Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

# Лабораторная работа №4
# по дисциплине «Методы оптимизации»

Вариант: **10**

**Преподаватель:**
Селина Елена Георгиевна

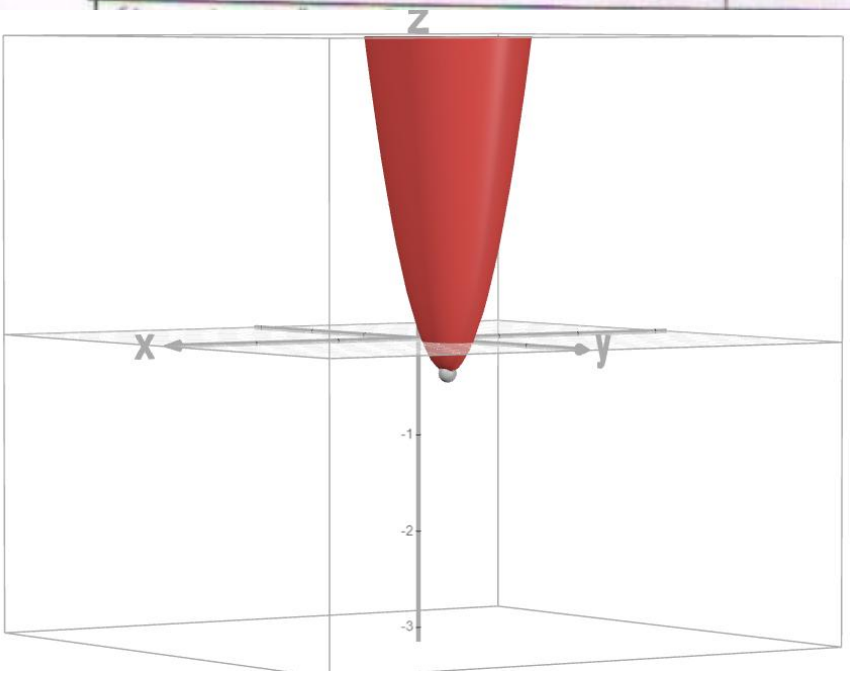
**Выполнил:**
Поленов Кирилл Александрович
**Группа:** P3213

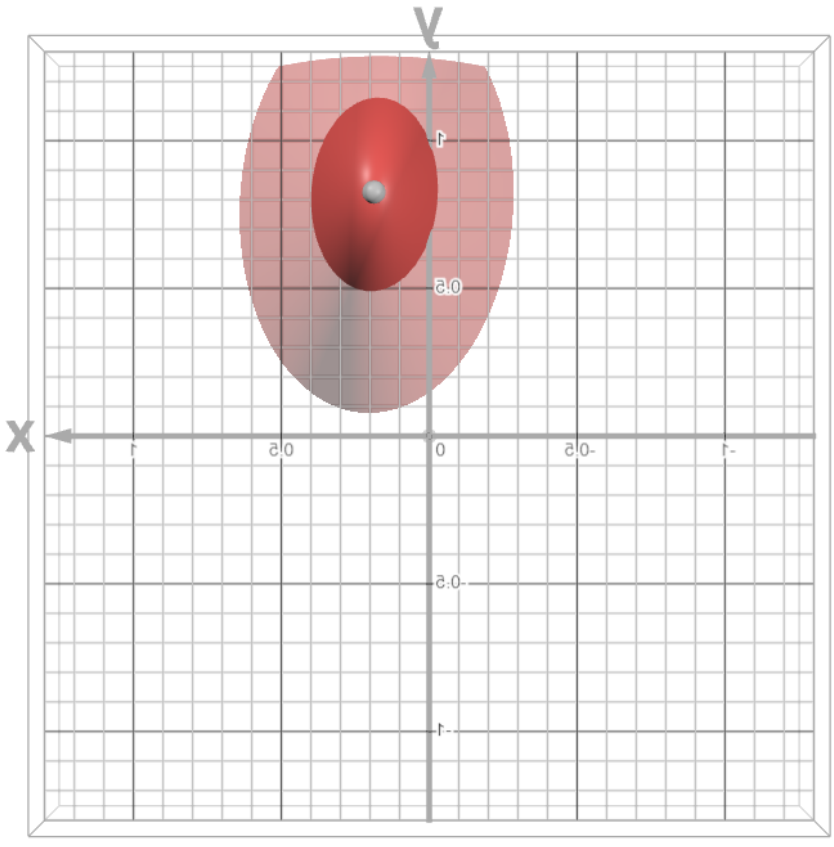
Санкт-Петербург, 2025

Лабораторная работа 4

Найти экстремум функции методами покоординатного спуска, градиентного спуска и наискорейшего спуска. Три итерации каждого метода выполнить вручную + написать программу на одном из языков программирования. $\varepsilon = 0.0001$

| | | |
|---|---|---|
| 10 | $f(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 3x_2^2 + 0.5x_1x_2 - 3x_1 - 5x_2 + 2$ | (2.-2) |



# 1. Решение вручную

Исходная функция:
$f(x,y) = 7x^2 + 3y^2 + 0.5xy - 3x - 5y + 2; M_0 = (2,-2), \varepsilon = 10^{-4}$

## 1. Вычисление по методу Поокординатного спуска:

**Шаг 0:**
x0 = 0.2857
Текущая точка минимума M (0.2857, -2.0000)
y0 = 0.8095
Текущая точка минимума M (0.2857, 0.8095)

**Шаг 1:**
x1 = 0.1854
Текущая точка минимума M (0.1854, 0.8095)
|f_x(M1) - f_x(M0)| = -0.0705
y1 = 0.8179
Текущая точка минимума M (0.1854, 0.8179)
|f_y(M1) - f_y(M0)| = -0.0002

**Шаг 2:**
x2 = 0.1851
Текущая точка минимума M (0.1851, 0.8179)
|f_x(M2) - f_x(M1)| = -0.00000062

$-0.00000062 < 10^{-4} \rightarrow |f(M)| <= \varepsilon$.
Минимум с заданной погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$ найден.

**Минимум достигается в точке** M (0.1851, 0.8179).
**Значение в минимуме** $y_m$ = f (M) = -0.3224.

## 2. Вычисление по методу Градиентного спуска:

**Шаг 0:**
M0_x Компонента Градиента = -0.4000
M0_y Компонента Градиента = -0.4000
Текущая точка минимума M (-0.4000, -0.4000)

**Шаг 1:**
M1_x Компонента Градиента = 0.4800
M1_y Компонента Градиента = 0.3600
|f(M1) - f(M0)| = -6.03200000
Текущая точка минимума M (0.4800, 0.3600)

**Шаг 2:**
M2_x Компонента Градиента = 0.0900
M2_y Компонента Градиента = 0.6200
|f(M2) - f(M1)| = -0.98020000
Текущая точка минимума M (0.0900, 0.6200)

**Рассмотрено 3 шага.**

$|f(M2) - f(M1)| = -0.98020000 > 10^{-4}$ , значит **минимума с заданной точностью** $\varepsilon = 10^{-4}$ **найти за 3 шага не удалось**.
Текущий минимум: M (0.0900, 0.6200).
**Значение в минимуме** $y_m = f(M) = -0.1322$.

## 3. Вычисление по методу Наискорейшего спуска:

**Шаг 0:**
Градиент grad = (24.000000*i, -16.000000*j)
Модуль Градиента |grad| = 28.844410
Подстановка в исходную функцию 4608*h^2 + -832*h + 44.
Вторая производная от функции шага: 9216. *h + -832.
Шаг h = 0.0903
Текущая точка минимума M (-0.1667, -0.5556)

**Шаг 1:**
Градиент grad = (-5.611111*i, -8.416667*j)
Модуль Градиента |grad| = 10.115574
Подстановка в исходную функцию 456.5262345679*h^2 + -102.3248456790*h + 6.4444444444
Вторая производная от функции шага: 913.0524691358*h + -102.3248456790
Шаг h = 0.1121
Текущая точка минимума M (0.4622, 0.3877)

**Шаг 2:**
Градиент grad = (3.664152*i, -2.442768*j)
Модуль Градиента |grad| = 4.403763
Подстановка в исходную функцию 107.4080965534*h^2 + -19.3931285444*h + 0.7107246435
Вторая производная от функции шага: 214.8161931068*h + -19.3931285444
Шаг h = 0.0903
Текущая точка минимума M (0.1314, 0.6082)

**Рассмотрено 3 шага.**

4.403763> $10^{-4}$, значит **минимума с заданной точностью** $\varepsilon = 10^{-4}$ **найти за 3 шага не удалось**.
Текущий минимум: M (0.1314, 0.6082).
**Значение в минимуме** $y_m = f(M) = -0.16465782$.

## 2. Программное решение

main.go

```
package main

import (
    "fmt"
    "math"
)

// Функция
// 7x^2+3y^2+0.5xy-3x-5y+2
func f(x, y float64) float64 {
    return 7*x*x + 3*y*y + 0.5*x*y - 3*x - 5*y + 2
}

// Метод покоординатного спуска
// (x0, y0) - начальное приближение, tolerance - точность, maxIter - чтобы
без бредика
func coordinateDescent(x0, y0, tolerance float64, maxIter int) (float64,
float64) {
    x, y := x0, y0
    for iter := 0; iter < maxIter; iter++ {
       fmt.Println("Итерация ", iter, ":")
       // Минимизация по x
       newX := findX(y)

       fmt.Printf("x%d = %.4f\n", iter, newX)
       fmt.Printf("Текущая точка минимума M(%.4f, %.4f)\n", newX, y)

       if iter >= 1 {
          fmt.Printf("|f_x(M%d) - f_x(M%d)| = %.4f\n", iter, iter-1, f(newX,
y)-f(x, y))
       }

       if math.Abs(f(newX, y)-f(x, y)) < tolerance {
          x = newX
          break
       }
       x = newX

       // Минимизация по y
       newY := findY(x)

       fmt.Printf("y%d = %.4f\n", iter, newY)
       fmt.Printf("Текущая точка минимума M(%.4f, %.4f)\n", x, newY)

       if iter >= 1 {
          fmt.Printf("|f_y(M%d) - f_y(M%d)| = %.4f\n", iter, iter-1, f(x,
newY)-f(x, y))
       }

       if math.Abs(f(x, newY)-f(x, y)) < tolerance {
          y = newY
          break
       }
       y = newY

fmt.Println("==================================================================
==================================")
    }
```

```
fmt.Println("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++")
    return x, y
}

func findX(y float64) float64 {
    // выражаем x из ч.п. по y
    return (-0.5*y + 3) / 14
}

func findY(x float64) float64 {
    // выражаем y из ч.п. по x
    return (-0.5*x + 5) / 6
}

// Метод градиентного спуска
func gradDescent(x0, y0, alpha, tolerance float64, maxIter int) (float64, float64) {
    x, y := x0, y0
    for iter := 0; iter < maxIter; iter++ {
        fmt.Println("Итерация ", iter, ":")

        // Шаг против градиента по x
        newX := x - alpha*dfdx(x, y)
        // Шаг против градиента по y
        newY := y - alpha*dfdy(x, y)

        fmt.Printf("M%d_x Компонента Градиента = %.4f\n", iter, newX)
        fmt.Printf("M%d_y Компонента Градиента = %.4f\n", iter, newY)

        if iter >= 1 {
            fmt.Printf("|f(M%d) - f(M%d)| = %.4f\n", iter, iter-1, f(newX, newY)-f(x, y))
        }

        if math.Abs(f(x, y)-f(newX, newY)) < tolerance {
            break
        }
        x = newX
        y = newY

        fmt.Printf("Текущая точка минимума M(%.4f, %.4f)\n", x, y)

fmt.Println("=================================================================================")
    }

fmt.Println("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++")
    return x, y
}

// Частная производная по x
func dfdx(x, y float64) float64 {
    return 14*x + 0.5*y - 3
}

// Частная производная по y
func dfdy(x, y float64) float64 {
    return 6*y + 0.5*x - 5
}

func calcRatios(x, y, dx, dy float64) []float64 {
    res := make([]float64, 0)
```

```
    // кэф перед x^2
    res = append(res, 7*dx*dx+3*dy*dy+0.5*dx*dy)
    // кэф перед x
    res = append(res, 7*(x*dx*2)+3*(y*dy*2)+0.5*(dx*y+x*dy)-3*dx-5*dy)
    // свободный кэф
    res = append(res, 7*x*x+3*y*y+0.5*(x*y)-3*x-5*y+2)

    return res
}

func findStep(ratios []float64) float64 {
    stepEqRatios := make([]float64, 0)
    // производная функции от шага
    stepEqRatios = append(stepEqRatios, 2*ratios[0])
    stepEqRatios = append(stepEqRatios, ratios[1])
    fmt.Printf("Вторая производная от функции шага: %.10f*h + %.10f\n",
stepEqRatios[0], stepEqRatios[1])

    // приравняли к нулю и выразили шаг
    step := -stepEqRatios[1] / stepEqRatios[0]
    return step
}

func fastestDescent(x0, y0, tolerance float64, maxIter int) (float64,
float64) {
    x, y := x0, y0
    ratios := make([]float64, 3)
    step := 0.0
    for iter := 0; iter < maxIter; iter++ {
       fmt.Println("Итерация ", iter, ":")
       // ч. п.
       derivX := dfdx(x, y)
       derivY := dfdy(x, y)
       fmt.Printf("Градиент grad = (%.6f*i, %.6f*j)\n", derivX, derivY)
       fmt.Printf("Модуль Градиента |grad| = %.6f\n",
math.Abs(math.Sqrt(derivX*derivX+derivY*derivY)))

       if math.Abs(math.Sqrt(derivX*derivX+derivY*derivY)) < tolerance {
          break
       }
       // подставляем в исходную функцию уравнения для шага
       // x_new = x_prev - step * df/dx
       // y_new = y_prev - step * df/dy
       ratios = calcRatios(x, y, -derivX, -derivY)
       fmt.Printf("Подстановка у исходную функцию %.10f*h^2 + %.10f*h +
%.10f\n", ratios[0], ratios[1], ratios[2])
       // считаем шаг через вторую производную + приравнивание к нулю
       step = findStep(ratios)
       fmt.Printf("Шаг h = %.4f\n", step)

       // новое приближение
       newX := x - step*derivX
       newY := y - step*derivY

       x = newX
       y = newY

       fmt.Printf("Текущая точка минимума M(%.4f, %.4f)\n", x, y)

fmt.Println("==================================================================
==================================")
    }

fmt.Println("++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

```
++++++++++++++++++++++++++++++++")
    return x, y
}

func main() {
    x0, y0 := 2.0, -2.0 // Начальные приближения
    tolerance := 0.0001 // Точность
    maxIter := 1000     // Максимальное число итераций

    fmt.Println("Метод Покоординатного Спуска")
    fmt.Println("-------------------------------------------------------------
-----------------------------------")
    xMin, yMin := coordinateDescent(x0, y0, tolerance, maxIter)
    fmt.Printf("Минимум функции достигается в точке (x = %.4f, y = %.4f) со
значением f(x,y) = %.4f\n", xMin, yMin, f(xMin, yMin))

fmt.Println("=============================================================
==================================\n")

    fmt.Println("Метод Градиентного Спуска")
    fmt.Println("-------------------------------------------------------------
-----------------------------------")
    xMin, yMin = gradDescent(x0, y0, 0.1, tolerance, maxIter)
    fmt.Printf("Минимум функции достигается в точке (x = %.4f, y = %.4f) со
значением f(x,y) = %.4f\n", xMin, yMin, f(xMin, yMin))

fmt.Println("=============================================================
==================================\n")

    fmt.Println("Метод Градиентного Спуска")
    fmt.Println("-------------------------------------------------------------
-----------------------------------")
    xMin, yMin = fastestDescent(x0, y0, tolerance, maxIter)
    fmt.Printf("Минимум функции достигается в точке (x = %.4f, y = %.4f) со
значением f(x,y) = %.4f\n", xMin, yMin, f(xMin, yMin))

fmt.Println("=============================================================
==================================\n")
}
```

## Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы я научился находить минимум функции нескольких переменных методами Покоординатного, Градиентного и Наискорейшего спусков. Реализовал все методы на языке GoLang. В результате работы были найдены минимум уравнения на отрезке с определенной точностью.