复变函数的微分

定义 1. 设 $f(z)$ 是复变函数，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - A| < \varepsilon$，则称当 z 趋近于 z_0 时，$f(z)$ 的**极限**为 A. 记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

定义 2. 若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处**连续**.

定义 3. 设 $w = f(z)$，若

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

对任意途径的 $z \to z_0$ 都存在且相等，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可微，记作 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ 或 $f'(z)$，称为 $f(z)$ 在 z 点的**微商**或**导数**. 如果 $f(z)$ 在其定义域上每一点都可微，则称 $f(z)$ 为其定义域上的**解析函数**或**全纯函数**. 将复数域 Ω 上全体全纯函数记作 $H(\Omega)$.

复变函数的微商四则运算以及复合函数的微商法则都是可以由实函数推广得到.

下面介绍 Cauchy-Riemann 方程. 考虑 z 沿实轴和虚轴分别趋近于 z_0 的情形. 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处可微.

令 $z = x + \mathrm{i}y_0$，则

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \mathrm{i}\frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right] = u_x(x_0, y_0) + \mathrm{i}v_x(x_0, y_0).$$

令 $z = x_0 + \mathrm{i}y$，则

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \left[\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{\mathrm{i}(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \right] = v_y(x_0, y_0) - \mathrm{i}u_y(x_0, y_0).$$

比较实部和虚部，得

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x. \tag{1}$$

也可写作

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2}$$

上述两个方程都称为 **Cauchy-Riemann 方程**，简称 C-R 方程.

注. *C-R 方程是可微的必要条件，但不充分.*

定理 1. 函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在域 D 内可微的充要条件是 u，v 在域 D 内可微且满足 C-R 方程.

证明. 必要性：设 $f(z)$ 在任一 $z=z_0$ 处可微，则

$$\Delta f(z)=f'(z_0)\Delta z+\varepsilon\left(|\Delta z|\right), \tag{3}$$

令 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$，则 $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$\varepsilon$ 满足

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=0. \tag{4}$$

令 $\Delta f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v$，$f'(z_0)=a+\mathrm{i}b$，则式 (3) 可分离实虚部为

$$\Delta u+\mathrm{i}\Delta v=(a\Delta x-b\Delta y)+\mathrm{i}\left(b\Delta x+a\Delta y\right)+\varepsilon. \tag{5}$$

令 $\varepsilon=\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2$，则

$$\begin{aligned}\Delta u&=a\Delta x-b\Delta y+\varepsilon_1,\\ \Delta v&=b\Delta x+a\Delta y+\varepsilon_2,\end{aligned} \tag{6}$$

于是 u，v 在 z_0 处可微，由 z_0 的任意性得 u，v 在 D 上可微. 而由 $f(z)$ 可微可直接得 C-R 方程.

充分性：由 u，v 的可微性，对任意 $z_0\in D$，有

$$\begin{aligned}\Delta u&=u_x\Delta x+u_y\Delta y+\varepsilon_1\left(|\Delta z|\right),\\ \Delta v&=v_x\Delta x+v_y\Delta y+\varepsilon_2\left(|\Delta z|\right),\end{aligned} \tag{7}$$

由 C-R 方程，$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$，设 $a=u_x=v_y$，$b=v_x=-u_y$，则

$$\begin{aligned}\Delta u&=a\Delta x-b\Delta y+\varepsilon_1,\\ \Delta v&=b\Delta x+a\Delta y+\varepsilon_2,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\Delta f&=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v\\ &=a\Delta x-b\Delta y+\mathrm{i}b\Delta x+\mathrm{i}a\Delta y+\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2\\ &=(a+\mathrm{i}b)\left(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y\right)+\varepsilon.\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\varepsilon=\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2$ 是 $|\Delta z|$ 的高阶无穷小. 于是

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=a+\mathrm{i}b. \tag{10}$$

$f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可微，由 z_0 的任意性，$f(z)$ 在 D 上可微. □

若 u，v 二阶可微，则由 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ 有

$$u_{xx}=v_{xy},\quad u_{yx}=v_{yy},\quad u_{xy}=-v_{xx},\quad u_{yy}=-v_{yx} \tag{11}$$

于是有

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad v_{xx}+v_{yy}=0. \tag{12}$$

记

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{13}$$

则方程 (12) 可改写为 $\Delta u = 0$ 和 $\Delta v = 0$. 这个方程和方程 (12) 都称为 **Laplace 方程**. 满足 $\Delta u = 0$ 的函数 u 称为**调和函数**.

设 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$，于是

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad y = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z - \overline{z}), \tag{14}$$

于是函数 $f(x, y)$ 可以看作以 z 和 $\overline{z}$ 为自变量的函数，那么

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{15}$$

同理，

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{16}$$

于是，f 全纯当且仅当 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

定理 2. 设曲线 $\gamma_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$，$\gamma_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to \Omega$，$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$，$\gamma_1$ 与 γ_2 在 z_0 处的夹角为 θ，设映射 $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$ 在 z_0 处复可微，$f \circ \gamma_1$ 与 $f \circ \gamma_2$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角为 $\tilde{\theta}$，则 $\theta = \tilde{\theta}$.

证明.

$$\tilde{\theta} = \arg \frac{(f \circ \gamma_1)'(0)}{f \circ \gamma_2)'(0)} = \arg \frac{f'(z_0)\gamma_1'(0)}{f'(z_0)\gamma_2'(0)} = \arg \frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)} = \theta. \tag{17}$$

□

注. 这个定理说明了全纯映射的保角性.