

CORSO DI CALCOLO NUMERICO

ESERCITAZIONE DEL 10/03/2023

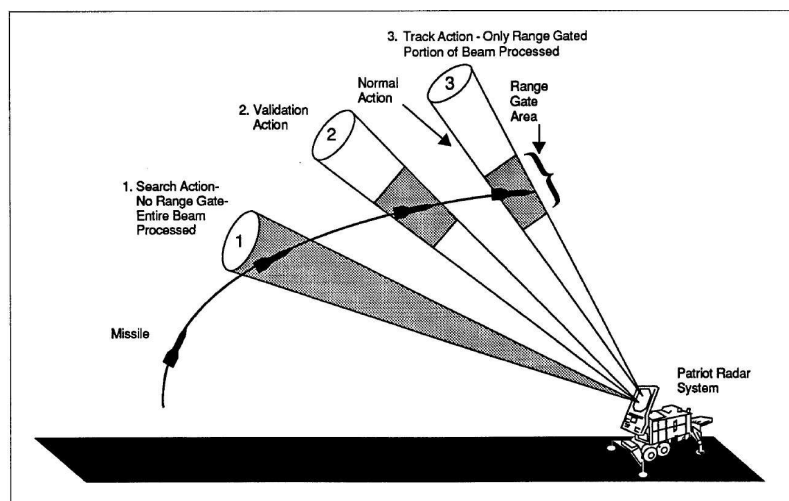
MIM-104 Patriot: errori numerici nella difesa aerea

Il sistema MIM-104 Patriot è un sistema missilistico terra-aria mobile per la difesa aerea. Fu progettato nel 1969 e prodotto per la prima volta nel 1976 dall'azienda statunitense Raytheon. In principio, era stato progettato per la difesa contro gli aerei e i missili cruise; in seguito, venne aggiornato per far fronte alla minaccia dei missili balistici tattici.

Ciascuna batteria Patriot consta di sei lanciamissili, un'unità radar, una stazione di controllo ed un gruppo di comunicazione di supporto. Tuttavia, il fulcro del sistema Patriot risiede nel suo computer centrale per il controllo delle armi, il quale esegue le funzioni principali per il monitoraggio e l'intercettazione dei missili nemici. Tale computer è basato su un'architettura degli anni '70, con una capacità relativamente limitata di eseguire calcoli ad alta precisione.



Il computer centrale fa uso del radar in dotazione per identificare, intercettare ed eventualmente abbattere i missili della fazione contrapposta. In primo luogo, il radar invia impulsi elettronici per sondare lo spazio aereo soprastante, alla ricerca di obiettivi sensibili. Se viene identificato un oggetto che ha le caratteristiche del missile nemico, il computer calcola un'area nella quale l'eventuale missile dovrebbe trovarsi nella rilevazione radar successiva, sulla base della sua velocità (nota a priori) e dell'istante di tempo in cui è avvenuta l'individuazione dell'oggetto. Infine, il radar imposta l'area calcolata dal computer ed invia un impulso in quella direzione: se l'oggetto si trova nell'area, ciò conferma che si tratta di un missile nemico; in tal caso, il sistema Patriot dispone il lancio di un missile contro l'oggetto nemico.



1. Un errore nella memorizzazione del tempo

Il computer centrale tiene in memoria un numero intero T rappresentante il tempo, in decimi di secondo, trascorso dalla messa in funzione della batteria. Tuttavia, per poter calcolare la posizione successiva dell'oggetto aereo individuato, il computer necessita del tempo espresso in secondi. Per ottenere tale valore, si moltiplica il tempo in decimi di secondo T per $\frac{1}{10}$, ossia viene utilizzato il seguente algoritmo:

$$\begin{aligned}\alpha &\leftarrow 1/10 \\ t &\leftarrow \alpha \cdot T\end{aligned}$$

- Il valore esatto $\alpha = \frac{1}{10}$ viene approssimato con il numero α^* ottenuto troncando la sua rappresentazione binaria alla 23^a cifra della *parte frazionaria*.

Quesito 1: calcolare il valore di α^* , procedendo nel modo seguente:

1. Mediante l'algoritmo delle moltiplicazioni successive, ottenere la rappresentazione binaria del valore reale $(0.1)_{10}$ *non normalizzata*;

$$(0.1)_{10} = (0.00011001100110011001100110011...)_{2} \cdot 2^0$$

2. Troncare la parte frazionaria del numero ottenuto alla 23^a cifra della *parte frazionaria*;

$$(\alpha^*)_{2} = (0.00011001100110011001100)_{2} \cdot 2^0 = 0.099999904632568$$

Quesito 2: calcolare l'errore assoluto commesso approssimando $1/10$ con α^* .

$$\begin{aligned}E(\alpha^*) = \alpha - \alpha^* &= (0.00000000000000000000000110011...)_{2} \cdot 2^0 \\ &= (0.00011001100...)_{2} 2^{-20} \\ &= 0.1 \cdot 2^{-20} \\ &\simeq 9.54 \cdot 10^{-8}\end{aligned}$$

(Suggerimento: eseguire la differenza $\alpha - \alpha^*$ in forma binaria, infine convertire il numero ottenuto in base 10.)

Come conseguenza della rappresentazione troncata di $\frac{1}{10}$, nella conversione da decimi di secondo a secondi viene introdotto un errore.

- Assumendo per semplicità che non si verifichino ulteriori errori nel calcolo delle operazioni aritmetiche, il computer calcola il tempo t^* in secondi con la formula

$$t^* = \alpha^* T,$$

Quesito 3: Scrivere la formula dell'errore assoluto $E(t) = t - t^*$, in funzione di $E(\alpha)$ e del numero dei decimi di secondo T .

$$E(t) = \alpha T - \alpha^* T = E(\alpha) T$$

2. Propagazione dell'errore

D'ora in poi, assumeremo che l'approssimazione α^* del valore $\frac{1}{10}$ sia ottenuta come descritto sopra.

Supponiamo che un oggetto aereo con caratteristiche corrispondenti ad un missile nemico venga rilevato al tempo T del clock del computer, che, espresso in secondi, indichiamo con $t = T/10$. Il sistema deve allora calcolare la posizione stimata dell'oggetto all'istante t_1 , in cui è programmato l'invio dell'impulso radar successivo.

Si conosce inoltre la velocità v dei missili nemici (nota e costante) e, per semplificare, assumiamo che il moto dell'oggetto avvenga lungo una direzione fissata.

La distanza Δs percorsa dall'oggetto nell'intervallo $[t, t_1]$ viene quindi calcolata con la formula

$$\Delta s = v \cdot (t_1 - t). \quad (1)$$

In base alla distanza percorsa e alla posizione s_0 al tempo t , anche essa nota, viene poi determinata la posizione all'istante t_1 ,

$$s_1 = s_0 + \Delta s$$

verso la quale viene indirizzato il segnale radar successivo.

- All'inizio degli anni '90, i progettisti del sistema, consapevoli della perdita di precisione dovuta alla rappresentazione del tempo in secondi, avevano aggiornato alcune parti del software, ma non tutte. In conseguenza di ciò, la rappresentazione dei valori t e t_1 utilizzati per stimare la posizione dei missili nemici, avveniva con precisione differente. Con qualche semplificazione, t_1 corrispondeva al tempo in secondi "esatto" trascorso dalla messa in funzione della batteria, mentre t veniva ancora calcolato con la procedura descritta nella sezione 1.

Quindi, la distanza percorsa e la posizione stimata corrispondente che venivano effettivamente calcolate erano date da

$$\Delta s^* = v \cdot (t_1 - t^*) \quad \text{e} \quad s_1^* = s_0 + \Delta s^*, \quad (2)$$

dove $t^* = \alpha^* \cdot T$. Rispondere ai seguenti quesiti.

1. Scrivere la formula dell'errore assoluto $E(\Delta s) = \Delta s - \Delta s^*$ in funzione di $E(t)$ e della velocità v ;

$$E(\Delta s) = v(t_1 - t) - v(t_1 - t^*) = v(t^* - t) = -vE(t) = -vTE(\alpha)$$

2. Scrivere la formula dell'errore assoluto $E(s_1) = s_1 - s_1^*$, in funzione di $E(t)$ e della velocità v

$$E(s_1) = s_0 + \Delta s - s_0 - \Delta s^* = E(\Delta s) = -vE(t)$$

3. Compilare la seguente tabella dove, per diversi tempi di funzionamento della batteria espressi in ore (1^a colonna), viene chiesto di convertire il tempo in secondi (2^a colonna), riportare il tempo calcolato dal computer in secondi (3^a colonna), calcolare l'errore assoluto sul tempo (4^a colonna) e l'errore assoluto sulla posizione (5^a colonna), supponendo che la velocità del missile nemico sia pari a $v = 1676 \text{ m/s}$.

t (ore)	T (secondi/10)	t^* (secondi)	$ E(t) $ (secondi)	$ E(s_1) $ (metri)
1	36000	3599.9966	0.0034	5.7541
8	288000	28799.9725	0.0275	46.0327
20	720000	71999.9313	0.0687	115.0818
100	3600000	359999.6567	0.3433	575.4089

3. Tragiche conseguenze. Il 25 Febbraio 1991, durante la prima Guerra del Golfo, una batteria contraerea Patriot situata a Dharam, in Arabia Saudita, non fu in grado di intercettare e abbattere un missile SCUD lanciato dagli iracheni. Il missile non intercettato colpì una caserma statunitense, uccidendo 28 soldati e ferendone più di 100.

L'inchiesta successiva appurò che la mancata intercettazione fu dovuta all'aritmetica finita del computer

centrale. Accadde che al momento della prima intercettazione, la batteria era in funzione da oltre 100 ore, pertanto l'area verso cui fu indirizzato l'impulso radar successivo era stata calcolata con un errore di diverse centinaia di metri (vedi tabella sopra) rispetto alla posizione reale dello SCUD. Anche se la ricerca del missile veniva effettuata in un'area di una certa ampiezza attorno alla posizione stimata, l'errore nella stima era così grande da essere superiore a tale margine di tolleranza. Non furono perciò attivate le procedure di contraerea e il missile non venne abbattuto. Paradossalmente, se il software non fosse stato (parzialmente) aggiornato, mantenendo invece la conversione dei tempi in secondi con lo stesso errore in tutte le procedure, gli errori si sarebbero semplificati e la stima della posizione sarebbe stata più accurata.

4. Codice Matlab per la costruzione della tabella.

```
clear

T_ore      = [1,8,20,100];
alphastar  = 2^-4+2^-5+2^-8+2^-9+2^-12+2^-13+2^-16+2^-17+2^-20+2^-21;
Delta_alpha = 0.1*2^(-20);
v          = 1676;

n = length(T_ore);
fprintf('\n %7s  %11s %11s %11s','T','t_star','Et','Es');
fprintf('\n-----')

for i = 1:n
    T      = T_ore(i)*3600*10;%tempo in decimi di secondo
    t_star = alphastar*T;
    Et     = Delta_alpha*T;
    Es     = v*Et;
    fprintf('\n %7i  %11.4f %11.4f %11.4f',T,t_star,Et,Es);
end
fprintf('\n\n')
```