Coleman

Zean

2021 年 10 月 28 日

附录 D　Scattering Theory

我们现在来详细考虑一个相互作用场论中的散射问题.

D.1　粒子与散射

我们最早对量子场论的假设里有这么一个要求, 对于每个 $\mathrm{SO}^+(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$ 的元素 (Λ, a) 都有一个对应的表示 $U(\Lambda, a)$. 这样一来我们可以考察它对应的李代数的表示. 那么李代数就有卡西米尔算符:

$$M^2 = P^\mu P_\mu \tag{D.1}$$

它能够分辨出不同的不可约表示, 我们假定对于我们的表示 U, 存在一些特定的质量 μ, 对于物理态所在的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$, 有一系列 P_μ 的共同本征态 $P|p,\sigma\rangle = p|p,\sigma\rangle$ 具有性质 $M^2|p,\sigma\rangle = \mu^2|p,\sigma\rangle$, 而且其他的 P_μ 的共同本征态的本征值 p 至少都在 $p^2 = \mu^2$ 确定的能壳的一个邻域之外.

也就是说我们的相互作用量子场论物理态希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 里有一个子空间 $\mathcal{H}_1$, 它承载了一个 $\mathrm{SO}^+(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$ 的不可约表示. 而且某种意义上它与别的态是相互独立的, 事实上这意味着这些态是稳定的. 回忆我们最早的原理: $\mathrm{SO}^+(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$ 的不可约表示标记了粒子. 于是我们将这些 $|p,\sigma\rangle$ 称为我们场中的 “准粒子”.

当然平行于上面的构造, 我们还要求相互作用量子场论物理态希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中有一个 $\mathrm{SO}^+(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$ 的 trivial 表示, 这称为真空, 我们暂且假定它是唯一的, 写作 $|\Omega\rangle$.

既然有单个的基本粒子, 我们当然会想, 是不是可以有同时存在多个基本粒子的态, 也就是将 $|p,\sigma\rangle$ 做张量积, 让这样的张量积态依旧存在于我们的 $\mathcal{H}$ 之中. 接下来我们会看到, 这些 $|p,\sigma\rangle$ 的张量积态确实存在, 也就是说相互作用的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中有一个看起来像我们用以表示自由粒子的 Fock 空间作为子空间.

D.2 "准粒子" 的构造

我们首先做一些用自然语言描述粒子的尝试. 首先因为我们已经假定有单粒子希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\infty$ 以及基矢 $|p,\sigma\rangle$ 了, 似乎我们可以构造出一些定域在某些空间区域的粒子, 也就是说除掉在 t 时刻的某个有界空间区域的可观测量 $\mathcal{A}(O_1)$ 以外, 这个同时面上别的可观测量在这个态上的期待值就和真空一样, 例如我们把它叫做 $|\psi_1\rangle$, 与此同时我们在与 O_1 同时的一个与它无交的有界区域 O_2 上也有个类似的态 $|\psi_2\rangle$, 那看上去对于这个同时面上的可观测量来说, 我们好像就有个张量积态 $|\psi_1\rangle\otimes^t|\psi_2\rangle$, 就像时空中某同时面上有两个盒子, 盒子里各有一个粒子一样. 我们继续思考, 对于其他同时面, 这种 "张量积" 应该是什么样的呢? 由于 $U(\tau)$ 作用在物理态上相当于做时间平移, 所以我们认为需要有:

$$U(\tau)|\psi_1\rangle\otimes^{t+\tau}U(\tau)|\psi_2\rangle=U(\tau)\left(|\psi_1\rangle\otimes^t|\psi_2\rangle\right)\tag{D.2}$$

也就是说:

$$|\psi_1\rangle\otimes^{t+\tau}|\psi_2\rangle=U(\tau)\left(U(\tau)^\dagger|\psi_1\rangle\otimes^t U(\tau)^\dagger|\psi_2\rangle\right)\tag{D.3}$$

也就是说如果我们希望在无穷远处的观测看起来就像作用在两个独立的粒子上的话, 就有:

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle\otimes^\infty|\psi_2\rangle=&U(\infty)\left(U(\infty)^\dagger|\psi_1\rangle\otimes^0 U(\infty)^\dagger|\psi_2\rangle\right)&\text{(D.4)}\\=&U(\infty)\left(e^{-iH_0\infty}|\psi_1\rangle\otimes^0 e^{-iH_0\infty}|\psi_2\rangle\right)&\text{(D.5)}\end{aligned}$$

现在更加严格地描述以上过程, 我们这个所谓时间依赖的 “张量积” 本质上是一个双重线性映射:

$$F^t : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H} : F^t(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) \mapsto |\psi_1\rangle \otimes^t |\psi_2\rangle \tag{D.6}$$

进一步, 我们当然也觉得在同时面 Σ^t 上的 n 个不交区域 $O_1, \cdots, O_n$ 上局域的物理态 $|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle$ 也有个对应的 n“粒子” 态 $|\psi_1\rangle \otimes^t \cdots \otimes^t |\psi_n\rangle$, 也就是:

$$F^t_n(|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle) \mapsto |\psi_1\rangle \otimes^t \cdots \otimes^t |\psi_n\rangle \tag{D.7}$$

注意我们将 $n = 0, 1$ 的情况理解为:

$$F_0 : \mathbb{C} \to \mathcal{H} : 1 \mapsto |\Omega\rangle \tag{D.8}$$

$$F_1 : |\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle \tag{D.9}$$

这些 F^t_n 要能够保持同时面测量的局域性:

$$\begin{aligned}&\left(\langle\psi_1| \otimes^t \cdots \otimes^t \langle\psi_n|\right) A(t, \mathbf{x}) \left(|\psi_1\rangle \otimes^t \cdots \otimes^t |\psi_n\rangle\right) \\ &\qquad = \langle\psi_1|A(t, \mathbf{x})|\psi_1\rangle + \cdots + \langle\psi_n|A(t, \mathbf{x})|\psi_n\rangle\end{aligned} \tag{D.10}$$

而且将这些态拼在一起的过程可以分步完成, 也就是说这个 “张量积” 确实具有结合律. 如果将我们的讨论限制在 $\mathcal{H}_1$ 以及与之对应的那些多 “准粒子” 态对应的 $\mathcal{H}$ 中的子空间的话, 那么我们构造的 $\otimes^\infty$ 的含义也就是在无穷远的未来的一个同时面, 我们有一系列物理态, 它们对于无穷远处的测量就像一群自由粒子. 另一方面, 我还可以将极限取为负无穷, 这样也得到了一群自由粒子. 进一步考虑自由粒子的全同性之后, 我们有了两种将 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ 嵌入到 $\mathcal{H}$ 的方式:

$$\otimes^{\text{out/in}} = \otimes^{\pm\infty} \tag{D.11}$$

而且我们早就有了描述 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ 的工具, 也就是产生湮灭算符, 或者等价地用一个自由的场论. 所以只讨论 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ 对应的态的话, 我们可以等

价地定义产生湮灭算符被映射的结果:

$$|\Omega\rangle_{\mathcal{F}} \mapsto |\Omega\rangle_{\text{int}} \tag{D.12}$$

$$a_1^\dagger|\Omega\rangle_{\mathcal{F}} \mapsto F^t(a_1^\dagger|\Omega\rangle_{\mathcal{F}}) = F^t a_1^\dagger (F^t)^{-1}(F^t(|\Omega\rangle_{\mathcal{F}})) \tag{D.13}$$

所以我们接下来只要考虑一些 $\mathcal{H}$ 上的算符 $a_t^\dagger = F^t a^\dagger (F^t)^{-1}$, 并要求它们满足一些通过上面这种方式导出的一些条件即可. 注意我们当然希望 F 同时有酉性质.

D.3 S 矩阵

我们思考 $\otimes^{\text{out/in}}$ 的物理含义. 发现它的含义事实上是在无穷的过去或者无穷的未来进行 "准粒子" 的制备得到的态, 那么如果我在无穷的过去制备两个特定的 "准粒子", 在无穷的未来得到两个其他 "准粒子" 的概率是多少呢? 这非常简单, 无非就是:

$$\left(\langle\phi_1| \otimes^{\text{out}} \langle\phi_2|\right) \left(|\psi_1\rangle \otimes^{\text{in}} |\psi_2\rangle\right) \tag{D.14}$$

的模方. 我们就将所有这些入射态和出射态之间的内积写成一个矩阵, 称为 S 矩阵, 也就是一个由 $\otimes^{\text{out/in}}$ 构造的 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ 自同构.

D.4 质量重整化

那么我们要如何计算这个 S 矩阵呢? 我们回忆 $\otimes^{\text{out/in}}$ 都可以通过一个 $\otimes^0$ 做变换得到:

$$|\psi_1\rangle \otimes^{t+\tau} |\psi_2\rangle = U(\tau)\left(e^{-iH_0\tau}|\psi_1\rangle \otimes^t e^{-iH_0\tau}|\psi_2\rangle\right) \tag{D.15}$$

先前已经说过, 由于张量积的性质, 我们可以干脆用产生湮灭算符在映射到 $\mathcal{H}$ 后的结果刻画这两个张量积, 也就是:

$$|\psi_1\rangle \otimes^t |\psi_2\rangle = a_t^\dagger(\psi_1) a_t^\dagger(\psi_2)|\Omega\rangle \tag{D.16}$$

这样就有:

$$a^\dagger_{1,t+\tau}\cdots a^\dagger_{n,t+\tau}|\Omega\rangle = U(\tau)F^t e^{-iH_0\tau}(F^t)^{-1}a^\dagger_{1,t}\cdots a^\dagger_{n,t}|\Omega\rangle \tag{D.17}$$

也就是:

$$a^\dagger_{1,\mathrm{out}}\cdots a^\dagger_{n,\mathrm{out}}|\Omega\rangle = S^{-1}a^\dagger_{1,\mathrm{in}}\cdots a^\dagger_{n,\mathrm{in}}|\Omega\rangle \tag{D.18}$$

其中:

$$S^{-1} = U(\infty)F^{\mathrm{in}}e^{-iH_0\infty}(F^{\mathrm{in}})^{-1} \tag{D.19}$$

于是最后只要我们能刻画 S 与 a_{in} 的关系, 也就能算出散射矩阵了.

我们知道在自由场论里有:

$$\phi(x) = \int d\mu(p)\left(u(p)a(p)e^{-ipx} + v(p)b(p)^\dagger e^{ipx}\right) \tag{D.20}$$

$$\int d\mathbf{x}\phi(x)e^{i\mathbf{px}} = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}\left(u(p^0,-\mathbf{p})a(p^0,-\mathbf{p})e^{-ip^0x^0} + v(p^0,\mathbf{p})b(p^0,\mathbf{p})^\dagger e^{ip^0x^0}\right) \tag{D.21}$$

$$\begin{aligned}&\int d\mu(p)\int d\mathbf{x}f(p)\phi(x)e^{-ip^0x^0+i\mathbf{px}}\\ &= \int d\mu(p)f(p)\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}\left(u(p^0,-\mathbf{p})a(p^0,-\mathbf{p})e^{-2ip^0x^0} + v(p^0,\mathbf{p})b(p^0,\mathbf{p})^\dagger\right)\end{aligned} \tag{D.22}$$

$$\begin{aligned}&\int d\mu(p)\int d\mathbf{x}\omega_{\mathbf{p}}f(p)\phi(x)e^{-ip^0x^0+i\mathbf{px}}\\ &= \int d\mu(p)f(p)\frac{1}{2}\left(u(p^0,-\mathbf{p})a(p^0,-\mathbf{p})e^{-2ip^0x^0} + v(p^0,\mathbf{p})b(p^0,\mathbf{p})^\dagger\right)\end{aligned} \tag{D.23}$$

$$\begin{aligned}&\int d\mu(p)\int d\mathbf{x}f(p)\partial_0\phi(x)e^{-ip^0x^0+i\mathbf{px}}\\ &= \int d\mu(p)f(p)\frac{i}{2}\left(-u(p^0,-\mathbf{p})a(p^0,-\mathbf{p})e^{-2ip^0x^0} + v(p^0,\mathbf{p})b(p^0,\mathbf{p})^\dagger\right)\end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}&\int d\mu(p)\int d\mathbf{x}\left(i\omega_{\mathbf{p}}f(p)\phi(x) + f(p)\partial_0\phi(x)\right)e^{-ip^0x^0+i\mathbf{px}}\\ &\qquad = i\int d\mu(p)f(p)v(p^0,\mathbf{p})b(p^0,\mathbf{p})^\dagger\end{aligned} \tag{D.25}$$

那么一个最简单的想法是干脆认为"准粒子"差不多就是相互作用场算符产生出来的, 也就是假定:

$$a^\dagger_{x_0=t}(f) = i\int d\mathbf{x}\,(\partial_0 f(x)\phi_{\text{int}}(x) - f(x)(\partial_0\phi_{\text{int}}(x))) \tag{D.26}$$

注意到:

$$\begin{aligned}\partial_0 a^\dagger_{x_0=t}(f) =& i\int d\mathbf{x}\left(\partial_0^2 f(x)\phi_{\text{int}}(x) - f(x)(\partial_0^2\phi_{\text{int}}(x))\right) &\text{(D.27)}\\ =& -i\int d\mathbf{x} f(x)\left(\Box+\mu^2\right)\phi_{\text{int}}(x) &\text{(D.28)}\end{aligned}$$

假设我们有一个简单的相互作用标量场论, 作用量为:

$$S_{\text{int}} = \int\left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \mathcal{H}_{\text{int}}\right) \tag{D.29}$$

那么就有:

$$\begin{aligned}\partial_0 a^\dagger_{x_0=t}(f) =& -i\int d\mathbf{x} f(x)\left(\Box+\mu^2\right)\phi_{\text{int}}(x) &\text{(D.30)}\\ =& i\int d\mathbf{x}\left(f(x)\left(\Box+m^2-\Box-\mu^2\right)\phi_{\text{int}}(x) + f(x)\frac{\partial\mathcal{H}_{\text{int}}}{\partial\phi_{\text{int}}(x)}\right) &\text{(D.31)}\end{aligned}$$

其中 f 是 KG 方程的一个解. 但是根据我们先前的要求:

$$a^\dagger_{1,t+\tau}\cdots a^\dagger_{n,t+\tau}|\Omega\rangle = U(\tau)F^t e^{-iH_0\tau}(F^t)^{-1}a^\dagger_{1,t}\cdots a^\dagger_{n,t}|\Omega\rangle \tag{D.32}$$

$\partial_0 a^\dagger_{x_0=t}(f)$ 需要满足:

$$\partial_0 a^\dagger_{x_0=t}(f) = i[H - F^t H_0(F^t)^{-1}, a^\dagger_{x_0=t}(f)] = i\int d\mathbf{x}\left(f(x)\frac{\partial\mathcal{H}_{\text{int}}}{\partial\phi_{\text{int}}(x)}\right) \tag{D.33}$$

注意我们利用了:

$$F^t H_0(F^t)^{-1} = F^t H_0(a,a^\dagger)(F^t)^{-1} = H_0(a_t, a_t^\dagger) = H_0(\phi_{\text{int}}(t)) \tag{D.34}$$

于是我们需要重新拆分作用量:

$$S_{\text{int}} = \int dx\left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \mathcal{H}'_{\text{int}}\right) \tag{D.35}$$

也就是:

$$\mathcal{H}'_{\text{int}} = \frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\phi^2 + \mathcal{H}_{\text{int}} \tag{D.36}$$

我们来尝试计算一个最简单的矩阵元:

$$\langle\Omega|a_{\text{out}}(p)a_{\text{in}}(q)^\dagger|\Omega\rangle \tag{D.37}$$

然而我们发现实际上不用算, 因为早在一开始我们就假设了:

$$F_1 : |\psi\rangle \mapsto |\psi\rangle \tag{D.38}$$

也就是:

$$a_t^\dagger(\psi)|\Omega\rangle = |\psi\rangle \tag{D.39}$$

显然地, 就有:

$$\langle\Omega|a_{\text{out}}(p)a_{\text{in}}(q)^\dagger|\Omega\rangle = \delta_\mu(p-q) = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = (2\pi)^3 2\sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \tag{D.40}$$

然而如果真的想要计算的话, 我们需要带入 S 矩阵的表达式, 由于:

$$F^t e^{iH_0\tau}(F^t)^{-1}U(-\tau) = e^{iH_0(\phi_{\text{int}}(t))\tau}U(-\tau) \tag{D.41}$$

我们可以一如往常地使用 Dyson 级数求解 S, 我们最终就得到了:

$$\langle\Omega|a_{\text{out}}(p)a_{\text{in}}(q)^\dagger|\Omega\rangle = \langle\Omega|a_{\text{in}}(p)T\exp(-i\int dx\mathcal{H}'_{\text{int}}(\phi_{\text{int}}(-\infty)))a_{\text{in}}(q)^\dagger|\Omega\rangle \tag{D.42}$$

上面的式子可以转动到 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ 中进行计算:

$$\langle\Omega|a_{\text{out}}(p)a_{\text{in}}(q)^\dagger|\Omega\rangle = \langle\Omega|a_{\text{in}}(p)(F_{\text{in}})^{-1}F_{\text{in}}T\exp(-i\int dx\mathcal{H}'_{\text{int}})(F_{\text{in}})^{-1}F_{\text{in}}a_{\text{in}}(q)^\dagger|\Omega\rangle \tag{D.43}$$

我们熟悉的一切都回来了:

$$\langle\Omega|a_{\text{out}}(p)a_{\text{in}}(q)^\dagger|\Omega\rangle = \langle\Omega|a(p)T\exp(-i\int dx\mathcal{H}'_{\text{int}}(a,a^\dagger))a(q)^\dagger|\Omega\rangle \tag{D.44}$$

显然如果我们代入了 $\mathcal{H}_{\text{int}}$ 而非 $\mathcal{H}'_{\text{int}}$ 的话, 就会出现严重的错误. 从相互作用绘景的视角下来说, 我们总的哈密顿量与原先都不同了, 硬生生砍掉了部分质量, 所以要在相互作用里把它加回来. 而这个加回来的效果就是使得单个准粒子的的确确看上去是个粒子, 体现为它的散射振幅就是简单的 δ 函数. 这也就是说质量重整化相当于把场的自相互作用给除去了, 质量重整化作为 "抵消项" 将自相互作用抵消了.

D.5 更多的重整化

显然我们直接使用相互作用的场算符的操作过分暴力, 必然导致很多问题. 显然:

$$a_t^\dagger(\psi)|\Omega\rangle = i\int d\mathbf{x}\left(\partial_0\psi(x)\phi_{\text{int}}(x) - \psi(x)(\partial_0\phi_{\text{int}}(x))\right)|\Omega\rangle = |\psi\rangle \tag{D.45}$$

的成立是个极强的要求, $a_t^\dagger(\psi)$ 作用在真空上就完全得映进单粒子空间 $\mathcal{H}_1$. 而 ϕ_{int} 果真有这么好的性质吗? 这当然不一定, 但是我们可以尝试强行将它的结果投影到 $\mathcal{H}_1$ 空间上, 然后我们会发现:

$$P_1 a_t^\dagger(\psi)|\Omega\rangle = i\int d\mathbf{x}\left(\partial_0\psi(x)P_1\phi_{\text{int}}(x) - \psi(x)(\partial_0 P_1\phi_{\text{int}}(x))\right)|\Omega\rangle \propto |\psi\rangle \tag{D.46}$$

是成立的.

为什么上面的式子成立呢? 我们先要注意到由于 $\mathcal{H}_1$ 是一个子表示空间, P_1 和 $U(\Lambda, a)$ 是对易的, 也就是:

$$P_1\phi_{\text{int}}(x) = P_1 U(x)\phi_{\text{int}}(0)U(x)^\dagger = U(x)P_1\phi_{\text{int}}(0)U(x)^\dagger \tag{D.47}$$

那我们就可以先考虑 $|\psi\rangle$ 就是某个动量为 q 的态的情况, 等价地, $\psi(p) =$

$\delta_\mu(p-q)$ 或者 $\psi(x)=e^{-iqx}$:

$$P_1 a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle = \\ i\int d\mathbf{x}\left(-iq^0\psi(x)U(x)P_1\phi_{\text{int}}(0)U(x)^\dagger - \psi(x)(\partial_0 U(x)P_1\phi_{\text{int}}(0)U(x)^\dagger)\right)|\Omega\rangle \tag{D.48}$$

由于 $U(x)P_1 = P_1U(x)P_1 = U_0(x) = e^{iPx}$:

$$P_1 a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle = \int d\mathbf{x}e^{-iqx}\left(q^0+H_0\right)P_1\phi_{\text{int}}(x)|\Omega\rangle \tag{D.49}$$

于是:

$$P^\mu P_1 a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle = P^\mu\int d\mathbf{x}e^{-iqx}\left(q^0+H_0\right)P_1\phi_{\text{int}}(x)|\Omega\rangle \tag{D.50}$$

$$P^\mu P_1 a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle = \int d\mathbf{x}e^{-iqx}\left(q^0+H_0\right)(-i\partial^\mu)P_1\phi_{\text{int}}(x)|\Omega\rangle \tag{D.51}$$

对于空间部分动量来说:

$$P^i P_1 a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle = \int d\mathbf{x}(i\partial^i e^{-iqx})\left(q^0+H_0\right)P_1\phi_{\text{int}}(x)|\Omega\rangle = q^i P_1 a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle \tag{D.52}$$

由于在 $\mathcal{H}_1$ 上 $\mu^2 = P^2$, 不难验证 H, 总之我们确实证明了 $P_1 a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle$ 正比于 $|p\rangle$. 关键是利用 $\mathcal{H}_1$ 上我们已经知道的庞加莱群的表示.

我们实际上发现, 没有办法对于每时每刻的 $a_t^\dagger(p)$, 都要有 $a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle$ 等于 $|p\rangle$, 我们一开始的 "$\otimes^t$" 要求的实在是太多了. 我们现在只有一个投影后的正比条件. 然而我们真正关心的其实是 $a_t^\dagger(p)$ 的极限, 于是我们想问 $a_t^\dagger(p)$ 在 t 趋近于正负无穷的时候, 在 $\mathcal{H}_1$ 上的投影是否就是最重要的部分, 其他的都发生衰减消失了, 以至于最后直接正比于 $|p\rangle$ 呢? 虽然对 ϕ_{int} 我们不知道这是否正确, 但是我们能够证明, 一定存在一个算符, 把它代入 ϕ_{int}, 能够做到这一点, 有:

$$\lim_{t\to\pm\infty} a_t^\dagger(p)|\Omega\rangle \to |p\rangle \tag{D.53}$$

而且还拥有我们提出的一系列张量积性质. 也就是说, 无穷远处的张量积确确实实是我们想要的张量积.

不过就我们目前而言, 我们假装 ϕ_{int} 就是可以做到这一点的算符. 我们先前定义:

$$a^{\dagger}_{x_0=t}(f) = i\int d\mathbf{x}\,(\partial_0 f(x)\phi_{\text{int}}(x) - f(x)(\partial_0\phi_{\text{int}}(x))) \tag{D.54}$$

因为现在我们完全不知道在无穷远处这个 $a^{\dagger}_{x_0=t}(f)$ 是否性质如此之好, 就真的直接得到归一的 $|p\rangle$ 了, 于是我们得引入一个比例因子, 也就是说做一个场强重整化, 所以实际上得定义:

$$a^{\dagger}_{x_0=t}(f) = \frac{i}{\sqrt{Z_\phi}}\int d\mathbf{x}\,(\partial_0 f(x)\phi_{\text{int}}(x) - f(x)(\partial_0\phi_{\text{int}}(x))) \tag{D.55}$$

接下来我们把 $\frac{\phi_{\text{int}}(x)}{\sqrt{Z_\phi}}$ 写作 $\phi_{\text{r}}(x)$, 也就是重整化之后的场, 把它的未来与过去的极限称为 ϕ_{in} 和 ϕ_{out}

D.6　LSZ 约化公式

在假设可以被我们观测到的“准粒子”是由相互作用场算符生成的之后, 我们就可以尝试具体计算 S 矩阵了, 我们会发现其中有一个很好的简化计算的关系式, 下面我们来推导它. 首先:

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|a_{\text{out}}(f_1)\cdots a_{\text{out}}(f_n)T(\phi_{\text{r}}(x_1)\cdots\phi_{\text{r}}(x_m))a^{\dagger}_{\text{in}}(g_1)\cdots a^{\dagger}_{\text{in}}(g_n)|\Omega\rangle\\&\qquad= \langle f_1\cdots f_n|T(\phi_{\text{r}}(x_1)\cdots\phi_{\text{r}}(x_m))|g_1\cdots g_k\rangle\end{aligned} \tag{D.56}$$

代入 $a^{\dagger}_{\text{in}}(g_1)$ 表达式就有:

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|a_{\text{out}}(f_1)\cdots a_{\text{out}}(f_n)T(\phi_{\text{r}}(x_1)\cdots\phi_{\text{r}}(x_m))a^{\dagger}_{\text{in}}(g_1)\cdots a^{\dagger}_{\text{in}}(g_n)|\Omega\rangle\\&= \langle f_1\cdots f_n|T\left(\phi_{\text{r}}(x_1)\cdots\phi_{\text{r}}(x_m)\right)i\int d\mathbf{x}\left(\phi_{\text{in}}(x)\partial_0 g_1(x) - (\partial_0\phi_{\text{in}}(x))g_1(x)\right)|g_2\cdots g_k\rangle\end{aligned} \tag{D.57}$$

假设我们只考虑出射态不等于入射态的情况, 于是就有:

$$
\begin{aligned}
&\langle\Omega|a_{\mathrm{out}}(f_1)\cdots a_{\mathrm{out}}(f_n)T(\phi_{\mathrm{r}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{r}}(x_m))a_{\mathrm{in}}^{\dagger}(g_1)\cdots a_{\mathrm{in}}^{\dagger}(g_n)|\Omega\rangle\\
&=\langle f_1\cdots f_n|T\left(\phi_{\mathrm{r}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{r}}(x_m)\right)i\int d\mathbf{x}\left(\phi_{\mathrm{in}}(x)\partial_0 g_1(x)-(\partial_0\phi_{\mathrm{in}}(x))g_1(x)\right)\\
&-i\int d\mathbf{x}\left(\phi_{\mathrm{out}}(x)\partial_0 g_1(x)-(\partial_0\phi_{\mathrm{out}}(x))g_1(x)\right)T\left(\phi_{\mathrm{r}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{r}}(x_m)\right)|g_2\cdots g_k\rangle
\end{aligned}
\tag{D.58}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle\Omega|a_{\mathrm{out}}(f_1)\cdots a_{\mathrm{out}}(f_n)T(\phi_{\mathrm{r}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{r}}(x_m))a_{\mathrm{in}}^{\dagger}(g_1)\cdots a_{\mathrm{in}}^{\dagger}(g_n)|\Omega\rangle\\
&\quad=i\int dx g_1(x)(\Box_x+\mu^2)\langle f_1\cdots f_n|T\left(\phi_{\mathrm{r}}(x_1)\cdots\phi_{\mathrm{r}}(x_m)\phi_{\mathrm{r}}(x)\right)|g_2\cdots g_k\rangle
\end{aligned}
\tag{D.59}
$$

最后取 f 和 g 是平面波, 我们就得到了:

$$
\begin{aligned}
&\langle p_1,\cdots,p_n,\mathrm{out}|q_1,\cdots,q_n,\mathrm{in}\rangle=\\
&(i)^{2n}(-p_1^2+\mu^2)\cdots(-p_n^2+\mu^2)(-q_1^2+\mu^2)\cdots(-q_n^2+\mu^2)\tau(p_1,\cdots,p_n,-q_1,\cdots,-q_n)
\end{aligned}
\tag{D.60}
$$

其中:

$$
\tau(p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n)=\int dx_1 e^{ip_1x_1}\cdots\int dx_n e^{ip_nx_n}\langle\Omega|T(\phi_r(x_1)\cdots\phi_r(x_n))|\Omega\rangle
\tag{D.61}
$$