R_{S_{\text{int}}}$, 使得:

$$R(\{A, B\}_{\text{int}}) = \{R(A), R(B)\}_{\text{nonint}} \tag{7.1}$$

岂不意味着我们能用无相互作用时的泊松括号得到相互作用的泊松括号的结果?

进而如果我们能够找到带相互作用量子化后的算符与无相互作用的量子化算符之间的映射 R, 使得:

$$R([A, B]_{\text{int}}) = [R(A), R(B)]_{\text{nonint}} \tag{7.2}$$

或者进一步:

$$R(A_{\text{int}}B_{\text{int}}) = R(A)R(B) \tag{7.3}$$

我们就可以借由自由场的量子化得到带相互作用的量子化的一些信息了. 当然实际上由于我们没有真的直接量子化带相互作用的场, $[A,B]_{\text{int}}$ 到底是什么我们根本不知道, 只知道它在最低阶近似下是与泊松括号相同的. 所以事实上我们只好利用:

$$[A,B]_{\text{int}} = i\hbar\{A,B\}_{\text{int}} + O(\hbar^2) \tag{7.4}$$

要求:

$$R([A,B]_{\text{int}}) = R(i\hbar\{A,B\}_{\text{int}}) + O(\hbar^2) \tag{7.5}$$

我们的相互作用绘景正是构造这个 R 的过程.

7.1 相互作用绘景

对于拉格朗日量密度中的相互作用部分 $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$, 我们先要求它只在时空上的一个有界区域内不为零. 这样一来, 对于 $R(\phi(x))$ 我们可以要求当 x^0 趋于负无穷的时候有:

$$R(\phi(x)) = \phi(x) \tag{7.6}$$

意思就是说, 在还没有加入相互作用的时刻, 由于因果律自然我们的理论也就是一个描述自由场的理论.

然后对于任意时刻的 $\phi(x)$:

$$\begin{aligned}
R(\phi(t)) &= R(U_{\text{int}}(t,-\infty)\phi(-\infty)U_{\text{int}}(-\infty,t)) && (7.7)\\
&= R(U_{\text{int}}(t,-\infty))R(\phi(-\infty))R(U_{\text{int}}(-\infty,t)) && (7.8)\\
&= R(U_{\text{int}}(t,-\infty))\phi(-\infty)R(U_{\text{int}}(-\infty,t)) && (7.9)\\
&= R(U_{\text{int}}(t,-\infty))U(-\infty,t)\phi(t)U(t,-\infty)R(U_{\text{int}}(-\infty,t)) && (7.10)
\end{aligned}$$

注. 这里要说明一下, $U_{int}(t,-\infty)$ 实际上是第一章那个必须要有的 α, 可能有读者疑惑, 为什么和第一章我们给出的那个只依赖于群元的 U 形式不同, 实际上仔细观察对 α 的要求: $\mathcal{A}(O)$ 到 $\mathcal{A}(\Lambda O+a)$ 的代数同构 $\alpha_{(\Lambda,a)}$. 这里最重要的是存在 $\mathcal{A}(O)$ 到 $\mathcal{A}(\Lambda O+a)$ 的代数同构, 我们可以让这个同构依赖于具体时空区域的选取, 也就是 $\alpha_{(\Lambda,a),(O,\Lambda O+a)}$, 只不过对同构的复合有相应的要求. 实际上这个同构 α 代表了我们的一种信念, 两个在几何意义下相同的时空区域应该有相同的一套可观测量.

这样一来, 如果我们想要表示任意的 $R(\phi(t))$, 我们只要能够表示所有的 $R(U_{\text{int}}(t,-\infty))U(-\infty,t)$ 即可.

我们尝试对 $R(U_{\text{int}}(t,-\infty))U(-\infty,t)$ 中的 t 求导, 得到:

$$\begin{aligned}&\partial_t(R(U_{\text{int}}(t,-\infty))U(-\infty,t))\\&=R(i(H+H_{\text{int}}(t))U_{\text{int}}(t,-\infty))U(-\infty,t)-R(U_{\text{int}}(t,-\infty))iHU(-\infty,t)\end{aligned}\tag{7.11}$$

利用:

$$R(H)=R(U_{\text{int}}(t,-\infty))U(-\infty,t)HU(t,-\infty)R(U_{\text{int}}(-\infty,t))\tag{7.12}$$

得到:

$$\partial_t(R(U_{\text{int}}(t,-\infty))U(-\infty,t))=iU_{\text{int}}(t,-\infty))U(-\infty,t)H_{\text{int}}(t)\tag{7.13}$$

同时也可以得到:

$$\partial_t(U(t,-\infty)R(U_{\text{int}}(-\infty,t)))=-iH_{\text{int}}(t)U(t,-\infty)R(U_{\text{int}}(-\infty,t))\tag{7.14}$$

7.2 Dyson 级数

有了上面的微分方程, 我们就可以形式求解 $U(t,-\infty)R(U_{\text{int}}(-\infty,t))$ 了:

$$U_I(t,-\infty)=U(t,-\infty)R(U_{\text{int}}(-\infty,t))=T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{t}dt'H_{\text{int}}(t')\right) \tag{7.15}$$

注. *当然问题就是这个级数到底收不收敛? 虽然非常遗憾, 但是也并不令人意外的是, 正常情况下它的确不收敛. 这实际上印证了我们老是强调的一件事情, 严格的带相互作用的场论是没有办法在 Fock 空间上实现的. 因为如果 R 存在, 那我们就用 $R(\phi(x))$ 来量子化 $\phi(x)$ 就万事大吉了.*

7.3 散射与 S 矩阵

现在我们来考虑一些关于物理态的事情. 理论上来说, 我们现在完全不知道一个相互作用场论应该在什么希尔伯特空间上建立, 也就完全不知道有些什么物理状态. 不过我们都做到这里了, 无非就差个收敛性, 我们忽略掉这件事, 认为我们已经在这个自由场的 Fock 空间上实现了量子化. 我们可以定义算符:

$$S=U(\infty,-\infty)R(U_{\text{int}}(-\infty,\infty))=T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}dt'H_{\text{int}}(t')\right) \tag{7.16}$$

由于 $R(A)$ 的形式是 $U^{-1}AU$, 我们又可以像第一章里出现的那样, 将 U 作用在态 $|\psi\rangle$ 上, 我们看到:

$$\langle\psi|U_I(-\infty,t)\phi(t)U_I(t,-\infty)|\psi\rangle=\langle\psi|R(\phi(t))|\psi\rangle \tag{7.17}$$

所以我们可以将 $U_I(t,-\infty)|\psi\rangle=|\psi(t)\rangle$ 理解为在 t 时刻做对自由场的测量能测量到的态.

注. *其实这里就有些不好解释了, 或许一种想法是 $\phi(t)$ 意思是如果场是自由场, 那么测量的就是它的振幅, 但是如果场不是自由场, 自然这就不一定*

测的是振幅了, 不过总是可以认为自己在测量振幅, 那么也就会以为自己在测量一个 $|\psi(t)\rangle$ 态.