正规子群与商群

定义 1 (共轭). 设 $f, h \in G$，若存在 $g \in G$，使得

$$f = ghg^{-1},$$

则称 f 和 g **共轭**.

容易验证，共轭是一个等价关系，于是决定了一个等价类，称为共轭类.

定义 2 (共轭类). 设 G 是群，对任意 $f \in G$，与 f 共轭的元素组成的集合称为以 f 为代表元的**共轭类**.

定义 3 (自共轭元素). 如果以 f 为代表的共轭类中的元素只有 f 一个，则称 f 是群 G 的**自共轭元素**.

性质 1. 一个共轭类中所有元素的阶相同.

性质 2. 共轭类的元素数目是群的阶的因子.

定义 4 (共轭子群). 若 $H < G$，$K < G$，存在 $g \in G$ 使得

$$K = gHg^{-1},$$

则称子群 H 和 K **共轭**.

定义 5 (元素的中心化子). 设 $a \in G$，集合 $C_G(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$ 是 G 的子群，称为 a 的**中心化子**.

定义 6 (子集的中心化子). 设 $S \subset G$，集合 $C_G(S) = \{g \in G \mid gs = sg, \forall s \in S\}$ 是 G 的子群，称为 S 的**中心化子**.

定义 7 (中心). $C_G(G)$ 称为 G 的**中心**.

定义 8 (正规化子). 设 $M \subset G$，集合 $N_G(M) = \{g \in G \mid gM = Mg\}$ 是 G 的子群，称为 M 的**正规化子**.

如果对任意 $g \in G$，子群 H 都是自共轭的，则称 H 为正规子群，即如下定义.

定义 9 (正规子群). 设 G 是群，$H < G$，若有

$$ghg^{-1} \in H, \ \forall\, g \in G, \ \forall\, h \in H,$$

则称 H 是 G 的**正规子群**，记作 $H \lhd G$.

例 1. 定义运算为矩阵乘法，$SL_n(F) \lhd GL_n(F)$.

例 2. 定义运算为数的加法，$m\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$.

定理 1. 设 $H < G$，则下列条件等价.

1. $H \lhd G$;
2. $gH = Hg, \ \forall\ g \in G$;
3. $g_1Hg_2H = g_1g_2H, \ \forall\ g_1, g_2 \in G$.

证明. $1 \to 2$: 若 $H \lhd G$，则 $gHg^{-1} = H$，故 $gH = Hg$.

$2 \to 3$: 若 $gH = Hg$，则 $g_1Hg_2H = g_1(Hg_2)H = g_1g_2H$.

$3 \to 1$: 若 $g_1Hg_2H = g_1g_2H$，则 $gHg^{-1}H = gg^{-1}H = H$，则 $gHg^{-1} = H$. □

定义 10 (商群)**.** 设 $H < G$，关系 R 定义为 $aRb \iff a^{-1}b \in H$，则

$$R\text{为同余关系} \iff H \lhd G,$$

商集合 G/R 对同余关系 R 导出的运算也构成一个群，称为 G 对 H 的**商群**，记为 G/H.

证明. 必要性：因为 $g^{-1}(gh) = h \in H$，故 $gR(gh)$. 又 $g^{-1}Rg^{-1}$，于是由同余关系，

$$(gg^{-1})R(ghg^{-1}),$$

即 $eR(ghg^{-1})$，$ghg^{-1} = e^{-1}ghg^{-1} \in H$，$H \lhd G$.

充分性：设任意 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in H$，a_1Rb_1，a_2Rb_2，则

$$(a_1a_2)^{-1}(b_1b_2) = a_2^{-1}a_1^{-1}b_1b_2 = a_2{-}1a_1^{-1}b_1a_2a_2^{-1}b_2,$$

由于 $H \lhd G$，$a_1^{-1}b_1 \in H$，则 $a_2{-}1a_1^{-1}b_1a_2 \in H$，又 $a_2^{-1}b_2 \in H$，则 $(a_1a_2)^{-1}(b_1b_2) \in H$，故 R 为同余关系. □

例 3. 由于 $m\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$，于是有商群

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\right\},$$

记为 $\mathbb{Z}_m$，称为 $\mathbb{Z}$ 的**模 $\boldsymbol{m}$ 的剩余类加群**.

剩余类加群的每一个元素叫做一个剩余类. 同一剩余类中的两个元素同余，例如设 $a, b \in \overline{k}$，$k = 0, 1, \cdots, m-1$，则 $a \equiv b \pmod m$.