



**UNIVERSIDAD
SERGIO ARBOLEDA**

ESTUDIO DE LA CORRELACIÓN DE CONTAMINANTES DEL AIRE DE BOGOTÁ.

Autor:

Michael Stiven Pinzón Rodríguez.

Universidad Sergio Arboleda

Facultad de ciencias exactas e ingeniería

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Bogotá D.C - 2022



UNIVERSIDAD
SERGIO ARBOLEDA

ESTUDIO DE LA CORRELACIÓN DE
CONTAMINANTES DEL AIRE DE
BOGOTÁ.

Autor:

Michael Stiven Pinzón Rodríguez.

Tutora:

Biviana Marcela Suárez Sierra.

*Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar
al título de:*

Magister en Matemáticas Aplicadas

Universidad Sergio Arboleda

Facultad de ciencias exactas e ingeniería

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Bogotá D.C - 2022

Agradecimientos

Contenido

1. Antecedentes	1
2. Recolección de datos	2
2.1. Sin puntos de cambio	5
2.2. Un punto de cambio	8
2.3. Dos puntos de cambio:	10
2.4. Política pública:	10
2.5. Diagnóstico de convergencias	14
2.5.1. Sin puntos de cambio	14
2.5.2. Un punto de cambio	15

Capítulo 1

Antecedentes

En el presente trabajo de grado, son necesarios algunos resultados importantes del curso Inferencia Bayesiana, es por eso que a continuación se presentan algunas deficiones y teoremas que son de gran utilidad para poder encontrar los diferentes parámetros que modelan los diferentes contaminantes y su respectiva correlación.

1.0.1. Función de máxima verosimilitud.

Capítulo 2

Recolección de datos

Para el estudio de la correlación de los contaminantes del aire de Bogotá, se trabajará con las concentraciones de 1096 días, correspondientes a los años 2018 a 2020, de material particulado de 10 micrómetros de tamaño, PM_{10} , material particulado de 2.5 micrómetros de tamaño, $PM_{2.5}$ y Ozono, O_3 .

Para el correspondiente análisis, es necesario estudiar la reglamentación establecida por el ministerio de ambiente y desarrollo sostenible de Colombia, el cual, en la resolución N° 2254 del 1 de noviembre de 2017: *Por la cual se adopta la norma del aire y se dictan otras disposiciones*, establece que a partir del 1 de julio del 2018 los niveles máximos permisibles de contaminantes criterio en el aire son los que se presentan en la tabla 2.1:

Contaminante	Nivel máximo permisible
PM_{10}	$75\mu g/m^3$
$PM_{2.5}$	$37\mu g/m^3$
O_3	$100ppb$

Tabla 2.1: Normativa establecida en la resolución 2254 para cada uno de los tres contaminantes.

Estos 1096 datos diarios de los tres contaminantes, fueron obtenidos a partir de los datos horarios registrados en las 13 estaciones de monitoreo de calidad del aire de Bogotá. Para el caso del PM_{10} y $PM_{2.5}$ se determinaron promedios por cada 24 horas y de estos promedios se elegía el valor máximo; para el caso del O_3 , algo similar, solo que, en lugar de promedio se tomo el máximo de cada periodo de un día.

A continuación, se verifica mediante el software R, la cantidad de veces que estos umbrales se rebasan en los 1096 días de los años 2018 a 2020, en la figura 2.1 se muestran las series de tiempo que describen el comportamiento diario de los contaminantes durante

los tres años analizados.

Para el caso del PM_{10} , sucede algo particular y es que sus valores máximo y mínimo suceden en el mismo mes, aquí se observa que el día 24 de junio del 2020, se presentó una medición de 172.37, sobrepasando considerablemente el máximo permitido y para el día 15 de junio del mismo año, se obtuvo una medición mínima en los tres años de 14.06. Para este contaminante, se observaron un total de 318 rebases.

En cuanto al material particulado $PM_{2.5}$ se observó que este rebasaba los umbrales permitidos un 30,3 % de veces, con un total de 332 días en los que la norma no se esta cumpliendo, se puede observar en la figura 2.1 que el día 28 de marzo del 2019, este contaminante sobrepasó el umbral permitido en más del 200 %.

Para la serie de tiempo que muestra los máximos diarios de concentración de Ozono en la ciudad de Bogotá, se debe tener en cuenta que, en la resolución número 2254 del ministerio de ambiente y desarrollo sostenible, se presenta el umbral de este contaminante medido en $\mu g/m^3$ y en las estaciones de monitoreo se recibe la información en partes por billón (*ppb*), de manera que se debe realizar la revisión de rebases, cuando los datos recogidos superen el valor aproximado de 50,9375 *ppb* que corresponde a los $100\mu g/m^3$ que establece la norma, esto nos da un total de 219 rebases en los tres años analizados. En la tabla 2.2 se muestra un resumen de los rebases obtenidos para cada uno de los contaminantes de interés, teniendo en cuenta que para el O_3 los rebases se determinaron sobre un valor de 50.93 luego de realizar la respectiva conversión de partes por billón a $\mu g/m^3$.

En la figura 2.2 se presentan los graficos de las medias acumuladas de los rebases de los umbrales máximos permitidos. En ellos se puede evidenciar que hubo meses en los cuales no se presentaron rebases, esto se observa cuando las gráficas se muestran como una constante, un ejemplo es el caso del Ozono, en los meses comprendidos entre marzo y julio de 2018, no hubo ni un solo rebase, así como también entre los meses de abril y agosto del año 2019. De esta misma manera ocurre con los otros dos contaminantes, sin embargo es el Ozono, en el cual los periodos en los que no se rebasan los umbrales son mas extensos.

Contaminante	Umbral	Rebases	Porcentaje
PM_{10}	$70\mu g/m^3$	318	29 %
O_3	100 <i>ppb</i>	219	20 %
$PM_{2.5}$	$37\mu g/m^3$	332	30.3 %

Tabla 2.2: Número de rebases de cada contaminante.

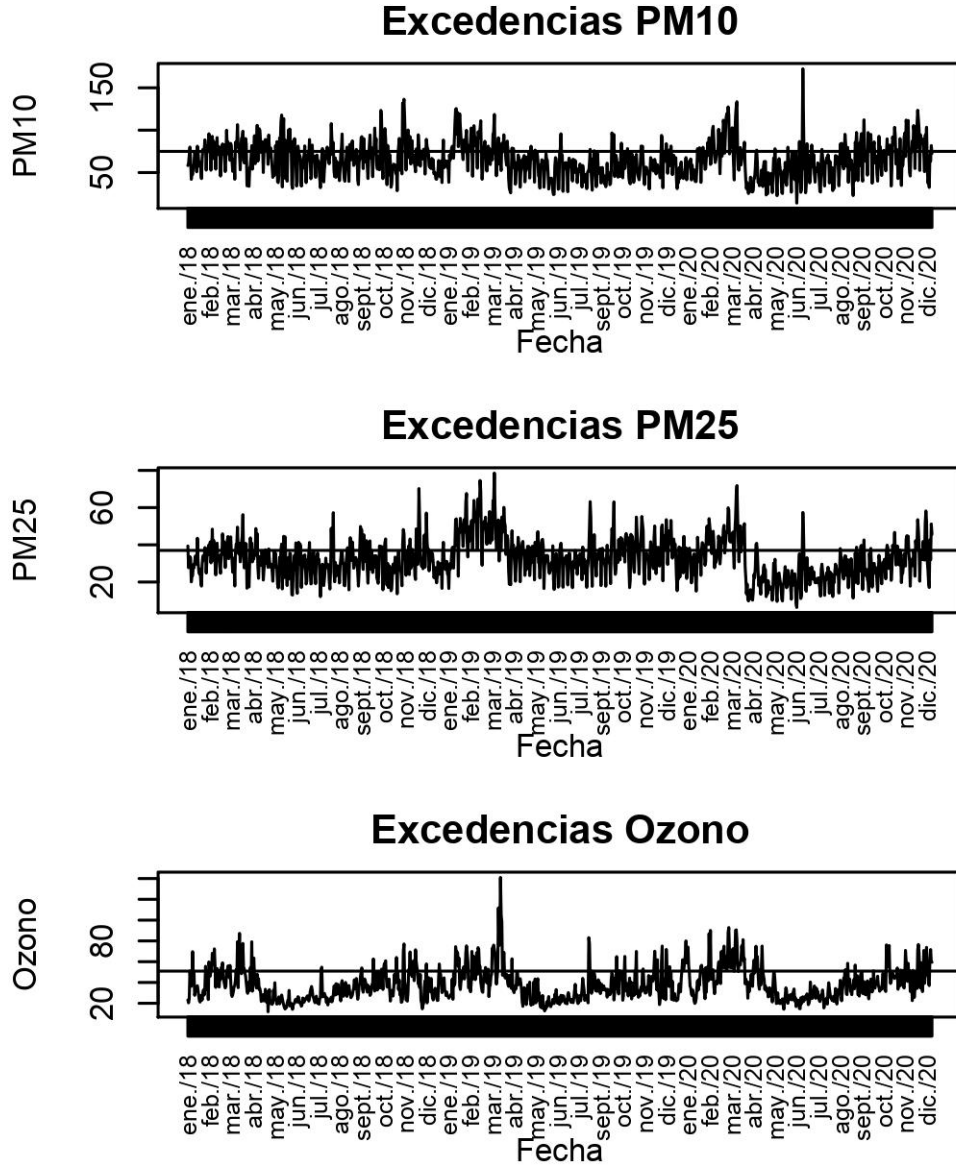


Figura 2.1: Niveles de concentración diaria de contaminantes O_3 , PM_{10} y $PM_{2.5}$, la recta horizontal representa el umbral máximo permitido por las autoridades ambientales en Colombia.

Para estudiar el número de rebases de los umbrales ambientales, se considera un proceso de Poisson con función de intensidad $\lambda(t)$, con la forma Weibull, que depende de los parámetros α y β de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\lambda(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha-1}, \alpha, \beta > 0 \text{ y } t \geq 0$$

A partir de esta expresión se construyen las funciones de riesgo para cada uno de los modelos, teniendo en cuenta que cuando el parámetro $\alpha < 1$ la función es decreciente,

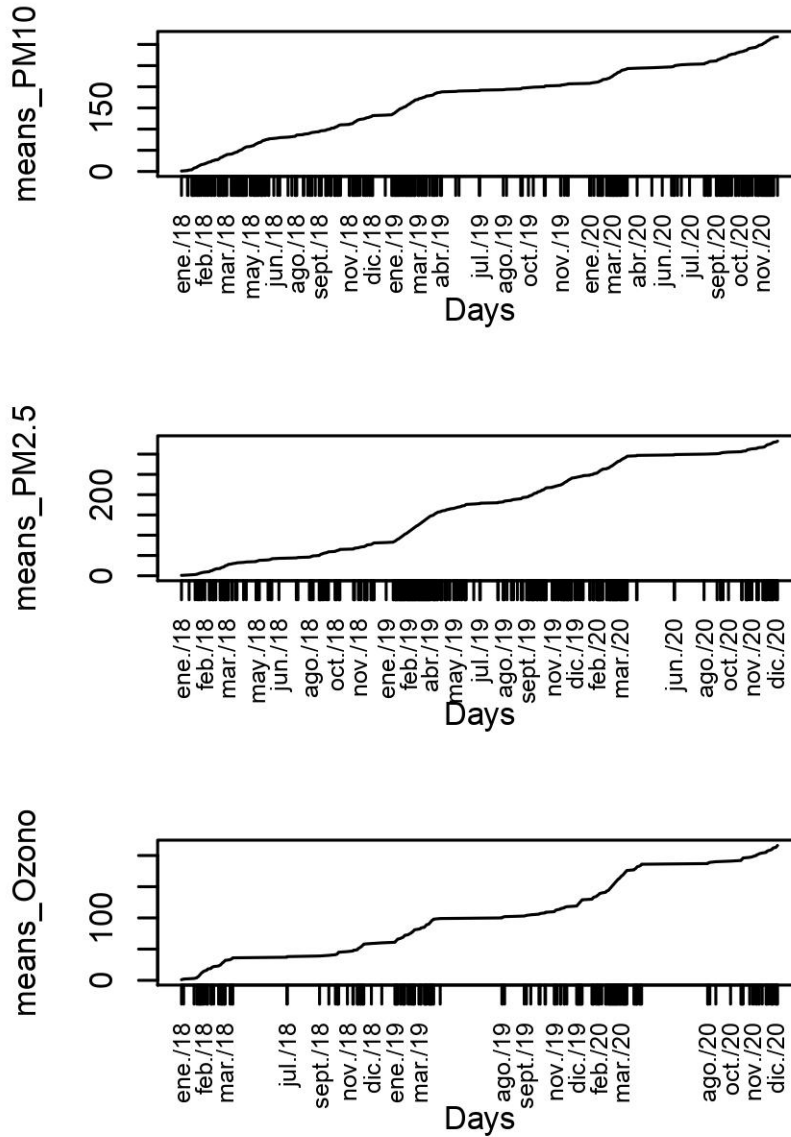


Figura 2.2: Media acumulada observada del número de excedencias para cada uno de los tres contaminantes.

si $\alpha > 1$ será creciente y constante cuando $\alpha = 1$

2.1. Sin puntos de cambio

Para estimar los parámetros de este modelo, se realizaron 20.000 iteraciones y se eliminaron 2.000 de ellas. En esta implementación se encontró que para el PM_{10} , los parámetros son $\alpha = 1.02$ y $\beta = 3.87$, lo cual indica que la función de riesgo será creciente, esto lo que quiere decir, es que el número de rebases tiende a aumentar con el

paso del tiempo.

Para el caso del $PM_{2.5}$, se obtuvo: $\alpha = 1.16$ y $\beta = 1.75$ y para el ozono, $\alpha = 1.21$ y $\beta = 13.37$, estos últimos valores de α demuestran que las funciones también son crecientes, de manera que con el paso del tiempo los niveles de contaminación de $PM_{2.5}$ y O_3 aumentarán.

En ausencia de puntos de cambio, se determinaron los siguientes parámetros α y β con los cuales se podrán construir las funciones de riesgo acumuladas:

	Información estadística				
	Parámetros	dist. inicial	Media	sd	intervalo 95 %
PM_{10}	α_1	$unif(1, 3)$	1.02	0.01	(1.00; 1.06)
	β_1	$unif(1, 10)$	3.87	0.45	(3.25; 4.99)
$PM_{2.5}$	α_1	$dunif(1, 2.5)$	1.16	0.03	(1.12; 1.24)
	β_1	$dunif(6.3; 78.5)$	1.75	0.42	(6.43; 10.13)
O_3	α_1	$dunif(1, 5.99)$	1.21	0.03	(1.16; 1.29)
	β_1	$dunif(11.9, 141)$	13.37	1.41	(11.94; 17.12)

Tabla 2.3: Información estadística de cada modelo sin puntos de cambio.

Teniendo estos parámetros, en la figura 2.3 se presentan las diferentes funciones de riesgo $\lambda(t)$ para cada uno de los tres contaminantes, esto sin tener en cuenta algún punto de cambio.

El comportamiento de los rebases de cada contaminante se puede observar a través de la función de media acumulada $m(t)$, observada y estimada. En nuestro caso se observa en la figura 2.4, la función de media acumulada estimada en color azul, frente a lo estimado con un intervalo de confianza del 95 % de credibilidad, lo cual se representa mediante las líneas verdes, buscando hacer un ajuste y contraste con lo observado, que se presenta de color negro.

Se puede observar, que para el caso del PM_{10} , el modelo inicia con un buen ajuste, sin embargo para los meses posteriores a enero del 2019, se ve un desajuste considerable. Caso contrario el del $PM_{2.5}$ cuya estimación no es favorable en la mayoría de los meses estudiados, al igual que en el caso del ozono, en el cual se ve un buen ajuste durante los tres primeros meses y durante el mes de abril del año 2020.

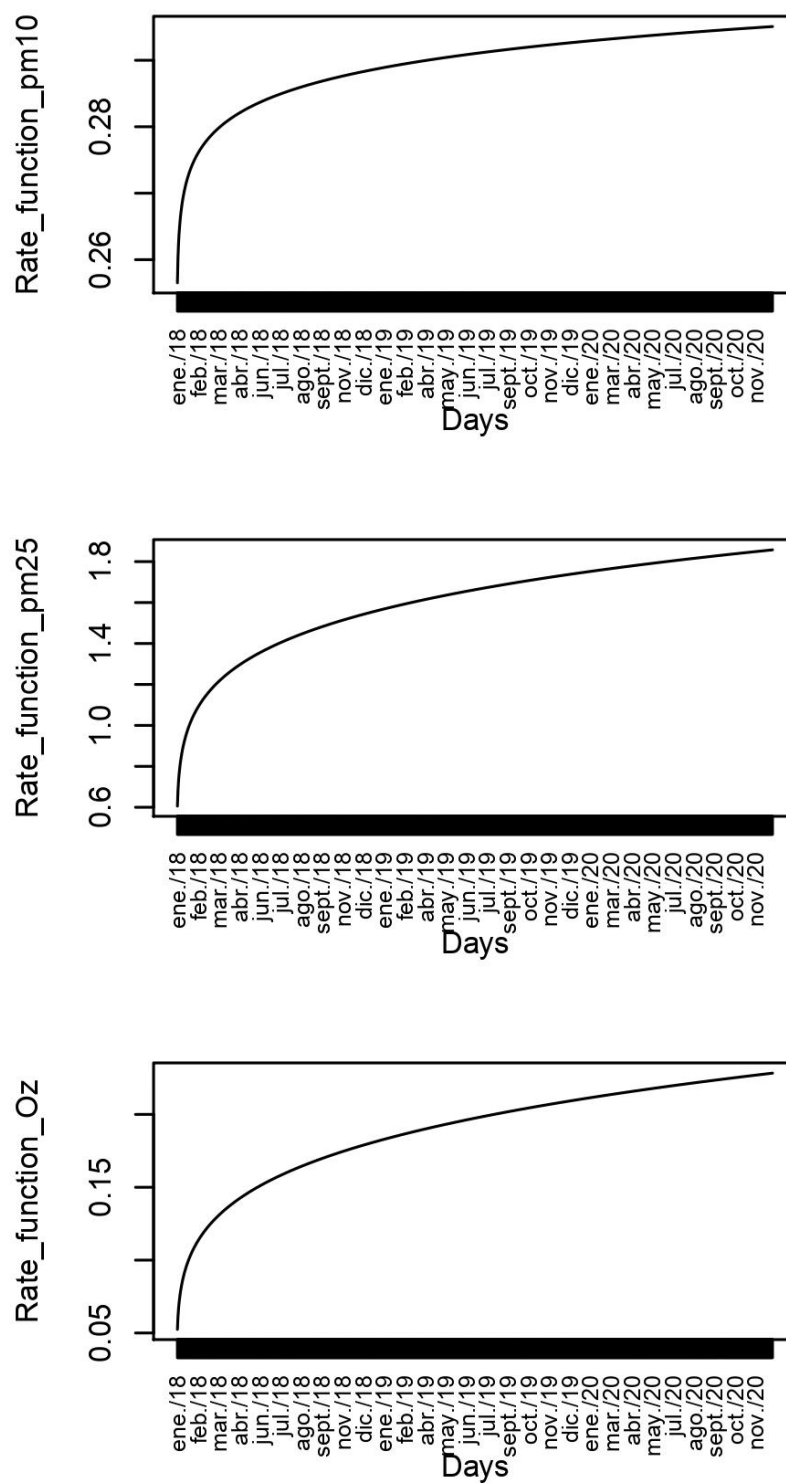


Figura 2.3: Función de riesgo $\lambda(t)$, estimada para el modelo en ausencia de puntos de cambio.

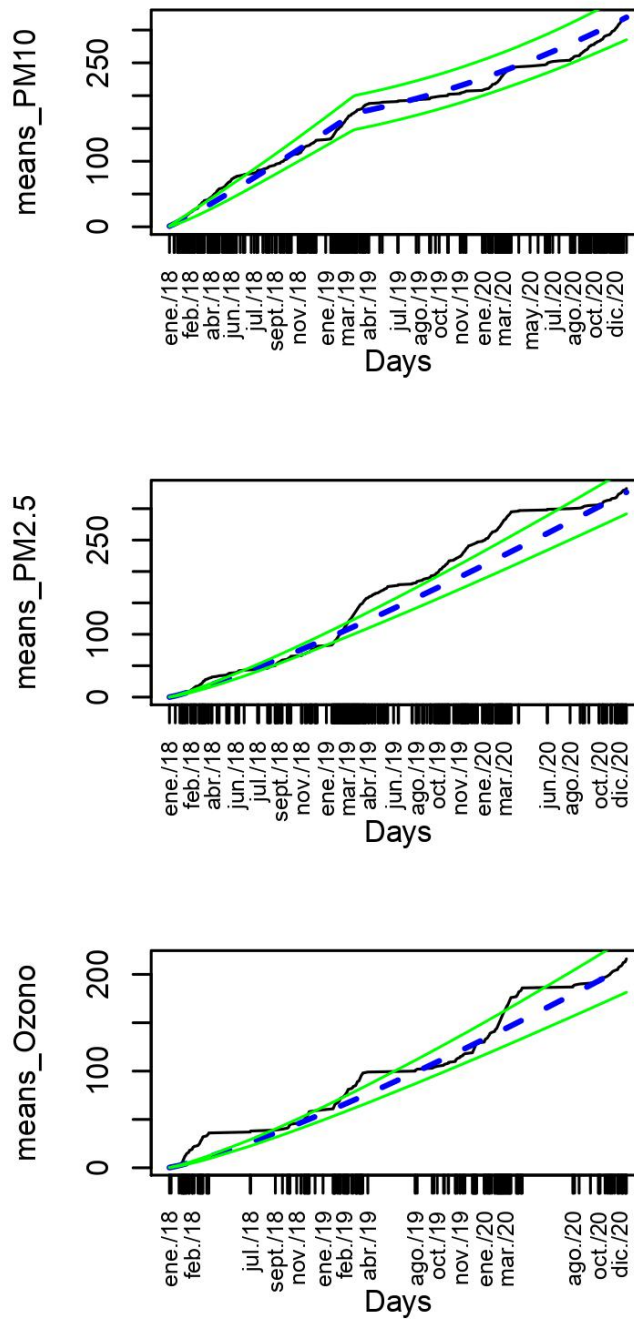


Figura 2.4: Función de media acumulada (azul), junto con los intervalos de confianza estimados con un 95 % de confianza (verde) y los datos observados (negro).

2.2. Un punto de cambio

Este primer punto se encontró gráficamente, observando cambios en la figura 2.2, e identificando acontecimientos sucedidos en las fechas donde se observan dichos cambios.

Estos puntos pueden ser aproximadamente los siguientes: $\tau_1 = 380$, $\tau_2 = 415$ y $\tau_3 = 115$, para PM_{10} , $PM_{2.5}$ y O_3 respectivamente.

Para estos modelos se tendrán en cuenta dos tramos de las gráficas de medias acumuladas, que estarán determinados por el punto de cambio elegido. Es decir que antes de cada punto de cambio se determinarán un α y un β y para después del punto de cambio, otros α y β diferentes. Estos modelos se presentan en la figura 2.5

Los parámetros estimados para este modelo, fueron obtenidos realizando 20.000 iteraciones, al igual que en sin un punto de cambio. Se observa aquí que los parámetros α para el contaminante PM_{10} fueron mayores que 1, lo que indica que el comportamiento del contaminante, tiende a aumentar su concentración con el paso del tiempo. De la misma forma, para los contaminantes $PM_{2.5}$ y O_3 ambos parámetros son mayores que 1, de manera que, así como se observó en el modelo sin puntos de cambio, antes y después del punto establecido, los contaminantes mantienen la predicción de aumento con el paso del tiempo. Estos resultados se encuentran resumidos en la tabla 2.4 y la gráfica correspondiente a las funciones de riesgo se muestran en la figura

	Información estadística				
	Parámetros	dist. inicial	Media	sd	intervalo 95 %
PM_{10}	τ_1	$dunif(350, 450)$	318.94	17.86	(284.70; 354.50)
	α_1	$dunif(1, 3)$	1.09	0.06	(1.00; 1.23)
	β_1	$dunif(1, 100)$	316.30	17.61	(282.86; 351.89)
	α_2	$dunif(1, 3)$	2.02	0.11	(1.74; 2.17)
	β_2	$dunif(1, 100)$	316.61	17.63	(283.16; 352.24)
$PM_{2.5}$	τ_1	$dunif(350, 500)$	483.53	9.44	(465.86; 498.37)
	α_1	$dunif(1, 2.5)$	1.45	0.11	(1.25; 1.68)
	β_1	$dunif(6.4, 78.5)$	14.90	4.04	(8.19; 23.72)
	α_2	$dunif(1, 2.5)$	1.28	0.15	(1.10; 1.65)
	β_2	$dunif(6.4, 78.5)$	15.21	9.15	(6.58; 41.13)
O_3	τ_1	$dunif(50, 200)$	49.70	14.52	(23.24; 82.00)
	α_1	$dunif(1, 5.9)$	1.83	0.17	(1.57; 2.24)
	β_1	$dunif(11.9, 141)$	212.85	14.48	(185.59; 242.55)
	α_2	$dunif(1, 5.9)$	1.67	0.16	(1.36; 2.00)
	β_2	$dunif(11.9, 141)$	14.59	2.29	(11.98; 20.36)

Tabla 2.4: Información estadística de cada modelo con un punto de cambio.

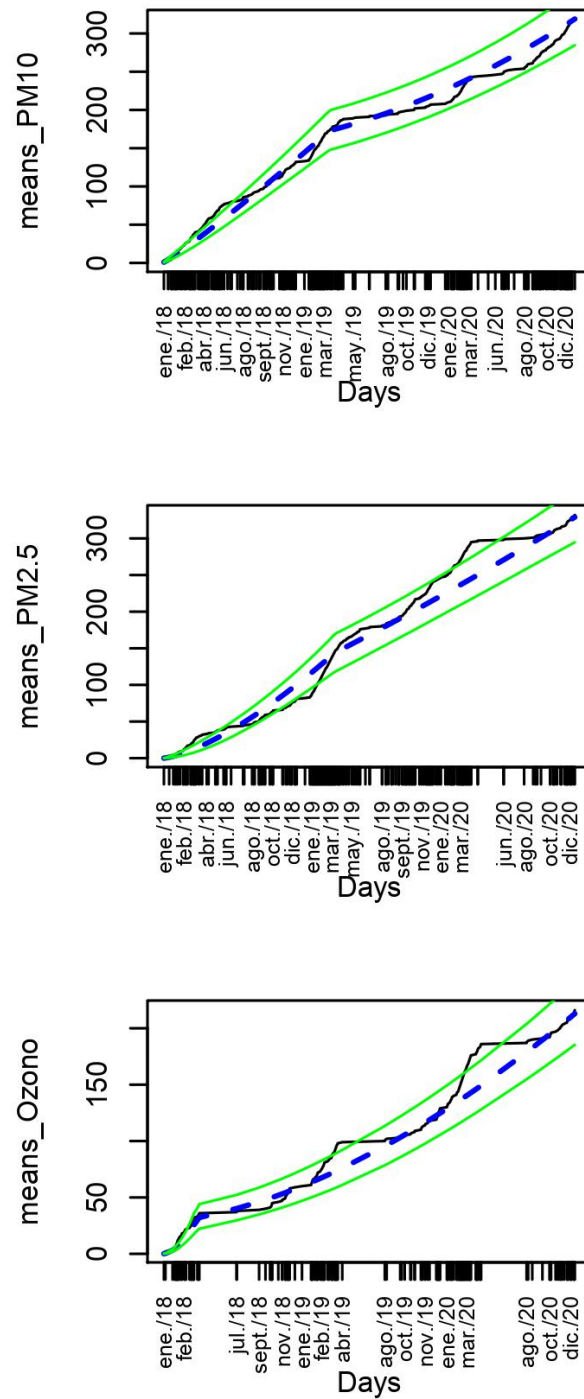


Figura 2.5: Función de media acumulada (azul), junto con los intervalos de confianza estimados con un 95% de confianza (verde) y los datos observados (negro), para un punto de cambio.

2.3. Dos puntos de cambio:

2.4. Política pública:

Como ya se mencionó, los puntos de cambio de los modelos construidos se determinaron

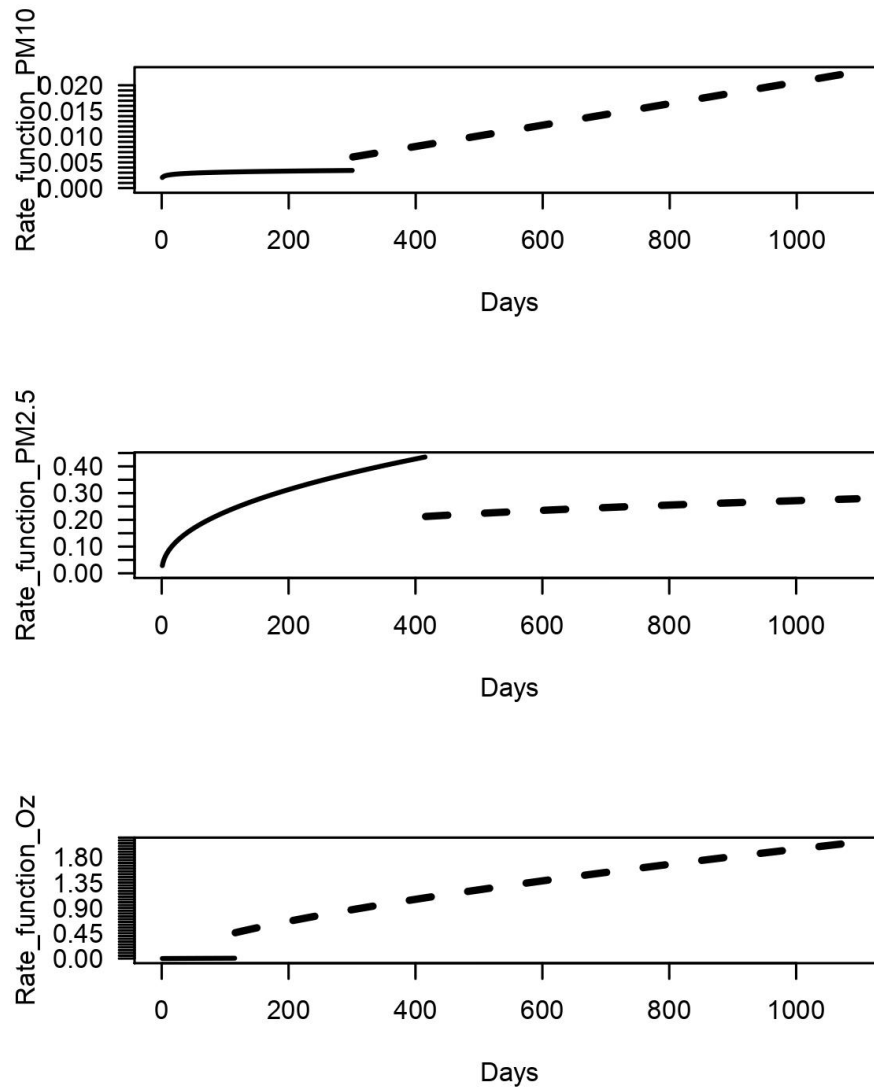


Figura 2.6: Función de riesgo $\lambda(t)$, estimada para el modelo construido bajo un punto de cambio.

contaminantes, para justificar estos puntos, una estrategia es identificar algunas de las estrategias del gobierno nacional para mitigar la contaminación ambiental durante estas fechas. Uno de los insumos mas importantes que permite identificar esto, es el *plan decenal de desconaminación del aire de Bogotá* que elabora cada 10 años y al cual se le realizan revisiones periódicas para verificar su alcance y cumplimiento. El documento que compete a esta investigación, es el elaborado para la década del 2010 al 2020 [5], en el cual, al igual que en la anterior década, se centran en la implementación de las siguientes acciones para mejorar la calidad del aire

- Pico y placa ambiental.

- Pico y placa de movilidad.
- Mejoramiento del ACPM.
- Operativos en Vía.
- Control a fuentes industriales.
- Inventarios de emisiones.

Estas acciones, se organizaron para ser implementadas durante los 10 años, para el caso del periodo de tiempo que se esta teniendo en cuenta en el presente documento, las acciones planteadas son, para el 2019 y 2020 únicamente, en el sector industrial, se estableció el proyecto *Uso de sistemas de control de emisiones*, para los años 2012 al 2020, en cuestiones de transporte, se debían implementar los proyectos *Uso de sistemas de control de emisiones en vehículos de transporte de carga*, y *Uso de sistemas de control de emisiones en motocicletas* y para el periodo comprendido entre 2011 y 2020 el proyecto *Implementación del sistema integrado de transporte público*. Buscando que, de acuerdo con las proyecciones y con los proyectos establecidos, la tendencia de contaminación del material particulado, por ejemplo, muestre el comportamiento mostrado en la figura 2.7

En la ciudad de Bogotá, se han reducido los niveles de concentración de PM_{10} y $PM_{2.5}$ entre los años de 2012 y 2017 gracias a las propuestas implementadas en el plan decenal de decontaminación del aire para Bogotá, como por ejemplo la integración del transporte público SITP y la discontinuación de algunas busetas que no cumplían con las características establecidas para contrarrestar la contaminación; el seguimiento y control en la industria, aumento en los días sin carro, entre otras. Puntualmente, para el caso del PM_{10} y el $PM_{2.5}$ su primer punto de cambio ocurre al rededor del dato 400, el cual corresponde a una fecha aproximada al 4 de febrero del 2019, este cambio se puede explicar en parte, por la resolución 383 del año 2019 [4], en la cual se declara alerta amarilla porque el material particulado excede los umbrales máximos permitidos. Así mismo, para el caso del Ozono, sucede algo similar solo que su primer punto de cambio ocurre en marzo del 2018, cuando en la resolución 831 de 2018 [3] también es decretada la alerta amarilla por contaminación ambiental y se establecen algunas restricciones en la ciudad de Bogotá, como por ejemplo establecer restricciones en el sector de transporte y movilidad y restringir la operaciones de fuentes fijas industriales que operan con combustibles sólidos y líquidos.

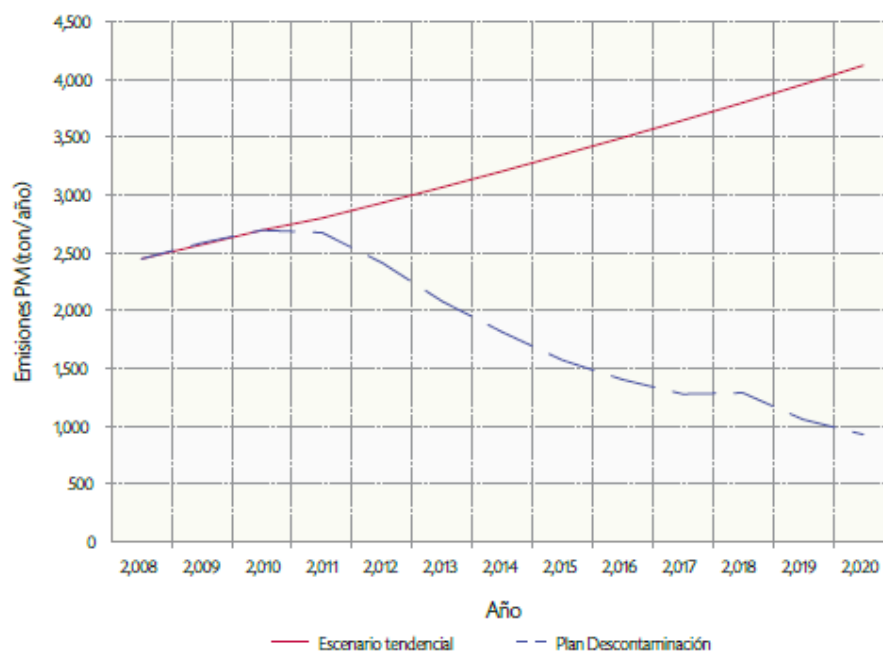


Figura 2.7: Emisiones de material particulado entre 2008 y 2020, en los escenarios de tendencia versus el plan de descontaminación, tomado del plan decenal de descontaminación del aire de Bogotá [5].

2.5. Diagnóstico de convergencias

2.5.1. Sin puntos de cambio

De acuerdo a las simulaciones generadas para cada modelo, se realizaron los análisis de convergencia correspondientes obteniendo resultados favorables que indican que el modelo muestra buenos resultados pues los parámetros cumplen la mayoría de los criterios, esto se muestra en las tablas 2.5, 2.6 y 2.7.

En todos los casos, para el criterio de convergencia propuesto en Geweke (1992), se observa que cada una de las pruebas aplicadas a las cinco cadenas realizadas, satisface la condición de que el valor Z calculado, se encuentre entre el intervalo $(-2, 2)$ esto da un buen indicio sobre la convergencia de los parámetros.

Por otra parte, el criterio Heidelberg-Welch de estacionalidad fue satisfactoria para todas las cadenas, por lo cual se identifica si el ancho medio para cada una de ellas es menor que $\varepsilon = 0.1$, y esto, en efecto es cierto en todas las cadenas realizadas para los tres contaminantes.

Y finalmente el criterio de Gelman Rubin, menciona que valores cercanos a 1, indicarían una posible convergencia y en cada uno de los tres contaminantes su valor fue cercano a 1. De esta manera, cumpliendo la mayoría de condiciones de cada uno de los criterios de convergencia estudiados, se puede afirmar con seguridad que los parámetros estimados funcionan adecuadamente.

	Diagnóstico de convergencia					
	Parámetro	cadena 1	cadena 2	cadena 3	cadena 4	cadena 5
Geweke	α	0.7131	-0.18966	0.5049	-0.3310	-0.3435
	σ	0.7133	-0.05731	0.4922	-0.4261	-0.3172
Raftery - Lewis	α	1.35	1.28	2.07	1.26	1.31
	σ	1.51	2.61	1.70	2.38	1.58
H-W Estacionalidad	α	0.877	0.642	0.903	0.916	0.680
	σ	0.890	0.598	0.826	0.984	0.747
H-W 1/2 Ancho	α	0.00107	0.00106	0.00112	0.000986	0.000891
	σ	0.02705	0.02698	0.02746	0.024899	0.022256
Gelman - Rubin	α	1.00				
	σ	1.00				

Tabla 2.5: Información de convergencia para el modelo PM_{10} , sin puntos de cambio. H-W=Heidelberger-Welch

	Diagnóstico de convergencia					
	Parámetro	cadena 1	cadena 2	cadena 3	cadena 4	cadena 5
Geweke	α	0.0959	0.5630	-1.785	-1.455	-0.2081
	σ	0.1362	0.4231	-1.836	-1.423	-0.1948
Raftery - Lewis	α	2.51	1.85	2.50	2.56	2.56
	σ	2.13	2.41	2.43	2.29	2.34
H-W Estacionalidad	α	0.229	0.764	0.795	0.484	0.0534
	σ	0.308	0.507	0.776	0.474	0.8327
H-W 1/2 Ancho	α	0.00291	0.00253	0.00253	0.00232	0.00246
	σ	0.09838	0.08906	0.08830	0.07683	0.07932
Gelman - Rubin	α	1				
	σ	1				

Tabla 2.6: Información de convergencia para el modelo $PM_{2.5}$, sin puntos de cambio. H-W=Heidelberger-Welch

	Diagnóstico de convergencia					
	Parámetro	cadena 1	cadena 2	cadena 3	cadena 4	cadena 5
Geweke	α	0.7882	0.2856	0.7351	0.9028	-0.07696
	σ	0.7052	0.2041	0.9396	0.8609	-0.14975
Raftery - Lewis	α	1.72	1.67	2.40	1.94	1.80
	σ	1.31	1.26	1.34	1.22	1.25
H-W Estacionalidad	α	0.408	0.907	0.234	0.351	0.273
	σ	0.4185	0.924	0.113	0.374	0.335
H-W 1/2 Ancho	α	0.00139	0.00172	0.00163	0.0018	0.00151
	σ	0.06699	0.08421	0.07863	0.0883	0.07574
Gelman - Rubin	α	1				
	σ	1.01				

Tabla 2.7: Información de convergencia para el modelo O_3 , sin puntos de cambio. H-W=Heidelberger-Welch

2.5.2. Un punto de cambio

El diagnóstico de convergencia para un punto de cambio, arrojó algunos resultados importantes que se deben mencionar. Iniciando con el criterio de Geweke (1992), este es satisfactorio en las cinco cadenas realizadas para el material particulado de $10\mu m$ de tamaño pues la comparación de los valores de las medias iniciales y finales de las cadenas, están entre -2 y 2. Para el caso del $PM_{2.5}$ se observa en la tabla 2.9 que en algunas de las cadenas los valores no se encuentran entre -2 y 2, es el caso de los parámetros α_2 y σ_2 , en los cuales en dos y tres de las cadenas, respectivamente, los resultados se encuentran fuera del intervalo que se considera adecuado, sin embargo, estos números no son significativamente grandes. Para el caso del O_3 sucede lo mismo que en el PM_{10} pues todos sus valores se encuentran dentro del intervalo que genera

confianza, para poder hablar de estacionalidad y posiblemente de convergencia.

Otro de los criterios que proporciona información sobre la convergencia de los parámetros es el test de estacionalidad de Heidelberger-Welch, pues los tres contaminantes lo pasaron, de manera que se procede a hacer la revisión del criterio del Ancho medio, el cual es satisfactorio para todos los parámetros α_1 y α_2 de los tres contaminantes, a excepción de una cadena del contaminante Ozono, sin embargo al ser solo una de cinco cadenas, no se tiene en cuenta, de forma que todos los parámetros a_1 y a_2 tienen una confirmación más de que tienen convergencia. Para el caso de los parámetros σ_1 y σ_2 este criterio, muestra que en algunas cadenas, sus valores no son menores a 0.1, por tanto este criterio no es suficiente o de apoyo para argumentar convergencia de ellos, de forma similar con el parámetro τ en el caso de los tres contaminantes.

Finalmente, para el caso de los modelos con un solo punto de cambio, se observó que el criterio Gelman- Rubin, es satisfactorio en los tres modelos, pues sus valores son cercanos a 1, toda la información anterior, se encuentra resumida en las tablas 2.8, 2.9 y 2.10.

	Diagnóstico de convergencia					
	Parámetro	cadena 1	cadena 2	cadena 3	cadena 4	cadena 5
Geweke	α_1	-0.2161	-0.3797	0.8125	-0.6749	1.4716
	σ_1	-0.2583	-0.3447	0.8189	-0.6263	1.5856
	α_2	-0.3066	-0.1314	-1.1402	-0.4315	1.0628
	σ_2	-0.3165	0.1059	-1.1862	-0.4369	1.0672
	τ	-1.8701	-0.6091	-1.4073	0.1858	-0.7393
Raftery - Lewis	α_1	4.49	5.25	2.88	2.67	2.83
	σ_1	3.64	3.41	3.51	3.01	36.30
	α_2	18.60	30.10	13.60	27.40	4.69
	σ_2	19.00	28.50	13.80	29.10	44.70
	τ	5.81	6.90	6.85	6.32	5.95
H-W Estacionalidad	α_1	0.5609	0.986	0.193	0.186	0.996
	σ_1	0.5359	0.983	0.259	0.212	0.995
	α_2	0.0573	0.509	0.651	0.122	0.653
	σ_2	0.0973	0.593	0.639	0.125	0.646
	τ	0.4983	0.637	0.645	0.327	0.384
H-W 1/2 Ancho	α_1	0.00642	0.00547	0.00679	0.00705	0.00758
	σ_1	0.12170	0.10158	0.12922	0.13551	0.14583
	α_2	0.01301	0.01932	0.01404	0.01324	0.01780
	σ_2	1.57577	1.86337	1.58302	1.43715	1.75334
	τ	0.16809	0.17736	0.19509	0.18970	0.21971
Gelman - Rubin	α_1	1.01				
	σ_1	1.01				
	α_2	1.00				
	σ_2	1.00				
	τ	1.00				

Tabla 2.8: Información de convergencia para el modelo PM_{10} , un punto de cambio. H-W=Heidelberger-Welch

	Diagnóstico de convergencia					
	Parámetro	cadena 1	cadena 2	cadena 3	cadena 4	cadena 5
Geweke	α_1	-0.2860	-1.0051	-17.774	0.7692	-0.5075
	σ_1	-0.3071	-0.9200	0 - 12.524	0.7046	-0.5437
	α_2	-2.6915	-3.8182	-1.997	-1.5921	-1.3143
	σ_2	-2.5533	-3.4243	-4.756	-1.4134	-1.2864
	τ	0.2518	-0.2185	-13.928	0.6264	1.0813
Raftery - Lewis	α_1	13.60	11.20	8.37	14.30	12.10
	σ_1	12.00	13.00	6.89	11.40	12.70
	α_2	4.54	3.14	4.19	2.85	6.01
	σ_2	3.87	3.99	2.60	29.10	5.17
	τ	7.59	4.33	14.40	8.44	5.05
H-W Estacionalidad	α_1	0.713	0.2035	0.970	0.381	0.746
	σ_1	0.714	0.2018	0.982	0.361	0.743
	α_2	0.161	0.0714	0.104	0.445	0.217
	σ_2	0.203	0.1176	0.166	0.647	0.322
	τ	0.951	0.1457	0.989	0.563	0.328
H-W 1/2 Ancho	α_1	0.0161	0.0150	0.0184	0.0148	0.0167
	σ_1	0.5514	0.5158	0.5726	0.4953	0.5719
	α_2	0.0239	0.0206	0.0149	0.0154	0.0120
	σ_2	1.4992	1.1535	0.8434	0.8537	0.6364
	τ	0.2058	0.1376	5.0098	0.4146	0.1456
Gelman - Rubin	α_1	1.03				
	σ_1	1.01				
	α_2	1.03				
	σ_2	1.05				
	τ	2.65				

Tabla 2.9: Información de convergencia para el modelo $PM_{2.5}$, un punto de cambio. H-W=Heidelberger-Welch

	Diagnóstico de convergencia					
	Parámetro	cadena 1	cadena 2	cadena 3	cadena 4	cadena 5
Geweke	α_1	0.1738	-1.8966	0.06743	-3.1571	-1.49105
	σ_1	-0.7537	-0.8614	0.23790	-2.5854	-1.0130
	α_2	-1.7965	-1.6817	1.22712	0.8546	1.02269
	σ_2	-1.9557	-1.6606	1.19464	0.8934	0.9521
	τ	-0.7835	1.1726	-0.22160	0.9531	1.7600
Raftery - Lewis	α_1	2.54	2.67	1.76	1.80	1.91
	σ_1	1.34	1.24	1.37	11.40	34.00
	α_2	16.60	29.60	29.40	32.50	2.51
	σ_2	20.70	18.50	27.60	35.70	42.00
	τ	2.90	2.52	32.30	2.11	9.89
H-W Estacionalidad	α_1	0.360	0.000394	0.421	0.0629	0.222
	σ_1	0.193	0.070700	0.2334	0.2334	0.808
	α_2	0.634	0.731613	0.529	0.6852	0.340
	σ_2	0.582	0.777112	0.504	0.6699	0.286
	τ	0.729	0.206458	0.574	0.3733	0.183
H-W 1/2 Ancho	α_1	0.0134	NA	0.00964	0.0143	0.0107
	σ_1	0.1459	0.1456	0.13497	0.1554	0.1403
	α_2	0.0283	0.0256	0.02509	0.0264	0.0265
	σ_2	2.5965	2.3807	2.32836	2.3940	2.4613
	τ	1.2920	2.0953	0.56484	1.9224	0.9394
Gelman - Rubin	α_1	1.01				
	σ_1	1.00				
	α_2	1.03				
	σ_2	1.03				
	τ	1.16				

Tabla 2.10: Información de convergencia para el modelo O_3 , un punto de cambio. H-W=Heidelberger-Welch

Bibliografía

- [1] Suárez, B. M. (2020). Modelos de Poisson no homogéneos en el estudio de contaminantes en la ciudad de Bogotá, Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de doctorado.
- [2] Nelsen, R. B. (2006) An Introduction to Copulas (Springer Series in Statistics). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [3] RES(2018). Resolución 831 Por el cual se Declara la Alerta Amarilla por contaminación atmosférica en la ciudad de Bogotá D.C. Secretaria Distrital de Ambiente.
- [4] RES(2019). RPor la cual se Declara Alerta Amarilla en la Ciudad de Bogotá D.C, y Alerta Naranja en el Sur Occidente de la Ciudad por contaminación atmosférica, y se toman otras determinaciones. Secretaria Distrital de Ambiente.
- [5] SDA (2010). Plan de desconaminación del aire.