模的直和

定义 1 (外直和)**.** 设 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 是 R-模，$M = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in M_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. 若满足

1. $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$;
2. $a(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$,

则可验证 M 也是 R-模，称为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的**外直和**，记作

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$

注. M_i 大多数情况下不是 M 的子模，甚至不是子集，因为它们的元素都不一样.

令 $M_i' = \left\{ x_i' = (0, 0, \cdots, \underset{\text{第}i\text{个}}{x_i}, \cdots, 0) \mid x_i \in M_i, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$，这样 M_i' 是 M 的子模，且在 M_i 与 M_i' 中存在同构映射.

定理 1. 设 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 与 N 都是 R-模，$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$，$\varphi_i$ 是 M_i 到 N 的模同态，则存在唯一的模同态 $\varphi : M \to N$ 使得

$$\varphi(x_i') = \varphi_i(x_i).$$

证明. 存在性：定义

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i),$$

根据模同态的定义验证即可.

唯一性：设 $\psi : M \to N$ 也是模同态满足 $\psi(x_i') = \varphi_i(x_i)$，则

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

于是 $\psi = \varphi$. □

定义 2 (内直和)**.** 若 R-模 N 的子模 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 满足

1. $N = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$;
2. $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = \{0\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$,

则称 N 是 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的**内直和**，也记作

$$N = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$

注. 条件 *2* 比"$M_i \cap M_j = \{0\}, \forall i \neq j$"的条件更强,也等价于 N 中元素表示为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 中元素之和的表法唯一.

定理 2. 设 M 是 R-模 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的外直和，N 是 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的内直和，则

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

是 M 到 N 的模同构映射.

证明. 根据定义可以验证 φ 是模同态. 下证 φ 是双射.

由于 N 是 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的内直和，于是 $N = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$，对任意 $y \in N$，都存在 $x_i \in M_i$ 使得 $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$，于是 y 有原像 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，故 φ 是满射.

若 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$，则

$$x_i = -\sum_{j \neq i} x_j \in M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = \{0\},$$

于是 $x_i = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n)$，于是 $\ker \varphi = (0, 0, \cdots, 0)$，故 φ 是单射. □

性质 1. 直和的表法是唯一的.

证明. 对任意 $a \in N$，假设有两种表法

$$a = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

则

$$a - a = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \cdots + (x_n - y_n) = 0,$$

于是

$$(x_i - y_i) = -\sum_{j \neq i} (a_j - b_j) \in M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = \{0\},$$

于是 $x_i - y_i = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n)$，故 $x_i = y_i$. □

性质 2. 直和的直和仍是直和.

性质 3. 直和可以任意结合（任意加括号）.

定义 3 (无关)**.** 若 R-模 N 的子模 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 满足

$$M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = \{0\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

则称 $M_1 . M_2, \cdots, M_n$ 是**无关的**.