Inhaltsverzeichnis

1 Einfaches

1.1 Indirekter Beweis

Zum Beweis der Formel $A \to B$ genügt es, die Formel $\neg B \to \neg A$ zu zeigen, oder die Annahme $A \wedge \neg B$ zum Widerspruch zu führen.

1.2 Vollständige Induktion

Kann für ein Prädikat $P(n)$ bewiesen werden, dass $P(n_0)$ und $\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \wedge P(n) \to P(n+1)$ gilt, dann folgt daraus $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \to P(n)$.

Induktionannahme (IA) bezeichnet das Prädikat $P(n)$.

Induktionsverankerung (IV) ist der Beweis von $P(n_0)$.

Induktionsschritt (IS) ist der Beweis von $P(n) \to P(n+1)$.

1.3 Logik

Wahrheitstafel als Definition gängiger, bool'scher Operatoren

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

1.4 Mengen

1.4.1 Definitionen

Seien im Folgenden A, B Mengen.

(1) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ – *Vereinigung*

(2) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ – *Durchschnitt*

(3) $A \backslash B := A - B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ – *Differenz*

(4) $A^C := \overline{A} := x \mid x \notin A = M \backslash A$ – *Komplement (bzgl. M)*

(5) $A \subseteq B := \forall x \in A : x \in B$. – *Teilmenge*

1.4.2 Rechenregeln

Diese Beweise (und ähnliche) können durch Einsetzen der obigen Definitionen und logisches Umformen geführt werden.

(1) $A \cup B = B \cup A$,
$A \cap B = B \cap A$.

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) $(A \backslash B) = A \cap B^C$.

(5) $(A \backslash B) \cup C = (A \cup B) \cap (B^C \cup C)$,
$(A \backslash B) \cap C = A \backslash (B \cup C^C)$.

(6) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

(7) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

1.4.3 Wichtige Mengen

$\mathbb{N}_0$, natürliche Zahlen mit 0 $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$\mathbb{N}$, natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

$\mathbb{Z}$, ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

$\mathbb{Q}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$.

$\mathbb{R}$, reelle Zahlen $\mathbb{R} :=$ rationale und irrationale Zahlen, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$, komplexe/reelle Zahlen $\mathbb{C} := \{a - bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, mit $i^2 = -1$.

1.4.4 Intervalle

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossen
$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} := (a, b]$	halboffen (links)
$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} := [a, b)$	halboffen (rechts)
$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} := (a, b)$	offen

(1) Offene Intervalle sind offene Mengen

(2) Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossene Mengen

(3) Abgeschlossene, beschränkte Intervalle ($a, b \neq \infty$) sind kompakt.

1.4.5 Mächtigkeit

Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt. Wir schreiben $|A| = |B|$.
Es gilt $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |[a, b]| = |\mathbb{C}|$.

1.4.6 Schubfachprinzip

Wenn n Objekte auf m Mengen verteilt werden sollen, und es gilt $n > m$, so wird mindestens eine Menge doppelt belegt.

1.4.7 Topologie

Sei im Folgenden $\Omega, A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definitionen

(1) Die Menge $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - x_0| < r\}$ heißt *offener Ball* mit Radius $r > 0$ um $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

(2) $x_0 \in \Omega$ heißt *innerer Punkt* von Ω falls $\exists r > 0 : B_r(x_0) \subseteq \Omega$.

(3) Ω heißt *offen* falls alle $x \in \Omega$ innere Punkte sind.

(4) A heißt *abgeschlossen* falls $\mathbb{R}^d \backslash A$ offen ist.

(5) $\Omega^o := \operatorname{int}(\Omega) = \bigcup_{U \subseteq \Omega, U \text{offen}} U$ heißt *offener Kern* von Ω.

(6) $\operatorname{clos}(\Omega) := \bigcap_{A \supseteq \Omega}, A \text{abgeschlossen} A$ heißt *Abschluss* von Ω.

(7) $\partial\Omega := \operatorname{clos}(\Omega) \backslash \operatorname{int}(\Omega)$ heißt *Rand* von Ω.

(8) Ω heißt *kompakt*, falls alle Folgen $(x_n) \subseteq \Omega$ ein Häufungspunkt (s. u.) in K haben.

Sätze

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^d$ sind offen und abgeschlossen.

(2) $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\implies \Omega_1 \cap \Omega_2$ offen.

(3) $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\implies \bigcup_{i \in I} \Omega_l$ offen.

(4) $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen $\implies A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

(5) $A_i \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen $\implies \bigcap_{i \in I} A_l$ abgeschlossen.

2 Mittleres

2.1 Folgen

2.1.1 Definitionen

Falls nicht anders angegeben, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

Grenzwert Der *Grenzwert* a einer Folge existiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : |a - a_n| < \varepsilon$$

mit $\varepsilon \in \mathbb{R}; n, n_0 \in \mathbb{N}$.
Wir schreiben dann $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder auch $a_n \to a$. Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

konvergent Der Grenzwert existiert.

divergent Der Grenzwert existiert nicht.

Nullfolge $a = 0$.

beschränkt $\exists C \in \mathbb{R} : |a_n| \leq C$.

unbeschränkt Falls nicht beschränkt, *immer* divergent!

monoton wachsend $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

monoton fallend $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton wachsend $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton fallend $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

alternierend $a_n < 0 \implies a_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

bestimmt divergent / uneigentlich konvergent $a = \pm\infty$

Teilfolge Durch Weglassen von Gliedern aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entstandene, (normalerweise) unendliche Folge.

Häufungspunkt $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolge.

$\limsup_{n\to\infty} a_n := \max\{b_n \text{ konvergente Teilfolge} \mid \lim_{n\to\infty} b_n\}$

$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min\{b_n \text{ konvergente Teilfolge} \mid \lim_{n\to\infty} b_n\}$

2.1.2 Konvergenzkriterien

(1) $a_n \to a \implies a_n - a \to 0 \implies |a_n - a| \to 0$.

(2) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen ihren Grenzwert. Eine konvergente Folge hat also genau einen Häufungspunkt.

(3) (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt $\implies$ (a_n) konvergent.

(4) (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt $\implies$ (a_n) konvergent.

(5) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ konvergent $\implies a_n \to a = 0$, siehe Reihen.

(6) $\exists f, f(n) = a_n \wedge \lim_{x\to\infty} f(x) = a \implies \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(7) $\exists (a_n), (b_n), (c_n)$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n \wedge a = c \implies b = a$, sogenanntes **Einschließungskriterium**.

Cauchy-Kriterium Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Insbesondere gilt, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\iff$ (a_n) Cauchy-Folge. Siehe auch **Tipps an Beispielen** für angewandte Kriterien.

2.1.3 Rechenregeln für Eigenschaften

Addition

(1) $(a_n), (b_n)$ konvergent $\implies (a_n + b_n)$ konvergent.

(2) $(a_n), (b_n)$ beschränkt $\implies (a_n + b_n)$ beschränkt.

(3) (a_n) konvergent, (b_n) divergent $\implies (a_n + b_n)$ divergent.

(4) (a_n) beschränkt, (b_n) unbeschränkt $\implies (a_n + b_n)$ unbeschränkt.

(5) (a_n) beschränkt, $(b_n) \to \pm\infty \implies (a_n + b_n) \to \pm\infty$.

(6) $(a_n) \to \pm\infty$, $(b_n) \to \pm\infty \implies (a_n + b_n) \to \pm\infty$.

Multiplikation

(1) (a_n) Nullfolge, (b_n) beschränkt $\implies (a_n \cdot b_n)$ Nullfolge.

(2) $(a_n), (b_n)$ konvergent $\implies (a_n \cdot b_n)$ konvergent.

(3) $(a_n), (b_n)$ beschränkt $\implies (a_n \cdot b_n)$ beschränkt.

(4) $(a_n) \to a, a \neq 0$, (b_n) divergent $\implies (a_n \cdot b_n)$ divergent.

Grenzwerte Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n, b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(2) $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$.

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(4) $\lim_{n\to\infty}((a_n)^c) = a^c$, c konstant.

(5) $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}, b \neq 0$.

2.1.4 Hilfsmethoden

Referenzfolgen Für folgende Folgen gilt: weiter rechts stehende wachsen schneller gegen $+\infty$.

$$1, \ln(n), n^a (a > 0), q^n (q > 1), n!, n^n$$

Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x \geq -1, n \in \mathbb{N})$

Stirlingformel – Abschätzungen für $n!$

$$\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \cdot e^{\frac{1}{12n}},$$

insbesondere gilt $\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \approx n!$

2.1.5 Tipps an Beispielen

Gruppieren von Gliedern

Wurzel

Bruch

n im Exponent

Cauchy-Kriterium Seien $l \geq m$ positiv gewählt, dann gilt

$$|a_l - a_m| = \left|\frac{1}{l} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m-l}{lm}\right| \leq \frac{m}{lm} = \frac{1}{l}$$

Also damit a_n Cauchy, muss $\frac{1}{l} < \varepsilon$. Wir wählen $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, und fordern $l \geq m > n_0$ so dass gilt $l \geq m > \frac{1}{\varepsilon}$ und dann auch $\frac{1}{l} < \varepsilon$

2.2 Reihen

2.2.1 Definitionen

Eine *Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent* mit Grenzwert s, wenn die Folge der *Partialsummen* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ gegen s konvergiert. Es gilt also wie folgt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

2.2.2 Konvergenzkriterien

Nullfolge als Notwendigkeit Falls (a_n) keine Nullfolge, gilt Folgendes nicht und somit konvergiert auch nicht folgende Reihe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ε-Kriterium $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |\sum_{k=1}^{n} a_k - s| < \varepsilon$

Absolute Konvergenz Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so sagen wir die Reihe konvergiert absolut. Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Die Umkehrung gilt i. A. nicht.

Majorantenkriterium Ist $|a_n| \leq b_n$ und gibt es eine konvergente *Majorante* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Minorantenkriterium Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ und gibt es eine divergente *Minorante* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Leibnizkriterium Wenn folgende 3 Kriterien erfüllt sind, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(1) (a_n) ist alternierend, also $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 0 \implies a_{n+1} > 0$

(2) $a_n \to 0$ oder $|a_n| \to 0$

(3) $(|a_n|)$ ist monoton fallend

Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q \implies \begin{cases} q < 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \implies \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q \implies \begin{cases} q < 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \implies \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

2.2.3 Potenzreihe

Die *Potenzreihe* hat die allgemeine Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dabei nennt man x_0 den *Entwicklungspunkt.*

Wichtige Potenzreihen

- $e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$

Konvergenzradius Der *Konvergenzradius* sei wie folgt definiert.

$$r := \sup\{|z| \;\Big|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ist konvergent}\}$$

Es gilt also insbesondere, dass die Reihe für alle $|z| < r$ konvergiert und für für alle $|z| > r$ divergiert. Er kann mit der *Formel von Cauchy-Hadamard* wie folgt berechnet werden.

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Gilt außerdem, dass ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $n \geq n_0$ $a_n \neq 0$ gilt, so können wir auch wie folgt r berechnen.

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Randpunkte Der Konvergenzradius gibt keine Hinweise auf das Konvergenzverhalten der Reihe an den sogenannten *Randpunkten* $\pm r$. Hierzu können z. B. die Randpunkte in die Reihe eingesetzt werden und anschließend die Konvergenz überprüft bzw. widerlegt werden.

2.2.4 Rechenregeln

Für *konvergente* Reihen gilt Folgendes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \implies \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$$

Für *absolut konvergente* Reihen gilt außerdem, dass folgende Reihe absolut und unabhängig von der Summationsreihenfolge konvergiert.

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} b_l$$

2.3 Funktionen

Falls nicht angegeben, ist f Abkürzung für $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$. Ω heisst dann Definitionsmenge, $\mathbb{R}^n$ Zielmenge.

2.3.1 Definitionen

Injektivität Eine Funktion heisst *injektiv*, wenn jedes Element der Zielmenge *höchstens* einmal als Funktionswert angenommen wird.

Surjektivität Eine Funktion heisst *surjektiv*, wenn jedes Element der Zielmenge *mindestens* einmal als Funktionswert angenommen wird.

Bijektivität Eine Funktion heisst *bijektiv*, wenn jedes Element der Zielmenge *genau einmal* als Funktionswert angenommen wird. Man kann zu einer Bijektion immer eine Umkehrfunktion finden.

2.3.2 Grenzwerte

Satz von l'Hospital Wenn $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$ und $g'(x) \neq 0$, dann $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Beispiel

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

2.3.3 Stetigkeit

ε-δ-Kriterium $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, wenn Folgendes gilt.

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Definition

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \implies f(x)$ *stetig* im Punkt x_0.

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \implies f(x)$ *stetig ergänzbar* in x_0.

(3) $\forall x_0 \in \Omega : f(x)$ stetig in $x_0 \implies f(x)$ *stetig*.

Sätze über punktweise Stetigkeit Sei f stetig in x_0.

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$.

(2) $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \searrow x_0} x)$ wenn existent.

(3) $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$, für alle Folgen (x_n). – *Folgenkriterium.*

Gleichmäßige Stetigkeit f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \Omega : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Unterschied zur punktweisen Stetigkeit ist, dass δ unabhängig von der Wahl von y bzw. x_0 ist.

Lipschitz-Stetigkeit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* L, wenn gilt:

$$\forall x, y \in \Omega : \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Lokale Lipschitz-Stetigkeit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ heißt *lokal Lipschitz-stetig*, falls zu jedem $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $U = B_r(x_0) \cap \Omega$ existiert, so dass $f|_U : x \in U \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist.

Sätze über gleichmäßige und Lipschitz-Stetigkeit

(1) Ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L, so ist f gleichmäßig stetig, z. B. mit $\delta = \varepsilon / L$.

(2) Ist f gleichmäßig stetig, dann ist f in Ω^C stetig ergänzbar.

(3) Ist umgekehrt Ω beschränkt, f stetig und in Ω^C stetig ergänzbar, so ist f auch gleichmäßig stetig.

2.3.4 Zwischenwertsatz

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. Dann existiert zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) \leq f(b)$) bzw. $u \in [f(b), f(a)]$ (falls $f(b) < f(a)$) ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = u$.
Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird berührt! Bei verschiedenen Vorzeichen von a und b gibt es also eine Nullstelle.

2.3.5 Folgen von Funktionen

Eine *Funktionsfolge* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* auf $I \subseteq \mathbb{R}$ gegen f, wenn $\forall x \in I : f_n(x) \to f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in I : \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Sie *konvergiert gleichmäßig* auf I gegen f, wenn $sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ gilt. Insbesondere ist also das n_0 nicht mehr abhängig von einem x.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \in I : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Tipp: Gleichmäßige Konvergenz kann häufig durch Setzen von $x := n$, oder $x := \frac{1}{n}$ widerlegt werden. Denn $|f_n(x) - f(x)|$ muss gegen Null streben, was dann aber nicht der Fall ist.

2.3.6 Differentialrechnung

Definition Wir sagen $f : I \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ *differenzierbar*, wenn folgender Grenzwert existiert.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \frac{f}{fx} f(x_0) =: f'(x_0)$$

Ist f für alle $x_0 \in I$ differenzierbar, heißt die Funktion selbst *differenzierbar*. Dann ist die Funktion $f'(x)$ die *Ableitung* von f. Gilt außerdem, dass $f'(x)$ stetig ist, so ist f *stetig differenzierbar*.

Mittelwertsatz – Satz von Lagrange Ist f auf $[a, b]$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar, so gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Anders gesagt gibt es ein c, an dem die Steigung gerade die mittlere Steigung beträgt.
Bemerkung: Der Mittelwertsatz kommt häufig bei Ungleichungen zur Anwendung.

Monotonie Das Monotonie-Verhaltens lässt sich anhand der 1. Ableitung bestimmen.

(1) $f' > 0 \implies$ f streng monoton steigend.

(2) $f' < 0 \implies$ f streng monoton fallend.

(3) $f' \geq 0 \iff$ f monoton steigend.

(4) $f' \leq 0 \iff$ f monoton fallend.

Konvexität Die Konvexität lässt sich anhand der 2. Ableitung bestimmen. Dabei heißt eine Funktion f *konvex*, wenn $\forall a, b : f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ und *konkav*, wenn $\forall a, b : f(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Insbesondere ist der Graph einer konvexen Funktion *linksgekrümmt* und der einer konkaven *rechtsgekrümmt*.

(1) $f'' \geq 0 \iff$ f konvex.

(2) $f'' \leq 0 \iff$ f konkav.

Extremstellen Für Extremstellen – also Sattelpunkte, Minima und Maxima – von f gilt $f'(x_0) = 0$. Weitere Eigenschaften sind folgend zusammengefasst.

(1) $f''(x_0) > 0 \implies$ *Minimum* bei x_0.

(2) $f''(x_0) < 0 \implies$ *Maximum* bei x_0.

(3) $f''(x_0) = 0 \lor f'''(x_0) \neq 0 \implies$ *Sattelpunkt* bei x_0.

Aus (3) folgt ohne der Voraussetzung von $f'(x_0) = 0$ übrigens, dass bei x_0 ein *Wendepunkt* vorliegt, also die Funktion von konvex nach konkav bzw. anders herum wechselt.

2.4 Taylorreihe & -entwicklung

Funktionen lassen sich in der Umgebung eines Punktes durch eine Potenzreihe annähern.

Die *Taylorreihe* von f um den Punkt x_0 ist definiert durch:

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)} \cdot a}{n!} (x - x_0)^n$$

Insbesondere nennen wir die *Linearisierung der Taylorreihe* mit Grad m das *m-te Taylorpolynom*. Es ist also:

$$T_m f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(n)} \cdot a}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1} + \frac{f''(x_0)}{2} + \cdots$$

Restglied

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}$$

Rechenregeln

(1) $T_m(f+g)(x) = T_m f(x) + T_m g(x)$ – *Addition*

(2) $T_m(f \cdot g)(x) = T_m f(x) \cdot T_m g(x)$, entferne alle Terme der Ordnung $> m$ – *Multiplikation*

(3) Im Allgemeinen gilt $f(x) = Tf(x)$ nicht. Außerdem kann der Konvergenzradius 0 betragen.

3 Schweres

3.1 Integration

Im Folgenden seien F, f definiert auf $]a, b[$.

(1) F heißt Stammfunktion von f falls $F' = f$.

(2) Für Stammfunktionen F_1, F_2 von f gilt: $F_1 - F_2$ konstant.

(3) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx := F(x_1) - F(x_0)$ heißt Integral von f über $[x_0, x_1]$. Dabei ist $a < x_0 <= x_1 < b$ und $F' = f$.

(4) **Hauptsatz:** $F(y) = \int_a^y f(x)dx, y \in \,]a, b[\implies F' = f$.

3.1.1 Rechenregeln

Das Integral ist ein *lineares* und *monotones* Funktional, wie folgende zwei Sätze zeigen!

Linearität $\int_{x_0}^{x_1} \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \beta \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx$.

Monotonie Sei $f, g \;:]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel dann gilt $f \leq g \implies \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \leq \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx$.

Gebietsadditivität $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, wobei $x_0 \leq x_1 \leq x_2$.

Substitution Ausgehend von der Ableitungsregel $f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ können wir folgende Integrationsregel herleiten.

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x))|_{x_0}^{x_1} = \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f'(u)du$$

Substituiert man $u := g(x)$, ergibt sich $\frac{du}{dx} = g'(x) \iff du = g'(x)dx$. Bleibt noch ein Restterm $i(x)$, löse $u = g(x)$ nach $x = h(u)$ auf und ersetzte $i(x)$ durch $h(i(x))$.

Die neuen Grenzen – nur bei bestimmten Integralen – sind nun $g(x_0)$ und $g(x_1)$. Bei unbestimmten Integralen müssen keine Grenzen angepasst werden!

Nach Berechnung des Integrals resubstituiere u durch $g(x)$.

Partielle Integration So ähnlich lässt sich auch aus der Ableitungsregel $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ eine Integrationsregel aufstellen.

$$\int_{x_0}^{x_1} (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)|_{x_0}^{x_1}$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x)dx$$
$$\iff \int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x)dx.$$

3.2 Differentialgleichungen

3.2.1 DGL erster Ordnung

Definition Eine Gleichung, in der (ausschließlich) die Unbekannten $y = y(x), y' = y'(x)$ und x vorkommen, heißen *Differentialgleichung erster Ordnung.*

Seperation der Variablen $y' = g(y)f(x)$ lässt sich mittels *Seperation der Variablen* lösen. Dazu bringen wir die "ys auf die eine, die xs auf die andere Seite" der Gleichung. Anschließend integrieren wir auf beiden Seiten nach dx und erhalten so Folgendes.

$$y' = g(y)f(x) \iff \frac{y'}{g(y)} = f(x) \iff \int \frac{y'}{g(y)}dx = \int f(x)dx$$
$$\iff \int \frac{1}{g(y)}dy = F(x) + C_0 \iff ln|g(y)| = F(x) + C_1.$$

Durch Anwenden von *exp* auf beiden Seiten und anschließendes Umformen der Konstanten, erhalten wir schließlich.

$$g(y) = C \cdot e^{F(x)} \iff y = g^{-1}(C \cdot e^{F(x)})$$

Bemerke, dass es zusätzliche, konstante Lösungen für y geben kann, nämlich für alle y mit $g(y) = 0$.

Variation der Konstanten Für $y' = y + x$ betrachte die Lösung der linearen, homogenen DGL $y' - y = 0$. Diese hat ungefähr die Form $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Nun ersetze $C_1 := u_1(x), C_2 := u_2(x)$ und löse anschließend das Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

3.2.2 Lineare, homogene DGL beliebiger Ordnung

Definition Eine lineare, homogene DGL der Ordnung n über eine Funktion $f \in C^n$ ist eine Gleichung der Form

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Lösungsansatz Der Lösungsansatz für homogene DGL basiert auf einer Eigenwertberechnung über das charakteristische Polynom. Man berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ mit Vielfachheiten $c_1, \ldots, c_l$ durch Lösen von $a_n \lambda^n + \cdots + a_0 \lambda^0 = 0$. Es gilt jetzt:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{c_l} k_{i,j} x^{j-1} e^{\lambda_l x}$$
$$= k_{1,0} e^{\lambda_1 x} + k_{1,1} x e^{\lambda_1 x} + \cdots + k_{1,c_1-1} x^{c_1-1} e^{\lambda_l x} + \cdots$$

Partikuläre Lösung für Anfangswertproblem Haben wir auch $f(0) = w_0, f'(0) = w_1, \ldots, f^{(n)}(0) = w_n$ gegeben, können wir die Koeffizienten $k_{i,j}$ wie folgt ausrechnen. Durch Lösen des folgenden Gleichungssystems erhalten wir dann die entsprechenden Koeffizienten.

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ \vdots \\ f^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

3.3 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

3.3.1 Definitionen

Sei im Folgenden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ und $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.
Betrachte f als $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$, dann heißt f *partiell differenzierbar* in Richtung $(0, \ldots, e_i, \ldots, 0)$ bzw. nach x_i, wenn die Funktion $g : x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ differenzierbar ist. Wir betrachten dabei $x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ als Konstanten.

(1) F wie oben heißt *Vektorfunktion*.

(2) Bei $m = 1$ sprechen wir von einem *Skalarfeld*.

(3) Bei $n = m$ sprechen wir von einem *Vektorfeld*.

(4) Es gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. – *Satz von Schwarz*

3.3.2 ∇-Operator, Gradient, Divergenz, Rotation

Nabla-Operator $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, nur im Kartesischem!

Gradient(enfeld) $\mathrm{grad}(f) := \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Divergenz $\mathrm{div}(F) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$, $\mathrm{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle$

Rotation $\mathrm{rot}(F) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$, $\mathrm{rot}(F) = \nabla \times F, n = 3$

3.3.3 Gradienten- /Potentialfeld und konservative Vektorfelder

Ist $v = \mathrm{grad}(f)$, heißt f das *Potential* oder die *Stammfunktion* zu dem *Gradientenfeld* bzw. dem *Potentialfeld* v.

(1) v heißt *konservatives Vektorfeld*.

(2) v ist *wirbelfrei*: $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \vec{0}$. – *hinreichendes Kriterium*

(3) Kurvenintegrale nur abhängig von Anfangs- und Endpunkt.

(4) Kurvenintegrale mit Anfangspunkt = Endpunkt sind 0.

3.3.4 Jacobi-Matrix

Die Ableitungsmatrix einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die $m \times n$-Matrix der einfachen partiellen Ableitungen.

$$J_f(a) := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

3.3.5 Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist das Analogn im $\mathbb{R}^n$ zur zweiten Ableitung einer eindimensionalen Funktion. Ist $f(x_1, \ldots, x_n), f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar, definieren wir die quadratische Matrix H_f wie folgt.

$$H_f := (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Wegen des Satzes von Schwarz ist H_f auch symmetrisch. Insbesondere ist für eine Funktion $f(x, y)$

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}.$$

3.3.6 Kritische Punkte

Im Prinzip wie im eindimensionalem, wir bestimmen Minima und Maxima durch finden der Nullstellen der Ableitung. Allerdings müssen wir den Rand natürlich speziell betrachten, insbesondere für das Finden globaler Extrema.

Vorgehen

(1) $\mathrm{grad}(f) = \nabla f = \vec{0}$ ergibt die Menge kritischen Punkte K.

(2) Hesse-Matrix H_f berechnen.

(3) $det(H_f)$ berechnen.

(4) Für jedes $k \in K$ in $det(H_f)$ einsetzen:

(5) Gilt $det(H_f) < 0 : k$ ist Sattelpunkt von f.

(6) Gilt $det(H_f) > 0 \wedge Spur(H_f) > 0 : k$ ist Minimum von f.

(7) Gilt $det(H_f) > 0 \wedge Spur(H_f) < 0 : k$ ist Maximum von f.

(8) Gilt $det(H_f) = 0$, keine Aussage, weiteres Vorgehen nötig.

3.3.7 Globale Extrema

Angenommen, wir haben bereits alle lokale Extrema berechnet (wie oben).

3.3.8 Tangentialebene

Zusätzlich zu den kritischen Punkten, kann gefordert sein, die sogenannte *Tangentialebene* durch den Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu bestimmen. Hier ist das Verfahren im $\mathbb{R}^2$ angegeben. Sei $f(x, y) = z$ und der Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ gegeben.

(1) Bestimme $\mathrm{grad}(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})^T := (f_x, f_y)^T$.

(2) Bilde $z(x_0, y_0), z_x(x_0, y_0)$ und $z_y(x_0, y_0)$.

(3) Stelle die *Tangentialgleichung* $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ auf.

Setzt man $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, lässt sich die *Tangentialgleichung* auch wie folgt (in Normalform) darstellen.

$$\langle (r - (x_0, y_0, z_0)), \mathrm{grad}(F) \rangle = 0, \mathrm{grad}(F) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.4 Potentialbestimmung

Im Prinzip ist das Bestimmen eines Potential auch eine Art Integration.

Bestimmen eines Potentials im $\mathbb{R}^2$ Ist ein dreidimensionales Vektorfeld $F(x, y) : M \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben und es soll bestimmt werden ob es ein – und wenn ja, welches – Potential f besitzt so dass $F = gradf$.

(1) Prüfe ob $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0$ ergibt.

(2) Ist dies nicht der Fall, so gibt es kein Potential.

(3) Sonst $f_1 = \int F_x dx + c_1$ und $f_2 = \int F_y dy$.

(4) Gleichsetzen von $f_1 = f_2$ ergibt die Konstanten c_1, c_2.

Bestimmen eines Potentials im $\mathbb{R}^3$ Ist ein dreidimensionales Vektorfeld $F(x,y,z) : M \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben und es soll bestimmt werden ob es ein – und wenn ja, welches – Potential f besitzt so dass $F = gradf$.

(1) Ist F wirbelfrei? Also zeige, dass $rotF = 0$.

(2) Falls $rotF \neq 0$ sind wir fertig, denn es gibt kein Potential.

(3) Sonst $f_1 = \int F_x dx + c_1$, $f_2 = \int F_y dy + c_2$, $f_3 = \int F_z dz + c_3$.

(4) Setze nun $f_1 = f_2 = f_3$ gleich und berechne die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3.

Bemerkung: M muss einfach zusammenhängend sein, was bei $M = \mathbb{R}^3$ gegeben ist.

3.5 Kurvenintegrale

3.5.1 1. Art – Wegintegral über Skalarfeld

Das *Wegintegral 1. Art* über ein stetiges Skalarfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entlang des stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\int_\gamma f(s)ds := \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Dabei ist $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ die Euklidische Norm.

3.5.2 2. Art – Wegintegral über Vektorfeld

Das *Wegintegral 2. Art* über ein stetiges Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\int_\gamma F(s)ds := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

Dabei ist $\langle a, b\rangle = a^T b = \sum_{i=0} n = a_i b_i$ das (euklidische) Skalarprodukt.

3.5.3 Rechenregeln

Kurvenintegrale sind genauso wie "normale" Integrale linear.

(1) $\int_\gamma F(s) + G(s)ds = \int_\gamma F(s)ds + \int_\gamma G(s)ds$.

(2) $\int_\gamma \alpha F(s)ds = \alpha \int_\gamma F(s)ds$

3.6 Volumen- und Flächenintegrale im $\mathbb{R}^n$

3.6.1 Koordinatentransformation

Diffeomorphismus $\Phi : \Omega \mapsto \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus, wenn Φ bijektiv und Φ^{-1} differenzierbar ist.

Transformationssatz $f : \Phi(\Omega) \mapsto \mathbb{R}^n$ ist genau dann integrierbar, wenn $g(x) = f(\Phi(x))|\det(J_\Phi(x)|$ integrierbar ist. Es gilt:

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(x)dx = \int_\Omega f(\Phi(x))|\det(J_\Phi(x))|dx$$

Dies nutzen wir aus, um Integrale durch geeignete Wahl von Φ zu vereinfachen. Dabei ist $J_\Phi(x)$ die Jacobi-Matrix von Φ, siehe oben. Für Kugel- und Zylinderkoordinaten, siehe Anhang *Formeln und Tafeln.*

3.6.2 Satz von Gauß

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit "glattem" Rand $S := \partial\Omega$. Sei weiter $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Es gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F dV = \int_S F \cdot N dS$$

Wobei N die Normale (an der jeweiligen Stelle) ist.

3.6.3 Massenmittelpunkt im $\mathbb{R}^n$

Sei der Vektor r, der *Massenmittelpunkt* oder auch *Schwerpunkt* eines Körpers K mit *Dichtefunktion* $\rho(v)$. Dann gilt für seine Komponenten:

$$r_x = 1/M \cdot \int_K x \cdot \rho(v)dV$$

$$r_y = 1/M \cdot \int_K y \cdot \rho(v)dV$$

$$r_z = 1/M \cdot \int_K z \cdot \rho(v)dV$$

Wobei die Masse M gegeben ist durch:

$$M = \int_K \rho(v)dV$$

Bemerkung Bei homogen-dichten Körpern, also Körper, bei dem überall die gleiche Dichte gegeben ist, lässt sich ρ vor das Integral ziehen.

4 Formeln und Tafeln

4.1 Rechentricks

4.1.1 Fakultät, Binomialkoeffizienten

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1, n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \binom{n}{n-k}, \; 0 \leq k \leq n$$

t

4.1.2 Mitternachtsformel, Binomischer Lehrsatz

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für beliebige Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

4.1.3 Partialbruchzerlegung

Sonderfall Nenner Grad zwei

$$B = \frac{a_z x + b_z}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)} = \frac{u}{(a_1 x + b_1)} + \frac{v}{(a_2 x + b_2)},$$

mit $ua_1 + va_2 = a_z \wedge ub_1 + vb_2 = b_z$.

Allgemeiner Fall Betrachte den Bruch $\frac{z(x)}{n(x)}$, wobei z, n Polynome mit Grad n, m sind.

Fall 1: $n \geq m$ Dividiere $\frac{z(x)}{n(x)} = v(x) + \frac{u(x)}{n(x)}$. Ist $u(x) \neq 0$, so fahre mit $\frac{u(x)}{n(x)}$ wie in *Fall 2* weiter, sonst sind wir fertig.

Fall 2: $n < m$ Faktorisiere $n(x)$ in seine i Nullstellen: $n(x) = (x-x_1)^{r_1} \cdot (x-x_2)^{r_2} \cdot \cdots \cdot (x-x_i)^{r_i}$. Jetzt lösen wir das folgende Gleichungssystem durch Ausmultiplikation.

$$\frac{a_1}{(x-x_1)^{r_1}} + \frac{a_2}{(x-x_2)^{r_2}} + \cdots + \frac{a_i}{(x-x_i)^{r_i}} = \frac{z(x)}{n(x)}$$

4.1.4 Ungleichungen

(1) $a < b \iff a + c < b + c$, genauso für $\leq, =, >, \geq$

(2) $a < b \wedge c > 0 \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

(3) $a < b \wedge c < 0 \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(4) $|a + b| \leq |a| + |b|$ – *Dreiecksungleichung*

(5) $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$ – *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

(6) $2|x \cdot y| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2, \varepsilon > 0$ – *Young-Ungleichung*

4.1.5 Exponentialfunktion und Potenzen

Exponentialfunktion Im Folgenden gilt $x \in \mathbb{R}$.

(1) $e^x := Exp(x)$, definiert über Reihe, siehe unten.

(2) $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(4) $e^0 = 1, e^1 = e \approx 2.718281$

(5) $e^{-\infty} = 0, e^{\infty} = \infty$

(6) $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ – *Eulerformel*

(7) $e^{i\pi} = -1$ – *Euleridentität*

(8) $e^{-1}(x) = \ln(x)$ also $e^{\ln(x)} = x = \ln(e^x)$.

Potenzen Im Folgenden gilt $a, b, n, m \in \mathbb{R}$.

(1) $a^x = e^{ln(a)^x} = e^{ln(a)x}$

(2) $a^{n+m} = a^n a^m$

(3) $a^{nm} = (a^n)^m \neq a^{(n^m)}$

(4) $(ab)^n = a^n b^n$

(5) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Wurzeln Im Folgenden gilt $a, b, n, m \in \mathbb{R}$.

(1) $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$

(2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

(4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4.1.6 Logarithmen

Im Folgenden gilt $a, r, x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $\ln(x) := Exp^{-1}(x)$, also $x > 0$.

(2) $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$

(3) $\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

(4) $\log_a(\infty) = \infty$

(5) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(6) $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$

(7) $\log_a(x^r) = n \log_a(x)$

(8) $\log_a(x \pm y) = \log_a(x) + \log_a(1 \pm \frac{y}{x})$

4.1.7 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Sei $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$.

(1) $c := a + ib = \Re(a) + i\Im(b)$

(2) $\overline{c} = a - ib$ – *konjugiert-komplexe Zahl*

(3) $z_0 + z_1 := (a_0 + a_1) + i(b_0 + b_1)$

(4) $z_0 \cdot z_1 := (a_0 a_1 - b_0 b_1) + i(a_0 b_1 + a_1 b_0)$

(5) $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

4.2 Trigonometrische Funktionen

Wichtige Werte

Winkel	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
in Grad	30	45	60	90	120	135	180	270	360
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
$\tan(x)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\times$	0

Rechenregeln

(1) $\sin(x) := \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(2) $\cos(x) := \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(3) $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(4) $\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$

(5) $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

(6) $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

(7) $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

(8) $\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\tan(y)}$

(9) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(10) $\cos(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(11) $\tan(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1 = 1 - 2\sin(x)^2$

(12) $\sin(x \pm \frac{\tau}{4}) = \sin(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos(x)$

(13) $\cos(x \pm \frac{\tau}{4}) = \cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin(x)$

(14) $\sin(x \pm \frac{\tau}{2}) = \sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$

(15) $\cos(x \pm \frac{\tau}{2}) = \cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$

4.3 Hyperbelfunktionen

(1) $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i\sin(ix)$

(2) $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$

(3) $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$

(4) $\text{arcsinh}(x) := \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

(5) $\text{arccosh}(x) := \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

(6) $\text{arctanh}(x) := \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

4.4 Folgen mit Grenzwerten

Folgende Folgen sind sortiert nach "Wachstumsschnelligkeit".

$$(1), (\ln(n)), (n^a), (q^n), (n!), (n^n) \text{ mit } a > 0, q > 1.$$

Im Folgenden ist $a_n \to a$ gleichbedeutend mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Außerdem seien $a, k \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Konvergente Folgen

(1) $\sqrt[n]{a} \to 1,\ \sqrt[n]{n} \to 1, a \geq 0$

(2) $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e,\ \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$

(3) $(\frac{n+1}{n})^n \to e$

(4) $(1 + \frac{a}{n})^n \to e^a$

(5) $(a^n n^k)^n \to 0, |a| < 1$

(6) $n(\sqrt[n]{a} - 1) \to ln(a), a > 0$

Divergente Folgen

$$(\sqrt[n]{n!}), (\frac{n^n}{n!}), (\frac{a^n}{n^k})$$

Bernoullische Ungleichung

$$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

4.5 Reihen mit Grenzwerten

Sei mal $\sum_{n_0}$ Abkürzung für $\sum_{n=n_0}^\infty$.

(1) $\sum_1 \frac{1}{n}$ divergiert – *harmonische Reihe*

(2) $\sum_1 (-1)^n \frac{1}{n} = \ln(\frac{1}{2})$ – *alternierende harmonische Reihe*

(3) $\sum_1 \frac{1}{n^a}$ konvergiert für $a > 1$, sonst divergent.

(4) $\sum_0 q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$ – *geometrische Reihe*

(5) $\sum_0 q^n = \frac{1}{1+q}, |q| < 1$ – *alternierende geometrische Reihe*

(6) $\sum_1 \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Partialsummen

(1) $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n-1)}{2}$ – *kleiner Gauß*

(2) $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3) $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(4) $\sum_{i=0}^n q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

4.6 Ableitungen

Im Folgenden sei $f(x) \to g(x)$ Abkürzung für $\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$.

4.6.1 Rechenregeln

(1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) $(\frac{z(x)}{n(x)})' = \frac{z(x)n'(x) - z'(x)n(x)}{n(x)^2}$

(4) $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$

4.6.2 Polynome und Wurzeln

(1) $x^a \to ax^{a-1}$

(2) $\frac{1}{x^a} = x^{-a} \to -ax^{-a-1} = \frac{-a}{x^{a+1}}$

(3) $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}} \to \frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}-1}$

4.6.3 Exponenten und Logarithmen

(1) $e^{ax} \to ae^{ax}$

(2) $e^{x^a} \to ax^{a-1}e^{x^a}$

(3) $a^x = e^{ln(a)^x} = e^{\ln(a)x} \to \ln(a) \cdot a^x$

(4) $x^x \to (1 + \ln(x))x^x$

(5) $x^{x^a} \to (1 + a\ln(x))x^{x^a+a-1}$

(6) $\ln(x) \to \frac{1}{x}$

(7) $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x) \to \frac{1}{\ln(a)x}$

4.6.4 Trigonometrische Funktionen

(1) $\sin(x) \to \cos(x)$

(2) $\cos(x) \to -\sin(x)$

(3) $\sin(ax + b) \to a\cos(ax + b)$

(4) $\tan(x) \to \frac{1}{(\cos(x))^2}$

(5) $\arcsin(x) \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(6) $\arccos(x) \to \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(7) $\arctan(x) \to \frac{1}{x^2+1}$

(8) $\sinh(x) \to \cosh(x)$

(9) $\cosh(x) \to \sinh(x) \neq -\sinh(x)!$

(10) $\tanh(x) \to \frac{1}{(\cosh(x))^2}$

(11) $\operatorname{arcsinh}(x) \to \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(12) $\operatorname{arccosh}(x) \to \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$

(13) $\operatorname{arctanh}(x) \to \frac{1}{1-x^2}$

4.7 Unbestimmte Integrale

4.7.1 Rechenregeln

(1) $\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

(3) $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

(4) $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(x)dx$

(5) $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(x + b)$

(6) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|)$

(7) $\int f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2$

(8) $\int |f(x)|dx = |\int f(x)dx|$

4.7.2 Polynome und Wurzeln

(1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$

(2) $\int \frac{1}{x^a}dx = \int x^{-a}dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1} = -\frac{a-1}{x^{a-1}}, a \neq 1$

(3) $\int \sqrt[a]{x^b}dx = \int x^{\frac{b}{a}}dx \to \frac{x^{\frac{b}{a}+1}}{\frac{b}{a}+1} = \frac{a}{b+a}\sqrt[a]{x^{b+a}}$

4.7.3 Exponenten und Logarithmen

(1) $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

(2) $\int xe^x dx = (x - 1)e^x$

(3) $\int a^x dx = \int e^{ln(a)x}dx = \frac{1}{ln(a)}a^x$

(4) $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)$

(5) $\int \ln(x)dx = x(\ln(x) - 1)$

4.7.4 Trigonometrische Funktionen

(1) $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$

(2) $\int \cos(x)dx = \sin(x)$

(3) $\int \sin(ax + b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$

(4) $\int \tan(x)dx = -\ln(|\cos(x)|)$

(5) $\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$

(6) $\int \arccos(x)dx = x\arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$

(7) $\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln 1 + x^2$

(8) $\int \sinh(x)dx = \cosh(x)$

(9) $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) \neq -\sinh(x)$

(10) $\int \tanh(x)dx = \ln(\cosh(x))$

(11) $\int \operatorname{arcsinh}(x)dx = x\operatorname{arcsinh}(x) + \sqrt{x^2 + 1}$

(12) $\int \operatorname{arccosh}(x)dx = x\operatorname{arccosh}(x) + \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}$

(13) $\int \operatorname{arctanh}(x)dx = x\operatorname{arctanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$

4.8 Hilfen für Diff'rechnung in $\mathbb{R}^n$

4.8.1 Koordinatentransformationen

Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos(\frac{z}{r}) \\ \operatorname{atan2}(y,x) \end{pmatrix}$$

Mit $\operatorname{atan2}(y,x) = 2\arctan\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} = \arctan(\dfrac{y}{x})$

Jacobi-Matrix:

$$J = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Determinante: $\det(J) = r^2\sin(\theta)$
Volumenelement: $dV = r^2\sin(\theta)\,d\varphi\,d\theta\,dr$

Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix:

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Determinante: $\det(J) = r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2 = r$
Volumenelement: $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

4.8.2 Typische geometrische Körper und ihre Volumina

Ellipsoid Ein *Ellipsoid* ist – in kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ – gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a, b, c nennt man dabei die *Halbachsen* der Ellipse.

Volumina und Oberflächen

Körper	V
Kugel	$\frac{4\pi}{3}r^3$
Ellipsoid	$\frac{4\pi}{3}abc$
Zylinder	$\pi r^2 h$
Pyramide	$\frac{1}{3}Gh$
Kegel	$\frac{\pi}{3}r^2 h$