Lineární algebra 1 – DÚ 2 – Ema Tomanová – 26.10.2020

1) Jestliže spolu mají matice *X* a *D* při násobení komutovat, tedy *DX* = *XD*, pak nutně musí platit

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rozepsáno jako

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{pmatrix}$$

z čehož si vyjádříme 4 rovnice

$$2a+c=2a$$
$$2b+d=a+b$$
$$c=2c$$
$$d=c+d$$

po elementárních úpravách dostáváme

$$-c=0$$
$$a=b+d$$
$$-c=0$$
$$-c=0$$

dosaďme si za *b* proměnnou *t* a za *d* proměnnou *s*, pak matice *X* komutující s maticí *D* bude tvaru

$$X=\begin{pmatrix} t+s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

s maticí *D* bude komutovat dle definice také nulová matice, což můžeme ověřit dosazením nuly za *t*, *s*

jestliže

$$t=0$$
$$s=0$$

pak

$$X=\begin{pmatrix} t+s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

analogicky také ověříme komutaci s jednotkovou maticí dosazením *0* za *s*

jestliže

$$s=0$$

pak

$$X=\begin{pmatrix} t+s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v neposlední řadě bude komutovat také sama se sebou, což lze zase ověřit dosazením za *t*, *s*

$$t=1$$
$$s=1$$

pak

$$X=\begin{pmatrix} t+s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Postupujme dle definic pro maticové násobení a transpozici matic. Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, pak matice AB je typu $m \times n$ a po transpozici dostáváme AB^T typu $n \times m$. Matice B^T bude typu $n \times p$ a analogicky matice A^T bude typu $p \times m$. Při násobení těchto dvou matic dostáváme matici $B^T A^T$, která je typu $n \times m$. Tvrzení

$AB^T = B^T A^T$

tedy platí.

3) Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, jež jsou obě *dolní trojúhelníkové*, tj. Pro každé $i, j = 1, \ldots, n$(popř. p) platí, že pokud $i < j$, tak $a_{ij} = 0$. Z definice maticového násobení víme, že pro prvek matice AB v řádku i a sloupci j platí

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

rozdělme si tuto sumu na dvě menší, jednu pro k v intervalu $<1, i>$ a druhou v intervalu $<i+1, n>$.

$$\sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Pro druhou sumu platí podmínky, které jsme si stanovily výše. Máme $k>i$, tedy platí $a_{ik} = 0$. Můžeme ji tedy vynechat, zbývá nám výraz

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj}$$

Zaměřme se teď na sloupce j. Víme, že $k \leq i$. Takže jestli $i < j$, tak i $k < j$. Z toho odvodíme, že pokud $i < j$, *tak* $b_{kj} = 0$. Tedy platí, že

pro $i < j$, $b_{kj} = 0$

a také $(AB)_{ij} = 0$,

což implikuje to, že je i matice AB dolní trojúhelníková.