Kombinatorika pro bioinformatiky 2020/2021 – Domácí úkol 2.11.2020 – Ema Tomanová

Máme 4 modré, 3 zelené a 2 žluté kostky. Pokud je všechny postavíme na sebe, vytvoříme komín výšky 9. Kolik takových barevně odlišných komínů lze vytvořit?

Řešení:
Vytvořme si pomyslné pole o 9 prvcích

a jako první uvážíme, kolika způsoby do něj lze vložit 4 modré kostky. Jelikož jsou všechny čtyři kostky identické a tedy nezáleží na pořadí, výsledkem je kombinační číslo $\binom{9}{4}$.

Jedna z možných kombinací je pro ilustraci třeba tato:

Poté vybíráme ze zbývajících volných polí možnosti pro umístění 3 zelených kostek. Zbývá 5 volných polí, identické kostky jsou 3, dostáváme tedy kombinační číslo $\binom{5}{3}$.

Pro ilustraci další z mnoha možných kombinací:

Zbývají nám 2 volná pole a k tomu dvě identické žluté kostky, tedy kombinační číslo $\binom{2}{2}$, které je rovno 1.

Pro úmístění všech kostek do řady získáme tedy $\binom{9}{4}$ x $\binom{5}{3}$ x $\binom{2}{2}$ = $\frac{9!}{4!3!2!}$ = 1260 kombinací.

Pro zobecnění:
Máme-li prvky typu n_1, n_2,…,n_r, které jsou ve své skupině identické a jejich součet $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, pak se počet způsobů jejich rozmístění do pole o velikosti n rovná

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-n_1-n_2-n_3-\ldots-n_{r-2}}{n_{r-1}}\cdot 1$$

což lze rozepsat jako

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-2})!}{n_r!\,n_{r-1}!}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$$

Tedy počet všech kombinací prvků identických typu n_1, n_2,…,n_r, v poli n je roven

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$$