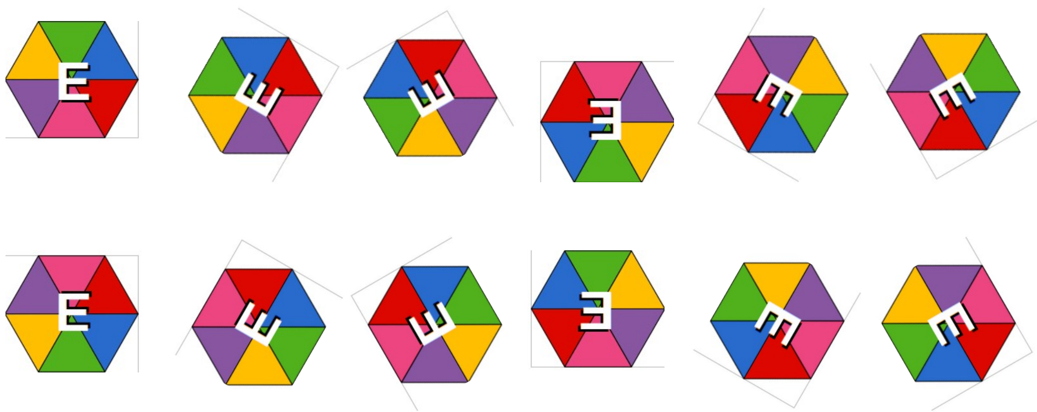
Grupa symetrií pravidelného šestiúhelníku

Mějme grupu $D_6(D,$ ♪$)$. Tato grupa symetrií pravidelného šestiúhelníku je grupa stupně 12, *dihedrální* grupa D_6, s operací ♪ pro skládání symetrií.

Je generována rotací R_1 a zrcadlením r_0. R_n představuje rotaci o úhel $n*2\pi/6$ vzhledem ke středu šestiúhelníku. r_n představuje zrcadlení přes osu v úhlu $n*2\pi/6$ vzhledem k horizontální přímce procházející středem šestiúhelníku a dvěma jeho vrcholy.

Zde jsou efekty všech prvků po jejich aplikaci na šestiúhelník:

id R_1 R_2 R_3 R_4 R_5



r_0 r_1 r_2 r_3 r_4 r_5

Multiplikační tabulku mějme zapsanou níže. Hodnota v řádku *i* a sloupci *j* reprezentuje složenou funkci *i(j())*, tedy funkce *j()* je na šestiúhelník aplikována jako první.

	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
id	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	id	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0
R_2	R_2	R_3	R_4	R_5	id	R_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1
R_3	R_3	R_4	R_5	id	R_1	R_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2
R_4	R_4	R_5	id	R_1	R_2	R_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3
R_5	R_5	id	R_1	R_2	R_3	R_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4
r_0	r_0	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	id	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1
r_1	r_1	r_0	r_5	r_4	r_3	r_2	R_1	id	R_5	R_4	R_3	R_2
r_2	r_2	r_1	r_0	r_5	r_4	r_3	R_2	R_1	id	R_5	R_4	R_3
r_3	r_3	r_2	r_1	r_0	r_5	r_4	R_3	R_2	R_1	id	R_5	R_4

r_4	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_5	R_4	R_3	R_2	R_1	id	R_5
r_5	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	id

Řády všech prvků jsou následující:

Prvek:	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
Řád:	1	6	3	2	3	6	2	2	2	2	2	2

Neutrálním prvek grupy D_6 je *id*, inverzní prvky jsou

Prvek:	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
Inverzní prvek:	id	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5

A zde je výčet všech podgrup:

Prvky:	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
Podgrupy:												
Triviální	id											
C_2	id			R_3								
C_3	id		R_2		R_4							
C_6	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5						
C_2	id						r_0					
C_2	id							r_1				
C_2	id								r_2			
C_2	id									r_3		
C_2	id										r_4	
C_2	id											r_5
C_2+C_2	id			R_3			r_0			r_3		
C_2+C_2	id			R_3				r_1			r_4	
C_2+C_2	id			R_3					r_2			r_5
D_3	id		R_2		R_4		r_0		r_2		r_4	
D_3	id		R_2		R_4			r_1		r_3		r_5
Grupa D_6	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5

Z tabulky jasně plyne, že nejmenší možnou podgrupou je triviální podgrupa obsahují pouze neutrální prvek, tedy identitu grupy. Obsahuje pouze jeden prvek, a to právě *id*. To, že se jedná o grupu, odvodíme z definice

def. 1
Každá grupa obsahuje dvě tzv. ***nevlastní podgrupy*** *(též* ***triviální podgrupy****), sebe samu a podgrupu obsahující pouze neutrální prvek. Ostatní podgrupy označujeme jako* ***vlastní*** *(nebo* ***netriviální****).*

Pro naše podgrupy P_1, P_2 takové, že $P_1 \subset P_2 \subset D_6$, si zvolíme například

$P_1 = C_2\{id, R_3\}$
$P_2 = C_2{+}C_2(id, R_3, r_0, r_3\}$

Potřebujeme pro ně ověřit následující vlastnosti:
Necht' $(G , \circ)$ grupa. Pak $\emptyset = H \subseteq G$ je její podgrupa právě tehdy, když
1) $\forall a, b \in H : a \circ b \in H;$
2) $\forall a \in H : a^{-1} \in H.$

Snadno se navíc vidí, že obě podmínky v předchozí větě lze shrnout
do jediné:

$\forall a, b \in H : a \circ b^{-1} \in H$, *pro nás* $\forall a, b \in H : a$ ♪ $b^{-1} \in H$

Inverzní prvky pro P1 jsou

Prvek:	id	R_3
Inverzní prvek:	id	R_3

Vidíme, že se vyskytují v nosné množině, P1 je tedy uzavřená na operace.
Z tabulky snadno vyčteme, že podmínka $\forall a, b \in H : a$ ♪ $b^{-1} \in H$ platí.

	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
id	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	id	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0
R_2	R_2	R_3	R_4	R_5	id	R_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1
R_3	R_3	R_4	R_5	id	R_1	R_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2
R_4	R_4	R_5	id	R_1	R_2	R_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3
R_5	R_5	id	R_1	R_2	R_3	R_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4
r_0	r_0	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	id	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1
r_1	r_1	r_0	r_5	r_4	r_3	r_2	R_1	id	R_5	R_4	R_3	R_2
r_2	r_2	r_1	r_0	r_5	r_4	r_3	R_2	R_1	id	R_5	R_4	R_3
r_3	r_3	r_2	r_1	r_0	r_5	r_4	R_3	R_2	R_1	id	R_5	R_4
r_4	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_5	R_4	R_3	R_2	R_1	id	R_5
r_5	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	id

Pro P_2 budeme postupovat analogicky. Inverzní prvky pro P_2 jsou

Prvek:	id	R_3	r_0	r_3
Řád:	id	R_3	r_0	r_3

Vidíme, že se vyskytují v nosné množině, P_2 je tedy uzavřená na operace.

Z tabulky snadno vyčteme, že podmínka $\forall a, b \in H : a$ ♪ $b^{-1} \in H$ platí.

	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
id	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	id	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0
R_2	R_2	R_3	R_4	R_5	id	R_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1
R_3	R_3	R_4	R_5	id	R_1	R_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2
R_4	R_4	R_5	id	R_1	R_2	R_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3
R_5	R_5	id	R_1	R_2	R_3	R_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4
r_0	r_0	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	id	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1
r_1	r_1	r_0	r_5	r_4	r_3	r_2	R_1	id	R_5	R_4	R_3	R_2
r_2	r_2	r_1	r_0	r_5	r_4	r_3	R_2	R_1	id	R_5	R_4	R_3
r_3	r_3	r_2	r_1	r_0	r_5	r_4	R_3	R_2	R_1	id	R_5	R_4
r_4	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	r_5	R_4	R_3	R_2	R_1	id	R_5
r_5	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_0	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	id

Ověřili jsme tedy, že P_1, P_2 jsou podgrupy grupy D_6 takové, že $P_1 \subset P_2 \subset D_6$.