Written assessment, June 10, 2024

Last name, First name ______________________________

Exercise 1 (value 9)

Un partito politico deve decidere come allocare i suoi candidati ai collegi elettorali. Il partito ha un insieme D di candidati, ogni candidato $i \in D$ ha un numero di voti atteso pari a r_i, indipendente dal collegio in cui si candida. I collegi elettorali sono dati dall'insieme C e per ogni collegio $j \in C$ il numero di votanti attesi nel collegio é v_j. Il partito puó assegnare al massimo θ candidati ad ogni collegio, ed un candidato può essere assegnato a piú collegi. I voti ricevuti dal partito in un collegio sono la somma dei voti ricevuti da tutti i suoi candidati. Il partito "conquista" un collegio j se i suoi candidati ricevono piú del 50% dei voti v_j. Si scriva un modello matematico lineare per aiutare il partito ad assegnare i candidati ai collegi in modo che tutti i candidati siano assegnati ad almeno un collegio e sia massimizzato il numero atteso dei collegi "conquistati"

Exercise 2 (value 9)

Dato il seguente LP

$$
\begin{aligned}
z = \min \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\
& 2x_2 - x_3 \leq 20 \\
& x_1, \ldots, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Scrivere il problema duale.
- Risolverlo con un metodo grafico.
- Risolvere il problema primale con le condizioni di ortogonalitá

Exercise 3 (value 9)

Si consideri il problema knapsack con $p = (10, 10, 20, 11)$, pesi $w = (10, 20, 50, 30)$, e capacitá dello zaino $c = 100$. Si calcoli la soluzione ottima usando il metodo branch-and-bound.

Written assessment, June 10, 2024

Solution sketch

Exercise 1

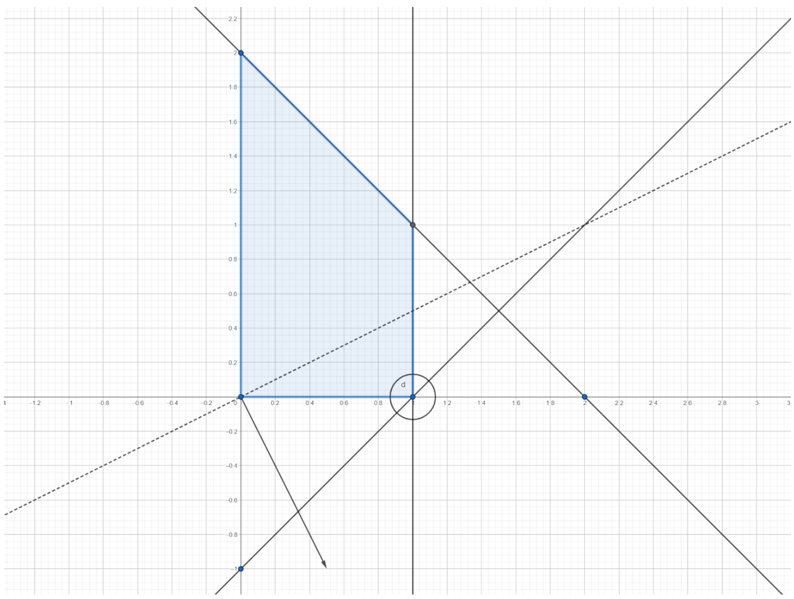
Variables

$x_{ij} =$ 1 se il candidato i é asegnato al collegio j, 0 altrimenti
$y_j =$ 1 se il partito “conquista” il collegio j

$$
\begin{array}{lrll}
\max & \sum_{j \in C} y_j & & \\
& \sum_{j \in C} x_{ij} & \geq 1 & i \in D \\
& \sum_{i \in D} x_{ij} & \leq \theta & j \in C \\
& \frac{v_j}{2} y_j + 1 & \leq \sum_{i \in D} r_i x_{ij} & j \in C \\
& x_{ij} & \in \{0,1\} & i \in D, j \in C \\
& y_j & \in \{0,1\} & j \in C
\end{array}
$$

Exercise 2

$$
\begin{array}{ll}
z_P = \min & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\
& -2x_2 + x_3 \geq -20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
z_D = \max & 10u_1 - 20u_2 \\
& u_1 \leq 1 \\
& u_1 - 2u_2 \leq 2 \\
& u_1 + u_2 \leq 2 \\
& u_1, u_2 \geq 0
\end{array}
$$



x

Soluzione duale ottima $u = (1, 0), z_D = 10$

Complementary slackness

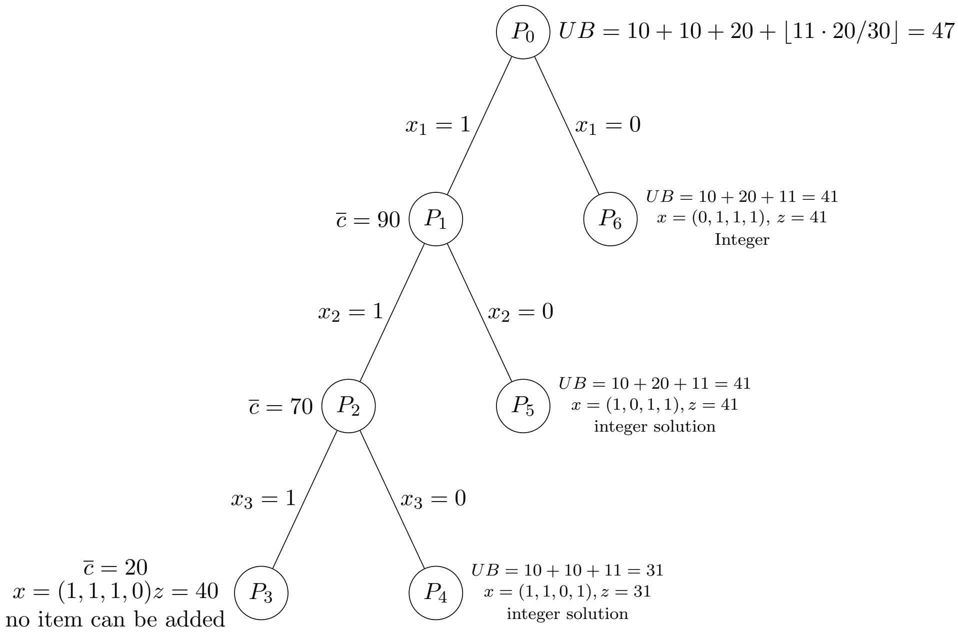
$$
\begin{cases}
(x_1 + x_2 + x_3 - 10)u_1 = 0 \\
(-2x_2 + x_3 - 20)u_2 = 0 \\
(u_1 - 1)x_1 = 0 \\
(u_1 - 2u_2 - 2)x_2 = 0 \\
(u_1 + u_2 - 2)x_3 = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
(x_1 + x_2 + x_3 - 10) = 0 \\
0 = 0 \\
(0)x_1 = 0 \\
(-1)x_2 = 0 \\
(-1)x_3 = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 = 10 \\
0 = 0 \\
x_1 \geq 0 \\
x_2 = 0 \\
x_3 = 0
\end{cases}
$$

Soluzione primale ottima $x = (1, 0, 0), z_P = 10$

Exercise 3

$p_j = (10, 10, 20, 11)$ $w_j = (10, 20, 50, 30)$, $c = 100$

The objects are sorted correctly.



Soluzione ottima in P_5 (oppure in P_6) $z = 41, x = (1, 0, 1, 1)$