Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа № 2
Вариант: 11

Студент гр. P3213 Поленов К.А.
Преподаватель

Санкт-Петербург
2025

Цель работы

Цель работы: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

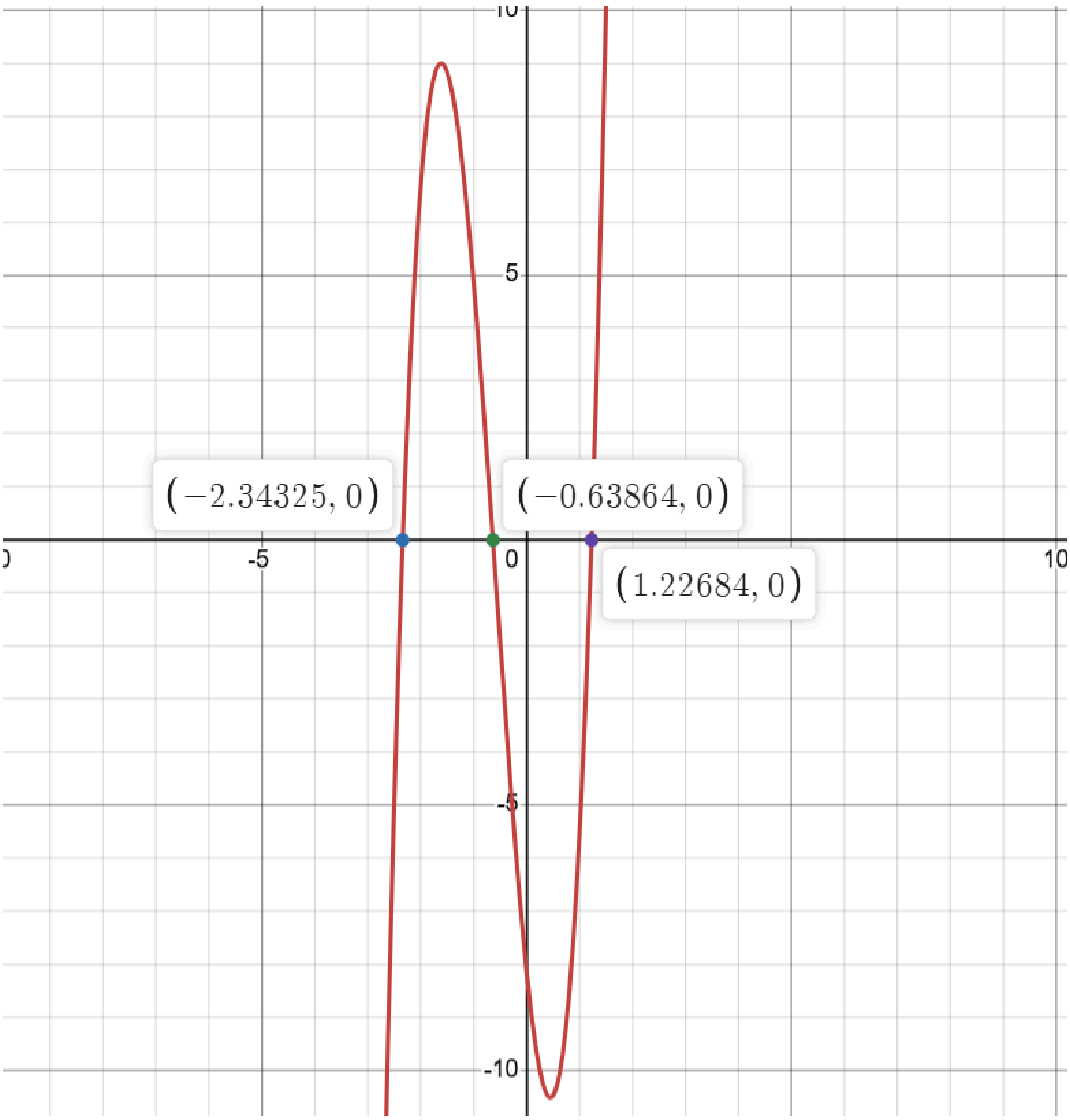
№ варианта определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.

Лабораторная работа состоит из двух частей: вычислительной и программной.

Вычислительная реализация задачи

1. Решение нелинейного уравнения

$$4.45x^3 + 7.81x^2 - 9.62x - 8.17$$



2. Отделение корней

$x_1 \approx - 2.4,\ x_2 \approx - 0.7,\ x_3 \approx 1.3$

Разбиваем Ox на интервалы:

$(-\infty;\ -2.4),\ (-2.4;\ -0.7),\ (-0.7;\ 1.3), (1.3;\ +\infty)$

Теперь вычислим значения функции в произвольных точках интервалов и заполним таблицу

x = -3; f(x) = -29.17

x = -2; f(x) = 6.71

x = 0; f(x) = -8.17

x = 2; f(x) = 39.43

$(-\infty;\ -2.4)$	$(-2.4;\ -0.7)$	$(-0.7;\ 1.3)$	$(1.3;\ +\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

Таким образом имеем три интервала изоляции корней

$(-3;\ -0.7),\ (-0.7;\ 1),\ (1;\ 1.3)$

Сами корни:

$x_1 \approx - 2.34,\ x_2 \approx - 0.64,\ x_3 \approx 1.23$

Точность вычисления корней $\varepsilon = 0.01$

3. **Крайний правый корень - Метод половинного деления**

Шаг	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	$\|a - b\|$
1	1	1.3	1.15	-5.53	2.3	-2.14	0.3
2	1.15	1.3	1.225	-2.14	2.3	-0.054	0.15
3	1.225	1.3	1.2625	-0.054	2.3	1.088	0.075
4	1.225	1.2625	1.24375	-0.054	1.088	0.51	0.0375
5	1.225	1.24375	1.234375	-0.054	0.51	0.225	0.019
6	1.225	1.234375	**1.2296875**	-0.054	0.225	0.0847	0.0094

4. **Крайний левый корень - Метод секущих**

$x_0 =- 2.5,\ x_1 =- 2$

Шаг	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\|x_{k+1} - x_k\|$
1	-2.5	-2	-2.29051	1.3637	0.217
2	-2	-2.29051	-2.365	-0.5891	0.148
3	-2.217	-2.365	-2.34	0.0691	0.025
4	-2.365	-2.34	**-2.343191**	0.00165	0.0032

5. **Центральный корень - Метод простой итерации**

Проверка условия сходимости на $(- 0.7;\ 0.2)$:

$$f(x) = 4.45x^3 + 7.81x^2 - 9.62x - 8.17 = 0$$

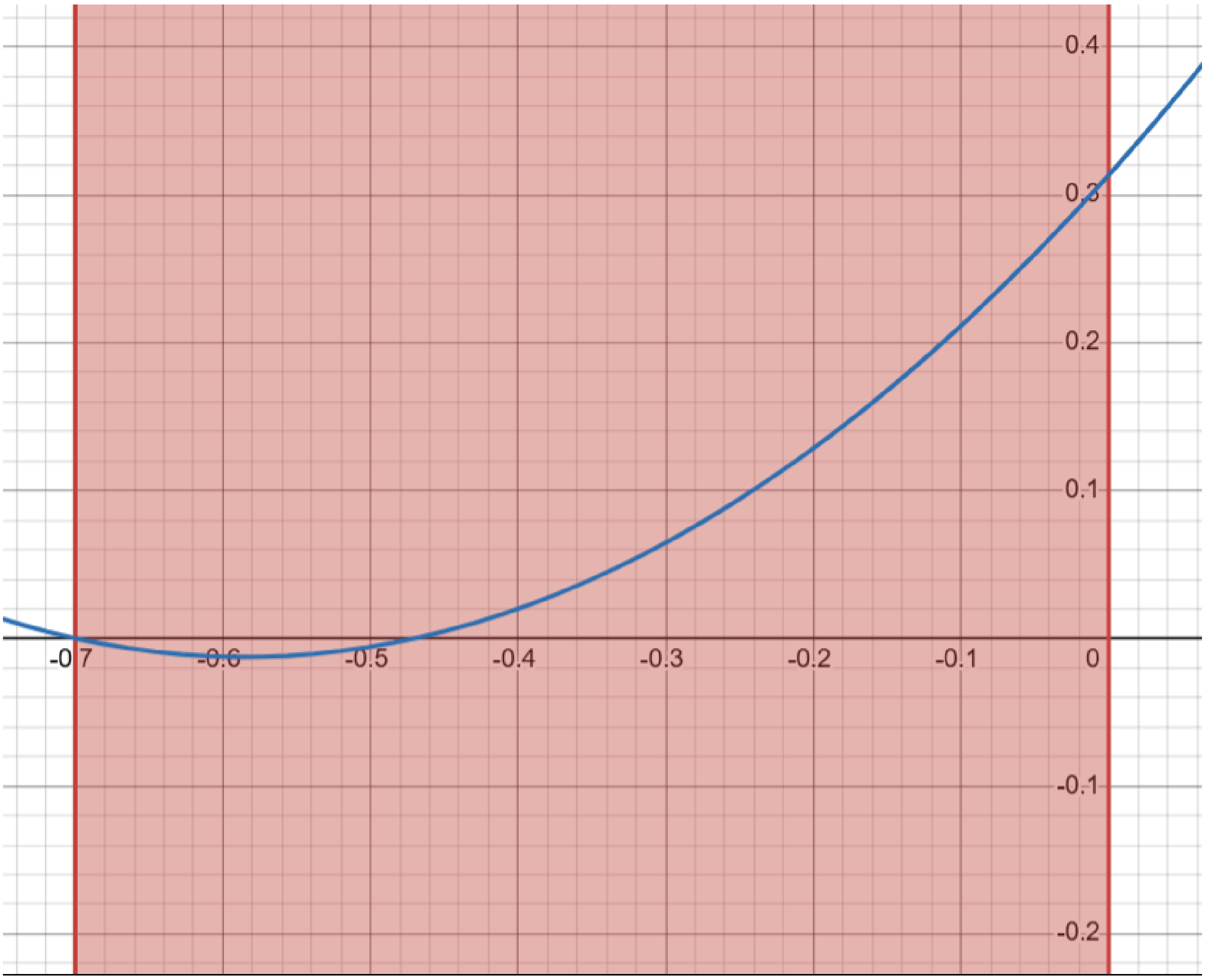
$$f'(x) = 13.35x^2 + 15.62x - 9.62$$

$$f'(- 0.7) =- 14.0125 < 0,\ f'(0.2) =- 5.962 < 0$$

$$max(|f'(- 0.7)|, |f'(0)|) = 14.0125 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{max(|f'(x)|)} = \frac{1}{14.0125}$$

$\phi(x) = x + \lambda f(x) = x + \frac{4.45x^3+7.81x^2-9.62x-8.17}{14.0125}$

$\phi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 + \frac{13.35x^2+15.62x-9.62}{14.0125}$



$\phi(x)$ непрерывна и дифференцируема на $(-0.7;\ 0.2)$

$\phi'(-0.7) = 0$

$\phi'(0.2) = 0.575 \Rightarrow q = 0.575$

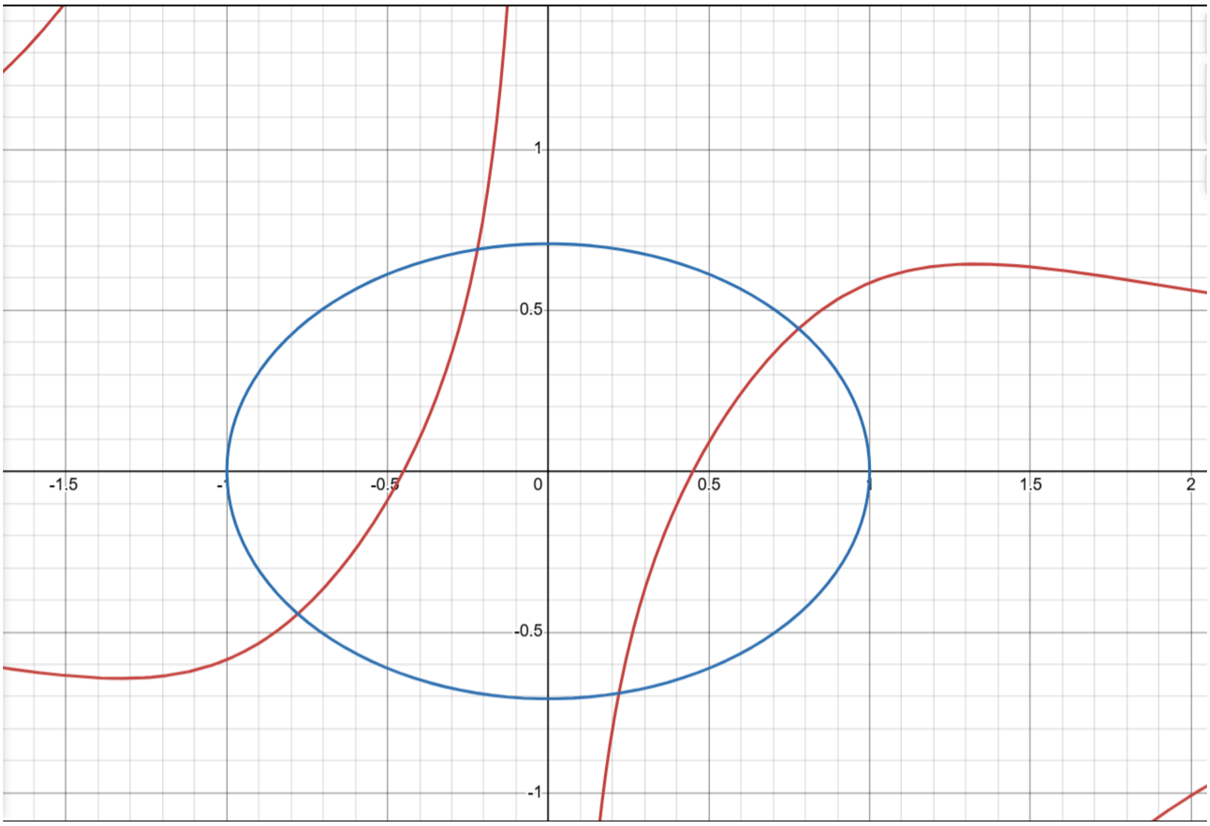
$\phi'(x) <= q = 0.575$

$0 <= q < 1 \Rightarrow$ итерационная последовательность сходится.

Критерий окончания: $\left|x_n - x_{n-1}\right| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$, т. к. $0.5 < q < 1$. $x_0 = 0.2$

шаг	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\left\|x_{k+1} - x_k\right\|$
1	0.2	-0.496	-2.020	0.296
2	-0.496	-0.640	0.0192	0.144
3	-0.640	**-0.639**	0.0051	0.001

Решение системы нелинейных уравнений



$$\begin{cases} tg(xy+0{,}2) = x^2 = f \\ x^2+2y^2 = 1 = g \end{cases}$$, Метод Ньютона

$$\begin{cases} tg(xy+0{,}2) - x^2 = 0 \\ x^2+2y^2-1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(xy+0{,}2)} \cdot y - 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(xy+0{,}2)} \cdot x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 4y$$

$$\begin{vmatrix} \frac{y}{\cos^2(xy+0{,}2)} - 2x & \frac{x}{\cos^2(xy+0{,}2)} \\ 2x & 4y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - tg(xy+0{,}2) \\ \cancel{tg(xy+0{,}2) - x^2} \\ 1 - x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{\cos^2(xy+0{,}2)} - 2x\right)\Delta x + \left(\frac{x}{\cos^2(xy+0{,}2)}\right)\Delta y = x^2 - tg(xy+0{,}2) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Корень 1:

$x_0 = -0,23 \quad y_0 = 0,7$

$$\begin{cases} 1,16107\Delta x - 0,23035\Delta y = 0,0139 \\ -0,46\Delta x + 2,8\Delta y = \underbrace{1 - 0,0529 - 0,98}_{-0,0329} \end{cases}$$

$\Delta x = 0,00997. \quad \Delta y = -0,01$

Новые приближения:

$x_1 = x_0 + \Delta x = -0,22003$

$y_1 = y_0 + \Delta y = 0,69$

$|x_1 - x_0| = 0,00997 \leq 10^{-2} \quad |y_1 - y_0| = 0,01 \leq 10^{-2}$

Корень 1: $(-0,22003; 0,69)$

Таким же способом находится корень 2, равный $(0,779; 0,443)$. Корни 3 и 4 равны $(-0,779; 0,443)$ и $(0,22003; -0,69)$ т. к. корни симметричны

Код программы

https://github.com/bilyardvmetro/CompMathLab2

Листинг программы

```
Выберете, что хотите решить (введите цифру)
1) Решить нелинейное уравнение
2) Решить систему нелинейных уравнений
 Enter: 1
Введите коэффициенты уравнения в порядке возрастания степеней: -8.17 -9.62 7.81 4.45
Выберете, как ввести данные
 1) Файл
 2) Вручную
 Enter: 2
Введите два числа: левую и правую границу изоляции корня: -3 -1.7
Введите точность вычислений: 0.01
\
Корень, полученный методом хорд: -2.3430
Значение функции в данной точке: 0.0065
Количество итераций:  9


Корень, полученный методом Ньютона: -2.3433
Значение функции в данной точке: -0.0000
Количество итераций:  3


Корень, полученный методом простых итераций: -2.3471
Значение функции в данной точке: -0.0000
Количество итераций:  1
```

```
Выберете, что хотите решить (введите цифру)
1) Решить нелинейное уравнение
2) Решить систему нелинейных уравнений
 Enter: 2
Какую систему вы хотите решить? (введите номер)
 1) 0.1x^2 + 0.2y^2 + x - 0.3 = 0
    0.2x^2 + 0.1xy + y - 0.7 = 0
 2) sin(x - 1) + y = 1.5
    x - sin(y + 1) = 1
 Enter: 2
Введите область изоляции корня (x_start x_end y_start y_end): 0 3 0 2
Введите начальное приближение (x y): 1 1.5
Введите точность: 0.01
Вектор неизвестных:  1.9957715022232474 0.6627906872073739
Количество итераций:  7
Вектор погрешностей:  [0.0036112914001829033 0]
```

Вывод

В ходе работы я изучил и реализовал несколько численных методов для решения нелинейных уравнений: метод хорд, метод Ньютона и метод простой итерации, а также метод простой итерации для решения системы нелинейных уравнений.