Coleman

Billy Shen

2021 年 10 月 25 日

第九章　Divergences and counterterms

上一章我们解决了 Model1 的所有问题，这一章我们来解决 Model2。它们的区别仅在于相互作用项是否自动在无穷过去和无穷将来趋向于 0：

$$H_{I1} = g\rho(x)\phi(x) \tag{9.1}$$

$$H_{I2} = g\rho(\mathbf{x})\phi(x) \tag{9.2}$$

显然 (9.2) 并不自动满足这个性质，因此我们必须手动引入开关函数 $f(t)$ 来缓慢打开相互作用。

我们发现，$f(t)$ 函数的性质会影响计算，因此我们引入了 counterterm、引入不同的 $f(t)$ 函数；但与此同时，有些物理又不受 $f(t)$ 形式的影响。本章的第一个目标是弄清楚 $f(t)$ 究竟能影响什么。

上一节中 $\rho(x)$ 仅作为 $h(\mathbf{p})$ 的一部分出现。本章中 $\rho(\mathbf{x})$ 能影响更多东西，比如碰撞，能动量交换，点荷极限。本章的第二个目标是厘清 $\rho(\mathbf{x})$ 的物理意义。

9.1　$f(t)$ 和 counterterm

第一个要回答的问题是，为什么一定要 $f(t)$ 来缓慢开启相互作用？这是因为我们要求 $|\psi(t)\rangle_{int} = U_{int}(t,-\infty)|\psi(-\infty)\rangle_{int}$，而 $|\psi(-\infty)\rangle_{int} = |\psi(-\infty)\rangle_{noint}$。考虑 H_{int} 的基态 $|\psi(-\infty)\rangle_{int}$，如果 H_{int} 不随时间改变的话，那么在无穷过去它仍将是 H_{int} 的本征态而不是 H_{noint} 的本征态。这违背了假设。更重要的是，我们期待的经典散射过程是：粒子从无穷远入射，此时和势场没有任何相互作用，就好像势场不存在；进入势场，相互作用；离开势场，射向无穷远，又好像势场不存在了。但是在量子情况下，粒子是波函数而不能定域，$\rho(\mathbf{x})$ 更不是定域的，因此我们需要 $f(t)$ 来模拟粒子从无相互作用到进入势场再离开势场的过程。

第二个问题是，为什么一定要引入 counterterm？Coleman 书中给出了两个理由：1）这能够消除 $\langle 0|S|0\rangle$ 的 T-dependence；2）这能使得 H_{int} 的基态能量和 H_{noint} 相同。这

两个理由并不能使我信服。对于第一个理由，只要 $\langle 0|S|0\rangle$ 的模长是 1，带有相位又何妨？难道有可观测效应？而且这里的 T 只是来源于我们特定的 $f(t)$ 取法，有没有可能取一个好的 $f(t)$ 使得它不引入任何额外的相位？对于第二个理由，哈密顿量随时间的改变是否会引入能量的变化，使得基态本身的能量不再守恒？

第三个问题是，不同的 $f(t)$ 是否会给出一样的物理？已经有一个“反例”，那就是当我们取常见的 $f(t)$ 时，Model2 的 S 矩阵就是恒同矩阵；但当取 extended adiabatic function 的时候，$S|0\rangle$ 竟然不再是 $|0\rangle$。所以我觉得第二种阶跃的 $f(t)$ 是错的。

9.2 $\rho(\mathbf{x})$ 是什么？

在第八章中，Coleman 说 $\rho(\mathbf{x})$ 类似于经典电磁学：它是背景中的点荷分布。

在第九章中，有更多的对 $\rho(\mathbf{x})$ 的描述：

1. 介子波包撞击 ρ，在无穷过去这些波包远离 ρ(P187)
2. 不含时的 $\rho(\mathbf{x})$ 只能传递动量而不能传递能量 (P189 最后)
3. 称 $\rho(\mathbf{x})$ 为核子，且当它趋向于点电荷时，基态能量发散 (P193)

第一点和第三点其实是同一种理解。对于第二点，这是因为 H 是时间平移的生成元，当完全开启相互作用后我们的 H 不含时，因此具有时间平移对称性，因而能量必须守恒，而动量不必守恒。对于 Model1 来说，$\rho(x)$ 就不具有时间平移对称性，因此能量不会守恒。这就是 $\rho(x)$ 在给体系输入/输出能量。

9.3 发散性

紫外发散 指在 p 极大的地方发生的不收敛。比如当 $\rho(\mathbf{x})=\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 时，$\tilde{\rho}(\mathbf{p})=c$，积分 $E_0=-\frac{g^2}{2}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{|\tilde{\rho}|^2}{|\mathbf{p}|^2+\mu^2}$ 的积分项在 p 极大时趋向 dp，因此发散。

红外发散 指在 p 极小的地方发生的不收敛。比如当 $\mu\to 0$ 时 $\alpha\to\infty$。

我们允许这类发散的出现，只要它们不会影响真正能观测到的量。通常我们的物理仪器只有有限的分辨率，这相当于改变了积分限，会发散的部分根本就不会进入积分。能这样解释发散的理论被称作**可重整化**的。