Basi della probabilità

La probabilità si occupa di *fenomeni* aleatori, cioè di un *esperimento* i cui possibili risultati appartengono ad un insieme ben definito e dove l'esito non è prevedibile.
Sia S uno spazio campionario. Una probabilità valida soddisfa i seguenti **assiomi di probabilità**:

1. Le probabilità sono numeri reali non negativi, cioè per tutti gli eventi $E, P(E) \geq 0$.
2. La probabilità dello spazio campione è $1, P(S) = 1$.
3. Le probabilità sono numerabilmente additive: se $UN\_1, UN\_2, \ldots$ sono disgiunti a due a due, allora

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Teorema 2.1
Siano A e B eventi dello spazio campionato S.

4. $P(\emptyset) = 0$
5. Se A e B sono disgiunti ($\cup$), allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. Se $A \subset B$, allora $P(A) \leq P(B)$
7. $0 \leq P(A) \leq 1$
8. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
9. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
10. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Esempio:
Laniamo un dado, che probabilità ho che esca una determinata faccia?
Usiamo il punto 3.

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

Tutte le probabilità sono uguali e la loro somma è $= 1$, la probabilità che esca una determinata faccia è $\frac{1}{6}$.
Esempio 2.8:
Supponiamo che i dadi invece siano due, lo spazio campionato S è dato da:

$$S = \begin{pmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{pmatrix}$$

Gli eventi dove "la somma dei due dadi è 6" è rappresentata da:

$$E = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

La probabilità che la somma dei due dadi sia 6 è data da:

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{5}{36}$$

Sia F l'evento "almeno uno dei due dadi è 2", l'evento è rappresentato da:

$$F = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$$

La probabilità di F è: $P(F) = \frac{11}{36}$
$E \cap F = (2,4),(4,2)$ e $P(E \cap F) = \frac{2}{36}$
$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{5}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{14}{36}$
$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = \frac{31}{36}$
Simulazioni con `sample`

```
sample(x, size, replace = FALSE, prob = NULL)
```

`x` il vettore di elementi dal quale si sta campionando.
`size` il numero di campioni che si voglio ottenere.
`replace` se si stanno usando rimpiazzi o meno.
`prob` un vettore di probabilità o pesi, associato a `x`.
Per ottenere due numeri casuali tra 1 e 10:

```
sample(x = 1:10, size=2)
```

```
## [1] 2 5
```

`sample` non ritorna mai lo stesso valore 2 o più volte, bisogna usare `replace = TRUE`
Esempio 2.9
4 tipi di sangue con diversa probabilità di distribuzione:

```
bloodtypes <- ("O", "A", "B", "AB")
bloodprobs <- (0.45, 0.40, 0.11, 0.04)
sample(x = bloodtypes, suze = 30, prob = bloodprobs, replace = TRUE)
```

```
##  [1] "A"  "O"  "AB" "A"  "O"  "A"  "A"  "O"  "O"  "O"  "O"  "A"  "O"
## [14] "A"  "A"  "A"  "B"  "A"  "A"  "B"  "A"  "O"  "O"  "A"  "A"  "O"
## [27] "O"  "A"  "A"  "O"
```

```
sim_data <- sample(
    x = bloodtypes, size = 10000,
    prob = bloodprobs, replace = TRUE
)
table(sim_data)
```

```
## sim_data
##    A   AB    B    O
```

```
## 3998  425 1076 4501
```

```
table(sim_data) / 1000
```

```
## sim_data
##      A     AB      B      O
## 0.3998 0.0425 0.1076 0.4501
```

Esempio 2.10
Supponiamo che due dadi a 6 facce vengano lanciati, sommiamo il risultato.
Effettuiamo questo esperimento su 10000 lanci:

```
die1 <- (x = 1:6, size = 10000, replace = TRUE)
die2 <- (x = 1:6, size = 10000, replace = TRUE)
sumDice <- die1 + die2
```

Vediamo i dati

```
read(die1)
```

```
## [1] 1 4 1 2 5 3
```

```
read(die2)
```

```
## [1] 1 6 1 4 1 3
```

Sia E l'evento "la somma dei dadi è 6", e F "almeno uno dei dadi è 2". Definiamo questi eventi dai nostri dati simulati:

```
eventE <- sumDice == 6
read(eventE)
```

```
## [1] FALSE FALSE FALSE  TRUE TRUE TRUE
```

```
eventF <- die1 == 2 | die2 == 2
read(eventF)
```

```
## [1] FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE
```

Usando `mean` troviamo la percentuale con cui si sono verificati gli eventi:

```r
mean(eventE) # P(E)
```

```
## [1] 0.1409
```

```r
mean(eventF)
```

```
## [1] 0.2998
```

Per stimare $P(E \cap F) = \frac{2}{36} \approx 0,056$:

```r
mean(eventE & eventF)
```

```
## [1] 0.0587
```

Non è necessario memorizzare tutti i vettori TRUE/FALSE nelle variabili evento.
Ecco una stima di $P(E \cup F) = \frac{14}{36} \approx 0,389$:

```r
mean((sumDice == 6) | (die1 == 6) | (die2 == 6))
```

```
## [1] 0.382
```

Utilizzo di `replicate` per ripetere gli esperimenti

Per simulazioni complesse, seguiamo un flusso:

1. Scrivo il codice per eseguire l'esperimento
2. Ripeto l'esperimento un piccolo numero di volte e controllo i risultati:

- `replicate(100, { ESPERIMENTO })`

3. Ripeto l'esperimento un grande numero di volte e memorizzo il risultato:

- `event <- replicate(10000, { ESPERIMENTO })`

4. Calcolo la probabilità usando `mean`

Probabilità condizionata

Dato uno spazio di probabilità $(S, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e due eventi $E, H \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(H) > 0$, si dice *probabilità condizionata* di E dato H la quantità

$$\mathbb{P}(E|H) = \frac{P(E \cap H)}{H}$$

che esprime il grado di fiducia dell'osservatore nel verificarsi di E *supponendo che si verifichi H*.
Supponiamo di lanciare due dadi e uno di essi cade dal tavolo dove non puoi vederlo, mentre l'altro mostra un 4. Vorremmo aggiornare le probabilità associate alla somma dei due dadi in base a queste informazioni. La nuova probabilità che la somma dei dadi sia 2 sarebbe 0, la nuova probabilità che la somma dei dadi sia 5 sarebbe 1/6 perché questa è solo la probabilità che il dado che non possiamo vedere sia un "1" e la nuova probabilità che la somma dei dadi sia 7 sarebbe anche 1/6.
Formalmente abbiamo la seguente definizione:
Sia A e B eventi in uno spazio campionario S, con $P(B) \neq 0$, la *probabilità condizionale* che A dato B sia:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Leggiamo $P(A|B)$ come "la probabilità di A dato B".

Valutazioni classiche

Esempio 2.19:
Lanciamo 2 dadi, con quale probabilità entrambe i dadi sono danno 4, sapendo che la loro somma è 8?
$A = \{(4,4)\}$
$B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{1/36}{5/36} = 1/5$$

Invece quale è la probabilità che la somma dei dadi sia 8 sapendo che entrambe i dadi danno 4?
$A = \{(4,4)\}$
$B = \{(4,4)\}$

$$P(A|B) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{1/36}{1/36} = 1$$

Quindi:

1. $P((A \cap B)|B) = P(A|B)$
2. $P(A \cup B|B) = 1$

Valutazioni uniformi

Esempio: Rotazione di uno spinner
Facciamo ruotare velocemente uno spinner simmetrico imperniato su un goniometro e ne osserviamo l’angolo di arresto in $]-\frac{\frac{\pi}{2},\pi}{2}]$. Con quale probabilità l’angolo di arresto dello spinner sarà compreso tra $-\frac{\pi}{4}e\frac{\pi}{3}$ (estremi inclusi) supponendo che sia positivo?
Notiamo preliminarmente che le valutazioni uniformi sono diffuse e quindi è *inessenziale* l’inclusione o meno degli estremi nell’intervallo di cui si calcola la probabilità e in quello al quale si condiziona.
Prendiamo $]a,b] =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ e con $\mathbb{P}$ *uniforme* troviamo:

$$\mathbb{P}\left(\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\middle|\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\frac{\frac{\pi}{3}-0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{3}$$

visto che $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\cap\left[0,\frac{\pi}{2}\right]=[0,\frac{\pi}{3}]$.
In questo caso $\mathbb{P}\left(\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\middle|\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)>\mathbb{P}\left(\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right)$ perché:

$$\mathbb{P}\left(\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right)=\frac{\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\frac{7\pi}{12}}{\pi}=\frac{7}{12}<\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

Valutazioni frequentiste

se le probabilità degli eventi sono frequenze relative di realizzazione in precedenti ripetizioni del fenomeno:

$$\mathbb{P}(E|H)=\frac{k_{E\cap H}}{k_H},\quad E\in\mathcal{F}$$

Essempio:
Lanciamo un dado a sei facce caricato per ottenere 6 con cui, in una sequenza di lanci precedenti, abbiamo ottenuto settantanove volte 6, cinque volte 5, tre volte 4, sette volte 3, cinque volte 2 e una volta 1. Quanto valuteremo la probabilità che un punteggio pari sia primo?
Prendiamo $S=\{1,2,3,4,5,6\},\mathcal{F}=\wp(S)$ e $\mathbb{P}$ specificata da:

$$\begin{array}{lll}\mathbb{P}\{1\}=0.01 & \mathbb{P}\{2\}=0.05 & \mathbb{P}\{3\}=0.07\\ \mathbb{P}\{4\}=0.03 & \mathbb{P}\{5\}=0.05 & \mathbb{P}\{6\}=0.79\end{array}$$

senza considerazioni di simmetria. Posto $A=\text{"primo"}=\{2,3,5\}$ e $B=\text{"pari"}=\{2,4,6\}$, troviamo per la probabilità richiesta:

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{k_{A\cap B}}{k_B}=\frac{k_2}{k_{2,4,6}}=\frac{5}{5+3+79}=\frac{5}{87}\backsimeq 0.057=5.7\%$$

Eventi indipendenti

In uno spazio di probabilità $(S,\mathcal{F},\mathbb{P})$, due eventi $E,F\in\mathcal{F}$ si dicono *stocasticamente indipendenti* sotto $\mathbb{P}$ o semplicemente *indipendenti* quando vale la fattorizzazione:

$$\mathbb{P}(E\cap F)=\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$$

Può accadere in due modi:

- **banalmente** per $\mathbb{P}(E)=0$ o $\mathbb{P}(F)=0$
  - perché allora $\mathbb{P}(E\cap F)\leq min\{\mathbb{P}(E),\mathbb{P}(F)\}$ per monotonia e quindi necessariamente $\mathbb{P}(E\cap F)=0$
- **significativamente** con:

  $$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(E|F) & = & \mathbb{P}(E)\\ \mathbb{P}(\mathbb{F}|\mathbb{E}) & = & \mathbb{P}(F)\end{array}$$

  se $min\{\mathbb{P}(E),\mathbb{P}(F)\}>0$.
  Scriveremo

  $$E\perp\!\!\!\perp F$$

per indicare che E ed F sono *indipendenti*, più precisamente

$$E \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{F}} F$$

per ricordare il ruolo di $\mathbb{P}$.
Altrimenti scriveremo $E \not\!\perp\!\!\!\perp F$ se E ed F sono *dipendenti*.
In particolare:

- E ed F sono *favorevolmente dipendenti* (sotto $\mathbb{P}$) quando

$$\mathbb{P}(E \cap F) > \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$$

cioè $\mathbb{P}(E|F) > \mathbb{P}(E)$ e $\mathbb{P}(F|E) > \mathbb{P}(F)$ nel caso significativo;

- E ed F sono *sfavorevolmente dipendenti* (sotto $\mathbb{P}$) quando

$$\mathbb{P}(E \cap F) < \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$$

cioè $\mathbb{P}(E|F) < \mathbb{P}(E)$ e $\mathbb{P}(F|E) < \mathbb{P}(F)$ nel caso significativo;
Esempio:
Lanciamo un ordinario dado a sei facce e ne osserviamo il punteggio. Gli eventi $A = \text{"primi"}$ e $B = \text{"pari"}$ sono indipendenti?
Presa $\mathbb{P}$ classica su tutte le parti di $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\{2, 3, 5\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\{2, 4, 6\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}\{2\} = \frac{1}{6} < \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\end{aligned}$$

quindi $A \not\!\perp\!\!\!\perp B$, in particolare A e B sono *sfavorevolmente dipendenti*.
Tuttavia A e B sono *logicamente indipendenti*, dal momento che che i loro quattro costituenti sono tutti non vuoti:

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}, \overline{A} \cap B = \{4, 6\}, A \cap \overline{B} = \{3, 5\}, A \cap B = \{2\}$$

Invarianza per negazione dell'indipendenza tra due eventi

$$E \perp\!\!\!\perp F \Rightarrow E \perp\!\!\!\perp \overline{F}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cap \overline{F}) &= \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E \cap F) \\ &= \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) \\ &= \mathbb{P}(E)\{1 - \mathbb{P}(F)\} \\ &= \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(\overline{F})\end{aligned}$$

Vale anche il viceversa, perché $\overline{\overline{F}} = F$, quindi:

$$E \perp\!\!\!\perp F \iff E \perp\!\!\!\perp \overline{F} \iff \overline{E} \perp\!\!\!\perp \overline{F} \iff \overline{E} \perp\!\!\!\perp F$$

$\perp\!\!\!\perp$ è una *relazione simmetrica*, quindi affermare che E ed F sono indipendenti sotto $\mathbb{P}$ corrisponde ad affermare che $\mathbb{P}$ si fattorizza su tutti i costituenti di E ed F.

Si noti la differenza: nel caso del dado equilibrato abbiamo scoperto che "pari" e "centrale" sono eventi indipendenti; nel caso della coppia abbiamo *imposto* che F_1 e F_2 siano indipendenti (ed equiprobabili).
Una differenza analoga a quella che passa tra *calcolare* $\mathbb{P}(E|H)$ a partire da $\mathbb{P}(E\cap H)$e *assegnare* $\mathbb{P}(E|H)$ per specificare $\mathbb{P}(E\cap H)$, supponendo che $\mathbb{P}(H)>0$.
Esempio:
Una coppia ha due figli. Sappiamo che almeno una è femmina. Con quale probabilità sono due femmine? Troviamo subito

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_1\cup F_2)=\mathbb{P}(F_1)+(\overline{F_1}\cap F_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\\ \mathbb{P}(F_1\cap F_1|F_1\cup F_2)=\frac{\mathbb{P}(F_1\cap F_2)}{\mathbb{P}(F_1\cup F_2)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}\dots\end{aligned}$$

dunque $\mathbb{P}(F_1\cap F_2|F_1\cup F_2)=\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}=\mathbb{P}(F_1|F_2)=\mathbb{P}(F_2|F_1)!$
Per comprendere questo paradossoa ragioniamo su come sappiamo che almeno una figlia è femmina e ipotizziamo di averla incontrata, introducendo la partizione

$$\begin{aligned}H&=\text{"incontro figlia femmina"}\\ \overline{H}&=\text{"incontro figlio maschio"}\end{aligned}$$

nel diagramma di Venn (in modo tale che $F_1\cap F_2\subset H\subset F_1\cup F_2$).
Supponiamo:

$$\mathbb{P}(H|\overline{F_1}\cap F_2)=p=\mathbb{P}(H\cap F_1\cap F_2)\quad\text{con}\quad 0<p<1$$

Troviamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_1\cap F_2|H)&=\frac{\mathbb{P}(F_1\cap F_2\cap H)}{\mathbb{P}(H)}\\ &=\frac{\mathbb{P}(F_1\cap F_2)}{\mathbb{P}(H|\overline{F_1}\cap F_2)\mathbb{P}(\overline{F_1}\cap F_2)+\mathbb{P}(F_1\cap F_2)+\mathbb{P}(H|F_1\cap\overline{F_2})\mathbb{P}(F_1\cap\overline{F_2})}\\ &=\frac{1/4}{p\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+p\frac{1}{4}}=\frac{1}{1+2p}=\begin{cases}1 & \text{se } p\to 0\\ \frac{1}{2} & \text{se } p\to\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \text{se } p\to 1\end{cases}\end{aligned}$$

Specificare $\mathbb{P}$ sui costituenti E ed F supponendoli indipendenti è sempre possibile, ma non sempre (pienamente) appropriato.
Fare diversamente richiede di valutare tipo e forza della dipendenza:

$$\mathbb{P}(E\cap F)=d\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$$

con dipendenza sfavorevole per $d<1$ e favorevole per $d>1$; il *fattore di dipendenza* d va scelto garantendo la coerenza di $\mathbb{P}$, cioé:

$$max\left\{0,\frac{1}{\mathbb{P}(E)}+\frac{1}{\mathbb{P}(F)}-\frac{1}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)}\right\}<d<min\left\{\frac{1}{\mathbb{P}(E)},\frac{1}{\mathbb{P}(F)}\right\}.$$

Diremo che E ed F sono *stocasticamente indipendenti* in modo sostanziale quando:

$$E \perp\!\!\!\perp F \text{ con } 0 < \mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) < 1$$

Esempio: interruttori elettrici in serie
Un circuito elettrico è formato da due interruttori *uno di seguito all'altro*: fa passare corrente quando *entrambi* gli interruttori sono chiusi. Supponiamo che (in un dato istante) ciascun interruttore sia chiuso con probabilità $p = 0.8$ indipendentemente dall'altro interruttore. Con quale probabilità (in tale istante) passerà corrente nel circuito?
Posto $C_i = \text{"i-esimo interruttore chiuso"}, i = 1, 2$, in un diagramma di Venn, assegnamo $\mathbb{P}$ su $\mathcal{F} = \omega(C_1, C_2)$ con $C_1 \perp\!\!\!\perp C_2$ e $\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = p$. Per l'evento di interesse $C_1 \cap C_2$ troviamo:

$$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2) = p^2$$

e quindi $\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = (0.8)^2 = 0.64 < 0.8$.
Esempio: interruttori elettrici in parallelo
Un circuito elettrico è formato da due interruttori *uno di fianco all'altro*: fa passare corrente quando *almeno uno* degli interruttori è chiuso. Supponiamo che (in un dato istante) ciascun interruttore sia chiuso con probabilità $p = 0.8$ indipendentemente dall'altro interruttore. Con quale probabilità (in tale istante) passerà corrente nel circuito?
Probabilità che l'interruttore sia **aperto**: $1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$
$\mathbb{P}(\text{nessun interruttore chiuso}) = (0.2)^2 = 0.04$
La probabilità che **almeno uno degli interruttori sia chiuso** (e quindi che passi corrente) è il complementare di questa probabilità:

$$\mathbb{P}(\text{passa corrente}) = 1 - \mathbb{P}(\text{nessun interruttore chiuso}) = 1 - 0.04 = 0.96$$

Simulare la probabilità condizionata

Esempio 2.27

Lanciamo 2 dadi. Si stima la probabilità condizionata che la somma dei dadi sia almeno 10, dato che almeno uno dei dadi è un 6.
Per prima cosa, stimiamo la probabilità che la somma dei dadi sia almeno 10 *e* che almeno uno dei dadi sia 6.

```
eventAB <- replicate(10000, {
  dieRoll <- sample(1:6, 2, replace = TRUE)
  (sum(dieRoll) >= 10) && (6 %in% dieRoll)
})
probAB <- mean(eventAB)
```

Successivamente, stimiamo la probabilità che almeno uno dei dadi sia un 6.

```
eventB <- replicate(10000, {
  die_roll <- sample(1:6, 2, replace = TRUE)
  6 %in% die_roll
})
probB <- mean(eventB)
```

Infine, prendiamo il quoziente.

```
probAB / probB
```

```
## [1] 0.4560601
```

La risposta è:

$$\mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) = \frac{5/36}{11/36} = \frac{5}{11} \approx 0.4545$$

Formula di Bayes

Siano H e E due eventi con probabilità non nulle. La probabilità condizionata di H rispetto a E è uguale al prodotto tra la probabilità condizionata di E rispetto a H e la probabilità di H, tutto fratto la probabilità di E:

Formula di Bayes

$H = \text{"ipotesi"}$

$E = \text{"evidenza"}$

$$\mathbb{P}(H|E) = \frac{\mathbb{P}(E|H) \cdot \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(E)} \text{ con } \mathbb{P}(H), \mathbb{P}(E) \neq 0$$

Esempio: 20178 US midterm elections

Sappiamo chea nelle elezioni intermedie statunitensi del 2018 il *44%* dei votanti era Republican, il *46%* dei votanti era Gun Owner e il *61%* dei Gun Owner era Republican.

Quale percentuale dei Republican era Gun Owner?

Prendiamo un diagramma di Venn con $R = \text{"Republican"}$ e $G = \text{"Gun Ownder"}$, calcoliamo:

$$\mathbb{P}(G|R) = \frac{\mathbb{P}(R|G)\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{0.61 \times 0.46}{0.44} \backsimeq 0.64 = 64\%$$

Esempio: campagna di sceening

Nell'ambito di una campagna di screening che mira a identificare precocemente una malattia rara, della quale sappiamo che colpisce il *2%* della popolazione, un nostro amico è risultato positivo al test.

Il test funziona correttamente sul *99.9%* dei soggetti malati e sul *97.5%* dei soggetti sani.

Rattristati, ma determinati a valutare razionalmente, ci chiediamo quale sia la probabilità che il nostro amico sia malato.

Prendiamo un diagramma di Venn con $M = \text{"soggetto malato"}$ e $T = \text{"test positivo"}$, riassumiamo i dati:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M) &= 0.02 && \text{probabilità di matattia} \\ \mathbb{P}(T|M) &= 0.999 && \text{verosimiglianza dell'ipotesi di malattia} \\ \mathbb{P}(\overline{T}|\overline{M}) &= 0.975 && \text{verosimiglianza dell'ipotesi di salute} \end{aligned}$$

troviamo la *probabilità iniziale* di salute con l'inverso di M:

$$\mathbb{P}(\overline{M}) = 1 - \mathbb{P}(M) = 1 - 0.02 = 0.98 = 98\%$$

Siamo interessati alla *probabilità finale* di malattia $\mathbb{P}(M|T)$ o alla *probabilità finale* di salute $\mathbb{P}(\overline{M}|T) = 1 - \mathbb{P}(M|T)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|T) &= \frac{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(\mathbb{M})}{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(T|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M})} \\ &= \frac{0.999 \times 0.02}{0.999 \times 0.02 \times 0.025 \times 0.98} \\ &= \frac{1998}{4448} \backsimeq 0.45 = 45\%\end{aligned}$$

di modo che è ancora più probabile che il nostro amico sia sano! Come si concilia questo risultato con le ottime prestazioni del test?
La rarità della malattia attenua la verosimiglianza $\mathbb{P}(T|M)$ e amplifica la verosimiglianza $\mathbb{P}(T|\overline{M})$.
Il test fornisce comunque un segnale forte: la probabilità di malattia *passa dal 2% al 45%* e ciò suggerisce un approfondimento clinico.

Con due spiegazioni

La formula di Bayes per due spiegazioni si può scrivere come:

$$\frac{\mathbb{P}(H|E)}{\mathbb{P}(\overline{H}|E)} = \frac{\mathbb{P}(E|H)}{\mathbb{P}(E|\overline{H})} \times \frac{\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(\overline{H})}$$

che chiamiamo *formula di Bayes sulla scala dei pronoscici*: il membro di sinistra è il *pronostico finale* (posterior odds) di H, il primo fattore nel membri di destra è il *rapporto di verosimiglianza* (likelihood ratio) tra H e $\overline{H}$, il secondo fattore nel membro di destra è il *pronostico iniziale* (prior odds) di H.
Ogni probabilità $p \in]0,1[$ corrisponde a un pronostico $r = p/(1-p)$ e si può scrivere come $p = r/(1+r)$ dove $r \in \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}|x > 0\}$.
A partire da $\mathbb{P}(M)/\mathbb{P}(\overline{M}) = 2/98 = 1/49 \backsimeq 0.0204$ e $\mathbb{P}(T|M)/\mathbb{P}(T|\overline{M}) = 999/25 \backsimeq 40.0$ troviamo:

$$\frac{\mathbb{P}(H|E)}{\mathbb{P}(\overline{H}|E)} = \frac{999}{25} \times \frac{1}{49} \backsimeq 40 \times 0.0204 = 0.816$$

con la formula di Bayes sulla scala dei prnostici e confermiamo che $\mathbb{P}(H|E) = 0.816/(1+0.816) = 1/1.816 \backsimeq 0.45 = 45\%$.
Notiamo la separazione tra il segnale nei dati e le informazioni iniziali nella fattorizzazione sulla scala dei pronostici:

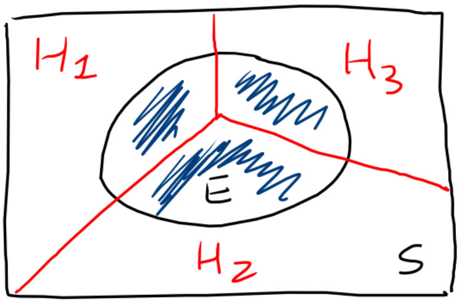
- Il *segnale nei dati* è rappresentato dal fattore $999/25 \simeq 40$;
- Le *informazioni iniziali* sono rappresentate dal fattore $1/49 \simeq 0.0204$.

Con più spiegazioni

Esempio: correzione automatica
L'utente di un computer ha digitato la parola "cartello". Supponiamo che questa sia la manifestazione della sua volontà di digitare una tra le parole "castello", "cartello" o "martello".
$E = \text{"digita cartello"}$

$H_1 =$ "vuole castello"
$H_1 =$ "vuole cartello"
$H_3 =$ "vuole martello"

$$\mathbb{P}(H_2|E) = \frac{\mathbb{P}(E|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(E)}$$



$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap H_1) + \mathbb{P}(E \cap H_2) + \mathbb{P}(E \cap H_3)$$

Per la regola delle probabilità totali:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(E|M_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(E|H_3)\mathbb{P}(H_3)$$

Dove: (valutazione frequentistica)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1) &= \frac{153}{175} \quad \text{castello} \\ \mathbb{P}(H_2) &= \frac{9}{175} \quad \text{cartello} \\ \mathbb{P}(H_3) &= \frac{13}{175} \quad \text{martello} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(H_3) = \frac{175}{175} = 1$
(superficiale) Valutazione soggettiva

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E|H_1) &= 0.01 \qquad \text{"r" vicina a "s"} \\ \mathbb{P}(E|H_2) &= 0.95 \qquad \text{senza errori} \\ \mathbb{P}(E|H_3) &= 0.001 \qquad \text{"m" lontana da "c"} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(H_2|E) = \frac{\frac{9}{175} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{153}{175} \cdot \frac{1}{100} + \frac{9}{175} \cdot \frac{95}{100} + \frac{13}{175} \cdot \frac{1}{1000}} \approx 0.847$$

$$\mathbb{P}(H_1|E) = \cdots = 0.152$$

$$\mathbb{P}(H_3|E) = \cdots = 0.001$$

Quindi la formula di Bayes per *tre spiegazioni*:

$$\mathbb{P}(H_i|E) \propto \mathbb{P}(E|H_i)\mathbb{P}(H_i)$$
$$\text{posterioir} \propto \text{likelihood} \times \text{prior}$$

Formula di Bayes con k spiegazioni

$$\mathbb{P}(H_i|E) = \frac{\mathbb{P}(E|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(E|H_i)\mathbb{P}(H_i)} \qquad i = 1, \ldots, k$$

Conteggi

Prendiamo uno spazio campionario S costituito da eventi E, ricordiamo che $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|S|}$.
Regola del prodotto:
Se esistono m modi di fare qualcosa, e per ognuno di questi m modi ci sono n modi per fare un'altra cosa, allora ci sono un massimo $m \times n$ modi per fare entrambe le cose.
Combinazioni:
Il numero di modi di scegliere k oggetti distinti da un insieme di n oggetti:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ in `R`:

```
choose(n,k)
```

Esempio:
Lanciamo una moneta 10 volte, la regola del prodotto ci dice che si sono $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$ possibili risultati.
Sia E l'evento "abbiamo ottenuto esattamente 3 volte testa" (HHHTTTTTTT or TTTHTHTTHT, ...).
Quale è la probabilità di E? $P(E) =$

$$|E| = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

quindi $P(E) = \frac{120}{1024} \approx 0.117$.

```
event <- replicate(10000, {
  flips <- sample(c("H", "T"), 10, replace = TRUE)
  heads <- sum(flips == "H")
  heads == 3
})
mean(event)
```

```
## [1] 0.1211
```

```
## Title: Counting
## Author: Luca La Rocca
## Date: 15 October 2024

## Sys.setLanguage("en", unset="it") # uncomment to disable message
translation
rm(list=ls(all=TRUE)) # clean the workspace

prodCart <- function(spaces) # list of vectors
{ # begin function
  S <- expand.grid(rev(spaces))
```

```
  if(ncol(S)>1) S <- S[, ncol(S):1]
  colnames(S) <- paste("Pos", 1:ncol(S), sep="")
  return(S)
} # end function

dispRep <- function(S0, # vector of items available for selection
                     k) # number of items to be selected
  return(prodCart(rep(list(S0), k)))

dispSemp <- function(S0, # vector of items available for selection
                      k) # number of items to be selected
{ # begin function
  if(k==1){ # base case
    S <- as.data.frame(S0)
    colnames(S) <- "Pos1"
  }else{ # recursive case
    S <- Recall(S0[-1], k-1)
    recsize <- nrow(S)
    S <- cbind(rep(S0[1], recsize), S)
    colnames(S) <- paste("Pos", 1:ncol(S), sep="")
    for(i in 2:length(S0)){
      Schunk <- cbind(rep(S0[i], recsize), Recall(S0[-i], k-1))
      colnames(Schunk) <- colnames(S)
      S <- rbind(S, Schunk)
    } # end for
  } # end if-else
  return(S)
} # end function

perm <- function(S0) # vector of items to be permuted
  return(dispSemp(S0,length(S0)))

combSemp <- function(S0, # vector of items available for selection
                      k) # number of items to be selected
{ # begin function
  S <- as.data.frame(t(combn(S0, k)))
  colnames(S) <- paste("Item", 1:ncol(S), sep="")
  return(S)
} # end function

## SPAZI CAMPIONARI ELEMENTARI
cat("Sample space for a coin (head?):", fill=TRUE)
Scoin <- c(FALSE, TRUE)
print(Scoin)
cat("total outcomes =", length(Scoin), fill=TRUE)

cat("Sample space for a French card seed:", fill=TRUE)
Scard <- c("heart", "diamond", "club", "spade")
print(Scard)
cat("total outcomes =", length(Scard), fill=TRUE)

cat("Sample space for a die:", fill=TRUE)
Sdie <- 1:6
```

```
print(Sdie)
cat("total outcomes =", length(Sdie), fill=TRUE)

## PRODOTTO CARTESIANO DI SPAZI FINITI
cat("Sample space for a coin (head?) and a French card seed:", fill=TRUE)
Scoincard <- prodCart(list(Scoin, Scard))
print(Scoincard)
cat("total outcomes =", length(Scoin)*length(Scard), fill=TRUE)

cat("Sample space for a coin (head?) a French card seed and a die:",
fill=TRUE)
Scoincardie <- prodCart(list(Scoin, Scard, Sdie))
print(Scoincardie)
cat("total outcomes =", length(Scoin)*length(Scard)*length(Sdie), fill=TRUE)

## SPAZI DI DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE
cat("Sample space for two dice:", fill=TRUE)
Stwodice <- dispRep(Sdie, 2)
print(Stwodice)
cat("total outcomes =", length(Sdie)^2, fill=TRUE)

cat("Sample space for three coins (head?):", fill=TRUE)
Sthreecoins <- dispRep(Scoin, 3)
print(Sthreecoins)
cat("total outcomes =", length(Scoin)^3, fill=TRUE)

## SPAZI DI DISPOSIZIONI SEMPLICI
cat("Sample space for an ordered hand of two French queens:", fill=TRUE)
Stwocards <- dispSemp(Scard, 2)
print(Stwocards)
cat("total outcomes =", prod(length(Scard):(length(Scard)-2+1)), fill=TRUE)

cat("Sample space for an ordered hand of three French queens:", fill=TRUE)
Sthreecards <- dispSemp(Scard, 3)
print(Sthreecards)
cat("total outcomes =", prod(length(Scard):(length(Scard)-3+1)), fill=TRUE)

## SPAZI DI PERMUTAZIONI
nlet <- 4 # number of letters
AnagramSimSize <- 2500 # number of simulations
cat("Sample space for a random anagram of", nlet, "distinct letters:",
    fill=TRUE)
AnagramS <- perm(LETTERS[1:nlet])
print(AnagramS)
cat("total outcomes =", factorial(length(AnagramS)), fill=TRUE)
AnagramD <- apply(AnagramS, 1, function(row) !any(row==LETTERS[1:nlet]))
cat("derangement event", fill=TRUE)
print(AnagramS[AnagramD,])
cat("favorable outcomes =", sum(AnagramD), fill=TRUE)
AnagramP <- sum(AnagramD)/nrow(AnagramS)
cat("exact probability of derangement =", AnagramP, fill=TRUE)
cat("how far is it from the limit value?",fill=TRUE)
print(all.equal(exp(-1), AnagramP))
```

```
AnagramDtrials <- replicate(AnagramSimSize,{
  permutation <- AnagramS[sample(1:nrow(AnagramS), 1),]
  !any(permutation==LETTERS[1:nlet])
})
cat("empirical proportion of derangement =", mean(AnagramDtrials),
    "with margin of error =", 1/sqrt(AnagramSimSize), fill=TRUE)

## SPAZI DI COMBINAZIONI SEMPLICI
cat("Sample space for an unordered hand of two French queens:", fill=TRUE)
SunordHand <- combSemp(Scard, 2)
print(SunordHand)
cat("total outcomes =", choose(length(Scard), 2), fill=TRUE)

cat("Sample space for an unordered hand of three French queens:", fill=TRUE)
SunordHand <- combSemp(Scard, 3)
print(SunordHand)
cat("total outcomes =", choose(length(Scard), 3), fill=TRUE)
```

Massa di probabilità e valore atteso

Variabili casuali discrete

In statistica e probabilità, una **variabile casuale** (o **variabile aleatoria**) è una funzione che associa a ciascun elemento di uno spazio campionario S un numero reale. Le variabili casuali sono denotate con lettere maiuscole.

Massa di probabilità

La **funzione di massa di probabilità** (pmf) è una funzione associata a una variabile casuale discreta. Essa fornisce la probabilità che la variabile casuale assuma un determinato valore x. La pmf di una variabile casuale X è definita come:

$$p(x) = P(X = x)$$

Teorema 3.1:
Sia p la funzione di massa di probabilità di X.

1. $p(x) \geq 0 \forall x$, la probabilità di ciascun valore x deve essere maggiore o uguale a zero.
2. $\sum_x p(x) = 1$, la somma delle probabilità di tutti i possibili valori che può assumere la variabile casuale deve essere $= 1$.
   Esempio 3.2: Lancio di 3 monete
   Spazio campionario:

   $$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

   Ogni esito è ugualmente probabile, quindi la probabilità di ciascun risultato è:

   $$P(esito) = \frac{1}{8}$$

   Definiamo una variabile casuale X che rappresenta il numero di teste osservate nei tre lanci delle monete. La funzione X può essere descritta come segue:

$$
\begin{aligned}
X(HHH) &= 3 \quad nbsp; (3 \; teste) \\
X(HHT) &= 2 \quad nbsp; (2 \; teste) \\
X(HTH) &= 2 \quad nbsp; (2 \; teste) \\
X(THH) &= 2 \quad nbsp; (2 \; teste) \\
X(TTH) &= 1 \quad nbsp; (1 \; testa) \\
X(THT) &= 1 \quad nbsp; (1 \; testa) \\
X(HTT) &= 1 \quad nbsp; (1 \; testa) \\
X(TTT) &= 0 \quad nbsp; (0 \; teste)
\end{aligned}
$$

L'evento $X = 2$ rappresenta il numero di esiti in cui abbiamo esattamente 2 teste. Gli esiti che soddisfano questa condizione sono:

$$\{HHT, HTH, THH\}$$

possiamo calcolare la probabilità dell'evento $X = 2$:

$$P(X = 2) = P(\{HHT, HTH, THH\}) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$

ogni esito ha la stessa probabilità di $\frac{1}{8}$:

$$P(X = 2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Valore atteso per variabili discrete

La definizione formale del valore atteso per una variabile casuale discreta X con funzione di massa di probabilità (pmf) p è:

$$E[X] = \sum_x x \cdot p(x)$$

dove la somma è presa su tutti i valori possibili della variabile casuale X, a condizione che questa somma esista.

Teorema 3.2 La **Legge dei Grandi Numeri**

La Legge dei Grandi Numeri afferma che la media di n osservazioni di una variabile casuale X converge al valore atteso $E[X]$ quanto $n \to \infty$, assumendo che $E[X]$ sia definito:

$$\text{Se } n \to \infty, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to E[X]$$

dove X_i è il valore osservato della variabile casuale nella i-esima osservazione.

Esempio 3.9

Usando la simulazione, determiniamo il valore atteso di un rotolo di dado. Ecco 30 osservazioni e la loro media:

```
rolls <- sample(1:6, 30, replace = TRUE)
rolls
```

```
##  [1] 3 3 3 3 1 5 1 2 2 3 3 6 5 1 1 6 6 5 2 6 5 2 5 2 6 1 3 6 6 5
```

```
mean(rolls)
```

```
## [1] 3.6
```

Variabili Casuali Binomiali e Geometriche

Sono modelli comuni e utili per molte situazioni reali. Entrambe coinvolgono esperimenti chiamati **prove di Bernoulli**.

!TODO per esame

Prove di Bernoulli

Una **prova di Bernoulli** è un esperimento che può risultare in due esiti distinti, "successo" e "fallimento". La probabilità di un successo è rappresentata con p, mentre la probabilità di fallimento è quindi:

$$1 - p$$

Variabili Casuali Binomiali

È utilizzata per contare il numero di successi in un numero fisso di prove di Bernoulli. La variabile casuale X che rappresenta il numero di successi in n prove di Bernoulli (finite).

Schemi di Bernoulli finiti

Un **schema di Bernoulli finito** consiste in un numero fisso di prove n, ciascuna con una probabilità di successo p e una probabilità di fallimento $1 - p$. Questo schema è descritto dalla variabile casuale binomiale X, che rappresenta il numero di successi in n prove.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

- $\binom{n}{k}$ *variabile binomiale*: rappresenta il numero di modi in cui possono verificarsi k successi in n prove.
- k è il numero di successi (con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$).
- p è la probabilità di successo in ogni prova.
  A volte si scrive $X \sim Binom(n, p)$, X segue una **distribuzione binomiale** con parametri n e p:
- n: numero prove di Bernoulli;
- p: **probabilità di successo** in ogni prova.
  Teorema 3.4:
  Sia X una variabile binomiale casuale, con n prove e p probabilità di successo, allora:

$$E[X] = np$$

Variabili Casuali Geometriche

Conta il numero di prove di Bernoulli fino al primo successo. Se Y rappresenta il numero di prove fino al primo successo (Schemi di Bermoulli infiniti).

Schemi di Bernoulli infiniti

Un **schema di Bernoulli infinito** prevede un numero potenzialmente *infinito* di prove. In questo schema, si continua a eseguire prove di Bernoulli fino a quando non si ottiene il primo successo. La variabile casuale che descrive il numero di prove necessarie fino al primo successo segue una distribuzione geometrica.

$$P(Y=k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- p è la probabilità di successo in ciascuna prova.
- $(1-p)^x$ *variabile geometrica*: appresenta la probabilità di ottenere x fallimenti prima di un successo.
  Teorema 3.6:
  Sia X una variabile geometrica casuale, con p probabilità di successo, allora:

$$E[X] = \frac{(1-p)}{p}$$

```
## Title: Binomial and geometric variables
## Author: Luca La Rocca
## Date: 22 October 2024

## Sys.setLanguage("en", unset="it") # uncomment to disable message
translation
rm(list=ls(all=TRUE)) # clean the workspace

plotPMF <- function(x, # vector of values taken with positive probability
                    p, # vector of corresponding probability masses
                    ...) # extra arguments for plot() and points()
{ # begin function
  plot(x, p, type="h", ylim=c(0,max(p)), frame=FALSE, ylab="p(x)", ...)
  points(x, p, pch=20, ...)
  abline(h=0, lty="dotted")
} # end function

plotCDF <- function(cdf, # step function giving the cumulative probabilities
                    main = "", # title of the plot
                    ...) # extra arguments for plot()
{ # begin function
  plot(cdf, verticals=FALSE, ylim=c(0,1), frame=FALSE, pch=20, ylab="F(x)",
       main=main, ...)
  abline(h=c(0,1), lty="dotted")
} # end function

## rolling a die ten times and counting the sixes
Bn <- 10
```

```r
Bp <- 1/6

Blo <- 2 # lower threshold
Bhi <- 4 # upper threshold

cat("In n =", Bn, "repeated trials with success probability p =", Bp,
    fill=TRUE)
cat("the probability of getting at least", Blo, "and at most", Bhi,
    "successes is", sum(dbinom(Blo:Bhi, Bn, Bp)), fill=TRUE)
cat("the probability of getting less than", Blo,
    "successes is", pbinom(Blo-1, Bn, Bp), fill=TRUE)
cat("the probability of getting more than", Bhi,
    "successes is", pbinom(Bhi, Bn, Bp, lower=FALSE), fill=TRUE)
cat("and these three probabilities sum to", sum(dbinom(0:Bn, Bn, Bp)),
    fill=TRUE)

Bsimsize <- 10^6
cat("Simulating", Bsimsize, "binomial counts with n =", Bn, "and p =", Bp,
    fill=TRUE)
cat("the proportion of counts that are at least", Blo, "and at most", Bhi,
    "is", mean(rbinom(Bsimsize, Bn, Bp) %in% Blo:Bhi), fill=TRUE)
cat("with margin of error", 1/sqrt(Bsimsize), fill=TRUE)

Bvalues <- 0:Bn
Bmasses <- dbinom(Bvalues, Bn, Bp)

pdf("Rfig10dbinom.pdf", width = 8, height = 5)
plotPMF(Bvalues, Bmasses, main=paste("Binomial p.m.f. with n =",
                Bn, "and p =", round(Bp, 4)))
dev.off()

cbinom <- stepfun(Bvalues, c(0, pbinom(Bvalues, Bn, Bp)))

pdf("Rfig10pbinom.pdf", width = 8, height = 5)
plotCDF(cbinom,
        main=paste("Binomial c.d.f. ( n =", Bn, ", p =", round(Bp, 4), ")"))
dev.off()

## tossing a coin until you get head and counting the tails
Gp <- 1/2
Gmax <- qgeom(0.99, Gp)

Glo <- 3 # lower threshold
Ghi <- 5 # upper threshold

cat("In repeated trials with success probability p =", Gp, fill=TRUE)
cat("the probability of getting at least", Glo, "and at most", Ghi,
"failures",
    fill=TRUE)
cat("before the first success is", sum(dgeom(Glo:Ghi, Gp)), fill=TRUE)
cat("the probability of getting less than", Glo, "failures", fill=TRUE)
cat("before the first success is", pgeom(Glo-1, Gp), fill=TRUE)
cat("the probability of getting more than", Ghi, "failures", fill=TRUE)
```

```
cat("before the first success is", pgeom(Ghi, Gp, lower=FALSE), fill=TRUE)
cat("and the three probabilities sum to",
    pgeom(Ghi, Gp) + pgeom(Ghi, Gp, lower=FALSE), fill=TRUE)

Gsimsize <- 10^6
cat("Simulating", Gsimsize, "geometric counts with p =", Gp, fill=TRUE)
cat("the proportion of counts that are at least", Glo, "and at most", Ghi,
    "is", mean(rgeom(Gsimsize, Gp) %in% Glo:Ghi), fill=TRUE)
cat("with margin of error", 1/sqrt(Gsimsize), fill=TRUE)

Gvalues <- 0:Gmax
Gmasses <- dgeom(Gvalues, Gp)

pdf("Rfig10dgeom.pdf", width = 8, height = 5)
plotPMF(Gvalues, Gmasses, main=paste("Geometric p.m.f. with p =", round(Gp,
4)))
dev.off()

cgeom <- stepfun(Gvalues, c(0, pgeom(Gvalues, Gp)))

pdf("Rfig10pgeom.pdf", width = 8, height = 5)
plotCDF(cgeom, main = paste("Geometric c.d.f. ( p =", round(Gp, 4), ")"))
dev.off()
```

Trasformazioni e variabilità

Scarti quadratici e media

Consideriamo $\mu_X = E[X]$ e $\mu_Y = E[Y]$, le medie attese dei ricavi per i due prodotti. Gli scarti quadratici dai valori attesi per ciascuna variabile sono dati da:

$$(X - \mu_X)^2 \quad \text{e} \quad (Y - \mu_Y)^2$$

Queste espressioni rappresentano la distanza al quadrato tra il ricavo osservato e il suo valore medio. Questi scarti quadratici servono a misurare la dispersione o variabilità attorno alla media senza cancellare gli effetti di valori estremi (perché il quadrato elimina i segni negativi).

Trasformazioni di Variabili Aleatorie

Gli scarti quadratici sono anche esempi di **trasformazioni** delle variabili aleatorie X e Y, in cui la funzione $g(X) = (X - \mu_X)^2$ è applicata a X e produce una nuova variabile aleatoria, $g(X)$, che rappresenta lo scarto quadratico.
Queste trasformazioni possono essere utili in contesti statistici per valutare la distanza dal valore medio. Analogamente, altre trasformazioni come il valore assoluto $|\, X - \mu_X \,|$ possono essere utili in altre situazioni per ridurre la sensibilità ai valori estremi.

Legge dello Statistico Inconsapevole

La **legge dello statistico inconsapevole** afferma che per calcolare l'attesa di una funzione di una variabile aleatoria, basta la distribuzione di quella variabile e non serve conoscere esplicitamente la funzione. Per esempio, se vogliamo trovare l'attesa di $(X - \mu_X)^2$, non serve calcolare ogni valore di $(X - \mu_X)^2$ ma è sufficiente conoscere la distribuzione di X e applicare:

$$E[(X - \mu_X)^2] = Var(X)$$

Varianza e Deviazione Standard come Misura della Variabilità

La **varianza** di X, indicata come $\mathrm{Var}(X)$, è data dall'attesa dello scarto quadratico:

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2]$$

La varianza misura quanto i ricavi di X si discostano in media dalla loro media. La **deviazione standard** di $X, \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$, fornisce una misura della dispersione dei ricavi di X attorno alla media nello stesso ordine di grandezza dei valori osservati.

Teorema della Linearità della Media

Se consideriamo una combinazione lineare di due variabili aleatorie X e Y, ad esempio $Z = aX + bY$, dove a e b sono costanti, possiamo calcolare la media di Z usando la **linearità dell'attesa**:

$$E[Z] = E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] = a\mu_X + b\mu_Y$$

Invarianza per Traslazione

Se aggiungiamo una costante c alla variabile aleatoria X per ottenere $X' = X + c$, a media di X' è semplicemente traslata di c:

$$E[X'] = E[X + c] = E[X] + c = \mu_X + c$$

La **varianza**, invece, non cambia, perché la dispersione attorno alla media rimane la stessa:

$$\mathrm{Var}(X') = \mathrm{Var}(X)$$

Esempio:
Vediamo un esempio concreto con dei dati numerici per ogni concetto che abbiamo trattato. Immaginiamo di avere due ricavi giornalieri, X e Y, di due prodotti in euro, osservati su un periodo di 5 giorni. I valori osservati per X e Y sono:

$$X = [120, 135, 150, 160, 140]$$
$$Y = [100, 115, 130, 125, 110]$$

Gli scarti quadratici della media:

$$\mu_X = \frac{120 + 135 + 150 + 160 + 140}{5} = 141$$
$$\mu_Y = \frac{100 + 115 + 130 + 125 + 110}{5} = 116$$

Ora calcoliamo gli scarti quadratici di ciascun valore dalla rispettiva media.
Per X:

$$(120 - 141)^2 = (-21)^2 = 441$$
$$(135 - 141)^2 = (-6)^2 = 36$$
$$(150 - 141)^2 = (9)^2 = 81$$
$$(160 - 141)^2 = (19)^2 = 361$$
$$(140 - 141)^2 = (-1)^2 = 1$$

Per Y:

$$(100 - 116)^2 = (-16)^2 = 256$$
$$(115 - 116)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$(130 - 116)^2 = (14)^2 = 196$$
$$(125 - 116)^2 = (9)^2 = 81$$
$$(110 - 116)^2 = (-6)^2 = 36$$

La **varianza** di X si calcola come la media degli scarti quadratici:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{441 + 36 + 81 + 361 + 1}{5} = \frac{920}{5} = 184$$

La **deviazione standard** di X è la radice quadrata della varianza:

$$\sigma_X = \sqrt{184} \approx 13.56$$

Analogamente, la **varianza** di Y è:

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{256 + 1 + 196 + 81 + 36}{5} = \frac{570}{5} = 114$$

La **deviazione standard** di Y è:

$$\sigma_Y = \sqrt{114} \approx 10.68$$

Consideriamo ora una combinazione lineare dei due ricavi, per esempio $Z = 2X + 3Y$. Per trovare la media di Z, usiamo la **linearità della media**:

$$E[Z] = E[2X + 3Y] = 2E[X] + 3E[Y]$$

Sostituendo i valori delle medie trovate:

$$E[Z] = 2 \times 141 + 3 \times 116 = 282 + 348 = 630$$

Immaginiamo di aggiungere una costante di $c = 10$ euro al ricavo giornaliero di X per ogni giorno. Questo ci dà una nuova variabile aleatoria $X' = X + 10$.
La media di X' sarà:

$$E[X'] = E[X + 10] = E[X] + 10 = 141 + 10 = 151$$

La **varianza** di $X\prime$, invece, resta invariata, poiché aggiungere una costante non cambia la dispersione:

$$Var(X') = Var(X) = 184$$

La **legge dello statistico inconsapevole** ci permette di calcolare l'attesa di una trasformazione di X usando solo la distribuzione di X. Per esempio, se vogliamo calcolare l'attesa dello scarto quadratico $E[(X-\mu_X)^2]$, possiamo notare che questa non è altro che la **varianza** di X. Pertanto, anche senza calcolare esplicitamente ogni scarto, sappiamo che:

$$E[(X-\mu_X)^2] = Var(X) = 184$$

Indipendenza e correlazione

Indipendenza e Correlazione tra Variabili Aleatorie

Indipendenza: Due variabili aleatorie (X) e (Y) sono indipendenti se la probabilità congiunta si separa in prodotto di probabilità marginali:

$$P(X=x \text{ e } Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

Incorrelazione: Se due variabili aleatorie sono indipendenti, allora sono anche incorrelate, il che significa che la covarianza tra (X) e (Y) è zero. Tuttavia, l'inverso non è vero: due variabili incorrelate non sono necessariamente indipendenti.

Varianza della Somma di Due Variabili Aleatorie

La **varianza** della somma di due variabili aleatorie (X) e (Y) è data da:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Se (X) e (Y) sono **indipendenti**, allora la covarianza è zero e la varianza della somma diventa:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Esempio: Supponiamo che (X) e (Y) siano il rendimento di due azioni indipendenti. Se (X) ha una varianza di 4 e (Y) ha una varianza di 9, allora:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = 4 + 9 = 13$$

Covarianza

La **covarianza** tra (X) e (Y) misura il grado di dipendenza lineare tra le due variabili:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- $E[X]$ e $E[Y]$ sono i valori attesi (o medie) di X e Y.
- $E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$ è l'atteso del prodotto delle deviazioni di X e Y dalle loro medie.
- Se la covarianza è positiva, significa che le due variabili tendono a crescere insieme.
- Se la covarianza è negativa, tendono a variare in senso opposto.
  Esempio: Se (X) è la temperatura e (Y) è il consumo di energia per il riscaldamento, potremmo aspettarci una covarianza negativa, perché un aumento della temperatura potrebbe portare a una riduzione del consumo di energia.

Coefficiente di Correlazione Lineare

Il **coefficiente di correlazione lineare** è una versione normalizzata della covarianza che assume valori tra -1 e 1:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}}$$

Valori di $(\rho_{X,Y})$ vicini a 1 indicano una forte correlazione positiva, valori vicini a -1 una forte correlazione negativa, e valori vicini a 0 indicano che non c'è relazione lineare.
Esempio: Se $(\rho_{X,Y} = 0.8)$, significa che (X) e (Y) sono fortemente correlati positivamente.

Campioni Casuali e Legge dei Grandi Numeri

La **Legge dei Grandi Numeri** afferma che, per un campione casuale di grande dimensione $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, la media campionaria tende a convergere alla media della popolazione:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to E[X] \quad \text{quando } n \to \infty$$

Interpretazione:

- **Campione casuale**: Un campione di variabili casuali $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ è preso da una distribuzione di probabilità, dove ogni XiXi è una realizzazione casuale.
- **Media campionaria**: La media dei valori osservati, che è $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i$, rappresenta una stima della media della popolazione.
- **Convergenza**: La Legge dei Grandi Numeri ci dice che, man mano che aumentiamo il numero di osservazioni nn, la media campionaria si avvicinerà sempre più alla media teorica $E[X]$.
  Esempio: Se lanciamo una moneta (n) volte e contiamo il numero di teste, la proporzione di teste tende a (0.5) al crescere di (n), che è il valore atteso.

Esempio (Un portafoglio prudente)

Un capitale di novemila euro è investito in due titoli finanziari i cui tassi di rendimento formano un vettore aleatorio (X, Y). Il capitale è suddiviso in due terzi e un terzo, di modo che il portafoglio di investimento corrisponde al ricavo aleatorio:

$$T = 6(1+X) + 3(1+Y) = 9 + 6X + 3Y = 9(1+W)$$

in migliaia di euro, dove $W = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y$ è il tasso di rendimento del portafoglio e naturalmente abbiamo fissato un orizzonte temporale. Se valutiamo $E(X) = 0.03$ & $E(Y) = 0.06$, troviamo per linearità:

$$E(W) = E\left(\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y\right) = \frac{2}{3}E(X) + \frac{1}{3}E(Y) = \frac{0.06 + 0.06}{3} = 0.04$$

quindi $E(T) = 9\{1 + E(W)\} = 9 \times 1.04 = 9.360$ migliaia di euro; notiamo che $E(X) < E(W) < E(Y)$.
Se valutiamo $Sd(X) = 0.02, Sd(Y) = 0.04$ & $\mathrm{Cov}(X,Y) = -0.0005$, con le proprietà della covarianza troviamo:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(W) &= \operatorname{Var}\left(\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y\right) = \operatorname{Cov}\left(\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y, \frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y\right) \\
&= \frac{4}{9}\operatorname{Cov}(X,X)+\frac{2}{9}\operatorname{Cov}(X,Y)+\frac{2}{9}\operatorname{Cov}(Y,X)+\frac{1}{9}\operatorname{Cov}(Y,Y) \\
&= \frac{4}{9}\operatorname{Var}(X)+\frac{4}{9}\operatorname{Cov}(X,Y)+\frac{1}{9}\operatorname{Var}(Y) \\
&= \frac{4\times 0.02^2 - 4\times 0.0005 + 0.04^2}{9} = \frac{0.0012}{9} = \frac{1}{7500} \\
&\Rightarrow Sd(W) = \sqrt{\frac{1}{7500}} \simeq 0.011547
\end{aligned}
$$

Quindi $Sd(T) = Sd(9(1+W)) = 9Sd(W) \simeq 0.104$ migliaia di euro; notiamo che $Sd(W) < Sd(X) < Sd(Y)$.

```
## Title: Law of Large Numbers
## Author: Luca La Rocca
## Date: 4 November 2024

## Sys.setLanguage("en", unset="it") # uncomment to disable message
translation
rm(list=ls(all=TRUE)) # clean the workspace

m <- 2500 # size of simulations
n <- 12 # number of Bernoulli trials
p <- 1/6 # success probability
g <- 100 # number of terms to keep when approximating Geom(p)

cat("Sampling m =", m, "observations from a binomial distribution",
fill=TRUE)
cat("with n =", n, "and p =", p, "gives...", fill=TRUE)
x <- rbinom(m, n, p)
cat("...an empirical mean equal to", mean(x),
    "with margin of error", 2*sd(x)/sqrt(length(x)), fill=TRUE)

pdf("Rfig12indepdraws.pdf", width=8, height=5)
plot(1:m, x, type="l", ylim=c(0, 12))
title(main=paste("Independent draws from Binom(n=", n,",p=", round(p, 4),
")", sep=""))
dev.off()

pdf("Rfig12runningmean.pdf", width=8, height=5)
plot(1:m, cumsum(x)/1:m, type="l", ylim=c(0, 12), ylab=expression(bar(x)))
title(main=paste("Running mean from Binom(n=", n, ",p=", round(p, 4), ")",
                 sep=""))
abline(h=n*p, col=gray(0.75))
dev.off()

cat("Sampling m =", m, "observations from a geometric distribution",
fill=TRUE)
cat("with p =", p, "gives...", fill=TRUE)
y <- rgeom(m, p)
cat("...an empirical mean equal to", mean(y),
```

```
    "with margin of error", 2*sd(y)/sqrt(length(y)), fill=TRUE)
cat("whereas the population mean is", (1-p)/p,
    "or approximately", sum(0:(g-1)*dgeom(0:(g-1), p)),
    "(adding", g, "terms)", fill=TRUE)

plot(1:m, cumsum(2^(y+1))/1:m, type="l", ylab=expression(bar(x)))
title(main=paste("Running mean from the St. Petersburg paradox"))
```

Altre variabili discrete di uso comune

Variabile di Poisson

La **distribuzione di Poisson** è utilizzata per modellare il numero di eventi che si verificano in un intervallo di tempo o in un'area spaziale, quando gli eventi sono indipendenti e avvengono con una probabilità costante.

Definizione

Una variabile casuale (X) segue una **distribuzione di Poisson** con parametro $(\lambda > 0)$ se la sua funzione di probabilità è:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- (λ) è il **parametro di Poisson**, che rappresenta sia la **media** che la **varianza** della distribuzione.
- (k) è il numero di eventi osservati.
- (e) è la base del logaritmo naturale.

Caratteristiche

- **Media**: $(E[X] = \lambda)$
- **Varianza**: $(\text{Var}(X) = \lambda)$
- **Distribuzione discreta**: (X) può assumere valori interi non negativi (0, 1, 2, …).

Condizioni d'uso

La distribuzione di Poisson è applicabile per modellare:

- Eventi che accadono in un intervallo di tempo o spazio fisso.
- Eventi indipendenti tra loro.
- Eventi con una probabilità costante di occorrenza.

Esempio

Se una biblioteca riceve in media 3 visitatori all'ora $(\lambda = 3)$, la probabilità che ci siano esattamente 5 visitatori in un'ora è:

$$P(X = 5) = \frac{3^5 e^{-3}}{5!}$$

Relazione con la Binomiale

La distribuzione di Poisson può approssimare una distribuzione binomiale quando il numero di prove è grande e la probabilità di successo in ogni prova è piccola, mantenendo costante il valore $(n \cdot p = \lambda)$.

Variabili Ipergeometriche

La **distribuzione ipergeometrica** è utilizzata quando si selezionano campioni da una popolazione finita senza **sostituzione**. A differenza della distribuzione binomiale, che assume la selezione con sostituzione, la distribuzione ipergeometrica tiene conto che, con ogni estrazione, cambia la composizione della popolazione.

Definizione

Una variabile casuale (X) segue una **distribuzione ipergeometrica** con i seguenti parametri:

- (N): la **dimensione della popolazione** (numero totale di oggetti).
- (K): il numero di **successi** (oggetti "di interesse", ad esempio, oggetti di un certo tipo).
- (n): la **dimensione del campione** (numero di oggetti estratti dalla popolazione).
  La funzione di probabilità della variabile casuale (X), che rappresenta il numero di successi nel campione, è:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- $\binom{K}{k}$ è il numero di modi in cui si possono scegliere (k) successi dal totale (K) successi.
- $\binom{N-K}{n-k}$ è il numero di modi in cui si possono scegliere $(n-k)$ fallimenti dal totale di $(N-K)$ fallimenti.
- $\binom{N}{n}$ è il numero totale di modi in cui si possono scegliere (n) oggetti dalla popolazione di dimensione (N).

Caratteristiche

- **Supporto**: (X) può assumere valori interi da $(\max(0, n-(N-K)))$ a $(\min(n, K))$.
- **Media**: $(E[X] = \frac{nK}{N})$
- **Varianza**: $(\mathrm{Var}(X) = \frac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)})$

Applicazioni

La distribuzione ipergeometrica è utile in contesti in cui:

- Si estraggono campioni **senza sostituzione** da una popolazione finita.
- Si vuole calcolare la probabilità di ottenere un certo numero di successi (oggetti di interesse) in un campione estratto dalla popolazione.

Esempio

Supponiamo di avere una popolazione di 20 oggetti, di cui 8 sono di tipo "successo" e i restanti 12 sono di tipo "fallimento". Se estrai 5 oggetti senza sostituzione, la probabilità di ottenere esattamente 3 successi è:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{8}{3}\binom{12}{2}}{\binom{20}{5}}$$

Confronto con la distribuzione binomiale

La distribuzione ipergeometrica è simile alla distribuzione binomiale, ma differisce per il fatto che gli eventi non sono indipendenti, dato che il campione viene estratto senza sostituzione. La distribuzione binomiale può approssimare la distribuzione ipergeometrica quando il campione è molto piccolo rispetto alla popolazione, in modo che la differenza tra le estrazioni con e senza sostituzione sia trascurabile.

Variabili Binomiali Negative

Le **variabili binomiali negative** sono utilizzate per modellare il numero di prove necessarie prima di ottenere un numero fisso di successi in un processo di Bernoulli. In altre parole, una variabile casuale binomiale negativa misura quante prove devono essere effettuate per ottenere (r) successi, con una probabilità (p) di successo in ogni prova.

Definizione

Una variabile casuale (X) segue una **distribuzione binomiale negativa** con parametri (r) (numero di successi) e (p) (probabilità di successo in ogni prova) se la probabilità che $(X = k)$ (cioè, ottenere il (r)-esimo successo alla (k)-esima prova) è data da:

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \ldots$$

- $\binom{k-1}{r-1}$ è il numero di modi in cui i $(r-1)$ successi possono essere distribuiti tra le prime $(k-1)$ prove.
- (p^r) è la probabilità di ottenere (r) successi.
- $(1-p)^{k-r}$ è la probabilità di ottenere $(k-r)$ fallimenti.

Caratteristiche

- **Supporto**: (X) assume valori interi $(k = r, r+1, r+2, \ldots)$, cioè il numero di prove deve essere almeno uguale a (r), poiché non è possibile ottenere (r) successi in meno di (r) prove.
- **Media**: $(E[X] = \frac{r}{p})$, cioè il numero medio di prove necessarie per ottenere (r) successi.
- **Varianza**: $(\mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2})$, che dipende sia dal numero di successi desiderato che dalla probabilità di successo in ogni prova.

Applicazioni

La distribuzione binomiale negativa è utile quando si desidera modellare:

- Il **numero di prove** necessarie per ottenere un numero specifico di successi.
- Eventi che seguono un **processo di Bernoulli** (due possibili esiti, successo o fallimento). Alcuni esempi includono:
- Il numero di lanci di una moneta necessari per ottenere 5 teste.
- Il numero di tentativi necessari per ottenere 3 successi in un gioco o esperimento.

Esempio

Supponiamo di lanciare una moneta con probabilità di successo $(p = 0.5)$ (ad esempio, ottenere "testa") e vogliamo sapere quante prove sono necessarie per ottenere 3 teste. Se (X) rappresenta il numero di lanci necessari per ottenere 3 teste, allora (X) segue una distribuzione binomiale negativa con parametri $(r = 3)$ e $(p = 0.5)$.
La probabilità di ottenere il 3° successo al 6° lancio (cioè 2 teste nei primi 5 lanci e la 3ª testa nel 6° lancio) è:

$$P(X = 6) = \binom{5}{2}(0.5)^3(0.5)^3 = \binom{5}{2}(0.5)^6 = 10 \times \frac{1}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

Relazione con la distribuzione geometrica

La distribuzione binomiale negativa è una generalizzazione della **distribuzione geometrica**. La distribuzione geometrica è il caso particolare della binomiale negativa con $(r = 1)$, cioè quando si cerca il numero di prove necessarie per ottenere il **primo** successo.

Densità di probabilità

La **funzione di densità di probabilità** (PDF) è associata a una **variabile casuale continua** e descrive la probabilità che la variabile casuale assuma un valore all'interno di un intervallo. A differenza delle variabili casuali discrete, per cui si utilizza la funzione di massa di probabilità (PMF), la PDF si applica a variabili casuali continue.

Definizione

Per una variabile casuale continua (X), la **funzione di densità di probabilità** $(f_X(x))$ è definita in modo tale che la probabilità che (X) assuma un valore in un intervallo $([a, b])$ è data dall'integrale della PDF su quell'intervallo:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Le proprietà principali della PDF sono:

1. **Non negatività**: $(f_X(x) \geq 0)$ per ogni (x), cioè la densità di probabilità non può mai essere negativa.
2. **Normalizzazione**: L'integrale della funzione di densità su tutto il dominio deve essere uguale a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1\$\$ Questo assicura che la probabilità totale sia 1.$$

Interpretazione

La **PDF** non fornisce direttamente la probabilità che la variabile casuale (X) assuma un valore specifico, ma la **probabilità** che (X) si trovi in un intervallo $([a, b])$ è data dall'area sotto la curva della PDF tra (a) e (b).

Esempi

1. **Distribuzione Normale** (Gaussiana):
   La distribuzione normale con media (μ) e varianza (σ^2) ha la funzione di densità di probabilità:

   $$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   È una delle distribuzioni più comuni in statistica e probabilità.
2. **Distribuzione Esponenziale**:
   La distribuzione esponenziale con parametro (λ) ha la PDF:

   $$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

   Viene spesso utilizzata per modellare il tempo tra eventi in un processo di Poisson.
3. **Distribuzione Uniforme**:
   Una variabile casuale (X) che segue una distribuzione uniforme nell'intervallo $([a, b])$ ha la PDF:
4. $$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

   In questo caso, la probabilità è distribuita uniformemente tra (a) e (b).

Valore Atteso per Variabili Casuali Continue

Il **valore atteso** (o **media**) di una **variabile casuale continua** (X) è una misura della posizione centrale della distribuzione della variabile. Rappresenta la media ponderata dei valori che (X) può assumere, con i pesi dati dalla sua **funzione di densità di probabilità** (PDF).

Definizione

Per una variabile casuale continua (X) con funzione di densità di probabilità $(f_X(x))$, il **valore atteso** $(E[X])$ è dato dall'integrale della variabile moltiplicata per la sua densità di probabilità:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx$$

- (x) è il valore che (X) può assumere.
- $(f_X(x))$ è la densità di probabilità di (X), che descrive la probabilità di (X) che assume valori in un intervallo infinitesimo.

Caratteristiche

1. **Sommatoria continua**: A differenza delle variabili discrete, dove si sommano le probabilità per ogni valore, per variabili continue si integra la densità di probabilità su tutto il dominio.
2. **Media teorica**: Il valore atteso rappresenta il "centro di massa" della distribuzione e corrisponde alla media dei valori se l'esperimento venisse ripetuto infinite volte.

Proprietà

- Il valore atteso è **lineare**: Se (a) e (b) sono costanti, e (X) è una variabile casuale continua, allora:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Esempio

Supponiamo che (X) segua una distribuzione uniforme nell'intervallo $([0, 1])$, con densità $(f_X(x) = 1)$ per $(x \in [0, 1])$. Il valore atteso di (X) è:

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Varianza e Deviazione Standard

La **varianza** misura la dispersione di una variabile casuale rispetto al suo valore atteso (media). Indica quanto i valori di una variabile casuale si discostano dalla media. Per una variabile casuale (X), la varianza è definita come:

- **Per variabili continue**:

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f_X(x) \, dx$$

  - $(f_X(x))$ è la funzione di densità di probabilità di (X).
    La varianza è sempre positiva e il suo valore è espresso nelle stesse unità al quadrato della variabile casuale.

Deviazione Standard

La **deviazione standard** è la radice quadrata della varianza e fornisce una misura della dispersione che ha le stesse unità della variabile casuale. La deviazione standard è spesso usata per interpretare quanto una variabile casuale si discosta in media dal suo valore atteso.

$$\text{Deviazione Standard}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Proprietà della Varianza

1. **Varianza di una somma lineare**:
   Se (X) e (Y) sono variabili casuali, e (a) e (b) sono costanti, allora:

$$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X) + b^2 \cdot \mathrm{Var}(Y)$$

se (X) e (Y) sono indipendenti.

2. **Varianza e Deviazione Standard di una Costante**:
   La varianza di una costante (c) è zero:

   $$\text{Var}(c) = 0$$

   La deviazione standard di una costante è anch'essa zero:

   $$\text{Deviazione Standard}(c) = 0$$