2023-01-11 V2

large $|\vec{k}|$ asymtotics of $|\vec{J}|^2$

$$J^i = A^i(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_1} - A^i(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_1}$$
$$- A^i(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_2} + A^i(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_2} \qquad (*1)$$

✓

where

$$A^i(\vec{x}) = \int\frac{d^2l}{(2\pi)^2}\,\frac{e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}}{\vec{l}^2}\left[\frac{k^i}{\vec{k}^2} - \frac{k^i-l^i}{(\vec{l}-\vec{k})^2}\right]$$
$$= \frac{k^i}{\vec{k}^2}H_1 + \frac{1}{\vec{k}^2}\left[-2k^ik^j(-i\nabla_j) + \vec{k}^2(-i\nabla_i)\right]H_2 \qquad (*2)$$

✓

$$\begin{cases} H_1 = \displaystyle\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}}{(\vec{l}-\vec{k})^2} = -\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{4\pi}\left[\frac{1}{\epsilon}+\log\vec{x}^2+\gamma_E+\log\pi\right] \checkmark \\ H_2 = \displaystyle\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}}{\vec{l}^2(\vec{l}-\vec{k})^2} \checkmark \end{cases} \qquad (*3)$$

H_1 diverges at $\vec{l}=\vec{k}$

H_2 diverges at $\vec{l}=0$ and $\vec{l}=\vec{k}$. The former vanishes after the derivative in $(*2)$, while the latter cancels the divergence in H_1

Below we consider $|\vec{k}||\vec{x}| \gg 1$ limit.

H_2 has two regions dominant $\vec{l} \sim \vec{k}$ and $\vec{l} \sim 0$

$$H_2 = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}}{\vec{l}^2(\vec{l}-\vec{k})^2}$$

$$\simeq \frac{1}{\vec{k}^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}}{\vec{l}^2} + \frac{1}{\vec{k}^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}}{(\vec{l}-\vec{k})^2}$$

$$= \frac{1}{\vec{k}^2}\left(1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}}{\vec{l}^2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{\left(1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)}{\vec{k}^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \vec{x}^2 + \gamma_E + \log\pi\right] \quad \text{———} \ (*4)$$

Insert into $(*2)$

$$A^i(\vec{x}) = \frac{k^i}{\vec{k}^2} H_1 + \frac{1}{(\vec{k}^2)}\left[-2k^i k^j(-i\nabla_j) + \vec{k}^2(-i\nabla_i)\right] H_2$$

$$(-i\nabla_i) H_2 = -\frac{1}{4\pi} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{k^i}{\vec{k}^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + \log\vec{x}^2 + \gamma_E + \log\pi\right] - \frac{1}{4\pi} \frac{1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2} \frac{-2ix^i}{\vec{x}^2}$$

$$= \cancel{\frac{k^i}{\vec{k}^2}(-1)\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{4\pi}[\ldots]}$$

$$+ \frac{1}{(\vec{k}^2)}\left\{-2k^i k^j\left[-\frac{1}{4\pi} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{k^j}{\vec{k}^2}[\ldots] + \frac{i}{2\pi}\frac{1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2}\frac{x^j}{\vec{x}^2}\right] + \vec{k}^2\left[-\frac{1}{4\pi} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{k^i}{\vec{k}^2}[\ldots] + \frac{i}{2\pi}\frac{1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2}\frac{x^i}{\vec{x}^2}\right]\right\}$$

$$\{\dots\} = \cancel{\frac{2}{4\pi} k^i e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}} [\dots] - \frac{i}{\pi} \frac{1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2 \vec{x}^2} \vec{k}\cdot\vec{x}\, k^i$$

$$\cancel{- \frac{1}{4\pi} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} k^i [\dots]} + \frac{i}{2\pi} [1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}] \frac{x^i}{\vec{x}^2}$$

$$= (1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \frac{i}{(2\pi)} \frac{1}{\vec{k}^2 \vec{x}^2} \left[x^i - 2 \frac{\vec{k}\cdot\vec{x}}{\vec{k}^2} k^i \right]$$

$$= \frac{i}{2\pi} (1+e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \frac{1}{(\vec{k}^2)^2 \vec{x}^2} \left[\vec{k}^2 x^i - 2 (\vec{k}\cdot\vec{x}) k^i \right] \quad \text{—— (*5)}$$

✓

Insert into (*1)

$$J^i = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{(\vec k^2)^2}\Big\{\frac{e^{-i\vec k\cdot\vec x_1}+e^{i\vec k\cdot(\vec b-\vec x_3)}}{(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)^2}\left[(b^i-x_3^i+x_1^i)\vec k^2-2\vec k\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)k^i\right]$$

$$-(\vec x_3\to\vec x_4)$$

$$-(\vec x_1\to\vec x_2)$$

$$+(\vec x_3\to\vec x_4,\ \vec x_1\to\vec x_2)\Big\}$$

—— (*6)

$$|J|^2 \simeq \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{(\vec k^2)^4}\Big\{\frac{2+2\cos(\vec k\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_1))}{[(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)^2]^2}\Big[(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)^2(\vec k^2)^2+4\cancel{[\vec k\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)]^2\vec k^2}$$

$$-4\vec k^2\cancel{[(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)\cdot\vec k]^2}\Big]$$

$$-\frac{2+2\cos(\vec k\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_1))}{(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)^2}(\vec k^2)^2$$

$$-\frac{2+2\cos(\vec k\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_2))}{(\vec b-\vec x_3+\vec x_2)^2}(\vec k^2)^2+\frac{2+2\cos(\vec k\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_2))}{(\vec b-\vec x_4+\vec x_2)^2}(\vec k^2)^2$$

$$-\frac{\left[1+e^{i\vec k\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)}+e^{-i\vec k\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)}+e^{i\vec k\cdot(\vec x_4-\vec x_3)}+c.c.\right]}{(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)^2(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)^2}\Big[(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)(\vec k^2)^2$$

$$-2\vec k\cdot\cancel{(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)\,\vec k\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)}\,\vec k^2$$

$$-2\vec k\cdot\cancel{(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)}\,\vec k\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)\,\vec k^2$$

$$+4\,\vec k\cdot\cancel{(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)}\,\vec k\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)\,\vec k^2\Big]$$

$$-\frac{\left[1+e^{i\vec k\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_4)}+e^{-i\vec k\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_2)}+e^{i\vec k\cdot(\vec x_1-\vec x_2)}+c.c.\right]}{(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)^2(\vec b-\vec x_3+\vec x_2)^2}\left[(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_2)\right](\vec k^2)^2$$

$$+\frac{(e\ \cdots\ +c.c.)}{(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)^2(\vec b-\vec x_4+\vec x_2)^2}\left[(\vec b-\vec x_3+\vec x_1)\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_2)\right](\vec k^2)^2$$

$$+\frac{(e\ \cdots\ +c.c.)}{(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)^2(\vec b-\vec x_3+\vec x_2)^2}\left[(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)\cdot(\vec b-\vec x_3+\vec x_2)\right](\vec k^2)^2$$

$$-\frac{(e\ \cdots\ +c.c.)}{(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)^2(\vec b-\vec x_4+\vec x_2)^2}\left[(\vec b-\vec x_4+\vec x_1)\cdot(\vec b-\vec x_4+\vec x_2)\right](\vec k^2)^2$$

$$-\frac{\left[1+e^{i\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)}+e^{i\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)}+e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4)}+c.c.\right]}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)^2}$$

$$*\,(\vec{k}^2)^2\left[(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)\right]\Big\}$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^2}\frac{1}{(\vec{k}^2)^2}\Big\{\frac{1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1))}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)^2}+\frac{1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1))}{(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)^2}+\frac{1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2))}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)^2}$$

$$+\frac{1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2))}{(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)^2}$$

$$-\frac{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)^2}\Big[1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1))$$
$$+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4))\Big]$$

$$-\frac{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)^2}\Big[1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2))$$
$$+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))\Big]$$

$$+\frac{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)^2}\Big[\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_2-\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2))$$
$$+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4))\Big]$$

$$+\frac{(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)}{(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)^2}\Big[\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2))$$
$$+\cos[\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)]+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4))\Big]$$

$$-\frac{(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)}{(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)^2}\Big[1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2))$$
$$+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))\Big]$$

$$-\frac{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)^2}\Big[1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2))$$
$$+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4))\Big]\Big\}$$

Use Mathematica

$$
\begin{aligned}
=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{(\vec{k}^2)}\Bigg\{ &-\frac{(\vec{x}_1+\vec{x}_4-\vec{x}_3-\vec{x}_2)^2}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)^2}\Big[\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4)) \\
&\qquad +\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1))\Big] \\
&-\frac{(\vec{x}_1+\vec{x}_3-\vec{x}_4-\vec{x}_2)^2}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)^2}\Big[\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4)) \\
&\qquad +\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2))\Big] \\
&+(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2\Big[\frac{1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2))}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)^2} \\
&\qquad +\frac{1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2))}{(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)^2}\Big] \\
&+(\vec{x}_3-\vec{x}_4)^2\Big[\frac{1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1))}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_1)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_1)^2} \\
&\qquad +\frac{1+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{x}_3-\vec{x}_4))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2))+\cos(\vec{k}\cdot(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2))}{(\vec{b}-\vec{x}_3+\vec{x}_2)^2(\vec{b}-\vec{x}_4+\vec{x}_2)^2}\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

where $\vec{r}_A=\vec{x}_1-\vec{x}_2$ ——— (*7)

$\vec{r}_B=\vec{x}_3-\vec{x}_4$

✓

In general,

$$|\vec{J}|^2 = \frac{1}{(\vec{k}^2)^2} B_1 + \frac{1}{(\vec{k}^2)^2} B_2 \cos(|\vec{k}| |\vec{x}| \cos(\theta_k - \theta_x))$$

Integrate over the angle θ_k of $\vec{k}$

$$\int_0^{2\pi} d\theta_k \, |\vec{J}|^2 = \frac{1}{(\vec{k}^2)^2} B_1 * 2\pi + \frac{1}{(\vec{k}^2)^2} 2\pi \, J_0(|\vec{k}| |\vec{x}|) \, B_2$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta_k \, |\vec{J}|^2 \cos(2\theta_k) = -2\pi \frac{1}{(\vec{k}^2)^2} B_2 \cos(2\theta_x) \, J_2(|\vec{k}| |\vec{x}|)$$