

关于灰色系统建模公式的改进

中国纺织大学机械工程系(200051) 杨向萍 上海立格科技发展有限公司 于星光

【摘要】本文从理论角度对灰色系统建模公式进行了讨论,证明灰色系统建模公式仅仅是一个近似运算公式,并在此基础上,推导出灰色系统 GM(1,1)模型的改进模型 GM'(1,1)。通过运算结果比较,证明改进模型比原系统模型具有更高的预测精度。

关键词 灰色系统 GM(1,1)模型 改进 GM'(1,1)模型

一、概述

灰色系统理论自 1982 年由我国学者邓聚龙同志提出出来后,在经济、环境保护、气象、军事等许多领域已得到广泛的应用。灰色系统建模公式是灰色系统理论的基础,其主要特点:

1. 系统性:它不仅考虑了已知的信息和未确定的信息,而且揭示了这些信息相互制约,相互影响的整体系统特征;
2. 联系性:通过对许多复杂因素的关联分析,揭示系统内涵的联系性本质;
3. 动态性:把系统看作为一个随时间变化而变化的函数,描述了系统变化的运行机制及规律。
4. 建模时,不需要大量的时间序列数据,而且预测精度较高。

多年来,我们采用灰色系统 GM(1,1)模型,对设备运行状态参数进行预测,收到满意的效果。但在实践中也发现,灰色系统建模公式仅仅是一个近似运算公式,存在偏差,对增长指数愈高的数据建模其偏差也愈大。为此,对灰色系统建模公式进行了分析研究,发现了问题所在,在此基础上,推导出一个改进模型。改进模型可以完全克服对“理想数据”的拟合偏差,对实际数据的拟合精度和预测精度也比原系统模型的精度高。

二、GM(1,1)模型简介

设有一时间序列: $X^0(i)$ $i=1,2,\dots,M$ (其中 M 为时间序列的样本长度)。 $X^1(i)$ 为 $X^0(i)$ 的一次累加生成序列 (AGO), $X^0(i)$ 为由 GM(1,1)模型得到的 $X^0(i)$ 序列的拟合值,则由灰色系统理论的建模原理, $X^0(i)$ 应满足如下等式:

提花控制,实现了大幅面全提花。整个系统分为提花控制系统和花型设计系统两部分,花型设计系统在 PC 计算机上开发,提花控制系统采用工业计算机控制,这种结构充分发挥了工业控制计算机的高可靠性特点和 PC 机的功能强的特点。系统运行可靠,实时性好,适用于各种提花工艺参数,受到用户和鉴定委员会的高度评价。

$$\begin{bmatrix} X^0(2) \\ X^0(3) \\ \vdots \\ X^0(N) \end{bmatrix} = -1/2 \begin{bmatrix} X^1(2)+X^1(1) & -2 \\ X^1(3)+X^1(2) & -2 \\ \vdots & \vdots \\ X^1(N)+X^1(N-1) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

由文献[1]中灰色建模定理相对应可知,式(1)相应的可写成:

$$Y_N = (X^0(2), X^0(3), \dots, X^0(N))^T \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = -1/2 \begin{bmatrix} X^1(2)+X^1(1) & -2 \\ X^1(3)+X^1(2) & -2 \\ \vdots & \vdots \\ X^1(N)+X^1(N-1) & -2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{a} = (a, u)^T \quad (5)$$

则用最小二乘法解得:

$$\hat{a} = (a, u)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \quad (6)$$

\hat{a} 中的元素,即下列微分方程的系数

$$dx^1(t)/dt + ax^1(t) = u \quad (7)$$

此即 GM(1,1)模型。它的解为:

$$\hat{X}^1(t+1) = [X^0(1) - u/a]e^{-at} + u/a \quad (8)$$

式(8)即灰色预测公式。对 $\hat{X}^1(t+1)$ 作累减还原处理(I-AGO),可得原始数据的预测公式:

$$\hat{X}^0(t+1) = (1-e^a)[X^0(1) - u/a]e^{-at} \quad (9)$$

三、对 GM(1,1)模型的讨论

由式(9)可知,GM(1,1)模型的解是形如 ce^{-at} 的指数函数(其中 c, e 为常数)。所以,形如 ce^{-at} 的数据应该能被 GM(1,1)模型完美拟合。

但是实际情况并不如此,如表 1 示,GM(1,1)模型对理想数据 e^t 的拟合误差很大。什么原因?

文献[1]P23 中,有对灰色系统建模公式的证明过程。从其推导过程不难看出,存在以下两个问题:

参考文献

- 1 电机工程手册,第一卷,机械工业出版社,1982
- 2 王宗培.永磁直流微电机,东南大学出版社,1992
- 3 陈隆昌等.控制电机,西北电讯工程学院出版社,1984
- 4 微特电机.上海科学技术出版社,1980

1. 微分方程增量化是一步近似推导

微分 $dx^1(t)$ 与增量 $\Delta x^1(t)$ 只是近似相等, 只有当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 两者才能真正相等, 但现在 $\Delta t=1$, 所以, 微分方程增量化过程会带来误差。

2. 在推导过程中, 存在对 AGO 处理后的数据 $X^1(k)$ 进行再加工的过程, 即令

$$X^1(k) = \bar{X}^1(k) = 1/2[X^1(k) + X^1(k-1)] \quad (10)$$

这是一步数字滤波过程, 以进一步抑制随机干扰, 但它是一个平滑公式, 用它来解决带有明显趋势数据的滤波问题, 存在滞后误差。

以上提到的两个问题, 在 GM(n,n) 高阶模型中同样存在, 而且阶数越高, 偏差越大。

针对以上问题, 作者推导出一个改进的 GM(1,1) 建模公式, 以 $GM'(1,1)$ 表示, 它的建模过程和 GM(1,1) 的建模过程基本相同, 只是把式(4)改为:

$$B = \begin{bmatrix} R \cdot X^1(2) + (1-R) \cdot X^1(1) & -1 \\ R \cdot X^1(3) + (1-R) \cdot X^1(2) & -1 \\ \vdots & \vdots \\ R \cdot X^1(N) + (1-R) \cdot X^1(N-1) & -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 $R = [(1-a)e^a - 1]/a(1-e^a)$

a —— $GM'(1,1)$ 拟合模型的指数

系数 R 即起了对微分方程增量化误差的补偿作用, 又起了对 $X^1(k)$ 的滤波作用。

顺便说明一点, 求得如式(8)所示的 GM(1,1) 模型后, 应该以一次累减处理(IAGO)求其对原始数据的拟合值, 即

$$\hat{X}^0(t) = \hat{X}^1(t) - \hat{X}^1(t-1) = (1-e^a)e^a[X^0(1) - u/a]e^{-at} \quad (12)$$

文献[4]中, 是以公式(8)求导而获得的算式:

$$\hat{X}^0(t) = \hat{X}^{1'}(1) = -a[X^0(1) - u/a]e^{-a(t-1)} \quad (13)$$

其对原始数据的拟合值, 会带入“增量微分”误差。这个问题也可用补偿系数方法解决, 即

$$\hat{X}^0(t) = A\hat{X}^{1'}(t) \quad (14)$$

式中 A —— 补偿系数, $A = (1-e^a)/a$

四、GM'(1,1)改进模型的推导

已知 $GM'(1,1)$ 模型为:

$$dx^1(t)/dt + ax^1(t) = u \quad (15)$$

其解为:

$$X^1(t) = Ce^{-at} + u/a \quad (16)$$

式中 C, a, u —— 均为常数

则

$$\Delta X^1(t) = \hat{X}^{1'}(t) - \hat{X}^{1'}(t-1) = C(1-e^a)e^{-at} \quad (17)$$

由式(15), 令 $dt=1$, 得:

$$dx^1(t) = -ax^1(t) + u \quad (18)$$

令 $dx^1(t) = \Delta x^1(t)$ (微分方程增量化)

令 $X^1(t) = R \cdot X^1(t) + (1-R)X^1(t-1)$ (滤波公式)

则式(18)为:

$$\Delta x^1(t) = -a[RX^1(t) + (1-R)X^1(t-1)] + u \quad (19)$$

则有:

$$C(1-e^a)e^{-at} =$$

$$-a\{R[Ce^{-at} + u/a] + (1-R)[Ce^{-a(t-1)} + u/a]\} + u$$

$$= -a(1-e^a)RCe^{-at} - aRCe^{-at}$$

得:

$$R = (e^a - 1 - ae^a)/a(1-e^a)$$

得证。

五、改进 GM'(1,1)模型与 GM(1,1)模型比较

例如: 分别用 GM(1,1)模型及改进 GM'(1,1)模型对 e^i 数据进行预测运算。运算结果如表 1 示。

表 1

模 型		一般 GM(1,1)模型	改进 GM'(1,1)模型
		$a = -0.9242$	$a = -1.00002$
模型参数		$u = 1.462$	$u = 1.58234$
		$(R = 0.418)$	
t	实际值		相对百分误差
拟 1	2.718		
2	7.389	6.536	11.15
3	20.086	16.471	18.00
4	54.598	41.505	23.98
合 5	148.41	104.59	29.53
平均相对误差		20.67	<0.001
预 6	403.43	263.56	34.67
测 7	1096.6	664.15	39.44
平均相对误差		37.05	<0.002

可见, 改进 GM'(1,1)模型, 对“理想数据”可以完美地拟合而毫无偏差。而原系统模型 GM(1,1)却存在明显的偏差。

参考文献

- 1 邓聚龙. 灰色系统社会·经济. 国防工业出版社, 1985. 2
- 2 段志善. 设备故障诊断方法的研究及其应用. “博士论文”, 1988. 8
- 3 赵国清等. 经济预测方法. 华中工学院出版社, 1988
- 4 吴雅等. 灰色预测和时序预测的探讨. 华中工学院学报, 1988, 16(3)