Matemática II (B)
Segundo Cuatrimestre - 2022

Práctica 1: Aproximación de funciones

Polinomio de Taylor

1. a) Para cada caso calcular el polinomio de Taylor de orden n en x_0:
    - i) $f_1(x) = e^{2x}$ en $x_0 = 0$, $n = 5$.
    - ii) $f_2(x) = xe^{x-1}$ en $x_0 = 1$, $n = 4$. $\to (x-1)e^{x-1} + e^{x-1}$ Calculo el de e^{x-1}
    - iii) $f_3(x) = \arctan(x)$ en $x_0 = 1$, $n = 3$.

   b) Para las funciones $f_i(x)$ del ítem anterior aproximar el valor indicado:
    - i) $f_1(0.2)$ y $f_1(2)$
    - ii) $f_2(0.9)$
    - iii) $f_3(0.1)$.

2. a) Probar que si $f(x)$ es una función impar entonces $P_n(x)$, el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$, sólo tiene potencias impares. Análogamente, si $f(x)$ es una función par entonces $P_n(x)$ sólo tiene potencias pares. $f(x) = -f(-x)$ Calculo P_f, P_g

   b) Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x_0 = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \tan(x)$.

Aproximación del error

3. a) Para cada una de las siguientes funciones calcular el polinomio de Taylor de orden n en x_0 y encontrar la expresión del resto.
    - i) $f_1(x) = \cos(x)$ en $x_0 = 0$,
    - ii) $f_2(x) = \frac{1}{x-3}$ en $x_0 = 1$.
    - iii) $f_3(x) = \ln(\cos(x))$ en $x_0 = 0$ y $n = 3$.

   b) Para cada una de las funciones del ítem anterior acotar el error cometido
    - i) $f_1(x)$ en $(-\pi, \pi)$, para todo $n \in \mathbb{N}$
    - ii) $f_2(x)$ en $(0, 2)$ para $n = 1, \dots, 5$.
    - iii) $f_3(x)$ en $(-1, 1)$.

   c) Para cada función del ejercicio anterior graficar $f_i(x)$ y $P_n(x)$.

Ej 2.a) f impar $\Rightarrow P_{f,0}$ solo tiene potencias impares.

$f(-x) = -f(x)$ $\quad g(x) = f(-x)$

$f'(-x) = f'(x)$ $\quad f^{(2)}(-x) =$

$g(x) = f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow \frac{dg}{dx} = -f'(x) \quad \frac{d^2g}{dx^2} = f''(x) \ldots$

$P_{n,f,x_0=0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!} =$

$P_{n,g,x_0=0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)\, x^k}{k!} = P_{n,-f,x_0=0}(x)$

$= -\sum \frac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!}$

$g^{(2)}(0) = +f^{(2)}(0) \quad g^{(2i)}(0) = f^{(2i)}(0)$

$g^{(1)}(0) = -f^{(1)}(0) \quad g^{(2i-1)}(0) = -f^{(2i)}(0)$

4. a) Desarrollar el polinomio de Taylor de orden n centrado en $x_0 = 0$ de $f(x) = (1+x)^a$ con $a \in \mathbb{R}$.

   b) Aplicando el ítem anterior para un valor de $a \in \mathbb{R}$ adecuado, calcular $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ con su polinomio de Taylor de orden 4. Acotar el error cometido.

5. Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$

   a) Acotar el error cometido al calcular $\ln(1,1)$ usando el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden 3 centrado en $x_0 = 1$.

   b) Hallar un valor aproximado de $\ln(1,1)$ con un error menor que 10^{-5}

6. Calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{9}$ con un error menor que 10^{-3}.

Interpolación polinomial

7. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3:

   a) en la forma de Lagrange,

   b) por coeficientes indeterminados.

   Verificar los resultados en `Python`. Graficar el polinomio interpolador.

x	-2	-1	2	3
y	4	1	4	9

x	0	1	3	5
y	1	2	3	4

8. Para cada una de las siguientes funciones[1], hallar el polinomio interpolador P_n en $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[a,b]$, para los valores de n indicados. Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores. Usando `Python`, estimar $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)|$.

   a) $f_1(x) = \text{sen}(\pi x)$, $[a,b] = [0, 0.5]$, $n = 1, 2, 3, 6$.

   b) $f_2(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, $[a,b] = [-1,1]$, $n = 5, 10, 15$.

   c) $f_3(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}(x)$, $[a,b] = [-5,5]$, $n = 2, 9, 11, 13$.

9. Encontrar una función del tipo $4^{ax^3+bx^2+cx+d}$ que interpole la siguiente tabla de datos:

x	-2	-1	0	1
y	1	4	0.25	16

[1] f_3 es conocida como la función secante hiperbólica, la inversa multiplicativa del coseno hiperbólico.

10. Hallar y graficar una función del tipo $e^{a_4x^4+a_3x^3+\cdots+a_0}$ que interpole a la función $f(x) = 1/x$ en 5 nodos equiespaciados en el intervalo $[1, 10]$.

11. En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados. El rendimiento del proceso depende de la temperatura.

    Se dispone de los siguientes datos

$T(°C)$	150	160	170	180	190	200	210
$R(\%)$	35.5	37.8	43.6	45.7	47.3	50.1	51.2

    Se considera un rendimiento óptimo el que va de 38.5 % a 45 %, por lo que la planta trabaja a $175°C$. Si la temperatura de trabajo cae a $162°C$ por una avería, ¿será el proceso satisfactorio hasta que sea reparada?

12. El pentóxido de dinitrógeno gaseoso puro reacciona en un reactor intermitente según la reacción estequiométrica

$$2N_2O_5 \rightleftharpoons 2N_2O_4 + O_2$$

    Calculamos la concentración de pentóxido de dinitrógeno existente en ciertos instantes, obteniendo los siguientes datos

$T(s)$	2	200	400	650	1100	1900	2300
C	5.5	5.04	4.36	3.45	2.37	1.32	0.71

    Si lo tenemos en el reactor un tiempo máximo de 35 minutos (2100 segundos), ¿cuál es la concentración de pentóxido de dinitrógeno que queda sin reaccionar?

Polinomios de Chebyshev

13. a) Hallar n de modo que el polinomio P_n que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de T_{n+1} verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leqslant 10^{-2}$ en $[-1, 1]$.

    b) Repetir el ítem anterior para $f(x) = e^x$, $x \in [0, 4]$.

14. Para $n = 9, 11, 13$; graficar simultáneamente el polinomio $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, donde $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ y el polinomio $T_{n+1}/2^n$ donde T_{n+1} es el $(n+1)$-ésimo polinomio de Chebyshev.

15. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2}$.

    a) Acotar el error cometido al interpolar en $n + 1$ puntos equiespaciados y al interpolar en los ceros de Chebyshev.

b) En cada caso determinar, si es posible, la mínima cantidad de nodos necesarios que se deben considerar para asegurar que el error cometido es menor que 10^{-4}.

16. Repetir el Ejercicio 8 usando los polinomios que interpolan a la función f en los ceros del polinomio de Chebyshev de grado $n+1$ en el intervalo correspondiente. Comparar

Interpolación de Hermite

17. Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique

$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1),\ p''(1) = f''(1).$$

Interpolación lineal y cúbica segmentada

18. Calcular un spline cúbico que interpole la siguiente tabla de datos

x	0	0.5	1
y	0	1	0

Graficar el spline junto con la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.

19. Dada la siguiente tabla de datos

x	2	6	7	12
y	4	4	6	7

a) Calcular un spline cúbico que interpole los datos.

b) Calcular el polinomio interpolador.

c) Graficar el spline y el polinomio interpolador.

20. En su artículo[2], Hubert Frings y Mable Frings estudiaron la influencia de la temperatura sobre el número de chirridos por minuto de grillos (neoconocephalus ensinger) machos. A partir de la siguiente tabla (Tabla 1 en H. Frings et al)

$T(°C)$	8	9	14	17	18	19	20.5	21.5	23	24	25	26
$N(min^{-1})$	264	285	346	417	438	495	524	540	643	693	744	780

(a) Construir el polinomio interpolador en el intervalo $[8, 26]$.

(b) Calcular un spline cúbico que interpole los datos.

(c) Graficar el polinomio interpolador y el spline. Qué observa?

[2] H. Frings and M. Frings, *The effects of temperature on chirp-rate of male cone-headed grasshoppers, neoconocephalus ensiger*, Journal of Experimental Zoology **134** (1957), n∘ 3