Matemática II (B)
Segundo Cuatrimestre - 2022

Práctica 4: Procesos de Markov

<u>*Observación:*</u> *en esta Práctica consideraremos estados que sean vectores con entradas no negativas y cuya suma sea igual a* 1.

1. Determinar cuáles de las siguientes matrices son de Markov.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.\hat{3} \\ 1 & 0 & 0.1\hat{6} \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

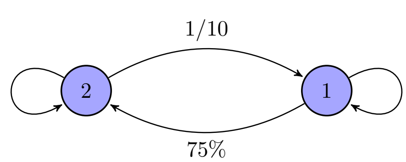
2. Se tiene un proceso de Markov cuya matriz de transición es

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/10 \\ 2/5 & 7/10 \end{pmatrix},$$

verificar que el vector $\mathbf{v} = (3/7\ 4/7)^T$ es un estado de equilibrio del proceso.

3. Sea $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix}$ la matriz de transición de un proceso de Markov y sea $\mathbf{v}(2) = (7/18, 11/18)^T$ el segundo estado, verificar que P es inversible y calcular $\mathbf{v}(1)$ y $\mathbf{v}(0)$.

4. La población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. Esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75 % de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 individuos que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene.



   a) Determinar la matriz de transición y el estado inicial.
   b) Calcular los 5 primeros estados del proceso de Markov.
   c) Verificar que el vector $\mathbf{v} = (2/17\ 15/17)^T$ es estado de equilibrio.
   d) Simular el comportamiento del sistema con una población total de 100 inividuos.

5. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

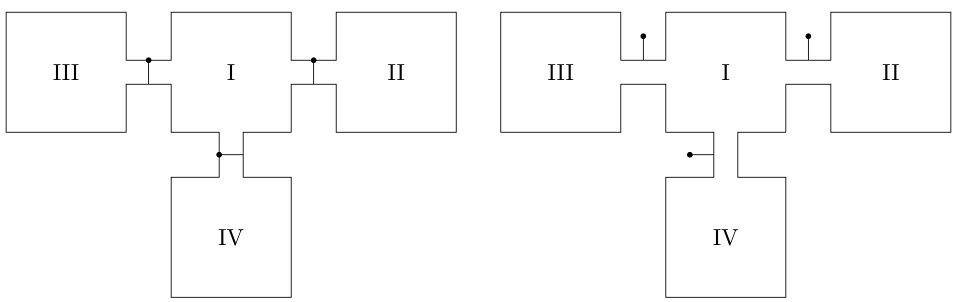
$$M = \begin{pmatrix} a & a+\frac{1}{10} & b+\frac{1}{10} \\ b & a & 2a \\ b & b+\frac{1}{10} & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

a) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales M resulta ser una matriz de Markov.

b) Para los valores de a y b hallados, decidir si hay dos vectores de equilibrio de M diferentes. En caso afirmativo, hallarlos.

c) Para los valores a y b hallados, verificar que la matriz transpuesta M^T es también una matriz de Markov. ¿Es casualidad o una ley general?

6. En el instante inicial 100 ratones se encuentran en el compartimiento I (ver Figura 1). Las puertas que separan los compartimientos permanecen cerradas salvo durante un breve lapso, donde los ratones pueden pasar a un comportamiento adyacente o permancer en el mismo. Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de los adyacentes o se quede en el compartimiento en el que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el número de ratones en cada compartimiento.



(a) Laberinto cerrado. (b) Laberinto abierto.

Figura 1: El laberinto se abre unos pocos segundos cada hora.

(a) Determinar la matriz de transición del proceso.

(b) Determinar el vector de estado después de 4 horas. ¿Cuántos ratones hay en cada compartimiento?

(c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio. En caso afirmativo, hallarlo.

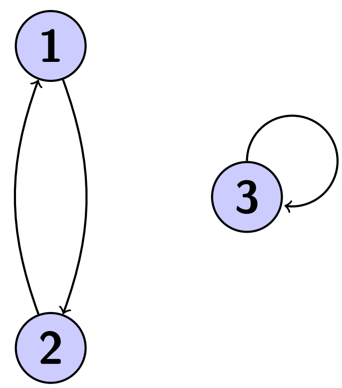
7. Un país, cuya población es constante está dividido en dos regiones. Cada año 1 de cada 10 residentes de la región A se traslada a la región B mientras que 1 de cada 5 habitantes de la zona B se muda a la región A. En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la región A y 30 millones en la B.

a) Escribir la matriz de transición para este proceso.

b) Determinar si existe un estado de equilibrio. En caso afirmativo, hallarlo.

c) Calcular el estado de la población dentro de 10 años y dentro de 30 años.

8. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en tres sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100 % de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100 % de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 1, mientras que la población del Sector 3 permanece (sin desplazarse) en su sector. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.



a) Determinar la matriz de transición P que describe el proceso.

b) Decidir si hay dos estados de equilibrio diferentes.

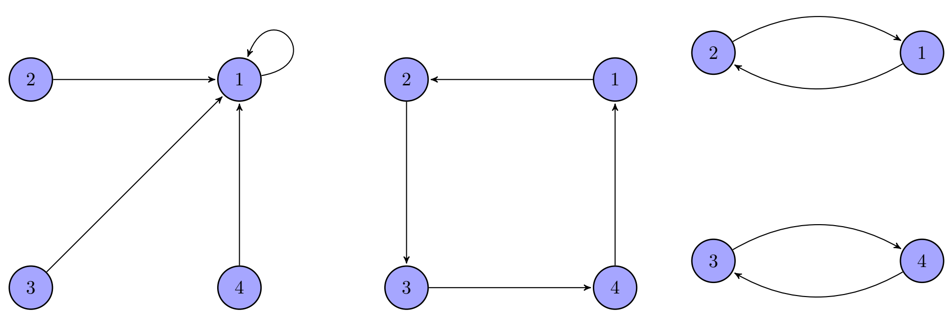
c) Determinar si el proceso tiene un estado límite, y en caso afirmativo hallarlo, con una población inicial de:

i) 200 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.

ii) 100 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.

d) Determinar si existe P^{∞}. Justificar.

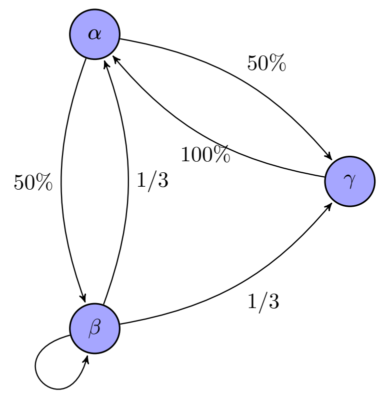
9. Describir las matrices que representen la evolución de los 3 sistemas mostrados en la Figura 2.



(a) Atractor. (b) Ciclo. (c) Grafo disconexo.

Figura 2: Evolución de los sistemas.

10. Un proceso de Markov admite 3 sectores: α, β, γ. Al cabo de un período el 50 % de los individuos del sector α pasan al β y el otro 50 % al γ. Además, un tercio de los individuos que están en el estado β pasa al α y otro tercio pasa al γ. Finalmente, todos los individuos en el estado γ pasan al α.



(a) Construir la matriz de transición P que describe el proceso.

(b) Si el estado actual está dado por $\mathbf{v}(0) = (0.5\ 0.25\ 0.25)^T$, determinar el estado siguiente.

(c) Analizar el comportamiento de P^n para valores de n grandes.

(d) Decidir si existe un estado límite.

11. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz que define un proceso de Markov de la que se sabe que:

$$m_{12} = m_{13} = 0 \quad \text{y} \quad m_{22} + m_{23} = \frac{9}{10}$$

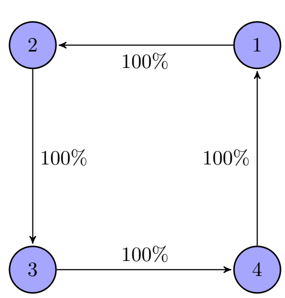
a) Sabiendo que el vector $(1/6, 2/6, 3/6)^T$ resulta estado límite del proceso para cierto vector de estado inicial, hallar la matriz M.

b) Decidir si hay dos vectores diferentes que sean estados de equilibrio.

c) Determinar si el proceso tiene estado límite siendo el estado inicial $\mathbf{v}(0) = (1, 0, 0)^T$ y hallarlo.

d) Determinar si existe M^∞.

12. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en cuatro sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100 % de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100 % de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 3, el 100 % de la población del Sector 3 se ha desplaza al Sector 4 y el 100 % de la población del Sector 4 se ha desplaza al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.



(a) Determinar la matriz de transición P que describe el proceso.

(b) Decidir si hay dos estados de equilibrio diferentes.

(c) Determinar si el proceso tiene un estado límite, y en caso afirmativo hallarlo, con una población inicial de:

  (i) 100 habitantes en cada Sector.

  (ii) 100 habitantes en el Sector 1, 300 en el Sector 2, 100 en el Sector 3 y 300 en el Sector 4.

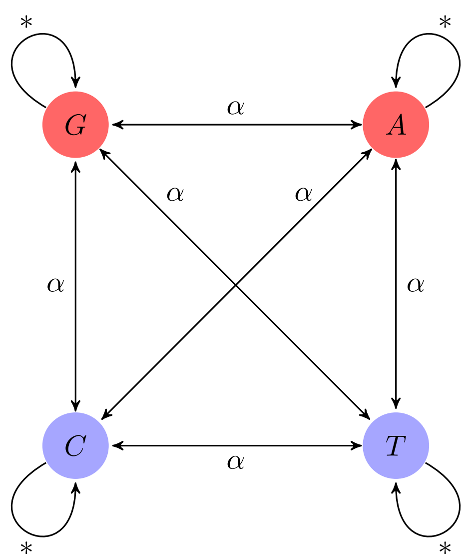
(d) Decidir si existe P^∞.

13. Para el proceso mostrado en la figura,

  (a) determinar la matriz de transición P que lo describe,

  (b) establecer el intervalo del parámetro α,

  (c) determinar, si existe, P^∞ para cada valor de α.



14. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de Markov,

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & a & 1/3 \\ 0 & b & d \\ 1/2 & c & f \end{pmatrix}$$

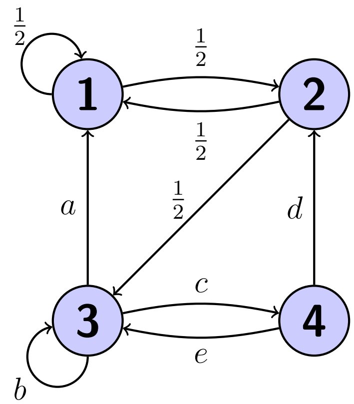
tal que $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ es un estado de equilibrio y $\det(M) = 0$.

  a) Encontrar la matriz M.

  b) Determinar si existe M^∞. Justificar.

  c) Para el estado inicial $\mathbf{v}(0) = (1/2, 0, 1/2)^T$ hallar, si existe, el estado límite.

15. El movimiento entre 4 ciudades está regido por el siguiente diagrama de transición:



Y se sabe que $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es un estado de equilibrio.

(a) Hallar la matriz de transición P.

(b) Determinar la distribución de población después de 10 años, si la distribución inicial es $v_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$.

(c) ¿Existe un estado límite cualquiera sea el estado inicial? ¿Existe P^∞?

(d) ¿Existe estado límite para $v_0 = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$?