Matemática II (B)
Segundo Cuatrimestre - 2022

Práctica 0: Acotación de funciones

Recordemos algunas definiciones y desigualdades útiles:

- Decimos que una función f está acotada superiormente en un conjunto $A \subset$ Dominio de (f) si existe un valor M tal que $f(x) \leqslant M$, $\forall x \in A$.
- Decimos que una función f está acotada inferiormente en un conjunto $A \subset$ Dominio de (f) si existe un valor m tal que $f(x) \geqslant m$, $\forall x \in A$.
- Decimos que una función f está acotada en un conjunto $A \subset$ Dominio de (f) si existe un valor $K > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant K$, $\forall x \in A$.

  Esta definición nos dice entonces que: "El valor absoluto de la función está acotado por un número fijo K para cualquier valor de x en A."

Para llevar adelante esas acotaciones recordamos la siguiente propiedad.

Desigualdad triangular:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$
$$|a-b| \leqslant |a| + |b|,$$

para cualesquier $a, b \in \mathbb{R}$.

Y ahora algunos ejercicios....

---

1. Hallar una cota de $|f(x)|$ para x en el intervalo indicado.

   a) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x)$, con $x \in \mathbb{R}$. → $|f(x)| = |3\sin x + 2\cos x| \leq 3 + 2 = 5$

   b) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(x) - 2\cos(x)$, con $x \in \mathbb{R}$. → $|f(x)| \leq 3 + 2 = 5$

   c) $f(x) = \mathrm{sen}(x) + e^x$, con x en $[2, 5]$. → $|f(x)| \leq 1 + e^5$

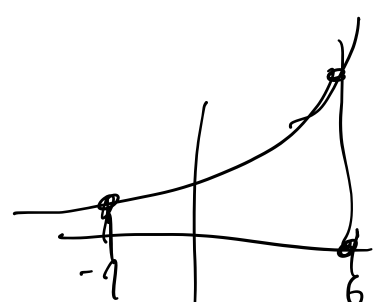
   d) $f(x) = \mathrm{sen}(e^x)$, x en $[-1, 6]$. → $|f(x)| \leq 1$

2. Acotar $|f(x)|$ y $|f'(x)|$ el intervalo indicado.

   a) $f(x) = \mathrm{sen}(x)e^x$, con $x \in [0, 10]$.

$|f(x)| \leq |\sin(x)||e^x|$

$\leq 1 \cdot e^{10} = e^{10}$

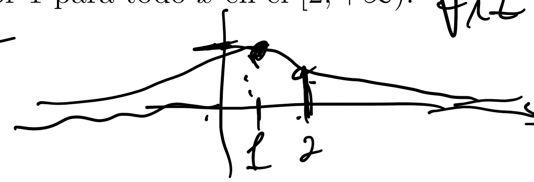


$\sin(e^6) = 0.9648$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, con $x \in [0,1]$. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$ $|f(x)| \le \dfrac{1}{2}$ $|f'(x)| \le \dfrac{1}{4}$
Sugerencia: graficar $f(x)$ y $f'(x)$.

3. Mostrar que la función $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2+2}$ está acotada por 1 para todo x en el $[2, +\infty)$. $\forall x \in \mathbb{R}$

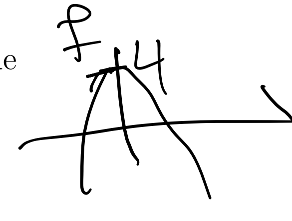
$f(2) = \dfrac{2}{3}$

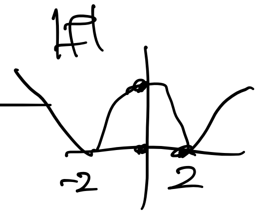


4. Hallar una cota para la función $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2+1}$.

5. Probar que $f(x) = e^x + \operatorname{sen}(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

6. Considerar la función $f(x) = 4 - x^2$, graficarla y mostrar que





a) $f(x) \leqslant 4, \forall x \in \mathbb{R}$, $\to$ max abs de f es 4

b) $|f(x)| \leqslant 4, \forall x \in [0,2]$, $\to$

c) $|f(x)| \leqslant 5, \forall x \in [-3,2]$. $\to$ $4 \le 5$

7. Considerar la función $f(x) = x^3 - 12x$, graficarla y mostrar que $f(x) = x(x^2-12)$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 0$

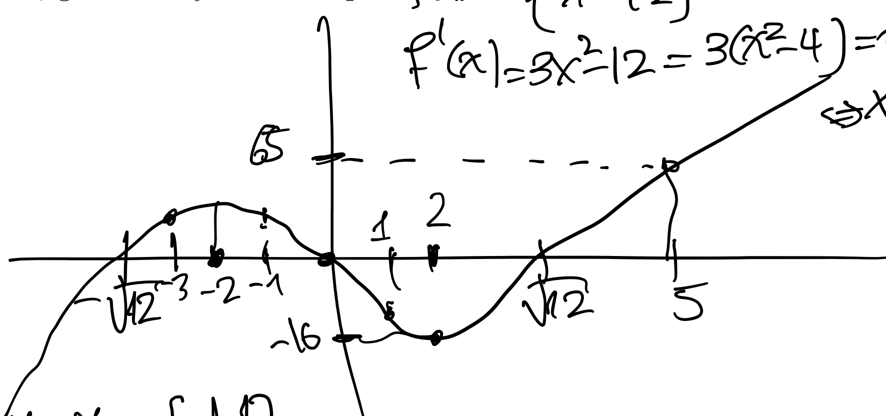
$\Leftrightarrow x = \pm 2$

a) $-16 \leqslant f(x) \leqslant 65, \forall x \in [-3,5]$,

b) $|f(x)| \leqslant 65, \forall x \in [-3,5]$,

c) $|f(x)| \leqslant 16, \forall x \in [-3,1]$,

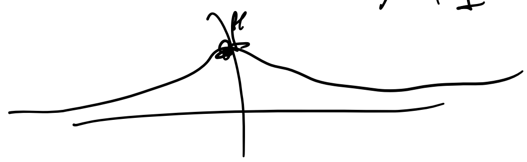
d) $|f(x)| \leqslant 11$, $\forall x \in [-1,1]$.



$f(-1) = 11$

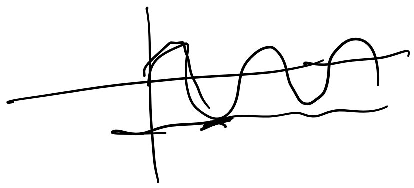
$f(1) = -11 \Rightarrow |f(x)| \le 11 \quad \forall x \in [-1,1]$

Ej 4. $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$ $\quad |g(x)| \le \dfrac{1}{x^2+1} \le 1$



Ej 5. $f(x)=e^x+\sin(x)$. Prove that $f(x)\ge 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)=e^x+\sin x \ge 1+\sin x \ge 1+(-1)=0$



$\sin x \ge -1$