16/11/20 DÚ 3.1 - LA1 - TOMANOVA

Pro těleso $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ s operacemi definovanými

$$a \oplus b = a + b + \frac{1}{2}$$

$$a \otimes b = a + b + 2ab \; ^{*}$$

budeme vyšetřovat následující vlastnosti.

* násobení dále jako $\odot$

① ASOCIATIVITA SČÍTÁNÍ

$$\forall a,b,c \in M: \quad (a+b)+c = a+(b+c)$$

dosadíme

$$(a \oplus b) \oplus c = (a+b+1/2) \oplus c = a+b+c+1$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus \left(b+c+\frac{1}{2}\right) = a+b+c+1$$

a tedy

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a+b+c+1$$, rovnost pro operaci $\oplus$

na $\mathbb{R}$ platí, platí tedy i vlastnost ①.

② KOMUTATIVITA SČÍTÁNÍ

$$\forall a,b \in M: \quad a+b = b+a$$

dosadíme

$$a \oplus b = a + b + \frac{1}{2}$$

$$b \oplus a = b + a + \frac{1}{2}$$

$$a+b+\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ vlastnost ② platí

③ NULOVÝ PRVEK

$$\exists n_0 \in M: \forall a \in M: \quad a + n_0 = a$$

$$a \oplus n_0 = a$$

$$a + n_0 + \frac{1}{2} = a \qquad | -a - \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{n_0 = -\frac{1}{2}}}, \quad -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Pro binární operaci $\oplus$ na $\mathbb{R}$ je nulový prvek jednoznačně určen, je to prvek $-\frac{1}{2}$, vlastnost ③ pro oper. $\oplus$ na $\mathbb{R}$ platí.

④ EXISTENCE OPAČNÝCH PRVKŮ

$\forall a \in M \ \exists a^{-1}: \quad a + a^{-1} = n_0$

$$a \oplus a^{-1} = a + a^{-1} + \frac{1}{2}$$

$$n_0 = -\frac{1}{2}$$

pak tedy

$$a + a^{-1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \Big| + -a - \frac{1}{2}$$

$$a^{-1} = -a - 1$$

Z toho plyne, že pro binární op. $\oplus$ na $\mathbb{R}$ existuje vždy k prvku a prvek a^{-1} a je jednoznačně určen jako $a^{-1} = -a - 1$ a tedy vlastnost ④ platí pro $\oplus$ na $\mathbb{R}$

⑤ ASOCIATIVITA NÁSOBENÍ

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$$(a \odot b) \odot c = (a + b + 2ab) \odot c = a + b + 2ab + c + 2(ac + bc + 2abc) =$$

$$= a + b + 2ab + c + 2ac + 2bc + 4abc = a + b + c + 2ac + 2bc + 2ab + 4abc$$

$$a \odot (b \odot c) = a \odot (b + c + 2bc) = a + b + c + 2bc + 2(ab + ac + 2abc) =$$

$$= a + b + c + 2ab + 2bc + 2ac + 4abc$$

a tedy

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$$

Z toho plyne, že pro operaci $\odot$ na $\mathbb{R}$ vlastnost ⑤ platí.

⑥ KOMUTATIVITA NÁSOBENÍ

$\forall a,b \in M: \quad a \cdot b = b \cdot a$

$a \odot b = a + b + 2ab$

$b \odot a = b + a + 2ba$

$$a + b + 2ab = b + a + 2ba$$

z toho plyne, že pro BO ⊙ na $\mathbb{R}$ vlastnost ⑥ platí.

⑦ EXISTENCE JEDNOTKOVÉHO PRVKU

$\exists n_0 \in M \ \forall a \in M: \quad a \cdot n_1 = a$

$a \odot n_1 = a + n_1 + 2an_1$

$a \odot n_1 = a$

$a + n_1 + 2an_1 = a \quad | -a - 2an_1$

$n_1 + 2an_1 = 0$

$n_1(1 + 2a) = 0$

$\rightarrow \underline{\underline{n_1 = 0}}$

Na $\mathbb{R}$ existuje pro BO ⊙ jednoznačně určený neutrální prvek, a to $n_1 = 0$. Vlastnost pro ⊙ na $\mathbb{R}$ tedy platí.

⑧ EXISTENCE INVERZNÍCH PRVKŮ

$\forall a \in M \ \exists a^{-1}: \quad a \cdot a^{-1} = n_1$

$$a \odot a^{-1} = n_1$$

$$a + a^{-1} + 2aa^{-1} = 0 \quad | -a$$

$$a^{-1}(1+2a) = -a$$

$$a^{-1} = \frac{-a}{1+2a}$$

Pro prvek $a = -\frac{1}{2}$ předpis nedává inverzní prvek, ten lze ale najít dosazením za a přímo do neupraveného vztahu.

Pro operaci $\odot$ na $\mathbb{R}$ existuje ke každému prvku, vyjma neutrálního, jednoznačně určený inverzní prvek $a^{-1} = \frac{-a}{1+2a}$.
Vlastnost ⑧ pro $\odot$ na $\mathbb{R}$ tedy platí.

⑨ DISTRIBUTIVNÍ ZÁKON

$\forall a,b,c \in M: \quad a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

a

$\forall a,b,c \in M: \quad (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

$$(a \oplus b) \odot c = (a+b+\tfrac{1}{2}) \odot c = (a+b+\tfrac{1}{2}) + c + 2c(a+b+\tfrac{1}{2}) =$$

$$a+b+\tfrac{1}{2}+c+2ac+2cb+c = \underline{\underline{a+b+2c+2ac+2bc+\tfrac{1}{2}}}$$

$$(a \odot c) \oplus (b \odot c) = (a+c+2ac) \oplus (b+c+2bc) = \underline{\underline{a+b+2c+2ac+2bc+\tfrac{1}{2}}}$$

obě strany se rovnají, první část distributivního zákona tedy platí.

$$c \odot (a \oplus b) = c \odot \left(a + b + \tfrac{1}{2}\right) = a + b + \tfrac{1}{2} + c + 2c\left(a + b + \tfrac{1}{2}\right) = \underline{a + b + 2c + 2ac + 2bc + \tfrac{1}{2}}$$

$$(c \odot a) \oplus (c \odot b) = (a + c + 2ac) \oplus (c + b + 2bc) = \underline{a + b + 2c + 2ac + 2ab + \tfrac{1}{2}}$$

Obě strany se rovnají, distributivní zákon tedy platí.

Tedy pro BO $\oplus$ a $\odot$ na $\mathbb{R}$ vlastnost (9) platí.

(10) NEEXISTENCE NETRIVIÁLNÍCH DĚLITELŮ NULY

$$\forall a, b \in M: \quad a, b \neq 0 \qquad a \cdot b \neq 0$$

Nulovým prvkem je $n_0 = -\frac{1}{2}$, po dosazení dostaneme

$$a \odot b \neq n_0$$

$$a + b + 2ab \neq -\frac{1}{2}$$

Je zřejmé, že tato nerovnost neplatí pouze pro $a = -\frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$, toto je ale vyloučeno v předpokladu $a, b \neq 0$.
Vlastnost (10) tedy platí.

Vyšetřování ukázalo, že platí všechny charakteristické vlastnosti (1) až (10). Z toho pro tuto algebraickou strukturu $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ plyne následující:

Struktura $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ je komutativním tělesem (polem).

Neutrální a inverzní prvky jsme zjistili při prověřování vlastností (3), (7) a (8).