**[乱谈数学－－角度制与弧度制](http://www.cnblogs.com/muxue/archive/2012/10/22/2734767.html)**

因为没有准确地理解弧度的概念，所以没有很好地理解三角函数（sin，cos），而三角函数又是高等数学和模拟电子中出现得最为频繁的函数。于是从弧度开始，这一部分的数学一直就被我的大脑下意识地排斥。那些“莫名其妙”地出现在各种式子中的 π 和 e ，让我十分郁闷。逼着大脑学习这些式子对我来说就强迫自己像吃下带苍蝇的点心一样，恨不得立马把它吐出来。

为了尽量挽救一下我的工程生命，还是老老实实从基础的地方开始理解吧。

在学习几何的时候，最开始学习的“元素”就是线段（直线，边）和角了。然后再有各种更复杂的图形，而且研究这些图形的性质基本上也都是通过首先通过线段和角来进行的。对于线段，我们度量它的时候，是用“长度”：长为1的线段，长为2的线段，甚至，还有长为 \sqrt{2} 的线段（话说，无理数就是通过度量边长为1的正方形的对角线长度而发现的）。所以，对于线段，我们用实数来度量它，或是区别一条线段与另一条线段（长度一样的线估，通过平移和旋转可以重合成“一条”，另一条因为无法区别而“消失”了~）。线段与实数有一一对应的关系，这样以“线”为图形，就可以很好地和以实数为定义域的函数对应起来，笛卡尔坐标系的引入后爆发出强大的威力。

在线的度量上，人类很“自然地选择了一条比较优化的前进方向”。（这也为后来角度量指引了方向。）

对于角，一开始是用“角度制”来度量的。360°，或是180°，或是90°。这样很“好”。大脑总是先入为主的，从小就听人们这样去描述角度，就认为“它是最自然的”，“毫无疑问的”，“不需要思考的”。而且这个结果很“漂亮”，因为对于我们日常用的，或是常碰到的“角”，都可以很好地描述，比如转一圈是360°，平面是180°，直角是90°，东南与南方的夹角是45°，多让人舒服的整数啊。（为什么这么巧都是一些好用的整数呢？因为360刚好以被1、2、3、4、5、6、8、9、10整除，能被这么多数整除的最小整数就是360了。人们选一周是360°，当然是有理由的）

从这个方面看，“弧度制”完败啊。

“直角是多少弧度？”   
“π/2”   
“π是多少？”   
“一个无限不循环小数，它的值大约等于3.1415……”

对于一个日常中极为常见的角，弧度制居然都连不出一个日常意义上“精确”的数值出来。难道这还不够恶心？我绝不会真心同意用这样难看的东西来表征角的。

于是从此以后与角相关的数学从了我的悲剧啊。学而不思则罔，思而不学则殆。年轻时候不懂得思考和学习，不知道把学过的东西联系起来，更是悲剧。

角度制有一些问题，角度是60进制的，而且人们只定义了度、分、秒，没有再更一步精确下去了（对于日常生活中来说，这样的精度已经非常足够了），角度是不连续的，我们当然有办法让它连续，但那是后人了为“数学研究而添的足”，这些东西对于日常的人们没有什么意义，大家也不会用，而对于“进行数学研究”的人来说，离开熟悉的10进制，而在原来的60进制上继续下去不是一个好的的选择，想想看，在研究边的长度的时候还用着10进制的长度，一到角的时候就变成60进制（或者一种60/10混进制的东西），那得多么别扭啊，多大的心智负担啊。简洁一致是美德~！

所以，在用角度制研究角、三角函数的时候，是静态的、针对特殊情况的研究。用角度的时代，sin 不是一个“函数”，而是一个比值，它只是表示“对边比直角边”，为了与后来出现的“函数sin”区别，我们先把这个“边长比的sin写成大写（SIN）吧”。人们知道“只要角的大小不变，那么这个比值不会变”。于是人们想，知道角度（就知道了SIN比值），和一条边长，就可以算出另一条边的长度，这是人们在测量，航海，天文中最常遇到需要解决的任务。而且对于各个角度对应的SIN值，我们可以用先计算出来，做成表（正弦表）。

做表的最容易（不费脑子）的方法当然是画一大堆各种角度的三角形，然后量出对边和直角边的长度，相除后得到相应角度的SIN比值。但这样做的精度当然非常差。更好的是能用“代数”的方法，从一个已知角度的正弦值计算出另一个角度的正弦值，那样就可以做得很精确了。某些特殊角度的SIN值是精确确定的，比如SIN(30°)＝0.5，那么如果知道SIN(15°)和SIN(30°)的关系，SIN(15°)的值也可以“精确得计算出来”，这样可以避免“测量的误差”，做出精确度非常高的正弦表。于是研究半角，倍角，三倍角等等的有倍数关系的角的SIN值的关系，积化和差和差化积，还有余弦定理就成了古代三角学的主要内容。一个目标：通过给出三角形的某几个值（角，边），得到其它的几个植（角，边）。

虽然有一些问题，但角度是度量角的最为直观的办法。最直观却未必是最“科学”或是“数学上最好用的”。

这个状态一直持续到18世纪，弧度制正式出现。

先介绍下弧度制产生的历史（来自[百度百科](http://baike.baidu.com/view/895719.htm)）

弧度制的基本思想是使圆半径与圆周长有同一度量单位，然后用对应的弧长与圆半径之比来度量角度，这一思想的雏型起源于印度。印度著名数学家阿利耶毗陀（476？-550？）定圆周长为21600分，相度地定圆半径为3438分（即取圆周率π=3.142），但阿利耶毗陀没有明确提出弧度制这个概念。严格的弧度概念是由瑞士数学家欧拉（1707-1783，欧拉是个神人啊！）于1748年引入。欧拉与阿利耶毗陀不同，先定半径为1个单位，那么半圆的弧长为 π，此时的正弦值为 0，就记为 sin(π) = 0，同理，1/4圆周的弧长为 π/2，此时的正弦为1，记为 sin(π/2)=1。从而确立了用 π、π/2 分别表示半圆及1/4圆弧所对的中心角。其它的角也可依此类推。（18世纪以前，人们一直是用线段的长来定义三角函数的。欧拉在他于1748年出版的一部划时代的著作《无穷小分析概论》中，提出三角函数是对应的三角函数线与圆半径的比值，并令圆的半径为1，使得对三角函数的研究大为简化，这是欧拉在数学史上的重要功绩之一。另外，欧拉在上述著作的第八章中提出了弧度制的思想。他认为，如果把半径作为1个单位长度，那么半圆的长就是π，所对圆心角的正弦是 0，即sin(π) = 0。同理，半圆的弧长是π/2，所对圆心角的正弦是1，可记作sin(π/2) = 1）

弧度和三角函数线的提出，使得三角的研究进入了“函数”的阶段。发展出了现代的三角学。弧度是“角所对的圆弧长比上半径长”，我的疑问有了：“半径依托于角的一边可以自然想到，那为什么会取圆弧而不是其它，来定义弧度？”没有找到答案，自己猜：

可能最“直观的简单的想法”是角所对的边来比上“半径”，但这样的话，角度不断增加，一旦超过180°的时候，这条边长会变小，这不符合“角不断在增大”的期望。只能走别的路了。人们研究得比较透彻而且“简单”的图形就还有圆了。圆很和谐啊！它可是自然界最为“对称的”图形了，因而，如果用圆弧来定义角，那么，对这个角再等分，再再等分，定义描述，还有对应的“图形”也完全不会有任何的变化。但对于同样的角，取不同的半径，弧长显然会不一样，这样可不好，于是就用“弧长比半径”来定义吧。

有了弧度制，我们就把角和“长度”联系到一起了。弧度制除了没有“角度制那么整数化”的特点之外，其它方面都“不输角度制”，而这种“整数性”的优势在数学研究中意义很小。弧度制还有一些角度制所没有的优点，它的定义自然地沟通了“角度，弧长，半径”，并且把自己定义在与长度一样的实数上。

这样的定义，在“三角学”上的影响是很深远的。因为只在这样定义角的情况下，sin(x) 才会有这么多奇妙而简洁的性质和表达式。注意，这个时候，sin(x)已经不再是一个静态的比值了，而是“函数”，这个函数是“单位圆上，从x轴出发到任一点的弧长，与这个点到x轴的距离之间的关系”，随着弧长变长，点到x轴的距离会发生怎么样的变化。sin(x)能做所有SIN（X）要做的，要求的值，所以，原来的比值（SIN）也可以统一到sin函数给定自变量得到因变量这么一个计算中来。而它有的，还远远不止这些。

其中最为“著名”的性质可能就是：

\lim_{x \to 0} \frac{sin x}{x}=1

这个函数之所以牛X是因为 \sin' x=\cos x 必须要基于这个极限，而 \sin' x=\cos x  是后面很多与三角相关的微积分能做到“简洁”的重要基础。这个极限能成立，就依赖于sin(x)中的x是弧度表示。

另外一个很重要，很“美”的公式就是传说中的欧拉公式：

e^{ix} = cos x+isinx

这个公式也是高等数学中重要的基础。而它能这样简洁地表达，也必须基于sin(x)中的x是弧度制表示。

好了，总结起来说，

角度制是站在自己为中心看角，在日常中很好用，但在数学和工程中有很多不便之处。弧度制虽然会带来 π 这个让我有些难受的东西，但它所带来的好处却是使整个高等数学中用到的三角能展示出相对简洁的形式。

我开始能接受它了。