

Solving the undirected feedback vertex set problem by local search

<https://link.springer.com/article/10.1140/epjb/e2014-50289-7>

目次

- この論文が提案しているアルゴリズムの説明
- 実験結果

アルゴリズムの概略

■ フィードバック頂点集合問題に対する ヒューリスティック解法

- 焼きなまし法を使う

■ フィードバック頂点集合問題を別の問題に変換



■ 変換した問題を解く

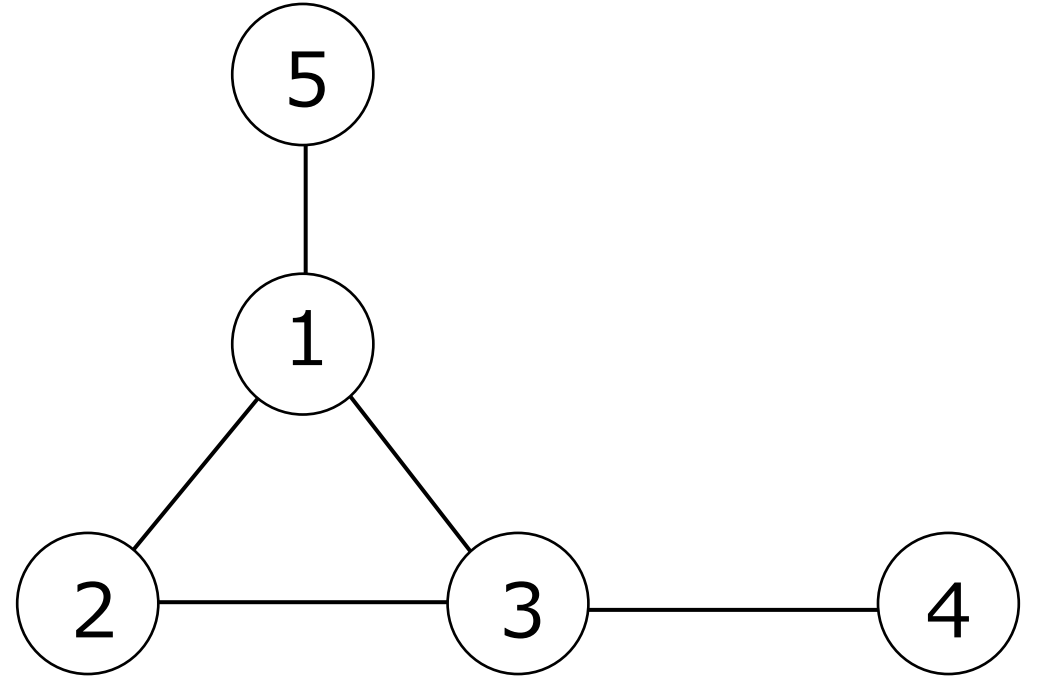
用語の定義①

■ 順序付きリストLを定義

- 要素: 頂点番号
- 全ての要素は互いに異なる

■ 順序付きリストLの例

- $L = \{②, ③, ⑤, ④\}$
- $L = \{⑤, ②, ①\}$



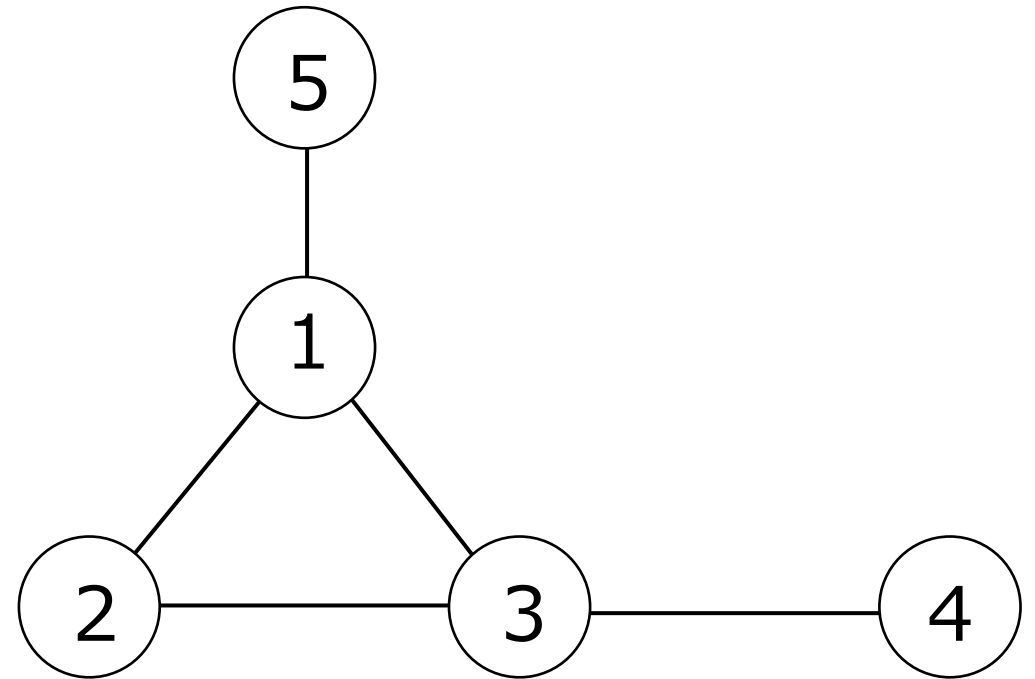
用語の定義②

■ Lが「合法」となる条件

- リストに入っている全ての頂点について,
その頂点の隣接頂点のうち, リストで自分より左側にある頂点は高々1つ

■ 順序付きリストLの例

- $L = \{②, ③, ⑤, ④\}$
 - ▶ 合法である
- $L = \{⑤, ②, ①\}$
 - ▶ 合法ではない
 - ▶ ①について, ②と⑤が隣接頂点であり,
自分より左側にある



フィードバック頂点集合問題の変換

■ 定理①

- Lが合法なとき, Lに含まれる頂点の部分グラフには閉路が存在しない
→ 合法なLに含まれていない頂点の集合はフィードバック頂点集合

■ 定理②

- あるフィードバック頂点集合に対して,
それ以外の頂点をすべて含んだ合法なリストLを作成可能



**フィードバック頂点集合問題を
要素数が多い合法なLを作る問題に変換可能**

定理①の証明

■ 定理①

- Lが合法なとき, Lに含まれる頂点の部分グラフには閉路が存在しない
→ 合法的Lに含まれていない頂点の集合はフィードバック頂点集合

■ 定理①の証明

- 閉路 $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ が存在すると仮定する.
Lにおいて, i_1 より i_2 が右側にある場合, i_3 は i_2 の右側になる.
これを繰り返して, $L=(i_1, \dots, i_2, \dots, i_3, \dots, i_k)$ となるが,
 i_k より左側に i_1, i_{k-1} があり、矛盾する.
 i_1 より i_2 が右側にある場合も同様に矛盾する.

定理②の証明

■ 定理②

- あるフィードバック頂点集合に対して,
それ以外の頂点をすべて含んだ合法なリストLを作成可能

■ 定理②の証明

- フィードバック頂点集合を除いたグラフは森になる.
1つの木に注目する. 適当な頂点に注目して, そこから距離が近い頂点を順に入れていけば合法になる.
これを全ての木に対して行い, 適当に連結したリストは合法である.

焼きなまし法で使う近傍

■ Lに入っていない頂点からランダムに1つの頂点 v_i を選ぶ

- v_i の隣接頂点がLにない場合
 - ▶ Lの左端に v_i を挿入
 - v_i の隣接頂点がLに1つある場合
 - ▶ 隣接頂点の右隣りに v_i を挿入
 - v_i の隣接頂点がLに2つ以上ある場合
 - ▶ 一番左にある隣接頂点の右隣りに v_i を挿入
- Lが合法でなくなる場合, v_i の隣接頂点を全て(?)削除

本来のフィードバック頂点集合の場合,

フィードバック頂点集合から1つの頂点を削除しても大丈夫かを判定するには

グラフ全体を考慮する必要があるが, 変換後の問題では v_i の隣接頂点のみを考慮すればいい

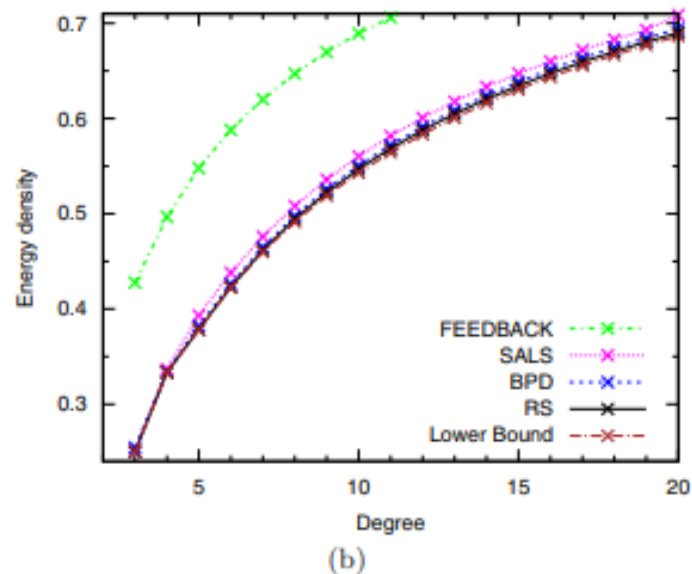
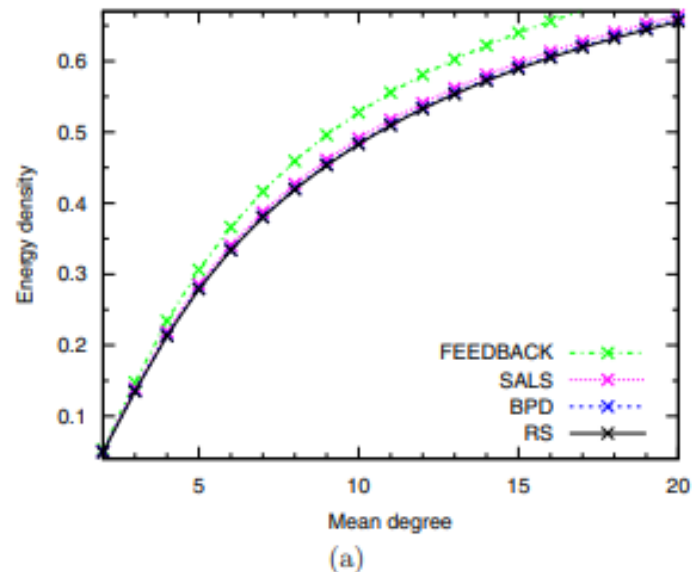
実験結果

■ 実験するグラフ

- 頂点数: 10^5
- 上の実験はランダムグラフ
- 下の実験は正則グラフ

■ 比較アルゴリズム

- FEEDBACK[8]
 - ▶ 貪欲法
 - ▶ (おそらく)2近似アルゴリズム
- SALS
 - ▶ この論文で提案したアルゴリズム



実験結果

■ 比較アルゴリズム

● BPD[17]

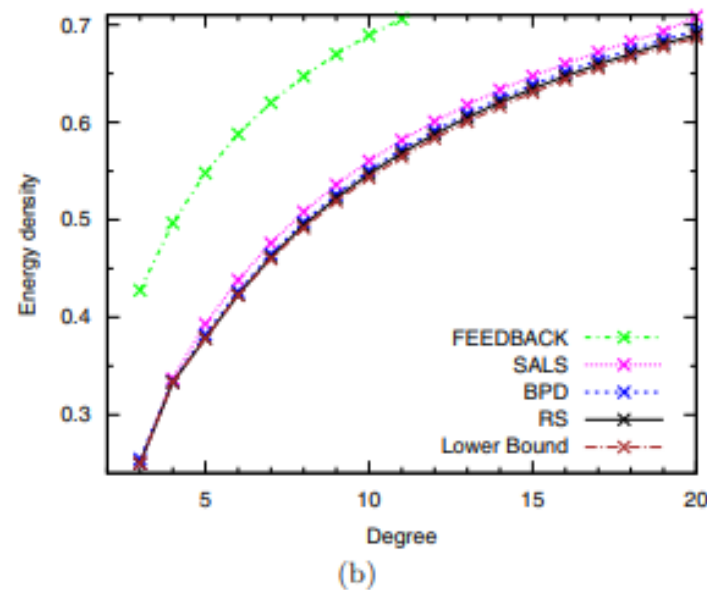
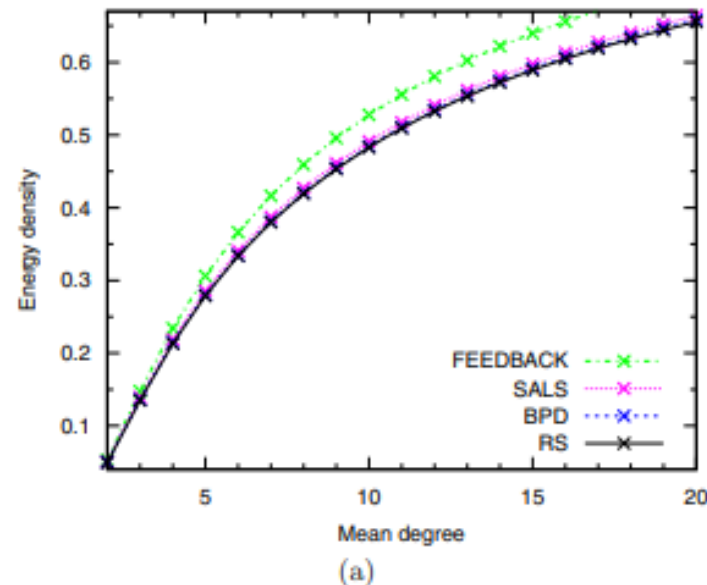
- ▶ ヒューリスティックス
- ▶ SALSと違い, グラフ全体の特徴を考慮している(?)

● RS[17]

- ▶ replica-symmetric mean field theory at $N=\infty$
- ▶ 何も分からん

● Lower Bound[11]

- ▶ 厳密な下界(下限?)
- ▶ 正則グラフのみ



実験結果の考察

■ ランダムグラフの方がBPDのスコアに近い

- このアルゴリズムの弱点はグラフの局所的なところしか見ていないところ
- ランダムグラフは頂点の次数が異なっており、局所的なところに情報がある
(次数が多い頂点はフィードバック頂点集合に含んだ方が良くてLに入りにくい)