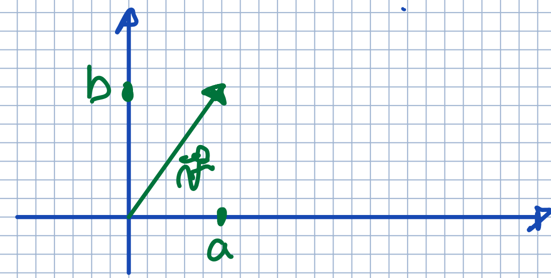
Traslazioni

Dato un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

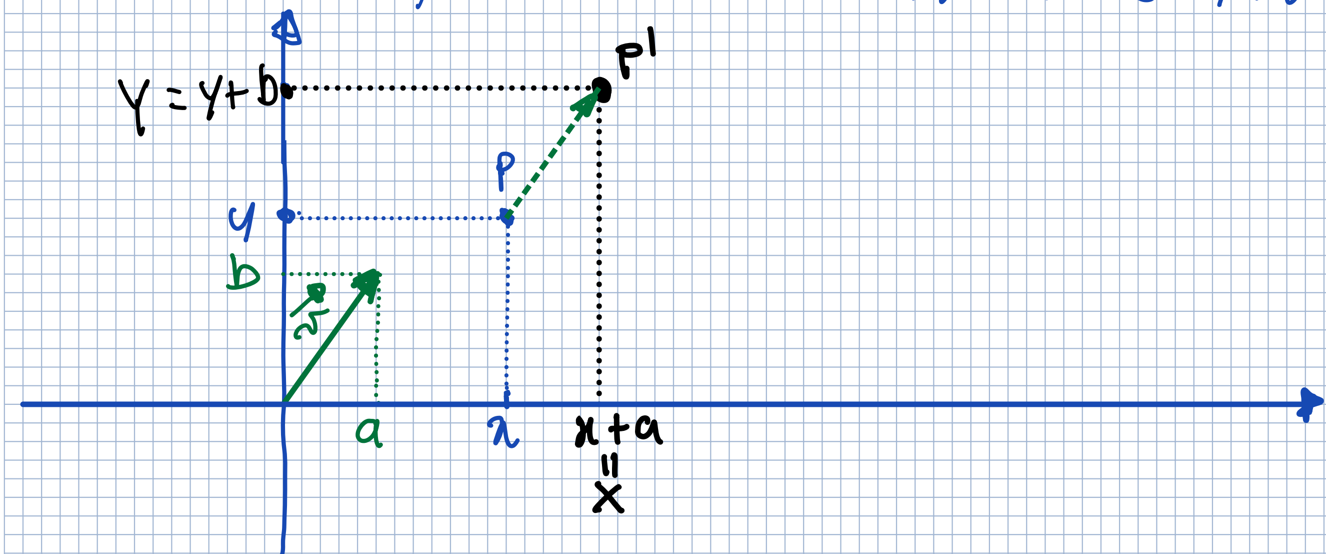


diciamo TRASLAZIONE di vettore $\vec{v}$

l'applicazione

$$P \longrightarrow P'$$

$$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b) = (X, Y)$$

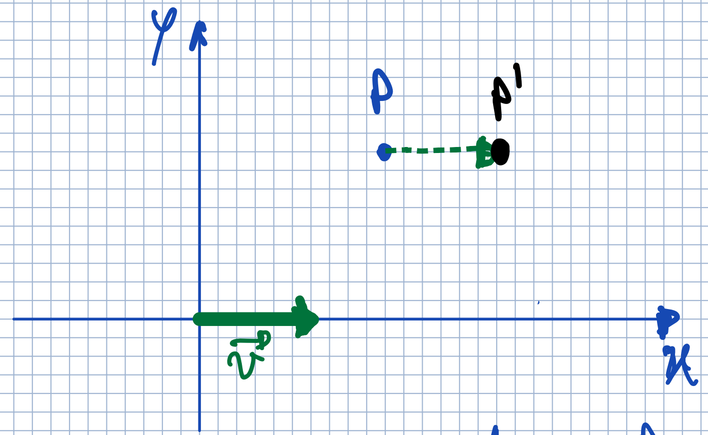


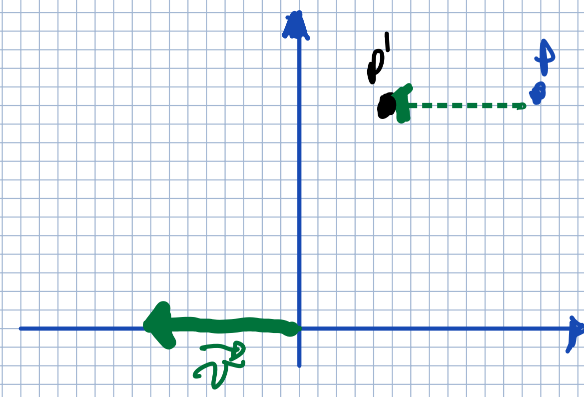
Equazioni della traslazione $\begin{cases} X = x+a \\ Y = y+b \end{cases}$

Casi particolari

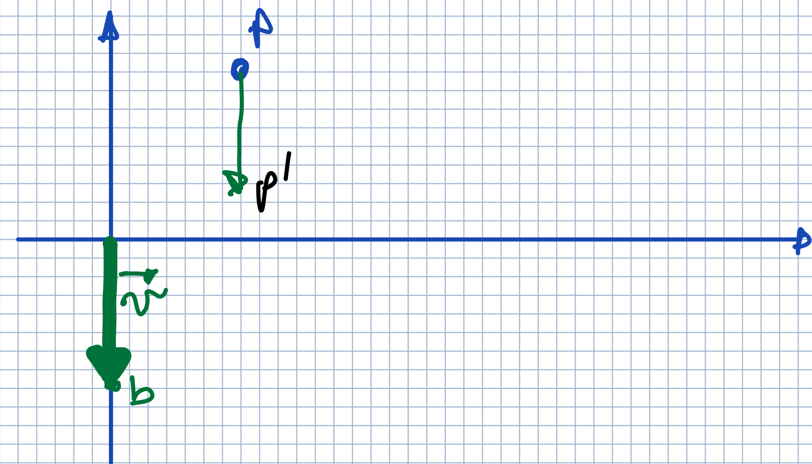
1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} X = x+a \\ Y = y \end{cases}$$





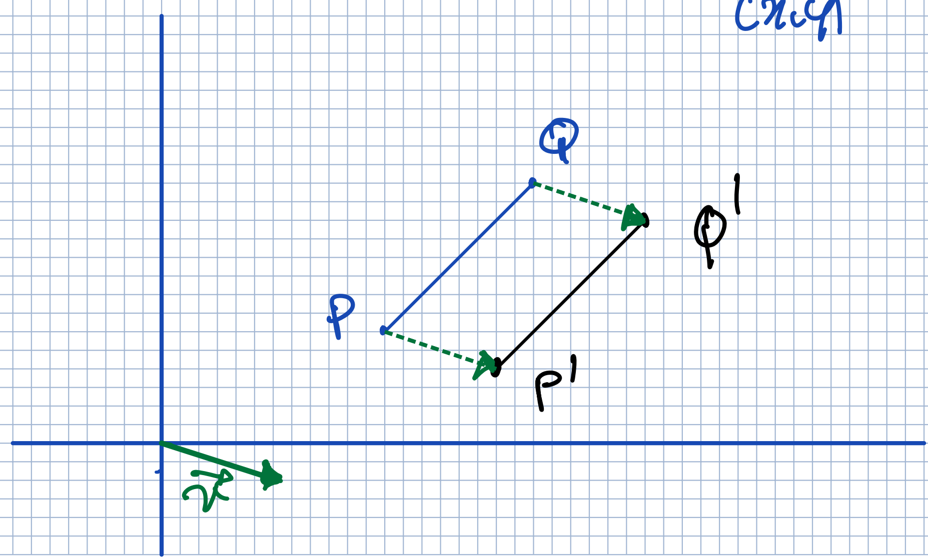
2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{cases} X = x \\ Y = y+b \end{cases}$



Osservazione

$\vec{v} = (3, -1)$ $\quad P \rightsquigarrow P'$

$(x,y) \qquad (X, Y) = (x+3; y-1)$



Le traslazioni conservano le lunghezze e gli angoli
i segmenti vengono trasformati in segmenti paralleli di uguale lunghezza

Dilatazioni nel piano

dati $a, b \in \mathbb{R}$ diciamo dilatazione di parametri a, b

$$P \longrightarrow P$$

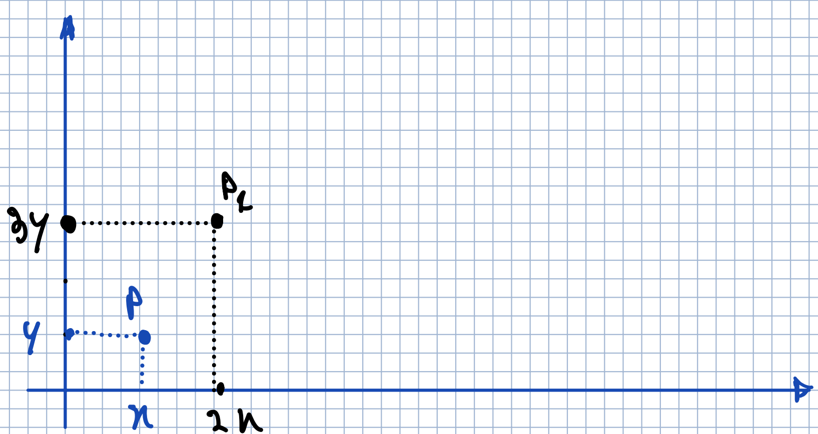
$$(x, y) \longrightarrow (ax, by) = (X, Y)$$

Equazioni $\begin{cases} X = ax \\ Y = bx \end{cases}$

$a = 2 \quad b = 3$

$P = (x, y)$

$P_1 = (2x, 3y)$



Attenzione Traslazioni e dilatazioni non commutano

Esempio

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad a = 2$, $b = 3$ $\quad P : (x, y)$

$$P \xrightarrow{tr} P' \xrightarrow{dil} P''$$

$$(x,y) \qquad (x+1, y+3) \qquad (2x+2 ; 3y+9)$$

$$P \xrightarrow{dil} P_1 \xrightarrow{tr} P_2$$

$$(x,y) \qquad (2x, 3y) \qquad (2x+1 ; 3y+3)$$

È chiaro $P'' \neq P_2$

Applicazione alla Trasformazione del grafico di una funzione
(Cambio di variabili in una funzione)

Consideriamo

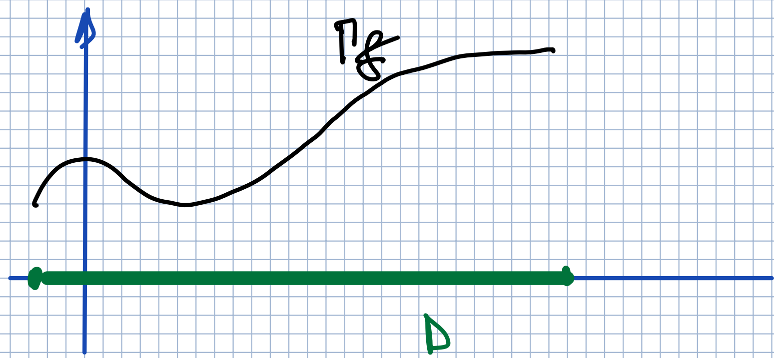
$$f: \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$$

$D = \mathrm{dom}\, f$
dominio della funzione

Diciamo grafico di f

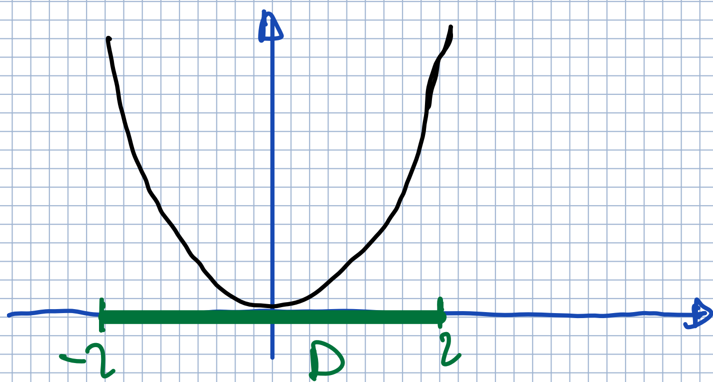
$$\Gamma_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \in D ,\ y = f(x) \} =$$

$$= \{ (x, f(x)) ;\ x \in D \}$$



<u>Esempio</u> Consideriamo

$f(x) = x^2$ $\qquad D = \mathrm{dom}\, f = [-2, 2]$



Ricerchiamo ora il grafico di

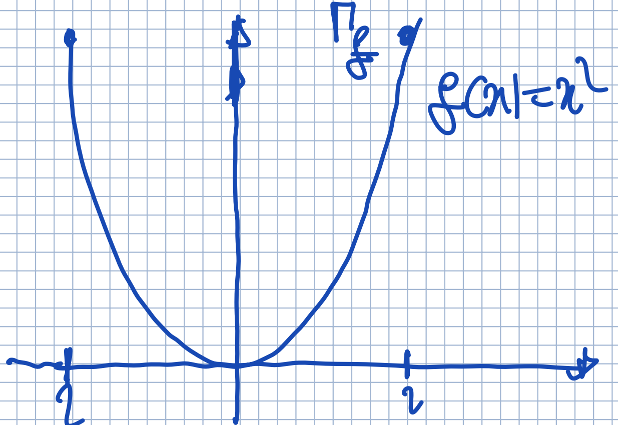
$$g(x) = f(x+1) = (x+1)^2$$

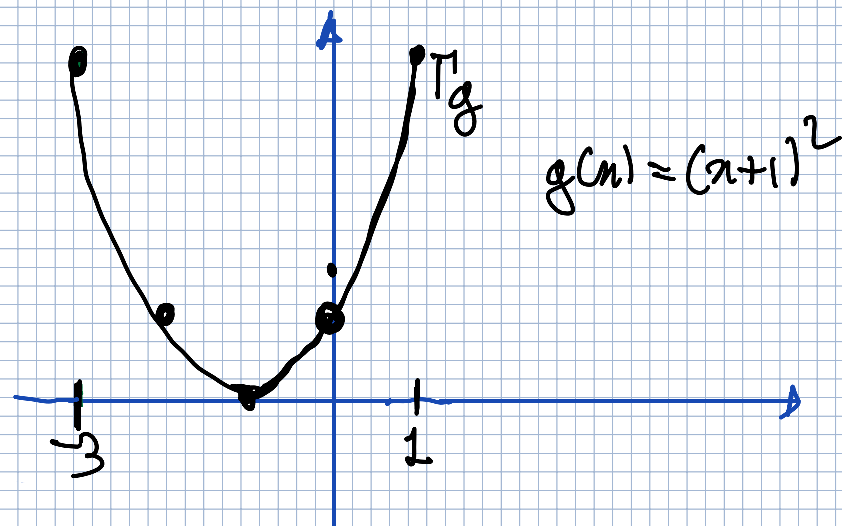
Dominio di g $\quad D_g \quad -2 \leq x+1 \leq 2$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$D_g = [-3, 1]$

x	$y = g(x)$
-3	4
-2	1
0	1
1	4





Γ_g è una traslazione di Γ_f di vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$$

di Γ_f

Attenzione in generale

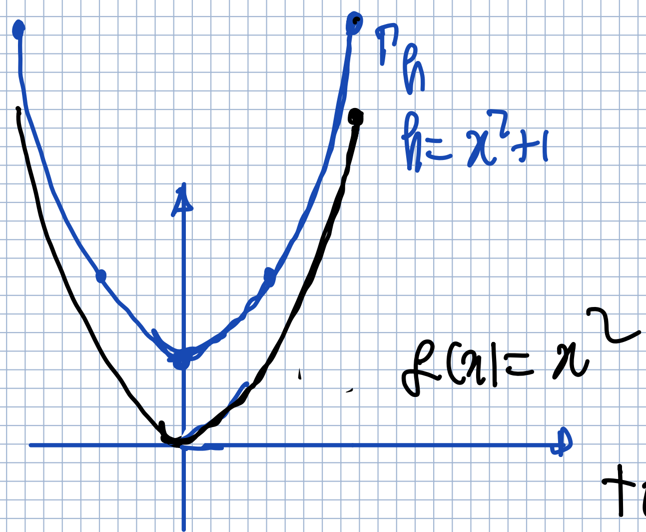
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{il grafico di } f(x+c) \text{ si ottiene} \\ \text{con una traslazione } \vec{v} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} X = x - c \\ Y = y \end{cases} \end{array}}$$

Ricordiamo ora il grafico di

$$h(x) = f(x) + 1 = x^2 + 1$$

$$D_h = D_f = [-2, 2]$$

x	$h(x)$
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5



il grafico di $h(x) = x^2+1$ si ottiene da quello di f tramite una traslazione verticale di vettore $\vec{v} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

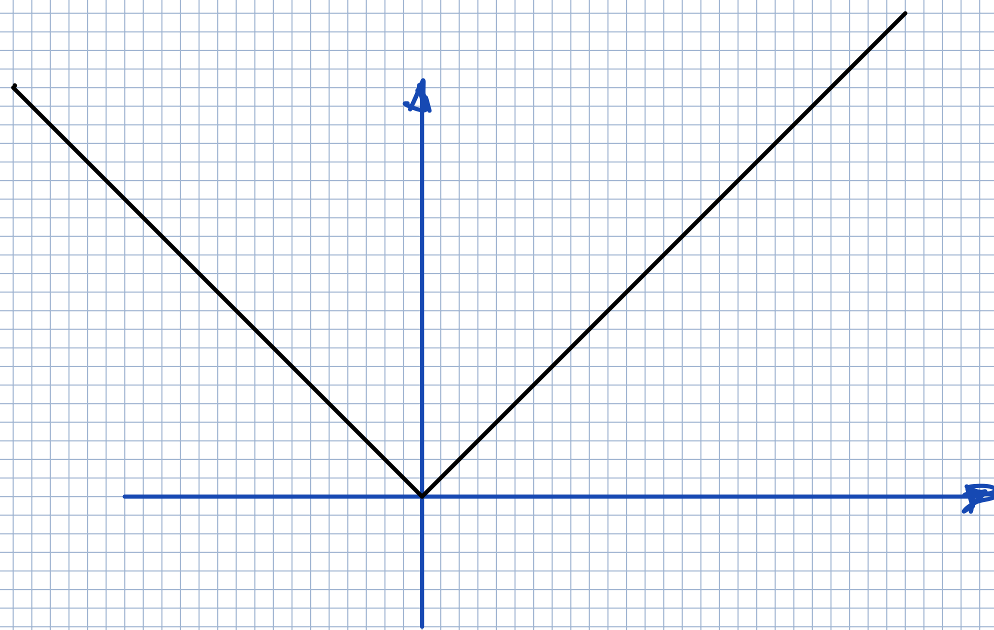
$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Gamma_g \text{ con } g(x) = f(x) + c \\ \text{si ottiene con traslazione} \\ \text{di vettore } \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \text{ di } \Gamma_f \end{array}}$$

Richiamiamo la definizione di $|x|$ valore assoluto di x (modulo di x)

$x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

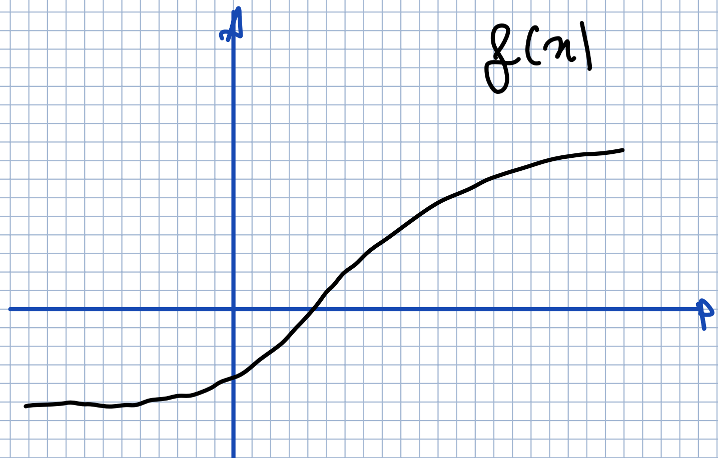
$|xy| = |x|\,|y|$

$|x+y| \leq |x| + |y|$

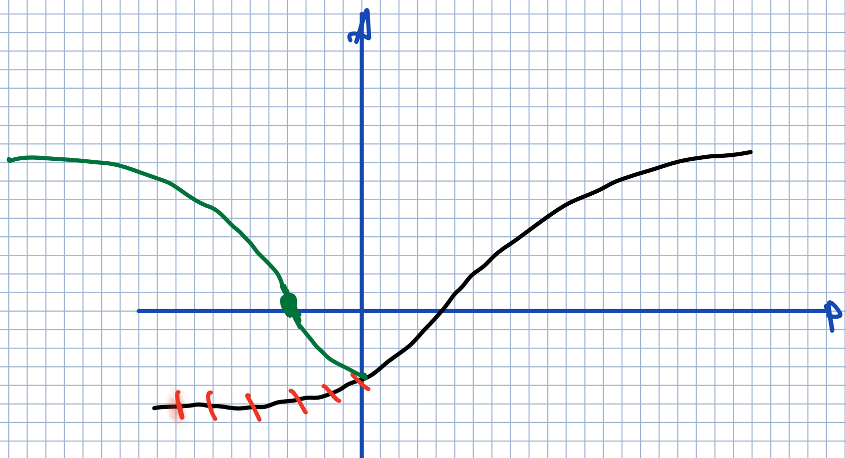
Si verifica che dato $x \in \mathbb{R}$

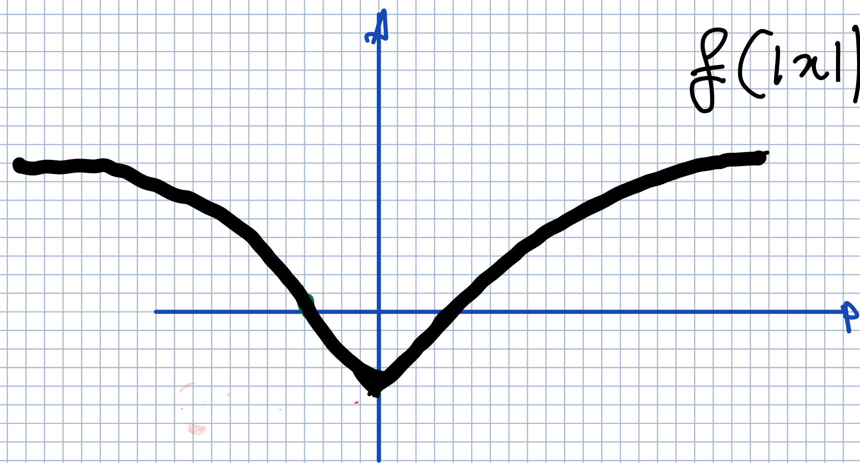
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Applicazione al grafico di una funzione



$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$



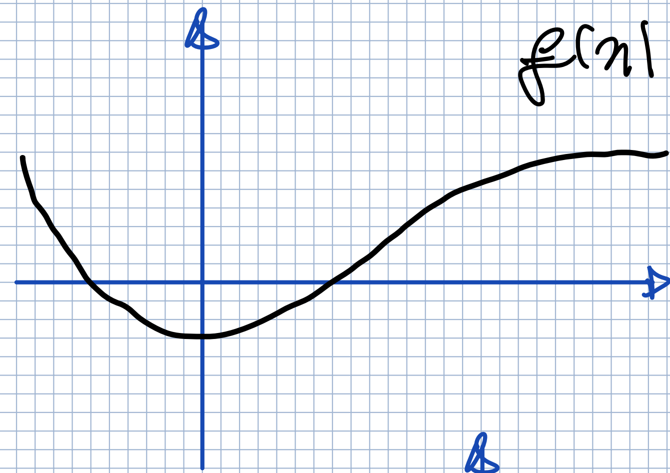


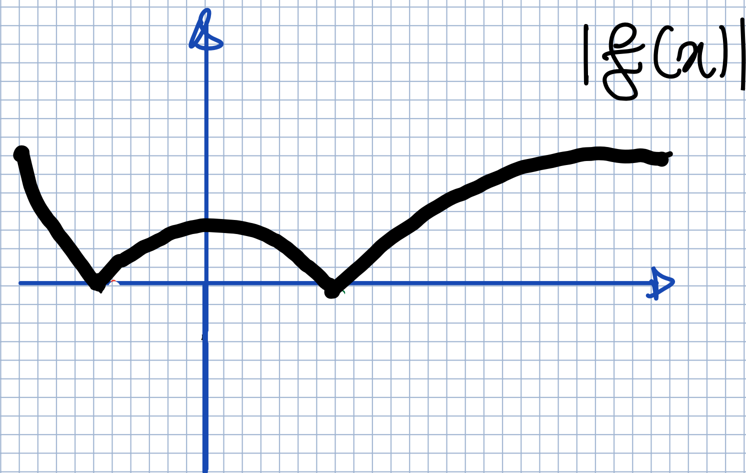
il grafico di $f(|x|)$ è uguale al grafico di $f(x)$ per $x \in [0,+\infty)$ e dato dal ribaltamento di questo per $x \in (-\infty, 0)$

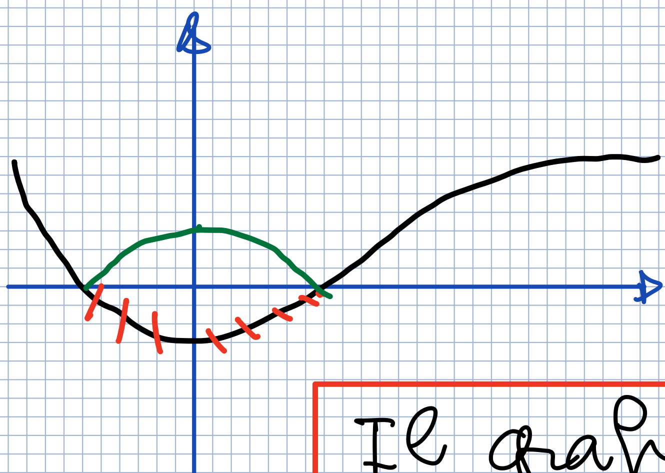
Costruiamo

$$g(x) = |f(x)| =$$

$$= \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \end{cases}$$





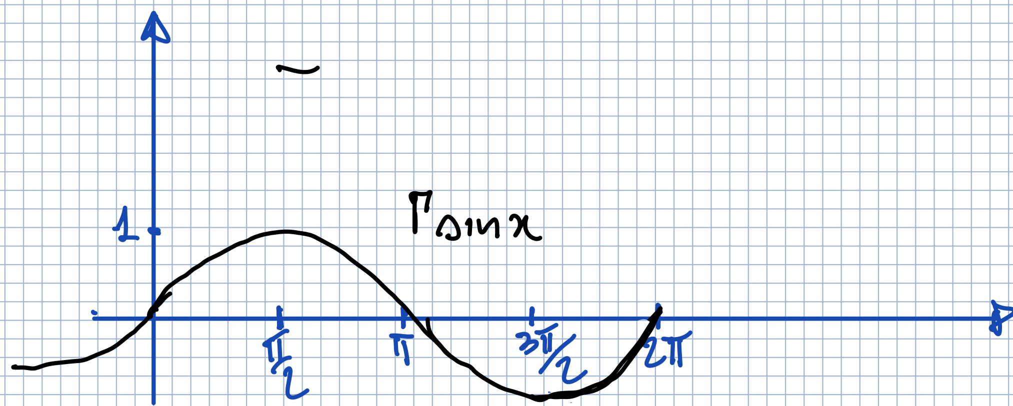


Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene ribaltando rispetto all'asse x tutte le parti di $\Gamma_{f(x)}$ che stanno nel semipiano sotto l'asse x stesso

Dilatazioni rispetto alla variabile x

Consideriamo $f(x) = \sin x$

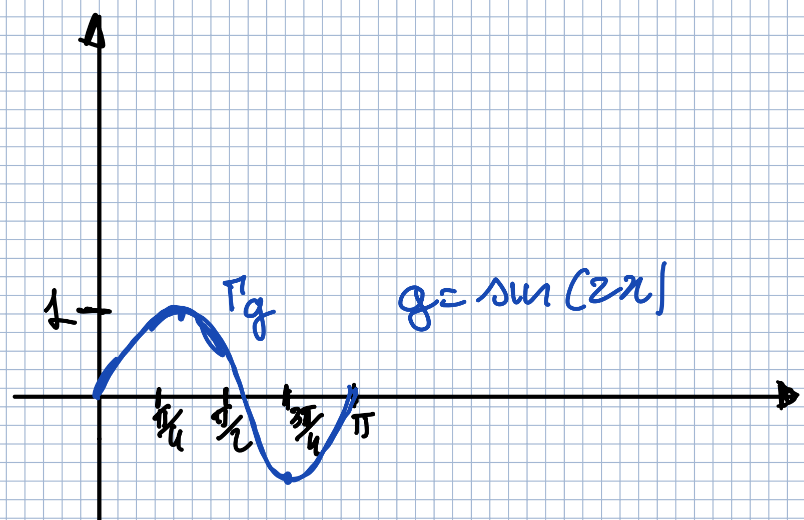
$D_f = [0, 2\pi]$ $\quad 0 \le x \le 2\pi$



Ricerchiamo il grafico di
$g(x) = f(2x) = \sin(2x)$

D_g: $\quad 0 \le 2x \le 2\pi \quad 0 \le x \le \pi \quad D_g = [0, \pi]$

x	$\sin(2x)$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	-1
π	0



$\Gamma_{\sin(2x)}$ è una dilatazione (contrazione)

di parametro $1/2$ rispetto a x

del grafico $\Gamma_{\sin(x)}$

In generale dato $c \in \mathbb{R}$

$\Gamma_{f(cx)}$ è una dilatazione

di parametro $1/c$ rispetto ad x

del grafico $\Gamma_{f(x)}$

Equazioni della dilatazione
$$\begin{cases} X = \frac{1}{c}\, x \\ Y = y \end{cases}$$