幂平均数若干性质之证明

●周小平
（电子科技大学　计算机科学与工程学院, 四川　成都　610000）

摘要 幂平均数作为算术平均数、几何平均数、调和平均数等的一般形式,它与各具体形式之间必存在一定的关系。在目前的一些教材中,这种逻辑关系的描述是不正确的。又由于这些教材对所作的描述并未给予证明,因此,错误被隐藏起来。本文重新描述这种逻辑关系,并给予数学证明。

关键词 幂平均数 ;Jenson 不等式; 单调性
中图分类号 :G423　文献标识码 :B　文章编号 :1005 - 5762 (2003) 05 - 0012 - 02

一、引言

目前,有的《统计学原理》教材介绍了有关“幂平均数”的内容。“幂平均数”作为一种统一的形式，用以概括统计上常用的各种数值平均数（如“算术平均数”,“几何平均数”,“调和平均数”等），并通过研究其数学性质，得出各种数值平均数之间某种较为一般的关系。但在笔者所见的教材中，如笔者正在使用的黄良文先生主编《统计学原理》（中国统计出版社 2000 年 6 月出版）及其所列部分参考书目,对“幂平均数”的讨论却有些令人疑惑,且又未对所下结论给出证明,或许成为教学的障碍。故有必要去除疑惑,给出详尽的证明,以期有利于教学。

二、教材中的疑惑与笔者的见解

以下就黄良文主编《统计学原理》教材中若干令人疑惑之处,提出笔者的见解。

1、教材所给“幂平均数”定义中的限定条件：“其中：…k 为任意整数”。笔者认为,就其一般数学形式而言,k 可为任意非零实数。

2、教材中的一段陈述：““幂平均数”还具有一个重要的数学性质：“幂平均数”是型参数 k 的单调不减函数。…作为该性质的一个简单推论,可得到各种常用数值平均数的一般数量关系…”。笔者如下详尽证明表明：“幂平均数”关于型参数 k 的单调不减性质，可先由 Jenson 不等式所表明的凸函数的一种重要性质推出“几何平均数不小于调和平均数”,再据之推出该性质。最后由该性质推出“各种数值平均数的一般数量关系”。

三、“幂平均数”的定义及其部分性质的证明

1. 幂平均数的定义

(1)简单幂平均：$M(k)=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^k/n\right]^{\frac{1}{k}}$

(2)加权幂平均：$M(k)=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^k f_i\Big/\sum_{i=1}^{n}f_i\right]^{\frac{1}{k}}$

其中,$x_i>0$,k 为任意非零实数。

2. 幂平均数的性质及证明

(1)当 $k\to0$ 时,$M(k)\to G$；

(2)$H\leqslant G$；

(3)$M(k)$是参数 k 的单调不减函数；

(4)$H\leqslant G\leqslant A\leqslant S$

其中，G 为几何平均数，H 为调和平均数，A

收稿日期: 2003 - 03 - 30
作者简介: 周小平(1966-), 男, 讲师, 研究方向: 数理统计

为算术平均数,S为平方平均数。且:

$$G=\lim_{k\Rightarrow 0}M(k),H=M(-1),A=M(+1),S=M(+2)。$$

(以下证明仅就“简单幂平均”进行,对“加权幂平均”可用完全相同的方法与步骤,而没有任何实质性的差别。)

(1)证明

由定义,有:

$$M(k)=e^{f(k)}\quad 其中:f(k)=\frac{1}{k}\ln\frac{\sum x_i^k}{n}$$

又:$f(k)\xrightarrow{k\to 0}\ln G$ (可由“洛必达法则”得之)

故:$M(k)\xrightarrow{k\Rightarrow 0}e^{\ln G}=G$

(2)证明

考虑函数:$f(\chi)=-\ln\chi(\chi\in(0,\infty))$。

对$\chi\in(0,\infty)$,有:

$$f''(\chi)=\frac{1}{\chi^2}>0$$

由Jenson不等式,对任意正整数n及$\forall x_i\in(0,\infty)(i=1,2,\cdots,n)$,有:$-\ln\frac{\sum x_i}{n}\leqslant-\frac{\sum\ln x_i}{n}$

即:$\frac{1}{n}(\prod x_i)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\sum\ln x_i}{n}$ ①

对①式两边取反对数,

得:$(\prod x_i)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\sum\ln x_i}{n}$ ②

令$y=\frac{1}{x_i}$,代入②,得:$G=(\prod y_i)^{\frac{1}{n}}\geqslant\frac{n}{\sum\frac{1}{y_i}}=H$

性质(2)即证。

(3)证明

若$M'(k)\geqslant 0$,则$M(k)$是参数k的单调不减函数。

由:$M'(k)=M(k)\cdot\frac{1}{k^2}(\frac{\sum x_i^k\ln x_i^k}{\sum x_i^k}-\ln\frac{\sum x_i^k}{n})$

对$\forall k\neq 0$,有$M(k)>0$。

故,若要证明$M'(k)\geqslant 0$,只须证明:

$$\frac{\sum x_i^k\ln x_i^k}{\sum x_i^k}-\ln\frac{\sum x_i^k}{n}\geqslant 0 \qquad ①$$

令$y_i=\chi_i^k$,则①即为:

$$\frac{\sum y_i\ln y_i}{\sum y_i}-\ln\frac{\sum y_i}{n}\geqslant 0 \qquad ②$$

由性质(2),则有:

$$\frac{\sum y_i\ln y_i}{\sum y_i}-\ln\frac{\sum y_i}{n}=\sum P_i\ln y_i'$$

$$=\ln(\prod(y_i')^{P_i})\geqslant\ln\frac{1}{\sum P_i/y_i'}=0$$

(其中:$P_i=\frac{y_i}{\sum y_i},y_i'=\frac{ny_i}{\sum y_i}$)

即②得证

故,性质(3)得证。

(4)本性质即性质(3)的直接推论。

参考文献:

[1]黄良文.统计学原理[M].北京:中国统计出版社,2000.

[2]吉林大学数学系.《数学分析》(中册).北京:人民教育出版社,1978.

Proving of Several Properties of the k'th Sample Moment About Zero

ZHOU Xiao-ping

(school of Computer Science and Engineering, UESTC, ChengDu, China)

Abstract: The k'th Sample Moment About Zero gives a general form for Mean, Geometric Mean, Harmonic Mean, and so forth. Thus, there are some logical relations existing between the properties of the general form and that of the various concrete forms. However, these logical relations are incorrectly narrated in some current textbooks. And further more, because they are not proved there yet, so the errors are hidden. This article narrates these relations once again, and gives mathematical proofs.

Key words: The k'th Sample Moment About Zero; Jenson inquality; monotonous property