Come calcola la natura
Determinismo, probabilità, irreversibilità

Apprendimento ed evoluzione in sistemi artificiali

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

- **Corso di laurea in Informatica**
  (anno accademico 2024/2025)
  - Insegnamento: Apprendimento ed evoluzione in sistemi artificiali
  - Docente: Marco Villani

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA
Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

I concetti chiave

- Sistemi dinamici
- Livelli di descrizione
- Determinismo, probabilità, irreversibilità
  - Un sistema dinamico interessante
- Il panorama degli attrattori
- I sistemi dinamici nelle scienze dell'artificiale

Alcuni sistemi naturali

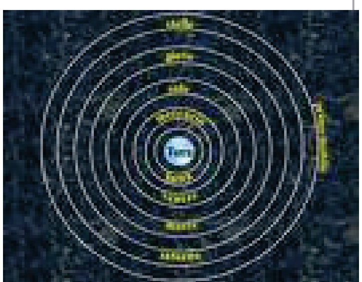
- Un corpo che cade
- I pianeti che orbitano attorno al sole
- L'universo intero
- Una molecola di ammoniaca
- Una cellula
- Il sistema dei geni in una cellula
- Una colonia batterica
- Un organismo pluricellulare
- Una popolazione di individui interagenti
- una specie che evolve
- un ecosistema
- …

Sistemi dinamici

- Una caratteristica comune è che questi sistemi cambiano nel tempo
- Seguendo alcune "leggi"
- Oppure no?
- La regolarità dei moti astronomici
- L'imprevedibilità dei fenomeni terrestri

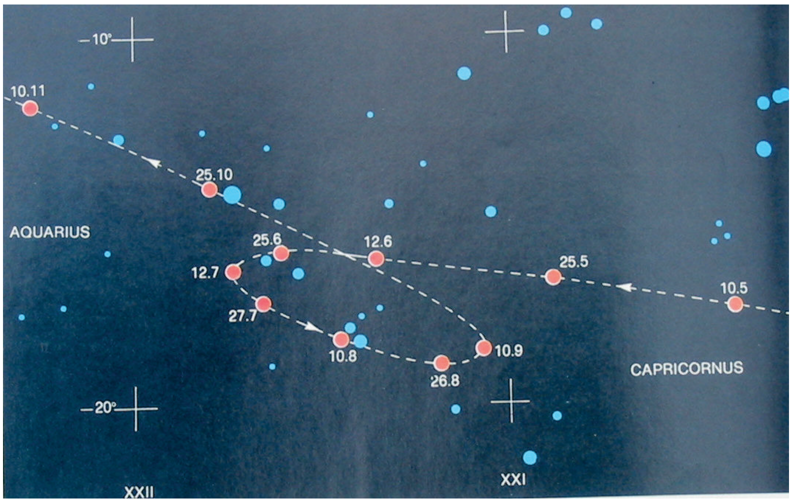
La cosmologia aristotelica

- Aristotele e la divisione fra
  - il mondo sublunare, corruttibile, imprevedibile, composto dai 4 elementi aria terra fuoco e acqua
  - I cieli, regolari e prevedibili, composti da "quintessenza" e dotati di moti circolari
- La terra è al centro dell'universo
- È circondata da numerose sfere, in cui sono incastonati stelle e pianeti
- L'etere si muove di moto circolare
  - Moto perfetto



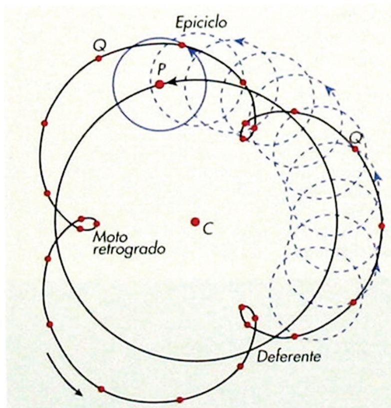
Bisogna però fare i conti con le osservazioni

- Moti retrogradi



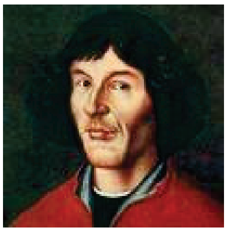
Il sistema tolemaico

- Per rendere conto del moto retrogrado Tolomeo (100-175d.C.) introdusse gli epicicli e gli equanti, conservando l' idea dei moti circolari

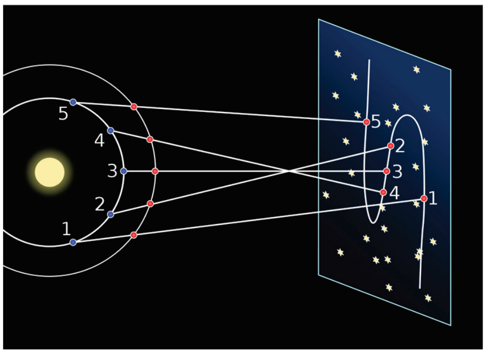


- Il sistema aristotelico-tolemaico era in mirabile accordo con le osservazioni dell'epoca

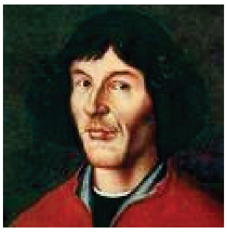
Copernico (1473-1543)



- Nel XVI secolo Copernico propone un modello eliocentrico
  - Che rende conto dei moti retrogradi in maniera naturale
- Si accende un vivace dibattito



Copernico (1473-1543)



- Nel XVI secolo Copernico propone un modello eliocentrico
  - Che rende conto dei moti retrogradi in maniera naturale
- Si accende un vivace dibattito
- Le osservazioni di Galileo depongono a favore dell'ipotesi copernicana
- E mostrano la corruttibilità dei cieli
  - Montagne della luna, comete
  - Stella nova

La meccanica classica

- Ma soprattutto Galileo mostra come sia possibile descrivere in termini matematici anche moti terrestri
  - Piano inclinato
- Newton mostra che la legge che regola la caduta dei gravi è la stessa che causa l'orbita della luna
- Si rompe la distinzione ontologica fra cielo e terra!
- I successi della meccanica ne fanno il paradigma per altre scienze

La meccanica classica

- La scoperta delle leggi della dinamica apre una stagione di grandi scoperte
- La scoperta di Nettuno
- Estensione delle leggi della dinamica ai mezzi continui (fluidi, solidi)
- Viene applicata con successo allo studio dei fenomeni elettrici e magnetici
  - L'unificazione di Maxwell: anche l'ottica

Il paradigma della meccanica classica

- Esistono precise equazioni del moto
  - F=ma e altre formulazioni equivalenti
  - Lagrange, Hamilton, Poisson
- Determinismo
- Reversibilità

Meccanica classica: determinismo

- la legge di Newton è un'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2r}{dt^2} = F(r)$$
$$r(0) = r_0$$
$$V(0) = v_0$$

- Teorema di Cauchy: Se si *conoscono* la posizione e la velocità iniziali di un corpo il suo futuro è determinato. Vale sotto condizioni piuttosto generali sulla forma della F

- esempio: caduta verticale con accelerazione costante –g

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$
$$z(0) = z_0$$
$$v(0) = v_0$$

$$\boxed{t_0 = 0}$$

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

- il valore di z è noto ad ogni istante

Meccanica classica: caduta con accelerazione costante

$$\boxed{a(t)=\frac{d^2z}{dt^2}=-g}$$

A $\int a(t)\,dt=\int\frac{d^2z}{dt^2}dt=\int -g\,dt$ B

A $\int_{t_0}^{t}a(t)dt=v(t)|_{t_0}^{t}=v(t)-v(t_0)=v(t)-v_o$

B $\int_{t_0}^{t}-g\,dt=-g\int_{t_0}^{t}dt=-g(t-t_0)=-gt$

A $v(t)-v_o=-gt$ B

$$\boxed{v(t)=-gt+v_o}$$

- esempio: caduta verticale con accelerazione costante –g

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g$$
$$z(0)=z_0$$
$$v(0)=v_0$$
$$\boxed{t_0=0}$$
$$z(t)=z_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

- il valore di z è noto ad ogni istante

Meccanica classica: caduta con accelerazione costante

$$\boxed{v(t)=\frac{dz}{dt}=-gt+v_0}$$

A $\int v(t)dt=\int\frac{dz}{dt}dt=\int(-gt+v_0)dt$ B

A $\int_{t_0}^{t}v(t)dt=z(t)|_{t_0}^{t}=z(t)-z(t_0)=z(t)-z_o$

B $\int_{t_0}^{t}(-gt+v_0)dt=-g\int_{t_0}^{t}tdt+v_0\int_{t_0}^{t}dt$

$$\int_{t_0}^{t}-gtdt=-g\int_{t_0}^{t}tdt=-\frac{1}{2}g\ t^2|_{t_0}^{t}=-\frac{1}{2}g(t^2-{t_0}^2)$$

$$\int_{t_0}^{t}v_0dt=v_0\int_{t_0}^{t}dt=v_0\ t|_{t_0}^{t}=v_0(t-t_0)$$

A $z(t)-z_o=-\frac{1}{2}g(t^2-{t_0}^2)+v_0(t-t_0)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$ B

- esempio: caduta verticale con accelerazione costante –g

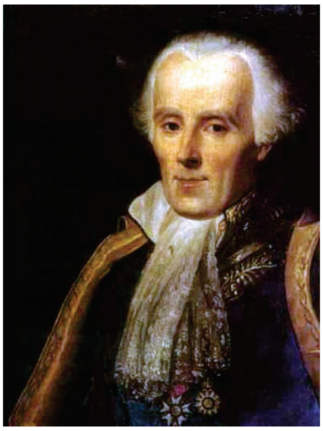
$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g$$
$$z(0)=z_0$$
$$v(0)=v_0$$
$$\boxed{t_0=0}$$
$$z(t)=z_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

- il valore di z è noto ad ogni istante

$$\boxed{z(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+z_o}$$

Meccanica classica: determinismo

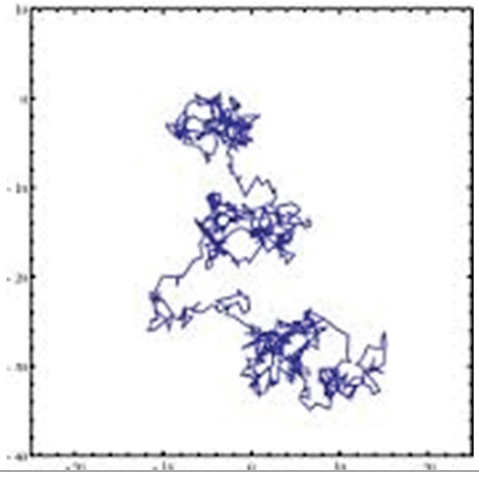
- Se vi sono tanti corpi che interagiscono muovendosi il calcolo è complicato ma, in assenza di interventi dall'esterno, il futuro è completamente determinato



- Il demone di Laplace può prevedere tutto
  - Un essere che conosce la posizione e il momento di ogni singola particella dell'Universo, con un intelletto così potente ed efficace da poter "vedere" contemporaneamente tutte le interazioni reciproche tra tutte le particelle dell'Universo

Il rumore (primo interludio)

- Se osserviamo solo alcune variabili, può accadere di osservare comportamenti apparentemente casuali
- Esempio: moto browniano



Il rumore (primo interludio)

- il rumore che influenza la particella browniana descrive in maniera sintetica l'effetto di tante altre variabili ignorate
  - rumore epistemico
- può essere trattato in maniera matematicamente rigorosa
- non si ottiene l'equazione di una traiettoria della particella browniana, ma le proprietà di famiglie di traiettorie (distribuzioni statistiche)

Meccanica classica: reversibilità nel tempo

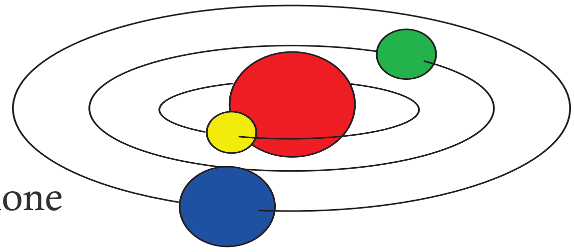
- equazione di Newton

$$d^2x/dt^2 = F(x)$$

- è invariante rispetto a inversione temporale; infatti

$$t' = -t$$

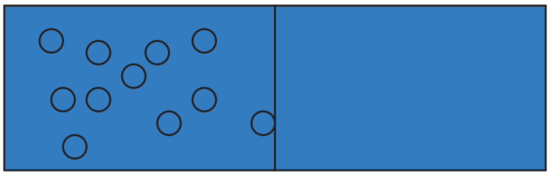
$$d^2x/dt'^2 = d^2x/dt^2$$

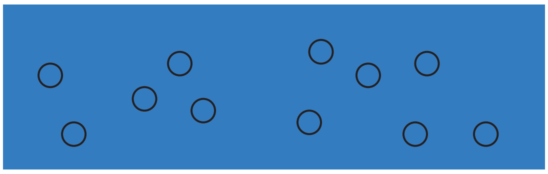


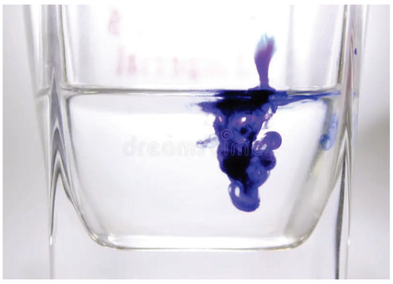
$F(x)$ è invariante rispetto alla trasformazione

- Quindi è impossibile capire se un film viene proiettato nel verso giusto o all'indietro
  - Palle da biliardo senza attrito, moti planetari…

Nell'esperienza quotidiana è tutto diverso



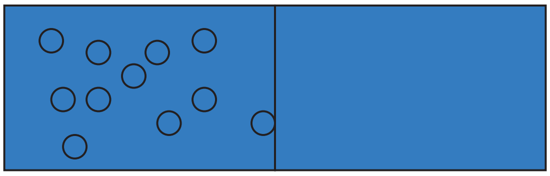


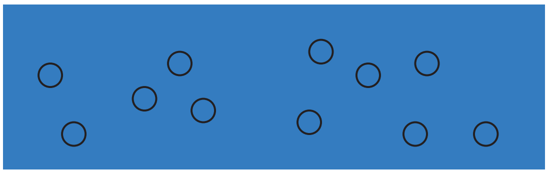


- I pendoli rallentano fino a fermarsi
- Il gas si diffonde nell'ambiente
- La zolletta di zucchero non si ricompone

…

Nell'esperienza quotidiana è tutto diverso





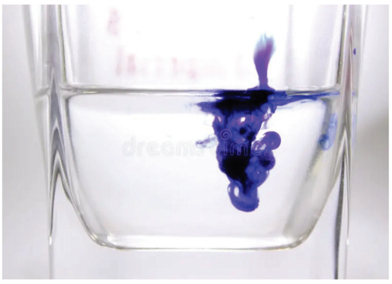
- Se le leggi fondamentali sono reversibili,
- come può accadere che i fenomeni che osserviamo non lo siano?
- Ci sono leggi anche per i processi irreversibili? che aspetto hanno?

La seconda legge della termodinamica

- Un esempio notevole
  - «È impossibile creare un motore termico ciclico il cui unico risultato sia la conversione in lavoro di tutto il calore assorbito da una sorgente omogenea»
  - In un sistema isolato, l'entropia è una funzione non decrescente nel tempo

$$\Delta S \geq 0$$

- Ci sono leggi anche per i processi irreversibili? che aspetto hanno?



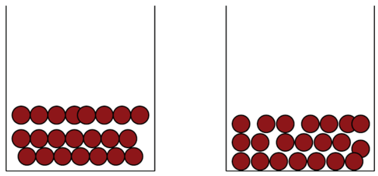
La seconda legge della termodinamica

- Boltzmann suggerì che la seconda legge è di tipo statistico, valida per sistemi macroscopici composti da più elementi microscopici
  - l'aumento di entropia corrisponde a una transizione da una condizione meno probabile a una più probabile
  - Boltzmann sostenne quindi l'appropriatezza del ragionamento statistico per sistemi macroscopici

- In effetti, un sistema stocastico può dare origine a comportamenti irreversibili a partire da leggi reversibili!
  - Nota: un sistema stocastico può dare origine a comportamenti irreversibili MACROSCOPICI a partire da leggi reversibili MICROSCOPICHE

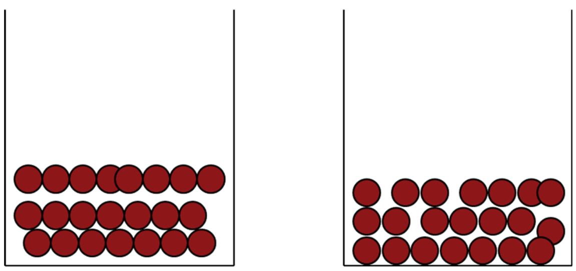
L'urna di Ehrenfest

- Proviamo a usare un modello per capire!
  - più semplice delle molecole che si muovono e si urtano
- Si suppone di avere
  - due urne (1 e 2)
  - N palle numerate 1 … N



- Si inizia con un numero arbitrario di palle nell'urna di sinistra e le altre in quella di destra
- Ad ogni istante t=1, 2, 3 … si estrae un numero casuale fra 1 e N, con probabilità uniforme, e si cambia di posto la palla corrispondente
  - La dinamica "microscopica" è reversibile

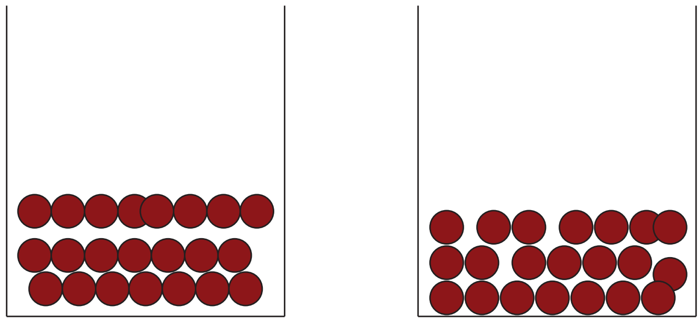
Microstati e macrostati



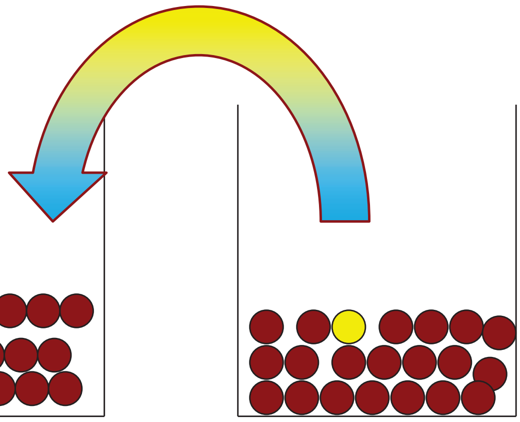
- una descrizione completa ("microscopica") dello stato del sistema è quella che specifica se una pallina particolare si trova a destra o a sinistra
- pallina 1: sinistra
- pallina 2: sinistra
- pallina 3: destra
- pallina 4: sinistra
- …
- pallina N-1: destra
- pallina N: sinistra

- Una descrizione macroscopica dello stesso sistema può limitarsi a specificare quante palline sono a sinistra
  - e quante a destra, ma questa informazione si deduce dalla precedente
- N_1 a sinistra
- $N_2 = N - N_1$ a destra
- La differenza fra le due scatole sarà pari a $n = N_1 - N_2$

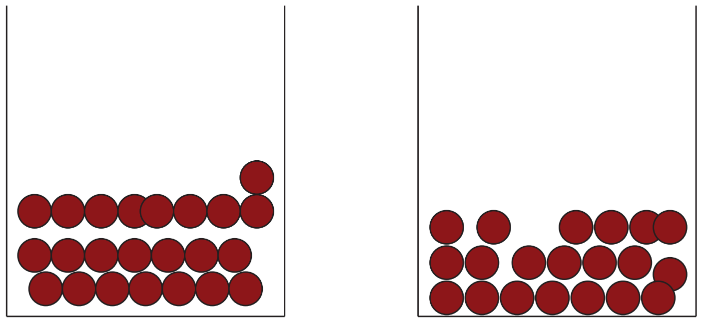
Uno stato particolare



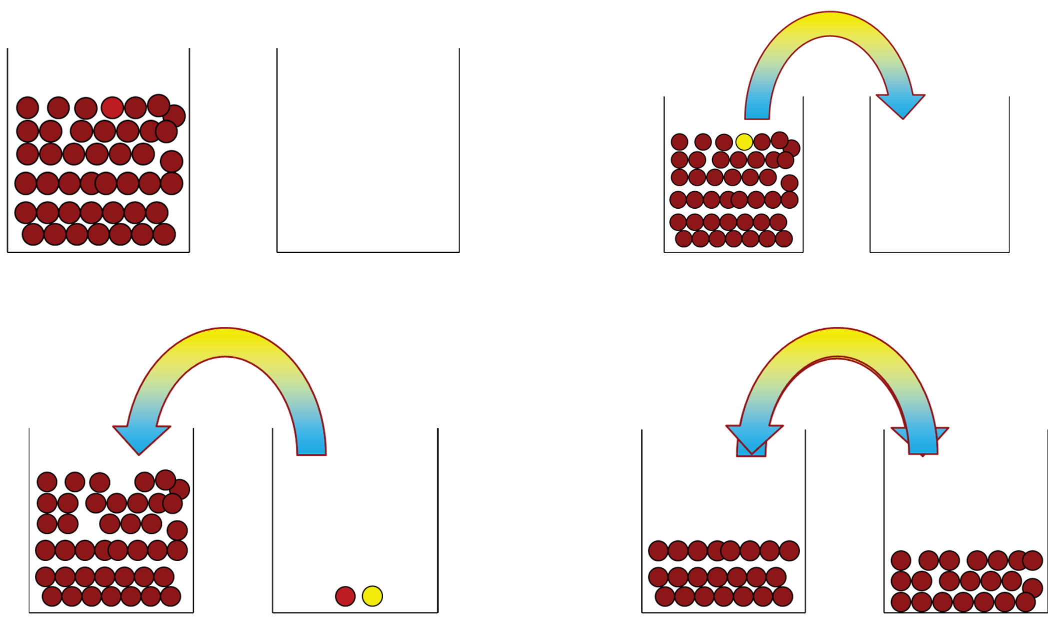
Scelta casuale



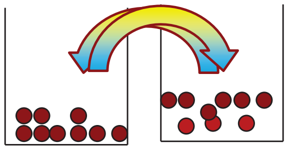
Stato successivo



Dinamica



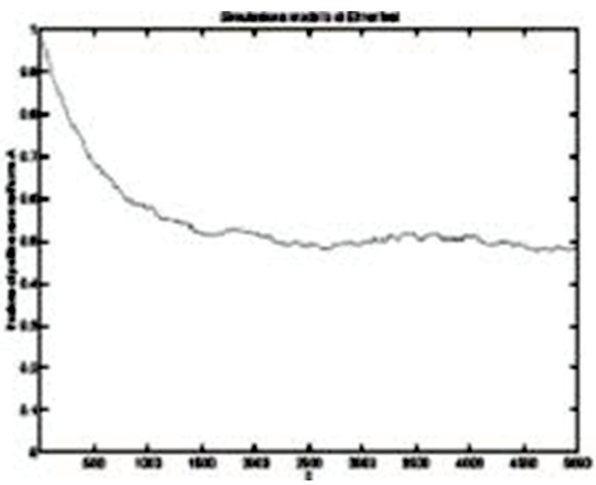
Dinamica nelle urne



- All'inizio N_1=N; N_2=0; n=N
  - viene scelta ovviamente una palla in 1, quindi N_1=N-1, N_2=1; n=N-1
- All'istante successivo è possibile che si torni alla condizione iniziale, ma è molto improbabile
  - N_1=N-2, N_2=2; n=N-2
- Ad ogni estrazione è più probabile che si tenda a scegliere una palla dall'urna che ne contiene di più
- La dinamica tende a equalizzare i valori nelle due urne

Dinamica nelle urne

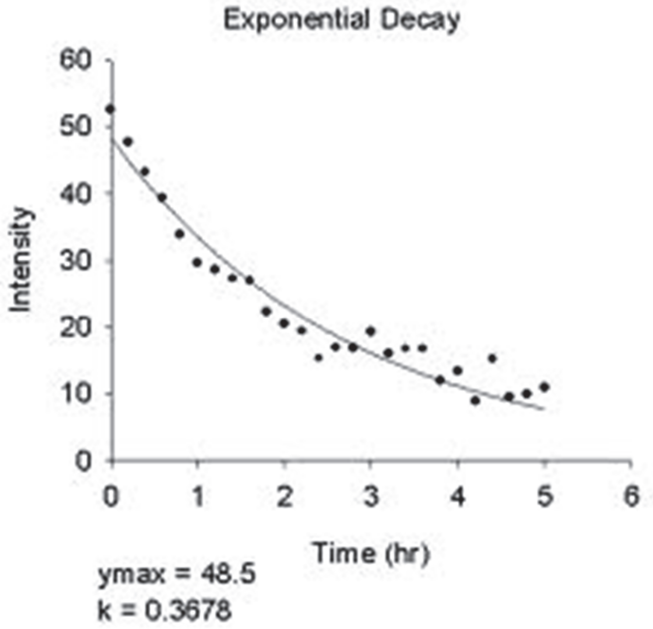
- Il numero di palline tende al valore N/2 in ogni urna
- Con fluttuazioni casuali



- Una dinamica microscopica reversibile può dare origine a un moto irreversibile per le variabili macroscopiche

Descrizione deterministica

- Se le fluttuazioni sono piccole e possono essere trascurate, si ha una equazione (approssimativamente) deterministica
- Esempio: decadimento radioattivo



Descrizione deterministica

- L'equazione macro dell'urna di Ehrenfest
- n=N1-N2

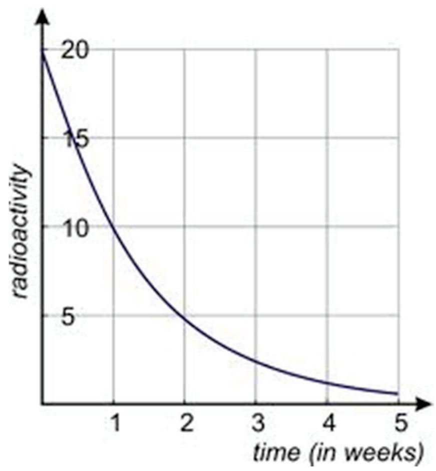
$$\frac{dn}{dt}=\frac{dN_1}{dt}-\frac{dN_2}{dt}=kN_2-kN_1=-kn$$

$$\frac{dn}{dt}=-kn$$

$$n(0)=N$$

- non studieremo le equazioni differenziali
- ma è facile verificare che ha per soluzione

$$n(t)=Ne^{-kt}$$



Verifica

$$\frac{dn}{dt} = -kn$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dNe^{-kt}}{dt} = N\frac{de^{-kt}}{dt} = -Nke^{-kt}$$

$$-kn = -kNe^{-kt} = -Nke^{-kt}$$

- ma è facile verificare che ha per soluzione $n(t) = Ne^{-kt}$

(soluzione)

$$\frac{dn}{dt} = -kn$$

(ricordiamo che t_0=0 …)

1. $dn = -kndt$
2. $\frac{dn}{n} = -kdt$
3. $\int_{n_0}^{n} \frac{1}{n} dn = -\int_{t_0}^{t} kdt$
4. $[\ln(n)]_{n_0}^{n} = -k[\mathrm{t}]_{t_0}^{t}$
5. $\ln(n) - \ln(n_0) = -k(t - t_0)$
6. $\ln\left(\frac{n}{n_0}\right) = -kt'$
7. $e^{\ln\left(\frac{n}{n_0}\right)} = e^{-kt}$
8. $\frac{n}{n_0} = e^{-kt}$
9. $n = n_0 e^{-kt}$

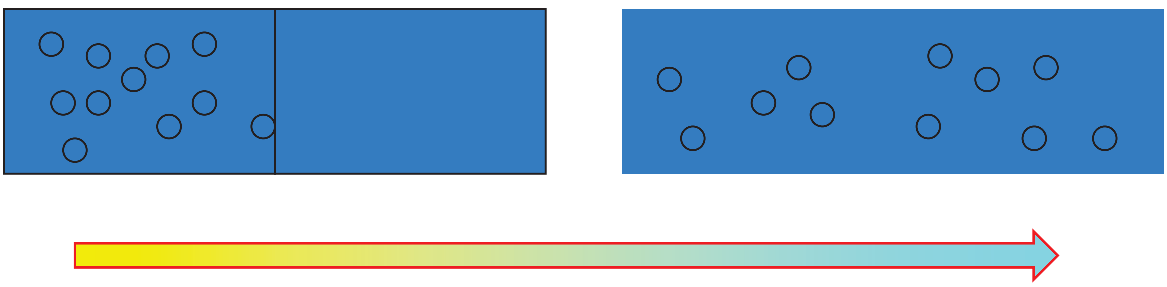
- ma è facile verificare che ha per soluzione $n(t) = Ne^{-kt}$

Tre livelli

- A livello microscopico osserviamo una dinamica reversibile e stocastica
- A livello mesoscopico (guardiamo solo i numeri, con una risoluzione che ci consente di vedere le fluttuazioni) osserviamo una dinamica irreversibile e stocastica
- A livello macroscopico (non si vedono le fluttuazioni) osserviamo una dinamica irreversibile e deterministica

Rumore «ontologico»

- Lo stesso sistema può essere descritto a diversi livelli
- L'irreversibilità dipende dal livello di descrizione!
- si noti che l'irreversibilità macroscopica dell'urna di Ehrenfest è legata al fatto di avere introdotto una descrizione probabilistica



Rumore «ontologico»

- Lo stesso sistema può essere descritto a diversi livelli
- L' irreversibilità dipende dal livello di descrizione!
- si noti che l'irreversibilità macroscopica dell'urna di Ehrenfest è legata al fatto di avere introdotto una descrizione probabilistica
  - Le leggi di Newton sono deterministiche, quindi dove entra in gioco la casualità?
  - Oggi sappiamo che la meccanica quantistica introduce la casualità
  - Ciò potrebbe (forse!) giustificare l'ipotesi del caos molecolare
    - Una questione ancora controversa