

Кр тервер вар 1

Задача 1. Данные о размере прибыли 20 коммерческих банков за год (млрд р.):

3.7, 4.3, 6.7, 5.6, 5.1, 8.1, 4.6, 5.7, 6.4, 5.9,
5.2, 6.2, 6.3, 7.2, 7.9, 5.8, 4.9, 7.6, 7.0, 6.9.

Построить интервальный вариационный ряд, гистограмму, вычислить среднее, выборочную дисперсию, среднее квадратическое отклонение, найти модальный и медианный интервалы.

Решение. Данные:

3.7, 4.3, 6.7, 5.6, 5.1, 8.1, 4.6, 5.7, 6.4, 5.9, 5.2, 6.2, 6.3, 7.2,
7.9, 5.8, 4.9, 7.6, 7.0, 6.9

Сортируем их по возрастанию:

3.7, 4.3, 4.6, 4.9, 5.1, 5.2, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 6.2, 6.3, 6.4, 6.7,
6.9, 7.0, 7.2, 7.6, 7.9, 8.1

Хорошо, теперь нужно построить интервальный вариационный ряд. Для этого необходимо определить количество интервалов и их ширину. Используем формулу Стерджесса для определения числа интервалов k :

$$k = 1 + 3.322 \cdot \lg(n)$$

где n - количество наблюдений, в нашем случае $n = 20$.

$$k = 1 + 3.322 \cdot \lg(20) \approx 1 + 3.322 \cdot 1.301 \approx 1 + 4.32 \approx 5.32.$$

Так как число интервалов должно быть целым, округлим до ближайшего целого $k = 5$.

Далее, определяем размах данных (R):

$$R = x_{max} - x_{min} = 8.1 - 3.7 = 4.4.$$

Теперь вычисляем ширину интервала (h):

$$h = R/k = 4.4/5 = 0.88.$$

Для удобства можно округлить h до 0.9.

Теперь определяем границы интервалов, начиная от минимального значения:

- 1-й интервал: 3.7 — 4.59
- 2-й интервал: 4.59 — 5.48
- 3-й интервал: 5.48 — 6.37

- 4-й интервал: 6.37 — 7.26

- 5-й интервал: 7.26 — 8.15

Теперь определим частоту в каждом интервале, то есть количество банков, попадающих в каждый интервал.

- 1-й интервал: 3.70 — 4.59
Включает значения: 3.7, 4.3, 4.6, 4.9.
Частота: 4.
- 2-й интервал: 4.60 — 5.48
Включает значения: 5.1, 5.2, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9.
Частота: 6.
- 3-й интервал: 5.49 — 6.37
Включает значения: 6.2, 6.3, 6.4.
Частота: 3.
- 4-й интервал: 6.38 — 7.26
Включает значения: 6.7, 6.9, 7.0, 7.2.
Частота: 4.
- 5-й интервал: 7.27 — 8.15
Включает значения: 7.6, 7.9, 8.1.
Частота: 3.

частоты тут неверные

Таким образом, интервальный вариационный ряд выглядит следующим образом:

Таблица 1: Вариационный ряд

Интервалы	Частота
3.70 — 4.59	4
4.60 — 5.48	6
5.49 — 6.37	3
6.38 — 7.26	4
7.27 — 8.15	3
Суммарная частота: 20.	

Далее, нужно построить гистограмму. Гистограмма представляет собой столбчатую диаграмму, где по оси X откладываются интервалы, а по оси Y — частоты.



Рис. 1: Гистограмма

Далее, нужно вычислить среднее значение прибыли. Среднее (\bar{x}) вычисляется как сумма всех значений, деленная на число наблюдений. Сумма всех значений:

$$3.7 + 4.3 + 6.7 + 5.6 + 5.1 + 8.1 + 4.6 + 5.7 + 6.4 + 5.9 + 5.2 + 6.2 + 6.3 + 7.2 + 7.9 + 5.8 + 4.9 + 7.6 + 7.0 + 6.9 = 110.0$$

$$\text{Среднее: } \bar{x} = \frac{110.0}{20} = 5.5 \text{ млрд рублей.}$$

Далее, вычисляем выборочную дисперсию (S^2). Формула выборочной дисперсии:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

здесь нужно домножить квадрат на частоту и разделить на n

где x_i — каждое значение, \bar{x} — среднее, n — число наблюдений.

$$s^2 = 31.1/19 \approx 1.637$$

Таким образом, выборочная дисперсия $s^2 \approx 1.637$ (млрд кв рублей).

Далее, среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение) s является квадратным корнем из дисперсии:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1.637} \approx 1.28.$$

Теперь нужно найти модальный и медианный интервалы. Модальный интервал - это интервал с наибольшей частотой. Из нашего вариационного ряда: Максимальная частота 6 в интервале 4.59 — 5.48. Таким образом, модальный интервал: 4.59 — 5.48.

Медианный интервал - это интервал, в котором находится медиана. Для непрерывного распределения, медиана находится в интервале, где суммарная относительная частота превышает 0.5 впервые. Сначала найдем медиану.

У нас 20 наблюдений, поэтому медиана будет между 10-м и 11-м значениями в отсортированном ряду.

10-е значение: 5.9

11-е значение: 6.2

Медиана:

медиана делит выборку на две равные части. мед. интервал - интервал содержащий медиану. если n/2 четное, то ищем интервал который содержит два средних значения (например 30/2=15. ищем в каком интервал 15е и 16е числа выборки)

$$\frac{5.9 + 6.2}{2} = 6.05.$$

6.05 лежит в интервале 5.49 — 6.37. Таким образом, медианный интервал: 5.48 — 6.37.

Итоговые результаты:

Интервальный вариационный ряд:

Таблица 2: Вариационный ряд

Интервалы	Частота
3.70 – 4.59	4
4.60 – 5.48	6
5.49 – 6.37	3
6.38 – 7.26	4
7.27 – 8.15	3

Гистограмма: Ранее в решение.

Среднее: 5.5 млрд рублей.

Выборочная дисперсия: ≈ 1.637 (млрд кв рублей).

Среднее квадратическое отклонение: ≈ 1.28 млрд рублей.

Модальный интервал: 4.59 — 5.48.

Медианный интервал: 5.48 — 6.37.

Задача 2. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания α по выборочным средним \bar{x} , если объем выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0.95$.

Решение.

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 1 + \gamma = 1.95, \alpha/2 = 0.975$$

$$t_{\alpha/2} = t_{0.975} \approx 2.03 \quad \text{тут } t(0.975) = 1.96$$

$$\bar{x} \pm 2.03 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}} = \bar{x} \pm 2.03 \cdot \frac{1}{2} = \bar{x} \pm 1.015$$

Задача 3. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 16$ найдены выборочная средняя $\bar{x} = 20.2$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 0.8$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0.95$.

Решение.

$$\begin{aligned}\bar{x} \pm t_{1+\gamma/2} \cdot \frac{(n-1)s}{n} \\ \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1.95}{2} = 0.975 \\ t_{0.975} = 2.131 \\ \frac{(n-1)s}{n} = \frac{15 \cdot 0.8}{16} = 0.75 \\ 20.2 \pm 0.75 \cdot 2.131 = 20.2 \pm 1.6\end{aligned}$$

Задача 4. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

Таблица 3: Задача 4						
x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью $\gamma = 0.95$ математическое ожидание α нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Решение. Выборочное среднее \bar{x} вычисляется как:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n},$$

где x_i — значения признака, n_i — частота появления значений, n — объем выборки ($n = \sum n_i$). Подставляем данные:

$$\bar{x} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{10}.$$

Считаем:

$$\bar{x} = \frac{-4 + 1 + 4 + 6 + 8 + 5}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Выборочная дисперсия S^2 вычисляется как:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Сначала найдем $(x_i - \bar{x})^2$ для каждого x_i :

$$\begin{aligned}x_i : & -2, 1, 2, 3, 4, 5, \\ (x_i - \bar{x}) : & -4, -1, 0, 1, 2, 3, \\ (x_i - \bar{x})^2 : & 16, 1, 0, 1, 4, 9.\end{aligned}$$

Теперь считаем дисперсию:

$$S^2 = \frac{2 \cdot 16 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 9}{10 - 1}.$$

$$S^2 = \frac{32 + 1 + 0 + 2 + 8 + 9}{9} = \frac{52}{9} \approx 5.778.$$

Стандартная ошибка $\sigma_{\bar{x}}$ определяется как:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}.$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{5.778}{10}} \approx 0.76.$$

Для доверительного уровня $\gamma = 0.95$ и числа степеней свободы $n - 1 = 9$, по таблице распределения Стьюдента находим:

$$t_{0.975} \approx 2.262.$$

Доверительный интервал для математического ожидания α вычисляется как:

$$\bar{x} \pm t_{0.975} \cdot \sigma_{\bar{x}}.$$

$$\text{Левая граница: } 2 - 2.262 \cdot 0.76 \approx 2 - 1.719 \approx 0.281.$$

$$\text{Правая граница: } 2 + 2.262 \cdot 0.76 \approx 2 + 1.719 \approx 3.719.$$

Доверительный интервал для математического ожидания α с надежностью $\gamma = 0.95$:

$$[0.281; 3.719].$$