Matemática II (B)
Segundo Cuatrimestre - 2022

Práctica 1: Aproximación de funciones

Polinomio de Taylor

1. a) Para cada caso calcular el polinomio de Taylor de orden n en x_0:

   i) $f_1(x) = e^{2x}$ en $x_0 = 0$, $n = 5$.

   ii) $f_2(x) = xe^{x-1}$ en $x_0 = 1$, $n = 4$. $\rightarrow (x-1)e^{x-1} + e^{x-1}$ Calculo el de e^{x-1}

   iii) $f_3(x) = \arctan(x)$ en $x_0 = 1$, $n = 3$.

   b) Para las funciones $f_i(x)$ del ítem anterior aproximar el valor indicado:

   i) $f_1(0.2)$ y $f_1(2)$

   ii) $f_2(0.9)$

   iii) $f_3(0.1)$.

2. a) Probar que si $f(x)$ es una función impar entonces $P_n(x)$, el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$, sólo tiene potencias impares. Análogamente, si $f(x)$ es una función par entonces $P_n(x)$ sólo tiene potencias pares. $f(x) = -f(-x)$ Calculo P_f, P_{-f}

   b) Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x_0 = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \tan(x)$.

Aproximación del error

3. a) Para cada una de las siguientes funciones calcular el polinomio de Taylor de orden n en x_0 y encontrar la expresión del resto.

   $E_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$ $\quad \xi \in (0,x)$ or $\xi \in (x,0)$ if $x<0$

   $f^{(n+1)}(\xi) = \begin{cases} \pm\cos(\xi) \\ \pm\sin(\xi) \end{cases}$

   i) $f_1(x) = \cos(x)$ en $x_0 = 0$,

   ii) $f_2(x) = \frac{1}{x-3}$ en $x_0 = 1$.

   iii) $f_3(x) = \ln(\cos(x))$ en $x_0 = 0$ y $n = 3$.

   b) Para cada una de las funciones del ítem anterior acotar el error cometido

   i) $f_1(x)$ en $(-\pi, \pi)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

   ii) $f_2(x)$ en $(0, 2)$ para $n = 1, \ldots, 5$.

   iii) $f_3(x)$ en $(-1, 1)$.

   $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$

   c) Para cada función del ejercicio anterior graficar $f_i(x)$ y $P_n(x)$. $\rightarrow$ Python

Ej 2.a) f impar $\Rightarrow P_{f,0}$ solo tiene potencias impares

$f(-x) = -f(x)$ $\quad g(x) = f(-x)$

$f'(-x) = f'(x)$ $\quad f^{(2)}(-x) =$

$g(x) = f(-x) = -f(x)$ $\quad g'(x) = -f'(-x)$

$\Rightarrow \frac{dg}{dx} = -f'(x)$ $\quad \frac{d^2g}{dx^2} = f''(x) = -f''(-x)\cdot(-1) = f''(-x)$

$g''(0) = f''(0)$

$$P_{n,f,x_0=0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\,x^k}{k!} =$$

$$P_{n,g,x_0=0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)\,x^k}{k!} = P_{n,-f,x_0=0}(x)$$

$$= -\sum \frac{f^{(k)}(0)\,x^k}{k!}$$

$= g^{(2)}(0) = f^{(2)}(0)$ $\quad g^{(2i)}(0) = f^{(2i)}(0)$

$g^{(1)}(0) = -f^{(1)}(0)$ $\quad g^{(2i-1)}(0) = -f^{(2i)}(0)$

$$P_{n,g,0}(x) = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{g^{(2k)}(0)\,x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{g^{(2j+1)}(0)\,x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{f^{(2k)}(0)\,x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{-f^{(2j+1)}(0)\,x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$= -P_{f,x=0}(x) = -\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{f^{(2k)}(0)\,x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{f^{(2j+1)}(0)\,x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{f^{(2k)}(0)x^{2k}}{(2k)!} = -\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{f^{(2k)}(0)x^{2k}}{2k!} \Rightarrow \text{is the zero term!!}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum f^{(2k)}(0)x^{2k}}{2k!} = 0$$

$$\underbrace{f(-0)}_{f(0)} = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Lemma: f odd $\Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots \quad f(0) = 0$

Proof: f odd $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial^j f(-x)}{\partial x^j}\right|_{x=0} = \begin{cases} -f^{(j)}(-x)\big|_{x=0} & j = 2k+1 \\ +f^{(j)}(-x)\big|_{x=0} & j = 2k \end{cases} = \begin{cases} -f^{(j)}(x)\big|_{x=0} & j = 2k+1 \\ -f^{(j)}(x)\big|_{x=0} & j = 2k \end{cases}$$

$$g(x) = f(-x) = -f(x)$$
$$g'(x) = -f'(x) = -f'(-x)$$
$$g''(x) = -f''(x) = f''(-x)$$

$$\left.-f^{(2k)}(-x)\right|_{x=0} = -f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(-0)$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(2k)}(0) = 0}$$

2.a) f even: $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = g(x) = f(-x) \Rightarrow \left.\frac{d^j g}{dx}\right|_{x=0} = \{$$

$$g'(x) = f'(x) = -f'(-x)$$
$$g'(0) = f'(0) = -f'(0)$$

$$g^{(3)}(x) = -f^{(3)}(-x) = f^{(3)}(x)$$
$$\Rightarrow -f^{(3)}(0) = f^{(3)}(0) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$$

$$g^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) = f^{(2)}(-x) \Rightarrow f^{(2)}(0) = f^{(2)}(-0)$$

$$g^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(0), \quad g^{(2k+1)}(0) = f^{(2k+1)}(0) = 0$$

Ej 3. Aprox. del Error:

$E_n(x)$ = error de aprox $f(x)$ usando $P_{n,f}(x)$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{con } \xi\in(x_0,x) \ (\text{if } x>x_0) \ \text{or } \xi\in(x,x_0) \ (\text{if } x<x_0)$$

b) $f(x)=\frac{1}{x+3}$ $\quad x_0=1$ $\quad$ acotar $E_n(x)$ $\forall x\in(0,2)$ $\quad n=1,2,\dots,5$

$$f(x)=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4\left(1+\frac{(x-1)}{4}\right)} \Rightarrow P_{n,f,1}(x)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(x-1)^k}{4^k}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+3)^2} \qquad f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k\,k!}{(x+3)^{k+1}}$$

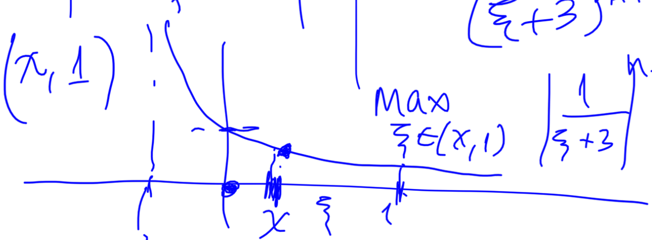
$$f''(x)=\frac{2}{(x+3)^3}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{-2\cdot 3}{(x+3)^4} \ \cdots \qquad f^{(k)}(1)=\frac{(-1)^k\,k!}{(4)^{k+1}}$$

$$E_{n,f}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)\,(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot\cancel{(n+1)!}}{(\xi+3)^{n+1}\cdot\cancel{(n+1)!}}(x-1)^{n+1} \qquad \xi\in(1,x) \text{ or } \xi\in(x,1)$$

if $x\in(0,1)$: $\left|E_{n,f}(x)\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(\xi+3)^{n+1}}\right|=\left|\frac{x-1}{\xi+3}\right|^{n+1}\le\frac{|x-1|^{n+1}}{3^{n+1}}$

x fijo $\quad \xi\in(x,1)$

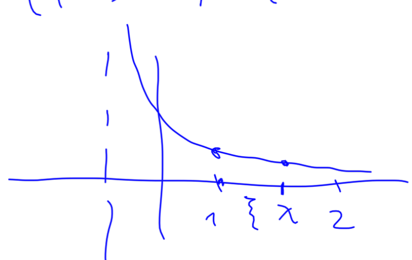


$$\max_{\xi\in(x,1)}\left|\frac{1}{\xi+3}\right|^{n+1}=\left(\frac{1}{x+3}\right)^{n+1}\le\frac{1}{3^{n+1}}$$

if $x\in(1,2)$: $\left|E_{n,f}(x)\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(\xi+3)^{n+1}}\right|=\left|\frac{x-1}{\xi+3}\right|^{n+1}\le\frac{|x-1|^{n+1}}{4^{n+1}}$

x fijo

$\xi\in(1,x)$



4. a) Desarrollar el polinomio de Taylor de orden n centrado en $x_0 = 0$ de $f(x) = (1+x)^a$ con $a \in \mathbb{R}$.

   b) Aplicando el ítem anterior para un valor de $a \in \mathbb{R}$ adecuado, calcular $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ con su polinomio de Taylor de orden 4. Acotar el error cometido.

5. Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$

   a) Acotar el error cometido al calcular $\ln(1,1)$ usando el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden 3 centrado en $x_0 = 1$.

   b) Hallar un valor aproximado de $\ln(1,1)$ con un error menor que 10^{-5}

6. Calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{9}$ con un error menor que 10^{-3}.

Interpolación polinomial

7. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3:

   a) en la forma de Lagrange,

   b) por coeficientes indeterminados.

   Verificar los resultados en `Python`. Graficar el polinomio interpolador.

x	-2	-1	2	3
y	4	1	4	9

x	0	1	3	5
y	1	2	3	4

8. Para cada una de las siguientes funciones[1], hallar el polinomio interpolador P_n en $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[a,b]$, para los valores de n indicados. Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores. Usando `Python`, estimar $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)|$.

   a) $f_1(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, $[a,b] = [0, 0.5]$, $n = 1, 2, 3, 6$.

   b) $f_2(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, $[a,b] = [-1,1]$, $n = 5, 10, 15$.

   c) $f_3(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}(x)$, $[a,b] = [-5,5]$, $n = 2, 9, 11, 13$.

9. Encontrar una función del tipo $4^{ax^3+bx^2+cx+d}$ que interpole la siguiente tabla de datos:

$f(x) = 4^{P_3(x)}$ Si $x = -2$

$f(-2) = 4^{P_3(-2)} = 1$

x	-2	-1	0	1
y	1	4	0.25	16

Si $x=-1$ $f(-1) = 4^{P_3(-1)} = 4$ $\Rightarrow \boxed{P_3(-1) = 1}$

[1] f_3 es conocida como la función secante hiperbólica, la inversa multiplicativa del coseno hiperbólico.

$\Rightarrow \boxed{P_3(-2) = 0}$

Si $x = 0 \Rightarrow 4^{P_3(0)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{P_3(0) = -1}$, Si $x=1$ $4^{P_3(1)} = 16$ $\Rightarrow \boxed{P_3(1) = 2}$

Ej 5 a) $f(x) = \log\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Acotar Error de usar $P_{3,x_0=1}$ para Calcular $\log(1,1)$

$x = ?$, $\frac{x+1}{2} = 1,1 \Rightarrow x = 1.2$

$x_0 = 1$

$$E_3(1.2) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(1.2-1)^4$$

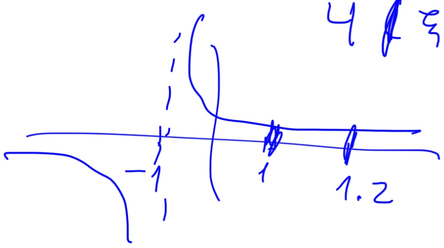
$f'(x) = \frac{1}{x+1}$ $f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

$f^{(3)} = \frac{2}{(x+1)^3}$ $f^{(4)} = \frac{-6}{(x+1)^4}$

$$E_3(1.2) = \frac{-6}{4!(\xi+1)^4}(1.2-1)^4$$

$\xi \in (1, 1.2)$

$$|E_3(1.2)| = \frac{(0.2)^4}{4(\xi+1)^4} = \frac{(0.2)^4}{4 \times 2^4} = \frac{\cancel{2^4}}{10^4 \cdot 4 \times \cancel{2^4}} = 0.25 \times 10^{-4} = 2,5 \times 10^{-5}$$



$$|E_{n,f}(1,2)| \leq 10^{-5} \iff \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(0.2)^{n+1}\right| \leq 10^{-5}$$

Pero $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{(x+1)^k}$

$$\Rightarrow |E_{n,f}(1.2)| = \frac{n!}{(n+1)!(\xi+1)^{n+1}}(0.2)^{n+1} = \frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}}$$

$\xi \in (1, 1.2)$: $\frac{1}{\xi+1} \leq \frac{1}{2}$

$$\leq \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)(2)^{n+1}} = \frac{1}{10^{n+1}(n+1)}$$

if $n = 4$: $|E_4(1.2)| \leq \frac{1}{5 \times 10^5} = 0.2 \times 10^{-5}$

$= 2 \times 10^{-6}$

Interpolación Polinomial:

7. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3:

a) en la forma de Lagrange,

b) por coeficientes indeterminados.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-2	-1	2	3
y	4	1	4	9

x	0	1	3	5
y	1	2	3	4

a) Forma de Lagrange: dados $x_0, x_1, \dots, x_n$ definimos los polinomios de Lagrange de grado n como:

$$L_j(x) = \frac{\prod_{k\neq j}(x-x_k)}{\prod_{k\neq j}(x_j-x_k)}$$

notar que $L_j(x_j) = \dfrac{\cancel{\prod_{k\neq j}(x_j-x_k)}}{\cancel{\prod_{k\neq j}(x_j-x_k)}} = 1$

$$L_j(x_k) = \frac{\cancel{\prod_{k\neq j}(x-x_j)}^{\,0}}{\prod_{k\neq j}(x_j-x_i)} = 0 \quad \forall k\neq j$$

Definimos el polinomio de grado n como:

$$P_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L_j(x)$$

Con $x_0, x_1, \dots, x_n$ dados y $f(x_i) = y_i$ dados $i = 0, 1, \dots, n$

En este caso $x_0 = -2$ $x_1 = -1$ $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ $\quad n = 3$

$y_0 = 4$ $\quad y_1 = 1$, $y_2 = 4$, $y_3 = 9$

entonces: $L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \dfrac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(-1)\cdot(-4)(-5)} = -\dfrac{1}{20}(x+1)(x-2)(x-3)$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{1\cdot(-3)(-4)} = \frac{1}{12}(x+2)(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-3)}{4*3\times(-1)} = \frac{-1}{12}(x+2)(x+1)(x-3)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{5*4*1} = \frac{1}{20}(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$P_3(x) = \frac{-4}{20}(x+1)(x-2)(x-3) + \frac{1}{12}(x+2)(x-2)(x-3) - \frac{4}{12}(x+2)(x+1)(x-3) + \frac{9}{20}(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$= \frac{1}{12}(x+2)(x-3)\left[(x-2)-4(x+1)\right] + \frac{1}{20}(x+1)(x-2)\left[-4(x-3)+9(x+2)\right]$$

$$= \frac{1}{12}(x^2-x-6)(-3x-6) + \frac{1}{20}(x^2-x-2)(+5x+30)$$

$$= -\cancel{\frac{3}{12}}^{\frac{1}{4}}x^3 - \frac{6}{12}x^2 + \frac{3}{12}x^2 + \frac{6x}{12} + \frac{18x}{12} + \frac{36}{12} + \cancel{\frac{5}{20}}^{\frac{1}{4}}x^3 + \frac{30}{20}x^2 - \frac{5}{20}x^2 - \frac{30x}{20} - \frac{10}{20}x - \frac{60}{20}$$

$$= -\frac{3}{12}x^2 + \cancel{\frac{24}{12}}^{2x}x + \cancel{3} + \frac{25}{20}x^2 - \cancel{\frac{40}{20}}^{-2x}x - \cancel{\frac{60}{20}}$$

$$= \frac{12}{12}x^2 + 0 = 1x^2 + 0\cdot x + 0$$

Si $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1)(-3)(-5)} = -\frac{1}{15}(x-1)(x-3)(x-5)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{1\cdot(-2)(-4)} = \frac{1}{8}x(x-3)(x-5), \quad L_2(x) = \frac{x(x-1)(x-5)}{3*2(-2)} = \frac{-1}{12}x(x-1)(x-5)$$

$$L_3(x) = \frac{(x)(x-1)(x-3)}{5 * 4 * 2} = \frac{1}{40}x(x-1)(x-3)$$

$$P_3(x) = -\frac{1}{15}(x-1)(x-3)(x-5) + \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8}_{4}}x(x-3)(x-5) - \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{12}_{4}}x(x-1)(x-5)$$

$$+ \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{40}_{10}}x(x-1)(x-3)$$

$$= +\frac{1}{4}x(x-5)\left[(x-3) - (x-1)\right] + (x-1)(x-3)\left[-\frac{1}{15}(x-5) + \frac{1}{10}x\right]$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-5x)(-2) + (x^2-4x+3)\left(\frac{1}{30}x + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}x^2} + \frac{5}{2}x + \frac{1}{30}x^3 + \underbrace{\frac{1}{3}x^2} - \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{30}_{15}}x^2 - \frac{4x}{3} + 1 + \frac{3}{30}x$$

$$= \frac{1}{30}x^3 - \underbrace{\frac{1}{6}x^2} - \underbrace{\frac{2}{15}x^2} +$$

$$= \frac{1}{30}x^3 - \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{30}_{10}}x^2 + \frac{19}{15}x + 1$$

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{5}{2} - \frac{4}{3}\right)x$$

$$= \frac{3 + 75 - 40}{30}x$$

$$= \frac{38}{30} = \frac{19x}{15}$$

//

Método de diferencias divididas:

Las diferencias divididas se usan para expresar el polinomio interpolador en la forma: $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

Notar que $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) = f(x_1)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{(x_1-x_0)} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} =: f[x_0, x_1]$$

Notación: 0-esima diferencia div de f en x_i es:

$$f[x_i] := f(x_i)$$

1-esima dif div de f respecto x_i y x_{i+1} es:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1}-x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

2-esima diferencia div. de f, $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ es:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i} = \frac{\dfrac{f(x_{i+2})-f(x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i+1})} - \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{(x_{i+1}-x_i)}}{x_{i+2}-x_i}$$

Si $i=0$: $$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$\boxed{f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2-x_0}}$$

la n-esima dif div. de f respecto de $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}$ es: $\quad {}^{2}\; x_0$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

so far: $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

$$= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f[x_2]$$

$$\Rightarrow f[x_0] + f[x_0,x_1](x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f[x_2]$$

$$\Rightarrow \quad f[x_0,x_1] + a_2(x_2-x_1) = \frac{f[x_2]-f[x_0]}{(x_2-x_0)}$$

$$f[x_0,x_1] + a_2(x_2-x_1) = \frac{f[x_2]-f[x_0]}{x-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} - \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$= \frac{(f(x_2)-f(x_1))(x_1-x_0) - (f(x_1)-f(x_0))(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$$

$$a_2 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{(f(x_2)-f(x_1))(x_1-x_0) - (f(x_1)-f(x_0))(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_0)} = f[x_0,x_1,x_2] \checkmark$$

en general $\boxed{a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]}$

En el caso $x_0=-2$ $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$ $y_0=4$, $y_1=1$, $y_2=4$, $y_3=9$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x+2) + a_2(x+2)(x+1) + a_3(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$a_0 = f(x_0) = 4 \quad a_1 = f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$a_2 = f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{1-(-3)}{4} = 1$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x} = \frac{1-4}{-1+2} = -3$$

$$a_3 = f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{1-1}{5} = 0$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{y_3-x_1} = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{9-4}{1} = 5$$

$$\Rightarrow P_3(x) = 4 - 3(x+2) + 1(x+2)(x+1) + 0(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$= \cancel{4} - \cancel{3x} - \cancel{6} + x^2 + \cancel{3x} + \cancel{2} = x^2 + 0 \cdot x + 0 \checkmark$$

debe coincidir con el polinomio de Lagrange

8. Para cada una de las siguientes funciones', hallar el polinomio interpolador ~~Pm~~ P_n en n + 1 puntos equiespaciados en el intervalo [a, b], para los valores de n indicados. Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores. Usando Python, estimar ~~máx7ela,b |f(x) - Pn(x)|~~. $\max\limits_{x\in[a,b]} |f - P_n|$

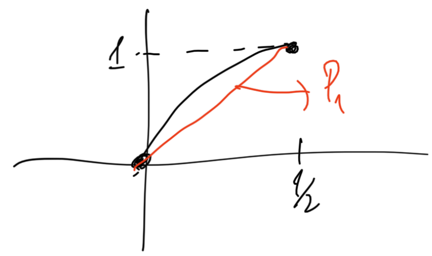
a) $f_1(x) = \sin(\pi x)$, en $[0, \frac{1}{2}]$ $n = 1, 2, 3, 6$

$n = 1 \Rightarrow \quad x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2}$ Usamos dif divididas:

$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ $\quad a_0 = f(x_0) = 0 \quad a_1 = f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

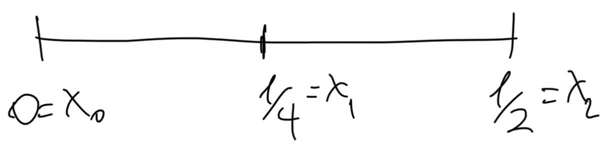
$= \dfrac{1 - 0}{1/2} = 2$

$f(x_0) = 0 \quad f(x_1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$



$\Rightarrow P_1(x) = 0 + 2(x - 0) = 2x$

$n = 2$:



$f(x_0) = 0 \quad f(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad f(x_2) = 1$

$P_2(x) = \underset{a_0}{f(x_0)} + \underset{a_1}{f[x_0, x_1]}(x - x_0) + \underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}_{a_2}(x - x_0)(x - x_1)$

$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1/4}$

$= 4\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 4 - 2\sqrt{2}$

$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{1/4} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{1/2} = \dfrac{4 - 4\sqrt{2}}{1/2} = 8(1 - \sqrt{2})$

$P_2(x) = 0 + 2\sqrt{2}x + 8(1 - \sqrt{2})x\left(x - \frac{1}{4}\right) = 8(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 - \sqrt{2})x + 2\sqrt{2}x$

$P_2(x_0) = P_2(0) = 0 = f(x_0) \quad P_2(x_1) = P_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2(1 - \sqrt{2})\overbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)}^{0}$

$P_2(x_2) = P_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + \sqrt{2} + 4(1 - \sqrt{2})\frac{1}{4} = 1 \checkmark \qquad = \frac{\sqrt{2}}{2} = f(x_1)$

$$\max_{x\in[0,1/2]} |f(x) - P_2(x)| = \max_{x\in[0,1/2]} |\sin(\pi x) - 8(1-\sqrt{2})x^2 - 2x(2\sqrt{2}-1)|$$

$$P_2(x) = 8(1-\sqrt{2})x^2 + 4\sqrt{2}x - 2x$$
$$= 8(1-\sqrt{2})x^2 + 2x(2\sqrt{2}-1)$$

$$P_2(x) = [8(1-\sqrt{2}),\ 2(2\sqrt{2}-1),\ 0]$$

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$a_0 = f(x_0)$ $\quad a_1 = f[x_0, x_1]$ $\quad a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{b_1 - a_1}{x_2 - x_0}$

$b_1 = f[x_1, x_2]$ $\quad b_2 = f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_2}$ ✓

$c_1 = f[x_2, x_3]$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$b_3 = f[x_1, x_2, x_3, x_4] = f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]$$ ✓

$$a_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, \dots, x_4] - f[x_0, \dots, x_3]}{}$$

10. Hallar y graficar una función del tipo $e^{a_4x^4+a_3x^3+\cdots+a_0}$ que interpole a la función $f(x) = 1/x$ en 5 nodos equiespaciados en el intervalo $[1, 10]$.

11. En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados. El rendimiento del proceso depende de la temperatura.

    Se dispone de los siguientes datos

$T(°C)$	150	160	170	180	190	200	210
$R(\%)$	35.5	37.8	43.6	45.7	47.3	50.1	51.2

Rta: $R = P_6(162°)$
$= 39.2$
Proceso satisfactorio

    Se considera un rendimiento óptimo el que va de 38.5 % a 45 %, por lo que la planta trabaja a 175°C. Si la temperatura de trabajo cae a 162°C por una avería, ¿será el proceso satisfactorio hasta que sea reparada? Sol: Se halla P_6 que interpole y se extrapola $P_6(162°) = ? = R = \begin{cases} \text{yes} & \text{if } R > 38.5 < 45 \\ \text{no} & \text{else} \end{cases}$

12. El pentóxido de dinitrógeno gaseoso puro reacciona en un reactor intermitente según la reacción estequiométrica

$$2N_2O_5 \rightleftharpoons 2N_2O_4 + O_2$$

    Calculamos la concentración de pentóxido de dinitrógeno existente en ciertos instantes, obteniendo los siguientes datos

$T(s)$	2	200	400	650	1100	1900	2300
C	5.5	5.04	4.36	3.45	2.37	1.32	0.71

    Si lo tenemos en el reactor un tiempo máximo de 35 minutos (2100 segundos), ¿cuál es la concentración de pentóxido de dinitrógeno que queda sin reaccionar?

Polinomios de Chebyshev

13. a) Hallar n de modo que el polinomio P_n que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de T_{n+1} verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leqslant 10^{-2}$ en $[-1, 1]$.

    b) Repetir el ítem anterior para $f(x) = e^x$, $x \in [0, 4]$.

14. Para $n = 9, 11, 13$; graficar simultáneamente el polinomio $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, donde $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ y el polinomio $T_{n+1}/2^n$ donde T_{n+1} es el $(n+1)$-ésimo polinomio de Chebyshev.

15. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2}$.

    a) Acotar el error cometido al interpolar en $n + 1$ puntos equiespaciados y al interpolar en los ceros de Chebyshev.

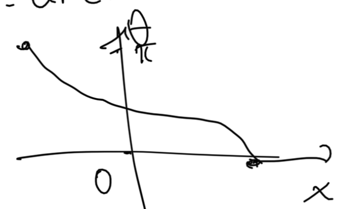
Polinomios de Chebyshev: Son una familia $\{T_n(x)\}$ de polinomios que son ortogonales respecto del peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ para $x \in (-1,1)$

Definición: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ $x \in [-1,1]$ y $n \geq 0$

obs: $T_0(x) = 1$ pol. constante

$T_1(x) = x$

Para $n \geq 1$ introducimos el cambio de variable $\theta = \arccos(x)$



$\Rightarrow T_n(\theta(x)) = \cos(n\theta)$ con $\theta \in [0,\pi]$

Por las props del coseno $T_{n+1}(\theta) = \cos((n+1)\theta)$

$= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$

$T_{n-1}(\theta) = \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin\theta\sin(n\theta)$

$\Rightarrow T_{n+1} + T_{n-1} = 2\cos(n\theta)\cos\theta$

i.e. $T_{n+1}(\theta) = 2T_n(\theta)\underbrace{\cos\theta}_{x} - T_{n-1}(\theta)$

Volviendo a la variable $x = \cos\theta$: $\boxed{T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)}$

Esta recurrencia junto con $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ nos permiten ver que

$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - T_1(x) = 4x^3 - 2x - x$

$= 4x^3 - 3x$

T_n es un polinomio de grado n con $a_n = 2^{n-1}$

Teorema: El polinomio T_n $(n \geq 1)$ tiene ceros simples en $[-1,1]$ en

$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ con $k = 1, 2, \dots, n$

T_n tiene extremos absolutos en $\bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

$$\boxed{T_n(\bar{x}'_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n}$$

Proof: replace $\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ in T_n $\quad k = 1, 2, \dots, n$

$$T_n(\bar{x}_k) = \cos\left(n\,\arccos\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) = \cos\left(n\,\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

$$= \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \in [-1, 1]$$

además: $\bar{x}_k \neq \bar{x}_j$ si $k \neq j$ y como $\deg(T_n) = n$ entonces estas son todas sus raíces. $\blacksquare$

Para hallar los extremos, se calcula T_n'

Polinomios mónicos de Chebyshev: $\tilde{T}_n(x) := 2^{-n+1} \cdot T_n(x)$

Como $a_n(T_n) = 2^{n-1} \Rightarrow a_n(\tilde{T}_n(x)) = 2^{-n+1} \cdot 2^{n-1} = 1$

Teorema: (los mónicos de Chebyshev son los de mínima norma $\|\ \|_\infty$)

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \quad \forall P_n \in \tilde{\Pi}_n$$

$\tilde{\Pi}_n$: Conjunto de todos los pol mónicos de grado n.

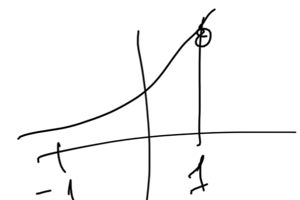
Corolario: Sea P el polinomio de interpolación de f de grado $\deg(P) \leq n$ con nodos en los ceros de $T_{n+1}(x)$. Entonces

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)| \quad \forall f \in C^{n+1}[-1,1]$$

Ejercicio 13: a) Hallar n de modo que el polinomio P_n que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de T_{n+1} verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$ en $[-1,1]$.

Por el corolario anterior si P interpola a f en los ceros de T_{n+1}

$$\Rightarrow \quad \|f - P_n\|_\infty := \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$



$$f'(x) = 2e^{2x} \qquad f''(x) = 2^2 e^{2x} \quad \dots \quad f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1} e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{\cancel{2^n}(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |\cancel{2^{n+1}} e^{2x}| = \frac{2}{(n+1)!} e^2 \leq 10^{-2}$$

$$(n+1)! \geq 2\, 10^2 e^2 = 1477.8 \Rightarrow n \geq 6 \text{ pues}$$

$$(n+1)! = 7! = 5040$$

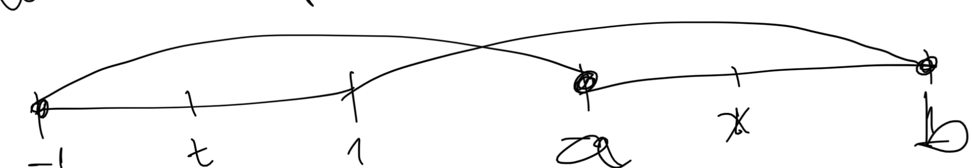
$$\text{y } 6! = 720$$

$$\|f - P_6\| \leq \frac{1}{2^6 \cdot 7!} 2^7 \cdot e^2 = \frac{2e^2}{7!} = 0.003 = 0.3 \times 10^{-2} = 3\times 10^{-3}$$

$$\text{y} \quad \|f - P_5\| \leq \frac{1}{2^5 \cdot 6!} 2^6 \cdot e^2 = \frac{2e^2}{6!} = 0.02 = 2\times 10^{-2}$$

b) Idem para $f(x) = e^x$, $x \in [0,4]$

Como ahora el intervalo no es $[-1,1]$ se puede realizar un cambio que transforme $[-1,1]$ en $[a,b]$



$$x = h(t) = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b]$$

$$h(-1) = \frac{1}{2}[(b-a)(-1) + a + b] = a \qquad h(1) = b$$

Así, vía esta transformación se cambian los nodos de $\bar{T}_n$ desde $[-1,1]$ hasta $[a,b]$ de la siguiente forma:

$$\tilde{x}_k = h(\bar{x}_k) = \frac{1}{2}\left[(b-a)\bar{x}_k + a + b\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + a + b\right] \quad \text{con } k = 1, \dots, n$$

y se halla P_{n-1} polinomio interpolador (de Lagrange) en los nodos $\tilde{x}_k$ con $k = 1, \dots, n$

y entonces se tiene una cota similar

$$\|f - P_n\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{2^n \cdot (n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

En el caso $f(x) = e^x$ con $x \in [0,4]$ buscamos n : $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \max_{x\in[0,4]} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \left(\frac{4-0}{2}\right)^{n+1} = \frac{e^4 \cdot 2^{n+1}}{2^n (n+1)!} \leq 10^{-2}$$

$$\Rightarrow 2e^4 \times 10^2 \leq (n+1)!$$
$$\approx 10919{,}6$$

luego $n \geq 7$ pues $8! = 40.320 > 2e^4 \times 10^2$

y $7! = 5040 < 2e^4 \times 10^2$

$$\boxed{\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= e^x \\ \|f^{(n+1)}\|_\infty &= e^4 \text{ en } [0,4] \end{aligned}}$$

Ejercicio 14 (Python Collab)

$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ es el error de aproximar $f(x)$ usando P_n evaluado en x

una cota para el error es: $|E_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot |W(x)|$

Ahora como $W(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ $\quad x_i$ = nodos equiespaciados

entonces $|x - x_j| \leq (b-a) \Rightarrow |W_{n+1}(x)| \leq (b-a)^{n+1}$

Una cota mas fina para $|W_{n+1}(x)|$ se obtiene con la siguiente obs:

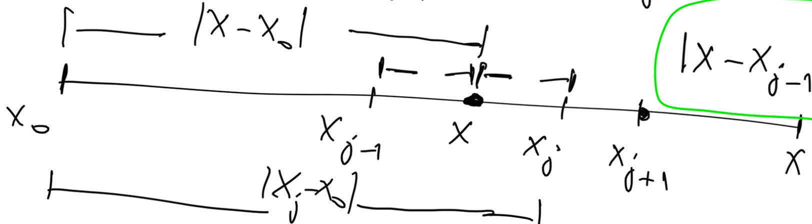
Dado $x \in [a,b]$ existe algún índice $1 \leq j \leq n$ tal que $x_{j-1} \leq x \leq x_j$

(es decir, dado $x \in [a,b]$ existe algún subintervalito de los nodos que lo contiene)

Entonces $|W_{n+1}(x)| = |x-x_0||x-x_1|\cdots|x-x_{j-1}||x-x_j|\cdots|x-x_n|$

$$\leq \boxed{|x_j - x_0||x_j - x_1||x_j - x_2|\cdots|x_j - x_{j-1}|}\,\boxed{|x_{j-1} - x_j|}\,|x_{j-1} - x_{j+1}|\cdots|x_{j-1} - x_n|$$

Como $x_{j-1} \leq x \leq x_j \Rightarrow x_{j-1} - x_0 \leq x - x_0 \leq x_j - x_0 \Rightarrow |x - x_0| \leq |x_j - x_0|$



$\boxed{|x - x_{j-1}| \leq |x_j - x_{j-1}|}$

$\boxed{|x - x_j| \leq |x_{j-1} - x_j|}$

$|x - x_{j+1}| \leq |x_{j-1} - x_{j+1}|, \ldots |x - x_\ell| \leq |x_{j-1} - x_\ell| \quad \forall \ell = j+1, j+2, \ldots, n$

entonces $|W_{n+1}(x)| \leq |x_j - x_0||x_j - x_1|\cdots|x_j - x_{j-1}||x_{j-1} - x_j||x_{j-1} - x_{j+1}|\cdots|x_{j-1} - x_n|$

$$\leq \left|\frac{b-a}{n}\right| j \cdot \frac{(b-a)}{n}(j-1) \cdots \frac{(b-a)}{n}(1)\, \frac{(b-a)}{n} \cdot 1 \cdot \frac{(b-a)}{n} 2\, \frac{(b-a)}{n} \cdot 3 \cdots \frac{(b-a)}{n}(n-j+1)$$

$|x_j - x_0| = \left|\frac{b-a}{n}\right|(j-0)$ $|x_j - x_1| = \left|\frac{b-a}{n}\right|(j-1)$ . . .

Explanation

$x_j = a + \frac{(b-a)j}{n}$ $x_\ell = a + \frac{(b-a)\ell}{n}$ $\ell = 0,1,\dots,j-1 \Rightarrow x_j - x_\ell = \frac{(b-a)(j-\ell)}{n}$

$|x_{j-1} - x_k| = \frac{(b-a)}{n}(k-j+1)$ si $k = j+1, j+2, \dots, n$

$|x_{j-1} - x_{j+1}| = \frac{(b-a)}{n}\cdot 2$ $|x_{j-1} - x_{j+2}| = \frac{(b-a)}{n}\cdot 3, \dots, |x_{j-1} - x_n| = \frac{(b-a)}{n}\cdot(n-j+1)$

entonces $|W_{n+1}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot j!\,(n+1-j)! \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot (n+1)!$

donde hemos usado que $\forall j = 1,\dots,n$ $j!\,(n+1-j)! \leq (n+1)!$

Cota para el Error E_n cuando los nodos son EQUIESPACIADOS:

$$|E_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| |W_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot (n+1)! \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

Ejercicio 15: $f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$ $x \in [-1,1]$

a) Acotar el error al interpolar $n+1$ puntos equiespaciados y al interpola[r] en las $n+1$ raíces de Chebyshev.

Calculemos $f^{(k)}(x) = ??$ $f'(x) = \frac{-2}{(2+x)^3}$ $f''(x) = \frac{-2(-3)}{(2+x)^4}$, $f^{(3)}(x) = \frac{(-2)(-3)(-4)}{(2+x)^5}$

... $f^{(k)}(x) = \frac{(k+1)!\,(-1)^k}{(2+x)^{k+2}}$

entonces $|E_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)\right| = \frac{\cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+1)!}\,(2+\xi)^{n+3}} \cdot |W_{n+1}(x)|$

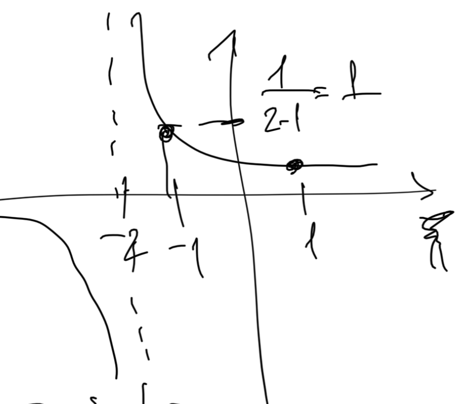
$\boxed{(n+2)! = (n+2)(n+1)!}$

$\le (n+2)\cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot (n+1)! \max_{\xi\in[-1,1]} \left|\frac{1}{(2+\xi)^{n+3}}\right|$

$a=-1,\ b=1$

$= (n+2)\frac{2^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}\cdot\frac{1}{1^{n+3}} = \boxed{\frac{(n+2)(n+1)!\,2^{n+1}}{n^{n+1}}}$

Cota para los equiespaciados



Si usamos como nodos los ceros de T_{n+1} (el mónico)

entonces $|E_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}\right| \le \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{2}\right)^{n+1}\cdot 1$

$|W_{n+1}(x)| \le \|W_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$

$1 = \max_{\xi\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(\xi)|$

$|E_n(x)| \le \frac{1}{2^n (n+1)!}$ $\qquad |\tilde{E}_n(x)| \le \frac{(n+2)!\,2^{n+1}}{n^{n+1}}$

$(n+2)! \approx \sqrt{2\pi(n+2)}\left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+2}$

$\frac{1}{2^n(n+1)!} \overset{?}{\le} \frac{(n+2)!\,2^{n+1}}{n^{n+1}}$ $\qquad n! \ge \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}\cdot e^{\frac{1}{12n+1}}$

$1 \le \frac{(n+2)!\,(n+1)!\,2^{2n+1}}{n^{n+1}} = 2^{2n+1}\cdot\frac{(n+2)(n+1)^2(n!)^2}{n\cdot n^n} \approx$

$2^{2n+1}(n+2)(n+1)^2\cdot\frac{\sqrt{2\pi n}^2\, n^{2n}}{n^n\, e^{2n}} = \frac{2^{2n+2}(n+2)(n+1)^2\pi\cdot n^n}{e^{2n}} = 2^{2n+2}(n+2)(n+1)^2\pi\left(\frac{n}{e^2}\right)^n$

15.b) En cada caso hallar el mínimo n t.q $|E_n(x)| \leq 10^{-4}$

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!}$$

quiero $\frac{1}{2^n(n+1)!} \leq 10^{-4} \Rightarrow$

$n = 4 \quad \frac{1}{2^4(5!)} = 0.00052 = 5.2 \times 10^{-4} \not\leq 10^{-4}$

$n = 5 \quad \frac{1}{2^5(6!)} = 4.34 \times 10^{-5} \leq 10^{-4}$ ✓

$n = 5$

$$|\tilde{E}_n(x)| \leq \frac{(n+2)! \, 2^{n+1}}{n^{n+1}}$$

$$(n+2)! \cdot \frac{2^{n+1}}{n^{n+1}} \leq 10^{-4}$$

$n = 5: \quad 7! \cdot \frac{2^6}{5^6} = 20.64$

$n = 10: \quad 12! \left(\frac{2}{10}\right)^{11} = 9.8099$

$n = 15: \quad 17! \left(\frac{2}{15}\right)^{16} = 3.55$

$n = 30: \quad 32! \left(\frac{2}{30}\right)^{31} = 0.0914$

$n = 56: \quad C(56) = 7.6 \times 10^{-5}$

$n = 55: \quad C(55) = 1.01 \times 10^{-4}$

//

b) En cada caso determinar, si es posible, la mínima cantidad de nodos necesarios que se deben considerar para asegurar que el error cometido es menor que 10^{-4}.

16. Repetir el Ejercicio 8 usando los polinomios que interpolan a la función f en los ceros del polinomio de Chebyshev de grado $n+1$ en el intervalo correspondiente. Comparar

Interpolación de Hermite

17. Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique

$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1),\ p''(1) = f''(1).$$

Interpolación lineal y cúbica segmentada

18. Calcular un spline cúbico que interpole la siguiente tabla de datos

x	0	0.5	1
y	0	1	0

Graficar el spline junto con la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.

19. Dada la siguiente tabla de datos

x	2	6	7	12
y	4	4	6	7

a) Calcular un spline cúbico que interpole los datos.

b) Calcular el polinomio interpolador.

c) Graficar el spline y el polinomio interpolador.

20. En su artículo[2], Hubert Frings y Mable Frings estudiaron la influencia de la temperatura sobre el número de chirridos por minuto de grillos (neoconocephalus ensinger) machos. A partir de la siguiente tabla (Tabla 1 en H. Frings et al)

$T(°C)$	8	9	14	17	18	19	20.5	21.5	23	24	25	26
$N(min^{-1})$	264	285	346	417	438	495	524	540	643	693	744	780

(a) Construir el polinomio interpolador en el intervalo $[8, 26]$.

(b) Calcular un spline cúbico que interpole los datos.

(c) Graficar el polinomio interpolador y el spline. Qué observa?

[2] H. Frings and M. Frings, *The effects of temperature on chirp-rate of male cone-headed grasshoppers, neoconocephalus ensiger*, Journal of Experimental Zoology **134** (1957), n∘ 3

Interpolación de Hermite: La idea es aproximar los valores de f conociendo los valores de ella y de algunas de sus derivadas en distintos puntos

Para los puntos $x_0, x_1, \dots, x_m$ definimos $y_{j,k} = f^{(k)}(x_j)$ $\quad j=0,\dots,m,\ k=0,1,\dots,q_j-1$

($q_j = q(j)$ es un entero que depende de j)

Buscamos un polinomio de grado $\leq n = q_0+q_1+\dots+q_m-1$ tal que $f^{(k)}(x_j)=y_{j,k}$

Cuando $q_0=n+1$, $q_1=q_2=\dots=q_m=0 \Rightarrow$ obtenemos el polinomio de Taylor

Pues: $f^{(k)}(x_0)=y_{0,k}$ $\forall\ k=0,1,\dots,q_0-1=0,1,\dots,n$ y $f^{(k)}(x_j)$ no lo conocemos

Si $q_0=q_1=\dots=q_m=1$ $\quad m=n \Rightarrow f^{(k)}(x_j)=y_{j,k}$ $\quad k=0,1,\dots,\overset{=1}{q_j}-1$ $\quad k=0$

i.e. Conocemos $f^{(0)}(x_j)=y_j$ $\forall j=0,\dots,m$

Construcción del polinomio de Hermite:

Consideremos las diferencias divididas para valores repetidos de x, por ejemplo si la condición en el punto x_k es que conocemos $f(x_k)=y_k$ y $f^{(l)}(x_k)=y_{k,l}$ con $l=1,\dots,q-1$ (es decir, conocemos $f(x_k), f'(x_k),\dots, f^{(q-1)}(x_k)$)

entonces planteamos:

$$f[x_k]=f(x_k),\quad f[x_k,x_k]=f'(x_k),\quad f[x_k,x_k,x_k]=\frac{1}{2!}f^{(2)}(x_k),\dots$$

$$f[\underbrace{x_k,x_k,\dots,x_k}_{q\text{-veces}}]=\frac{1}{(q-1)!}f^{(q-1)}(x_k).$$

Si $q=3 \Rightarrow$ $f[x_k]=f(x_k)$

$f[x_k,x_k]=f'(x_k)$

$f[x_k,x_k,x_k]=\frac{f''(x_k)}{2}$

y esto para cada nodo que tenemos

Ejemplo: Hallar P_5 que interpole a f sabiendo que $f(\overset{x_0}{-1})=-3$, $f'(-1)=-1$, $f(\overset{x_1}{0})=0$, $f'(0)=2$, $f''(0)=-6$, $f(\overset{x_2}{1})=-1$ (tenemos $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$ pero repetimos x_0 dos veces

$q_0=2$ (Conocemos $f(x_0), f'(x_0)$) $\qquad q_2=1$ (Conocemos $f(x_2)$)

$q_1=3$ (Conocemos $f(x_1), f'(x_1), f''(x_1)$)

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k,x_j]$	$f[x_k,x_j,x_l]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l,x_m]$
$x_0=-1$	-3				
		$f[x_0,x_0]=f'(x_0)=-1$			
$x_0=-1$	-3		$f[x_0,x_0,x_1]=4$		
		$f[x_0,x_1]=3$		$f[x_0,x_0,x_1,x_1]=-5$	
$x_1=0$	0		$f[x_0,x_1,x_1]=-1$		$f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1]=\frac{-2-(-5)}{0-(-1)}=3$
		$f[x_1,x_1]=f'(x_1)=2$		$f[x_0,x_1,x_1,x_1]=-2$	
$x_1=0$	0		$f[x_1,x_1,x_1]=-3$		$f[x_0,x_1,x_1,x_1,x_2]=\frac{0-(-2)}{1-(-1)}=1$
		$f[x_1,x_1]=f'(x_1)=-1$		$f[x_1,x_1,x_1,x_2]=0$	
$x_1=0$	0		$f[x_1,x_1,x_2]=-3$		
		$f[x_1,x_2]=-1$			
$x_2=1$	-1				

?

$$f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1,x_2]=\frac{1-3}{1-(-1)}=-1$$

Paso 1:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{0-(-3)}{0-(-1)}=3$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}=\frac{-1-0}{1-0}=-1$$

Paso 2:

$$f[x_0,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,1]-f[x_0,x_0]}{x_1-x_0}=\frac{3-(-1)}{0-(-1)}=4$$

$$f[x_0,x_1,x_1]=\frac{f[x_1,x_1]-f[x_0,x_1]}{x_1-x_0}=\frac{2-3}{0-(-1)}=-1$$

$$f[x_1,x_1,x_1]=\frac{f''(x_1)}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

$$f[x_1,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_1,x_1]}{x_2-x_1}=\frac{-1-2}{1-0}=-3$$

Paso 3:

$$f[x_0,x_0,x_1,x_1]=\frac{f[x_0,x_1,x_1]-f[x_0,x_0,x_1]}{x_1-x_0}=\frac{-1-4}{0-(-1)}=-5$$

$$f[x_0,x_1,x_1,x_1]=\frac{f[x_1,x_1,x_1]-f[x_0,x_1,x_1]}{x_1-x_0}=\frac{-3-(-1)}{0-(-1)}=-2$$

$$f[x_1,x_1,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_1,x_2]-f[x_1,x_1,x_1]}{x_2-x_1}=\frac{-3-(-3)}{1-0}=0$$

$$\Rightarrow P_5(x)=f[x_0]+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2+f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)$$
$$+f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)^2+f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1,x_2](x-x_0)^2(x-x_1)^3$$

$$P_5(x)=-3-1(x+1)+4(x+1)^2-5(x+1)^2x+3(x+1)^2(x-0)^2-1(x+1)^2(x-0)^3$$
$$=-3-(x+1)+4(x+1)^2-5x(x+1)^2+3x^2(x+1)^2-x^3(x+1)^2$$

Ejercicio 11: Sea $f(x)=\cos(\pi x)$. Hallar un P $\deg(P)\leq 4$ que verifique

$f(-1)=P(-1)$, $f(0)=P(0)$, $P(1)=f(1)$, $P'(1)=f'(1)$, $P''(1)=f''(1)$

$x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$ $\quad f(x_0)=-1$, $f(x_1)=1$, $f(x_2)=-1$, $f'(x_2)=0$ $\quad f''(x_2)=-\pi^2\cos(\pi)=\pi^2$

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k,x_j]$	$f[x_k,x_j,x_l]$	$f[x_k,x_j,x_l,x_m]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_2,x_2]$
$x_0=-1$	-1				
		$f[x_0,x_1]=\frac{2}{1}$			
$x_1=0$	1		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{-4}{2}$		
		$f[x_1,x_2]=\frac{-2}{1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_2]=\frac{4}{2}$	
$x_2=1$	-1		$f[x_1,x_2,x_2]=\frac{2}{1}$		$\frac{\pi^2-4}{2}$
		$f[x_2,x_2]=\frac{0}{1!}$		$f[x_1,x_2,x_2,x_2]=\frac{\pi^2-2}{1}$	
$x_2=1$	-1		$f[x_2,x_2,x_2]=\pi^2$		
		$f[x_2,x_2]=0$			
$x_2=1$	-1				

$$P_4(x)=-1+2(x+1)-2(x+1)(x-0)+2(x+1)(x-0)(x-1)+\frac{(\pi^2-4)}{2}(x+1)(x-0)(x-1)^2$$

Interpolación lineal y cúbica

Spline cúbicos: dada f en $[a,b]$ y un conjunto de nodos $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ un Spline Cúbico interpolante S para f es una función que cumple:

a) $S\big|_{[x_j,x_{j+1}]}$ es un pol. de grado 3 para $j=0,1,\dots,n-1$

b) $S_j(x_j)=f(x_j)$, $S_{j+1}(x_{j+1})=f(x_{j+1})$ $\forall j=0,\dots,n-1$

c) $S_{j+1}(x_{j+1})=S_j(x_{j+1})$ $j=0,\dots,n-2$ (los S_i se pegan bien)

d) $S'_{j+1}(x_{j+1})=S'_j(x_{j+1})$ $j=0,\dots,n-2$ (se pegan de forma C^1)

e) $S''_{j+1}(x_{j+1})=S''_j(x_{j+1})$ $j=0,\dots,n-2$ (se pegan de forma C^2)

f) alguna de las cond. de borde se cumple:

i) $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$ (free or natural boundary)

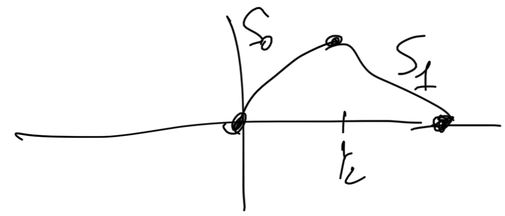
ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$ (clamp boundary)

Ej. 18:

Calcular un spline cúbico que interpole la siguiente tabla de datos

x	0	0.5	1
y	0	1	0

Graficar el spline junto con la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.



Como tenemos 3 nodos

S_0 S_1

$x_0 = 0$ $x_1 = 1/2$ $x_2 = 1$

Buscamos S_0, S_1

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$

Con a_i, b_i, c_i, d_i $i = 0, 1$ (8 constantes por determinar)

$$S_0(x_0) = a_0 = y_0 = f(x_0) \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}, \quad S_1(x_1) = a_1 = f(x_1) = f(1/2) = 1$$

$$S_0(x_1) = S_1(x_1) \Rightarrow b_0\left(\tfrac{1}{2} - 0\right) + c_0\left(\tfrac{1}{2} - 0\right)^2 + d_0\left(\tfrac{1}{2} - 0\right)^3 = 1$$

$$\frac{b_0}{2} + \frac{c_0}{4} + \frac{d_0}{8} = 1 \Rightarrow \boxed{4b_0 + 2c_0 + d_0 = 8} \quad (1)$$

$$S_1(x_2) = f(x_2) \Rightarrow a_1 + b_1\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + c_1\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 + d_1\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^3 = 0$$

$$1 + \frac{b_1}{2} + \frac{c_1}{4} + \frac{d_1}{8} = 0 \Rightarrow \boxed{4b_1 + 2c_1 + d_1 = -8} \quad (2)$$

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \Rightarrow b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 = b_1$$

$$\Rightarrow b_0 + c_0 + \frac{3d_0}{4} = b_1 \Rightarrow \boxed{4b_0 + 4c_0 + 3d_0 = 4b_1} \quad (3)$$

$$S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \Rightarrow 2c_0(x_1 - x_0) + 6d_0(x_1 - x_0) = 2c_1$$

$$2c_0 + 6d_0\left(\tfrac{1}{2} - 0\right) = 2c_1$$

$$\boxed{3d_0 = 2c_1}$$

free natural conditions:

$S_0''(x_0) = S_1''(x_2) = 0$

$\Rightarrow 2c_0 = 0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 0}$

$2c_1 + 6d_1(1-\frac{1}{2}) = 0$

$\boxed{2c_1 + 3d_1 = 0}$ (5)

$S_0' = b_0 + 2c_0(x-x_0) + 3d_0(x-x_0)^2$

$S_1' = b_1 + 2c_1(x-x_1) + 3d_1(x-x_1)^2$

$S_0'' = 2c_0 + 6d_0(x-x_0)$

$S_1'' = 2c_1 + 6d_1(x-x_1)$

5 equations with b_0, d_0, b_1, c_1, d_1 unknowns

Equations replacing $c_0 = 0$:

$4b_0 + d_0 = 8 \Rightarrow b_0 = 2 - \frac{d_0}{4} = 2 - \frac{1}{6}c_1$

$4b_1 + 2c_1 + d_1 = -$

$3d_0 - 2c_1 = 0 \Rightarrow d_0 = \frac{2}{3}c_1$

$2c_1 + 3d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = -\frac{2}{3}c_1$

$4b_0 + 3d_0 - 4b_1 = 0$

$4b_1 = -8 - 2c_1 - d_1$

$4b_1 = -8 - 2c_1 + \frac{2}{3}c_1$

$4b_1 = -8 - \frac{4}{3}c_1$

$8 - \frac{2}{3}c_1 + \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}c_1 + 8 + \frac{4}{3}c_1 = 0$

$8 - \frac{2}{3}c_1 + 2c_1 + 8 + \frac{4}{3}c_1 = 0$

$16 + \frac{8}{3}c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -6}$

$d_1 = -\frac{2}{3}c_1 = -\frac{2}{3}(-6) = 4,$

$d_0 = +\frac{2}{3}c_1 = -4, \quad 4b_1 = -8 - \frac{4}{3}c_1 \Rightarrow b_1 = \boxed{-8 - \frac{4}{3}(-6) = -8 + 8 = 0}$

$b_0 = 2 - \frac{1}{6}\cdot c_1 = 2 - \frac{1}{6}(-6) = 3$

$\Rightarrow S_0(x) = 3\cancel{x} + 4x^3 \quad S_1(x) = 1 - 6(x-\frac{1}{2})^2 + 4(x-\frac{1}{2})^3$

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} 3x - 4x^3 & \text{if } x \in [0, 1/2] \\ 1 - 6(x - 1/2)^2 + 4(x - 1/2)^3 & \text{if } x \in [1/2, 1] \end{cases}}$$

$S(x_0) = f(x_0) = 0$ ✓ $\quad S(x_1) = f(x_1) \quad S_0(1/2) \overset{??}{=} S_1(1/2)$

$S_0(1/2) = \frac{3}{2} - \frac{4}{8} = \frac{8}{8} = 1 = f(1/2)$ ✓

$S_1(1/2) = 1$ ✓ $\quad f(1) = S_1(1) = 1 - \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}} + \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}} = 0$ ✓

$S_0'(1/2) = S_1'(1/2)$??

$S_0'(x) = 3 - 12x^2$

$S_0'(1/2) = 3 - \frac{12}{4} = 0$ ✓

$S_1'(1/2) = -12(\frac{1}{2} - 1/2) + 12(\frac{1}{2} - 1/2)^2 = 0$ ✓

$S_0''(0) = -24 \cdot 0 = 0$ ✓

$S_1''(1) = -12 + 24(x - 1/2) = -12 + 24 \cdot \frac{1}{2} = 0$ ✓

$S(\frac{1}{4}) = S_0(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} - \frac{4 \cdot 1}{4^3} = \frac{12}{16} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

reading coefficients in Python: S = cubicSpline(X, Y) ⇒ C = S.c

$C[k,i]$ is coefficient for $(x - x[i])^{3-k}$

$C[0,0]$ coeff. for $(x - x_0)^3 = d_0 = -4$ ✓

$C[1,0]$ = coeff for $(x - x_0)^2 = c_0 = 0$ ✓

$C[2,0]$ = coeff for $(x - x_0)^1 = b_0 = 3$ ✓

$C[3,0] = a_0 = 0$ ✓

$C[0,1] = d_1 = 4$ ✓ $\quad C[1,1]$ = coeff of $(x - x_1)^2 = c_1 = -6$ ✓

$C[2,1]$ = coeff for $(x - x_1)^1 = b_1 = 0$ ✓ $\quad C[2,2] = a_1 = 1$ ✓