

## Кр тервер вар 1

**Задача 1.** Данные о размере прибыли 20 коммерческих банков за год (млрд р.):

3.7, 4.3, 6.7, 5.6, 5.1, 8.1, 4.6, 5.7, 6.4, 5.9,

5.2, 6.2, 6.3, 7.2, 7.9, 5.8, 4.9, 7.6, 7.0, 6.9.

Построить интервальный вариационный ряд, гистограмму, вычислить среднее, выборочную дисперсию, среднее квадратическое отклонение, найти модальный и медианный интервалы.

**Решение.** Данные:

3.7, 4.3, 6.7, 5.6, 5.1, 8.1, 4.6, 5.7, 6.4, 5.9, 5.2, 6.2, 6.3, 7.2, 7.9, 5.8, 4.9, 7.6, 7.0, 6.9

Сортируем их по возрастанию:

3.7, 4.3, 4.6, 4.9, 5.1, 5.2, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 6.2, 6.3, 6.4, 6.7, 6.9, 7.0, 7.2, 7.6, 7.9, 8.1

Хорошо, теперь нужно построить интервальный вариационный ряд. Для этого необходимо определить количество интервалов и их ширину. Используем формулу Стерджесса для определения числа интервалов  $k$ :

$$k = 1 + 3.322 \cdot \lg(n)$$

где  $n$  - количество наблюдений, в нашем случае  $n = 20$ .

$$k = 1 + 3.322 \cdot \lg(20) \approx 1 + 3.322 \cdot 1.301 \approx 1 + 4.32 \approx 5.32.$$

Так как число интервалов должно быть целым, округлим до ближайшего целого  $k = 5$ .

Далее, определяем размах данных ( $R$ ):

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 8.1 - 3.7 = 4.4.$$

Теперь вычисляем ширину интервала ( $h$ ):

$$h = R/k = 4.4/5 = 0.88.$$

Для удобства можно округлить  $h$  до 0.9.

Теперь определяем границы интервалов, начиная от минимального значения:

- 1-й интервал: 3.7 — 4.59
- 2-й интервал: 4.59 — 5.48
- 3-й интервал: 5.48 — 6.37

- 4-й интервал: 6.37 — 7.26

- 5-й интервал: 7.26 — 8.15

Теперь определим частоту в каждом интервале, то есть количество банков, попадающих в каждый интервал.

- 1-й интервал: 3.70 — 4.59

Включает значения: 3.7, 4.3, 4.6, 4.9.

Частота: 4.

частоты тут неверные

- 2-й интервал: 4.60 — 5.48

Включает значения: 5.1, 5.2, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9.

Частота: 6.

- 3-й интервал: 5.49 — 6.37

Включает значения: 6.2, 6.3, 6.4.

Частота: 3.

- 4-й интервал: 6.38 — 7.26

Включает значения: 6.7, 6.9, 7.0, 7.2.

Частота: 4.

- 5-й интервал: 7.27 — 8.15

Включает значения: 7.6, 7.9, 8.1.

Частота: 3.

Таким образом, интервальный вариационный ряд выглядит следующим образом:

Таблица 1: Вариационный ряд

Интервалы	Частота
3.70 — 4.59	4
4.60 — 5.48	6
5.49 — 6.37	3
6.38 — 7.26	4
7.27 — 8.15	3
Суммарная частота:	20.

Далее, нужно построить гистограмму. Гистограмма представляет собой столбчатую диаграмму, где по оси  $X$  откладываются интервалы, а по оси  $Y$  — частоты.

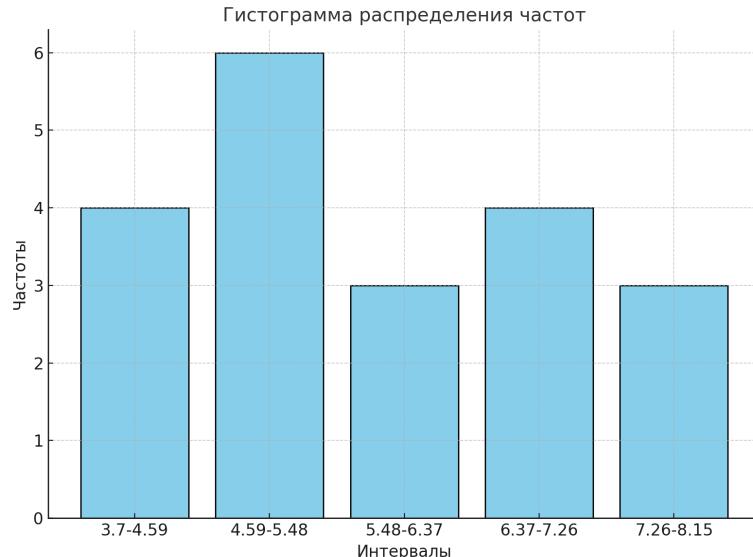


Рис. 1: Гистограмма

Далее, нужно вычислить среднее значение прибыли. Среднее ( $\bar{x}$ ) вычисляется как сумма всех значений, деленная на число наблюдений. Сумма всех значений:

$$3.7 + 4.3 + 6.7 + 5.6 + 5.1 + 8.1 + 4.6 + 5.7 + 6.4 + 5.9 + 5.2 + \\ + 6.2 + 6.3 + 7.2 + 7.9 + 5.8 + 4.9 + 7.6 + 7.0 + 6.9 = 110.0$$

Среднее:  $\bar{x} = \frac{110.0}{20} = 5.5$  млрд рублей.

Далее, вычисляем выборочную дисперсию ( $S^2$ ). Формула выборочной дисперсии:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

здесь нужно домножить квадрат на частоту и разделить на  $n$

где  $x_i$  — каждое значение,  $\bar{x}$  — среднее,  $n$  — число наблюдений.

$$s^2 = 31.1/19 \approx 1.637$$

Таким образом, выборочная дисперсия  $s^2 \approx 1.637$  (млрд кв рублей).

Далее, среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение)  $s$  является квадратным корнем из дисперсии:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1.637} \approx 1.28.$$

Теперь нужно найти модальный и медианный интервалы. Модальный интервал — это интервал с наибольшей частотой. Из нашего вариационного ряда: Максимальная частота 6 в интервале 4.59 — 5.48. Таким образом, модальный интервал: 4.59 — 5.48.

Медианный интервал — это интервал, в котором находится медиана. Для непрерывного распределения, медиана находится в интервале, где суммарная относительная частота превышает 0.5 впервые. Сначала найдем медиану.

У нас 20 наблюдений, поэтому медиана будет между 10-м и 11-м значениями в отсортированном ряду.

10-е значение: 5.9

11-е значение: 6.2

Медиана:

медиана делит выборку на две равные части. мед. интервал — интервал содержащий медиану. если  $n/2$  четное, то ищем интервал который содержит два средних значения (например  $30/2=15$ . ищем в каком интервал 15е и 16е числа выборки)

$$\frac{5.9 + 6.2}{2} = 6.05.$$

6.05 лежит в интервале 5.49 — 6.37. Таким образом, медианный интервал: 5.48 — 6.37.

#### Итоговые результаты:

Интервальный вариационный ряд:

Таблица 2: Вариационный ряд

Интервалы	Частота
3.70 — 4.59	4
4.60 — 5.48	6
5.49 — 6.37	3
6.38 — 7.26	4
7.27 — 8.15	3

Гистограмма: Ранее в решении.

Среднее: 5.5 млрд рублей.

Выборочная дисперсия:  $\approx 1.637$  (млрд кв рублей).

Среднее квадратическое отклонение:  $\approx 1.28$  млрд рублей.

Модальный интервал: 4.59 — 5.48.

Медианный интервал: 5.48 — 6.37.

**Задача 2.** Случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением  $\sigma = 3$ . Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания  $\alpha$  по выборочным средним  $\bar{x}$ , если объем выборки  $n = 36$  и задана надежность оценки  $\gamma = 0.95$ .

**Решение.**

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 1 + \gamma = 1.95, \alpha/2 = 0.975$$

$$t_{\alpha/2} = t_{0.975} \approx 2.03 \quad \text{тут } t(0.975) = 1.96$$

$$\bar{x} \pm 2.03 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}} = \bar{x} \pm 2.03 \cdot \frac{1}{2} = \bar{x} \pm 1.015$$

**Задача 3.** Количественный признак  $X$  генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема  $n = 16$  найдены выборочная средняя  $\bar{x} = 20.2$  и исправленное среднее квадратическое отклонение  $s = 0.8$ . Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью  $\gamma = 0.95$ .

**Решение.**

$$\bar{x} \pm t_{1+\gamma/2} \cdot \frac{(n-1)s}{n}$$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1.95}{2} = 0.975$$

$$t_{0.975} = 2.131$$

$$\frac{(n-1)s}{n} = \frac{15 \cdot 0.8}{16} = 0.75$$

$$20.2 \pm 0.75 \cdot 2.131 = 20.2 \pm 1.6$$

**Задача 4.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n = 10$ :

Таблица 3: Задача 4

$x_i$	-2	1	2	3	4	5
$n_i$	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью  $\gamma = 0.95$  математическое ожидание  $\alpha$  нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

**Решение.** Выборочное среднее  $\bar{x}$  вычисляется как:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n},$$

где  $x_i$  — значения признака,  $n_i$  — частота появления значений,  $n$  — объем выборки ( $n = \sum n_i$ ). Подставляем данные:

$$\bar{x} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{10}.$$

Считаем:

$$\bar{x} = \frac{-4 + 1 + 4 + 6 + 8 + 5}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Выборочная дисперсия  $S^2$  вычисляется как:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Сначала найдем  $(x_i - \bar{x})^2$  для каждого  $x_i$ :

$$x_i : -2, 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$(x_i - \bar{x}) : -4, -1, 0, 1, 2, 3,$$

$$(x_i - \bar{x})^2 : 16, 1, 0, 1, 4, 9.$$

Теперь считаем дисперсию:

$$S^2 = \frac{2 \cdot 16 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 9}{10 - 1}.$$

$$S^2 = \frac{32 + 1 + 0 + 2 + 8 + 9}{9} = \frac{52}{9} \approx 5.778.$$

Стандартная ошибка  $\sigma_{\bar{x}}$  определяется как:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}.$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{5.778}{10}} \approx 0.76.$$

Для доверительного уровня  $\gamma = 0.95$  и числа степеней свободы  $n-1 = 9$ , по таблице распределения Стьюдента находим:

$$t_{0.975} \approx 2.262.$$

Доверительный интервал для математического ожидания  $\alpha$  вычисляется как:

$$\bar{x} \pm t_{0.975} \cdot \sigma_{\bar{x}}.$$

$$\text{Левая граница: } 2 - 2.262 \cdot 0.76 \approx 2 - 1.719 \approx 0.281.$$

$$\text{Правая граница: } 2 + 2.262 \cdot 0.76 \approx 2 + 1.719 \approx 3.719.$$

Доверительный интервал для математического ожидания  $\alpha$  с надежностью  $\gamma = 0.95$ :

$$[0.281; 3.719].$$