Un sistema dinamico interessante

Apprendimento ed evoluzione in sistemi artificiali

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

- **Corso di laurea in Informatica**
  (anno accademico 2024/2025)

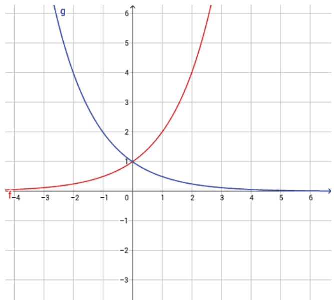
UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA
Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

  - Insegnamento: Apprendimento ed evoluzione in sistemi artificiali
  - Docente: Marco Villani

Un sistema dinamico interessante

- Consideriamo un modello fenomenologico, descrive ad esempio la crescita di una popolazione
- se non c'è immigrazione né è modellata l'interazione con l'ambiente
- numero di individui all'istante t+1 = numero di individui all'istante t + nascite – morti

$$\mathbf{x_{t+1} = x_t + bx_t - dx_t = (1+ b - d)\, x_t}$$



- è un sistema lineare, con un solo attrattore
  - crescita (se b>d) o declino (se b<d) esponenziale
  - x = costante se b=d

Interazione

- La crescita illimitata è irrealistica
  - il modello lineare può essere valido per un periodo di tempo limitato
- Ipotizziamo ora che gli individui competano per le risorse
- Il termine negativo (morte) cresce in maniera proporzionale agli incontri fra individui, quindi compare un termine proporzionale a $-x_t^2$

$$x_{t+1} = (1+b-d)x_t$$

$$x_{t+1} = (1+b-d'x_t)x_t = (1+b)x_t - d'x_t^2$$

$$x_{t+1} = Bx_t - Ax_t^2 = Bx_t\left(1-\frac{A}{B}x_t\right)$$

- il modello più semplice di questo tipo è

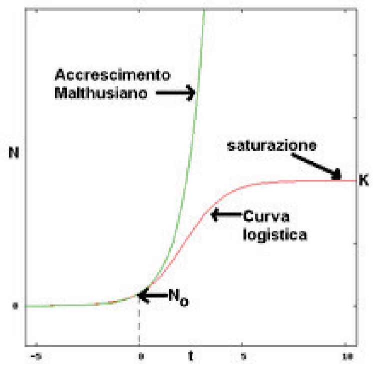
$$\mathbf{x_{t+1} = Ax_t(1-x_t)}$$

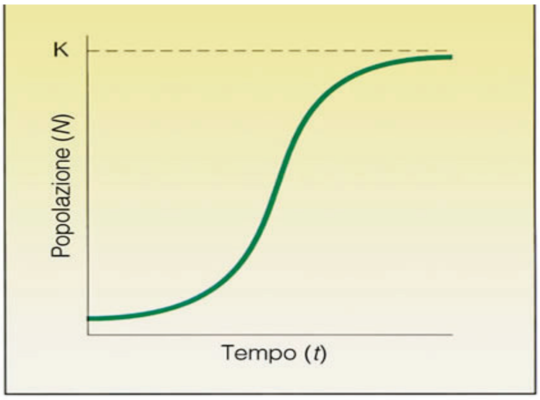
Mappa logistica

- Consideriamo il "modello di Verhulst" in versione discreta

$$x_{t+1} = Ax_t(1-x_t)$$

- Modello fenomenologico, descrive ad esempio la crescita limitata di una popolazione





Mappa logistica

- Consideriamo il "modello di Verhulst" in versione discreta

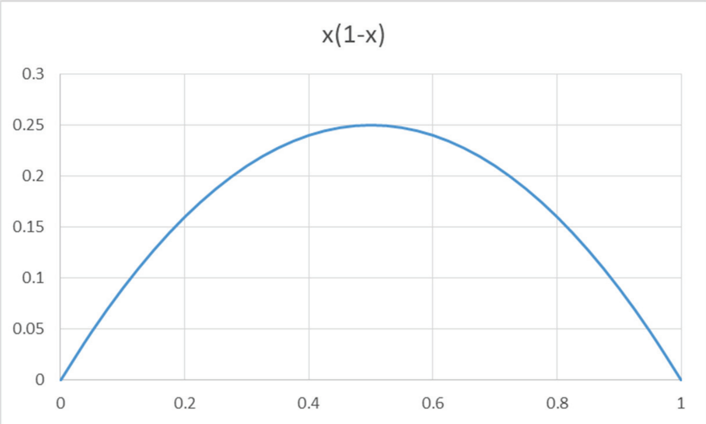
$$x_{t+1} = Ax_t(1-x_t)$$

- Modello fenomenologico, descrive ad esempio la crescita limitata di una popolazione

- Richiediamo che sia sempre 0<=x<=1
  - 0<=x è ovvia; se fosse x>1, all'istante successivo cambierebbe di segno
  - quindi x rappresenta una "frazione della capacità portante", non un numero di esemplari
- La prima condizione implica A>=0

Mappa logistica

- La funzione x(1-x) è una parabola con la concavità verso il basso
- Che si annulla in 0 e 1
- E che ha un massimo in x=½ (dove vale ¼)

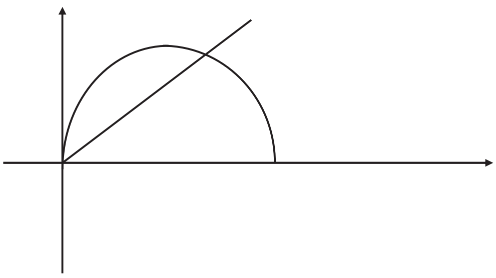


- Quindi per imporre che x_{t+1}<=1 è necessario che sia A<=4

Mappa logistica

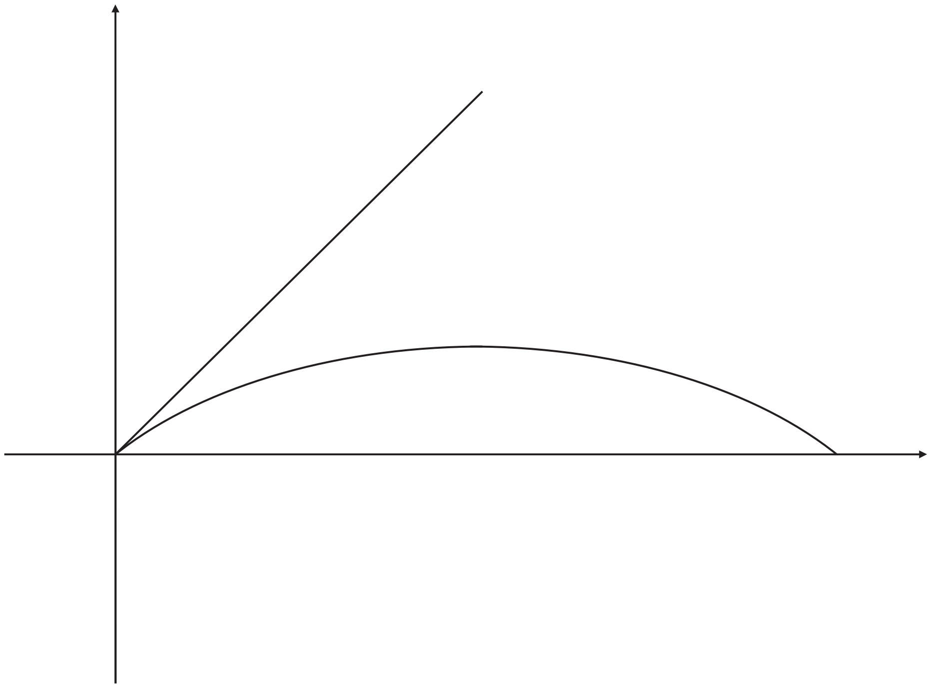
- Come troviamo i punti fissi?
- $x_{t+1}=x_t$ => $Ax_t(1-x_t) = x_t$

  x = Ax(1-x)



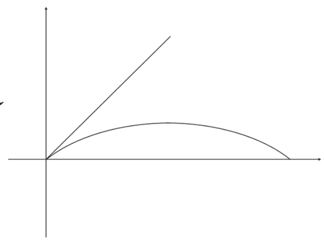
- I punti fissi sono intersezioni della retta y=x con la parabola y=Ax(1-x)
- esaminiamo il comportamento dell'equazione al variare del parametro A

0<=A<=1



0<=A<=1

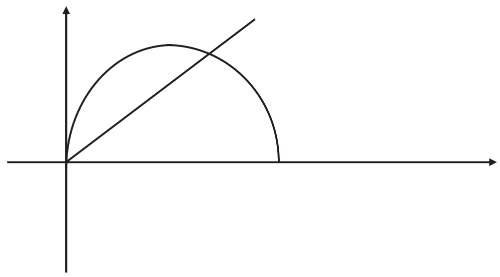
- La derivata della curva $y=Ax-Ax^2$ è $A-2Ax$
- Il suo valore nell'origine è A
- Se $A<=1$, l'unica intersezione fra la retta e la parabola è l'origine
  - x si estingue
  - Anche nel caso lineare $A<1$ darebbe estinzione, le morti superano le nascite
- Si può vedere che è anche la soluzione attrattiva



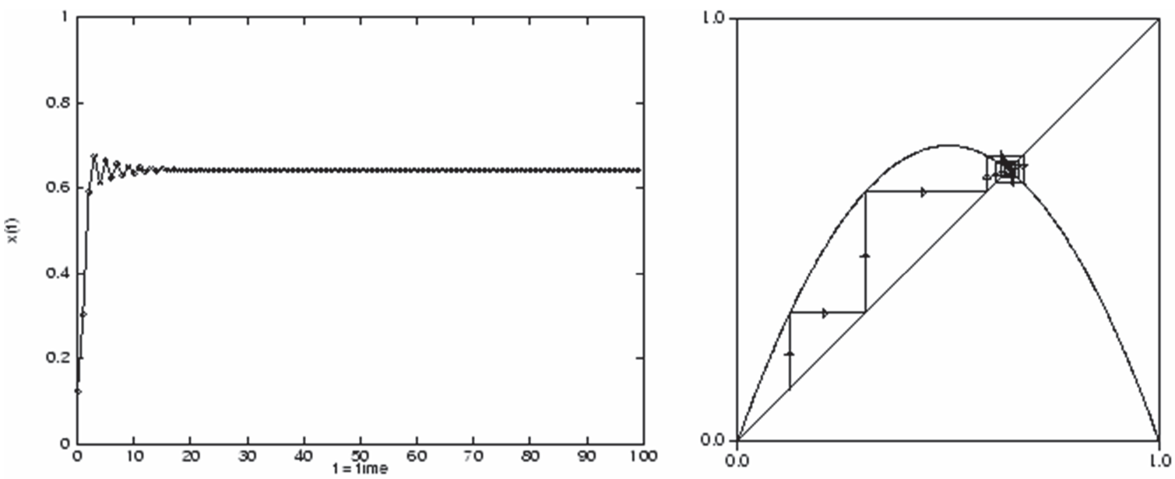
A>1: due punti fissi

- Se invece A>1
- punto fisso: $x=Ax-Ax^2$

  $x(A-1-Ax)=0$
- Esiste anche la soluzione $x^*=(A-1)/A$
- Questa è la soluzione attrattiva!
- si noti che l'equazione non lineare di Verhulst ammette più punti fissi, una possibilità che manca ai sistemi lineari
  - non è ancora il caso più generale, perché un solo attrattore è stabile



Il metodo della scala

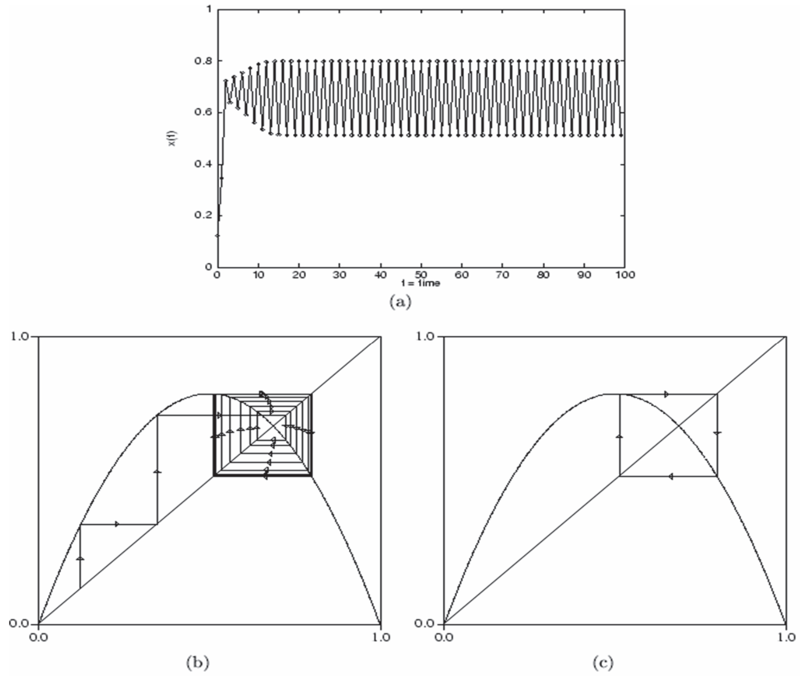


(a) (b)

Al crescere di A

- Al crescere di A la parabola diventa sempre più ripida
- Si può dimostrare che un punto fisso x* di una mappa $x_{t+1}=f(x(t))$ è stabile se in quel punto $|df/dx|<1$
  - La derivata di $Ax(1-x)=Ax-Ax^2$ vale $A-2Ax$
  - Nel punto $(A-1)/A$ essa vale $-A+2$
  - Il cui modulo supera 1 se $A>3$
- Al di là di questo valore il punto fisso non è più stabile!

A>3



A>3

- quando A supera 3, troviamo un ciclo di periodo 2; il sistema oscilla continuamente fra due stati
- Si tratta di un vero ciclo limite, a cui il sistema tende asintoticamente a tempi lunghi partendo da diverse condizioni iniziali
  - In questo caso, da tutte le condizioni iniziali diverse da 0
- È diverso dai cicli dei sistemi lineari che restano invariati e dipendono dalle condizioni iniziali
  - p.es. pendolo senza attrito

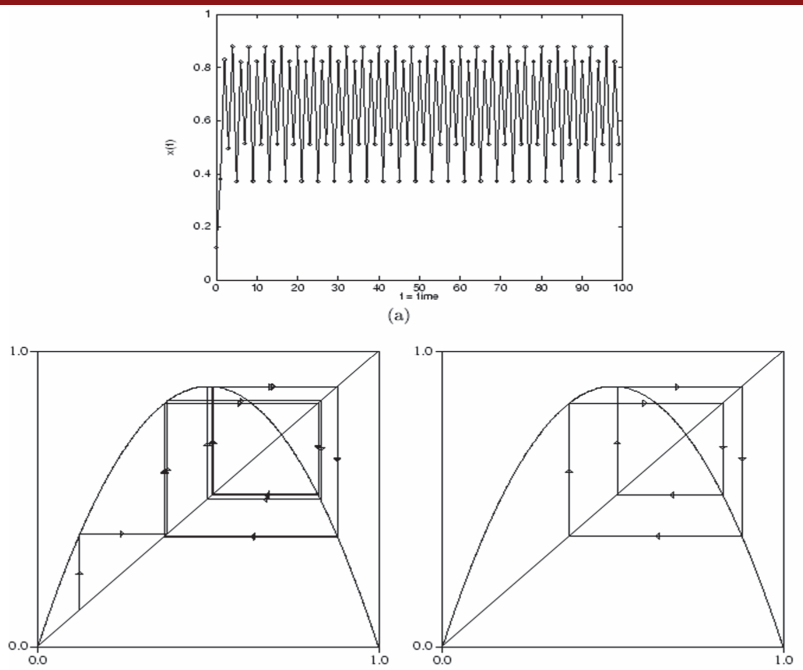
A>3

- Ciclo di periodo due, caratterizzato da $x_{t+2}=x_t$
- $x(t+1)=f(x(t))$
- $x(t+2)=f(x(t+1))=f(f(x(t))=f^2(x(t))$
- Se la mappa f(x) ha un ciclo di periodo 2, La mappa f^2 ha un punto fisso!
  - Anzi due, corrispondenti ai due valori fra i quali oscilla f

A cresce ancora

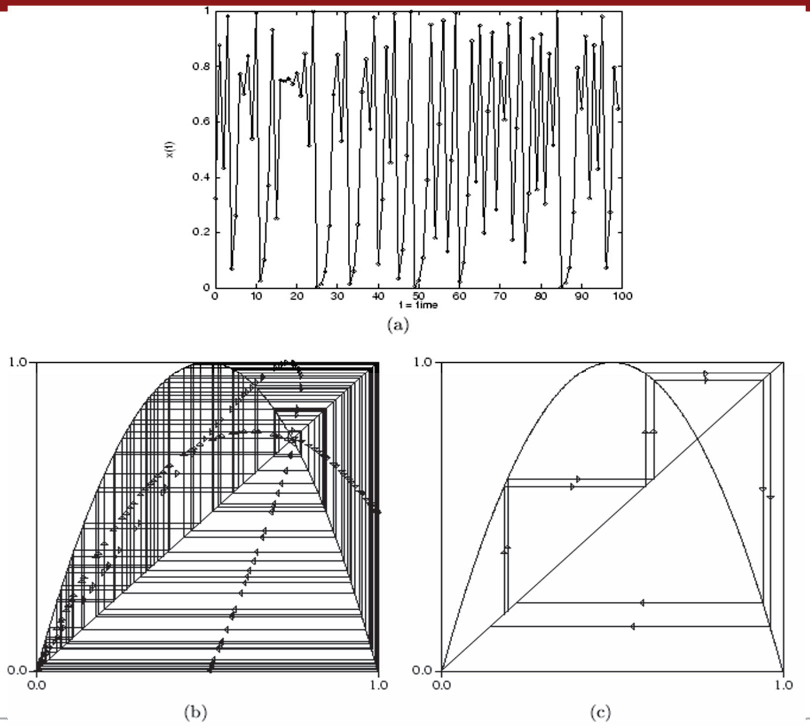
- La condizione di stabilità del punto fisso di $g=f^2$ è sempre $|dg/dx|<1$
- Aumentando A, anche questa diventa instabile
- Si instaura allora un ciclo limite di periodo 4
  - Punto fisso di f^4
- Al crescere di A, anche questo diventa instabile, dando origine a un ciclo limite di periodo 8
- Poi 16
- …

A cresce ancora

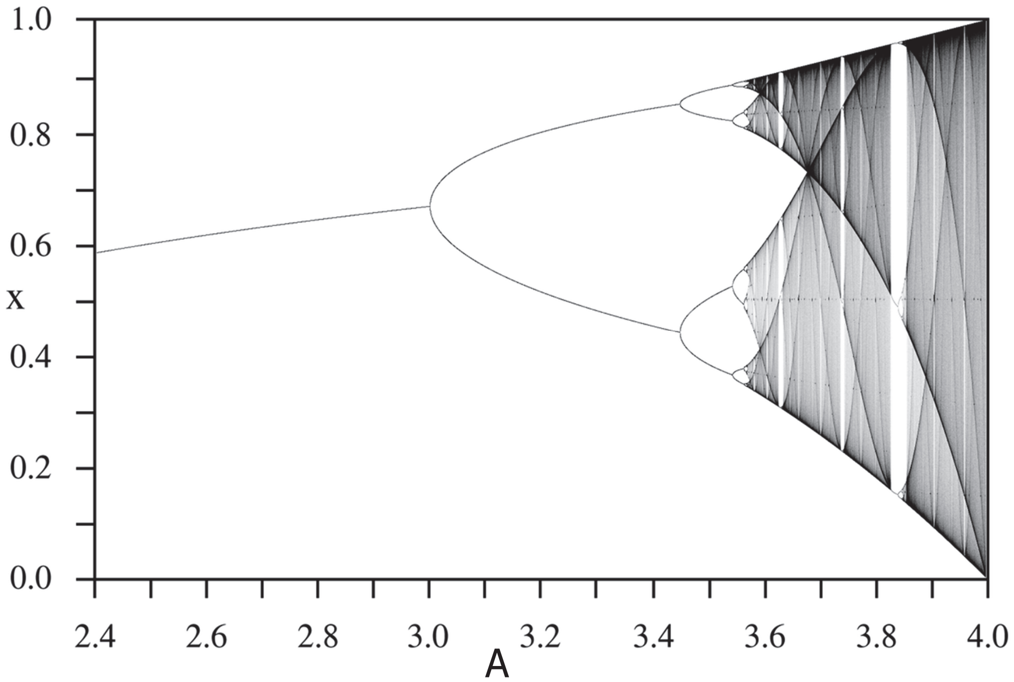


(a)
(b)
(c)

A cresce ancora



Cascata di Feigenbaum



Cascata di Feigenbaum

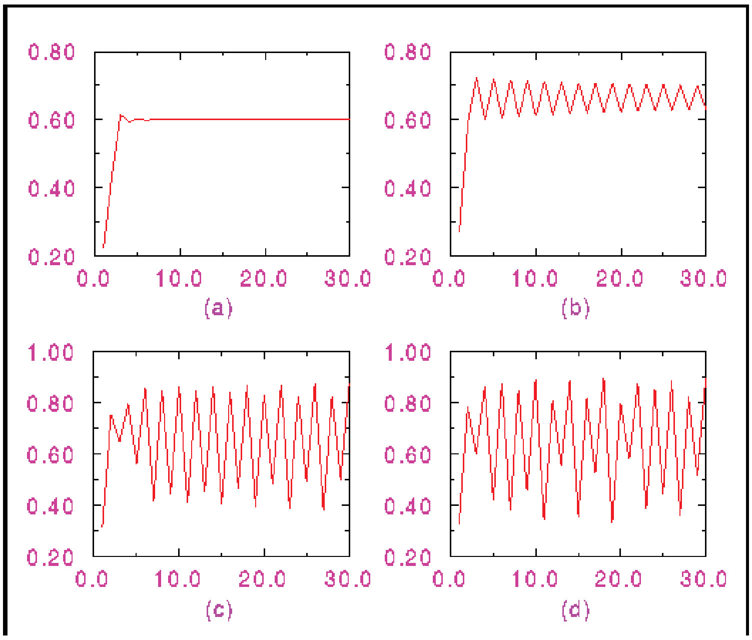


Figure 2: Population (x_n) vs. time (n) for the logistic map. The top-left picture is for a < 3.0, while the top-right and bottom-left pictures are in the period doubling and quadrupling regions, respectively. The bottom-right picture is for an a value which gives chaotic behavior.

Cascata di Feigenbaum

- Si osserva che i valori di A per i quali avviene il raddoppiamento del periodo si infittiscono sempre più
  - «Cascata di Feigenbaum»
- Esiste un punto di accumulazione A_∞=3,5699…
- I punti di raddoppiamento si addensano secondo la regola
- $(A_n-A_{n-1})/(A_{n+1}-A_n) = 4{,}669\ldots$
- al di la' del valore A_∞ si osserva un comportamento caotico

Caos

- Nei sistemi discreti dissipativi si possono osservare attrattori caotici
  - Oltre a punti fissi e cicli limite
- Anche nel caso in cui ci sia una sola variabile
- Comportamento nel tempo simile a quello dei sistemi casuali
  - Relazione coi generatori di numeri random!
- Effetto farfalla: condizioni iniziali molto vicine possono dare origine a traiettorie molto diverse
  - Lorenz

La mappa logistica e il mondo

- La mappa logistica evidenzia una "via verso il caos" attraverso successivi raddoppiamenti del periodo
- che non è tipica solo del modello considerato, ma si presenta in molti casi diversi
  - esempio: altre mappe discrete
  - esempio: un fluido che approssima la turbolenza in determinate condizioni sperimentali
- si tratta di un comportamento comune a molti sistemi diversi, indipendentemente dai dettagli ("universalità")

Instabilità fluidodinamica

- Esperimento di Libchaber
- formazione di roll in condizioni controllate
- al crescere del flusso si trovano nuove frequenze
- che proliferano secondo la cascata di Feigenbaum! … complessità…