复变函数项级数

定义 1. 对任意 $z_0 \in \Omega$，任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^+$，使得对任意 $n > N$，有

$$|f_n(z_0) - f_n(z)| < \varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ **逐点收敛**于 f，记作

$$f_n \to f.$$

定义 2. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^+$，使得对任意 $n > N$，任意 $z_0 \in \Omega$，有

$$|f_n(z_0) - f_n(z)| < \varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ **一致收敛**于 f，记作

$$f_n \rightrightarrows f.$$

定义 3. 对 Ω 的任意紧子集 K，f_n 在 K 上一致收敛于 f，则称 f_n 在 Ω 上**紧一致收敛**，记作 $f_n \overset{c}{\rightrightarrows} f$.

下面主要讨论一致收敛.

定理 1 (Cauchy)**.** 函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^+$，对任意 $n, m > N$，任意 $z_0 \in \Omega$，有

$$\|f_n(z_0) - f_m(z_0)\| < \varepsilon.$$

定理 2 (Weierstrass)**.** 设 $a_n \geqslant 0$，若 $|f_n| \leqslant a_n$, $\forall z \in \Omega$ 且 $\sum_{n\geqslant 0}^{\infty} a_n < \infty$，则 $\sum_{n\geqslant 0}^{\infty} f_n(z)$ 一致收敛.

定义 4. 设 $a_n \in \mathbb{C}$，则形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

的级数称为**幂级数**.

由于可以作平移变换 $\tilde{z} = z - z_0$，于是下面研究

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

的情形. 首先考虑它的绝对收敛性. 注意到如果对于 $z_0 \in \mathbb{C}$，级数 (1) 绝对收敛，那么对任意 z 满足 $|z| < |z_0|$，级数 (1) 也是绝对收敛的. 于是有以下定理.

定理 3 (Abel). 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，存在一个数 $0 \leqslant R \leqslant \infty$ 使得

1. 若 $|z| < R$，则幂级数绝对收敛；

2. 若 $|z| > R$，则幂级数发散.

且有 Cauchy-Hadamard 公式：

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}.$$

定理 4. 函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是它的收敛域上的全纯函数，收敛半径 $R > 0$，则

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

且 f' 和 f 有相同的收敛半径.

证明. 设 $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$，

设 f 的收敛半径为 R，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$，于是

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |n a_n|^{1/n},$$

f_1 和 f 有相同的收敛半径.

设 $|z_0| < r < R$，设 $f(z) = S_N(z) + E_N(z)$，$f_1(z) = S'_N(z) + T_N(z)$，其中

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \quad E_N(z) = \sum_{N+1}^{\infty} a_n z^n, \quad S'_N(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}, \quad T_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

于是

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) \right| = \left| \frac{S_N(z) - S_N(z_0)}{z - z_0} - S'_N(z_0) + \frac{E_N(z) - E_N(z_0)}{z - z_0} - T_N(z_0) \right|,$$

由于当 $N \to \infty$ 时，$S'_N(z) \to f_1(z)$，即 $T_N \to 0$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$，当 $N > N_1$ 时，有 $|T_N(z_0)| < \varepsilon$.

已知 $|z_0| < r$，不妨设 $|z| < r$，则

$$\begin{aligned}
\left| \frac{E_N(z) - E_N(z_0)}{z - z_0} \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1} \right) \right| \qquad (2) \\
&\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (n r^{n-1})
\end{aligned}$$

因为 $\lim_{n\to\infty}(|a_n|n)^{n-1}=R^{-1}$，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|(nr^{n-1})$ 收敛. 于是存在 $N_2\in\mathbb{N}^+$，当 $N>N_2$，$|z|<r$ 时，

$$\left|\frac{E_N(z)-E_N(z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon.$$

对于 $N>\max\{N_1,N_2\}$，

$$\limsup_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z_0)\right|\leqslant\limsup_{z\to z_0}\left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0}-S_N'(z_0)\right|+2\varepsilon=2\varepsilon.$$

于是

$$\limsup_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z_0)\right|=0,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f_1(z_0).$$

即

$$f'(z_0)=f_1(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz_0^{n-1}.$$

□

重复进行，得到

$$f^{(k)}=k!a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z+\frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2+\cdots$$

对任意正整数 k 都成立. 由此可得 $a_k=\dfrac{f^k(0)}{k!}$，于是

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k+\cdots,$$

称为 **Taylor-Maclaurin 级数**.

定理 5. 设 $f_n:\Omega\to\mathbb{C}$，若 $f_n\in C(\Omega)$，$f_n\rightrightarrows f$，则 $f\in C(\Omega)$.

定理 6. 设 $f_n:\Omega\to\mathbb{C}$，若 γ 是可求长曲线，$f_n\in C(\gamma)$，在 γ 上 $f_n\rightrightarrows f$，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

定理 7. 设 $f_n\in H(\Omega)$，若 $f_n\overset{c}{\rightrightarrows}f$，则 $f\in H(\Omega)$.

定理 8 (Osgood)**.** 设 $f_n\in H(\Omega)$，若 $f_n\to f$，则存在 Ω 的一个开稠子集 $\tilde{\Omega}$，使得 $f\in H(\tilde{\Omega})$.