



常微分方程讲义

Ordinary Differential Equations

作者：薛冰

时间：November 18, 2024

目录

第 1 章 基本概念	1
1.1 微分方程及其解的定义	1
1.2 几何解释	3
第 2 章 初等积分法	5
2.1 恰当方程	5
2.2 变量分离方程	7
2.3 一阶线性方程	8
2.4 初等变换法	9
2.4.1 齐次方程	10
2.4.2 Bernoulli 方程	10
2.4.3 Riccati 方程	11
2.4.4 Gronwall 不等式	12
第 3 章 存在和唯一性定理	14
3.1 Picard 存在和唯一性定理	14

第 1 章 基本概念

1.1 微分方程及其解的定义

定义 1.1 (常微分方程)

已知 $F(z_0, z_1, \dots, z_{n+1})$ 为关于 z_0, z_1, \dots, z_{n+1} 的已知函数, 则关于 $y = y(x)$ 的方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

或

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

称为常微分方程 (Ordinary Differential Equation, 简称 ODE). 称 x 为自变量, y 为未知函数.



注 导数实际出现的最高阶数 n 称为常微分方程的阶.

注 若 F 关于 z_1, \dots, z_{n+1} 为线性函数, 则 ODE 为线性的, 若 F 关于 z_{n+1} 为线性函数, 则 ODE 为拟线性的.

注 若 $\frac{\partial F}{\partial z_0} \equiv 0$, 则 ODE 是自治的.

例题 1.1 例如, 下面的方程都是常微分方程:

$$(1) y'' = -\frac{1}{y^2},$$

$$(2) y'' = ky,$$

$$(3) y' = \alpha y,$$

$$(4) y' = x^2 + y^2,$$

$$(5) \frac{d^2y}{dx^2} = 1 + y^2,$$

$$(6) y'' + yy' = x,$$

$$(7) \frac{d^2\theta}{dt^2} + a^2\theta = 0.$$

例题 1.2 例如, 下面的方程都不是常微分方程:

$$(1) y'(x) = y(y(x)),$$

$$(2) y'(x) = y(x-1),$$

$$(3) \int_0^x y(t) dt + y(x) = x.$$

在 ODE 的例子中, (1)(2)(3) 是线性的, 除 (5) 外都是拟线性的. 可见, 所有线性 ODE 都是拟线性的, 但不是拟线性的 ODE 都是线性的, 也就是说, 线性是拟线性的一种特殊情形.

从自治性来看, (1)(2)(3)(5)(7) 都是自治的, 其余是非自治的. 我们可以看出, 自治的 ODE 是不含关于 x 的项的.

对未知函数的个数进行推广, 我们就得到了常微分方程组:

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(n)}) = \mathbf{0}.$$

其中 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. 这里 $m \geq 2$, 因为当 $m = 1$ 时就是 ODE 的定义. 例如 $m = 2$ 的情形, 有

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2', \dots, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, y_1', y_2', \dots, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}) = 0 \end{cases}$$

对自变量的个数进行推广, 我们就得到了偏微分方程 (Partial Differential Equation). 例如

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + f = 0$$

是一阶线性偏微分方程. 其中 x, y 和 z 为自变量, $f = f(x, y, z)$ 为未知函数. 本课程主要讲述常微分方程, 有时简称其为微分方程或方程.

定义 1.2

设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上连续, 且有直到 n 阶的导数. 如果把 $y = \varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, 得到关于 x 的恒等式, 即

$$F(x, \varphi(x), \varphi(x)', \dots, \varphi(x)^{(n)}) = 0$$

对一切 x 都成立, 则称 $y = \varphi(x)$ 为微分方程在 J 上的一个解.



例题 1.3

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + a^2\theta = 0.$$

解 对任意的常数 C_1, C_2 ,

$$\theta = C_1 \sin at + C_2 \cos at$$

是 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个解.

微分方程的解可以包含一个或几个任意常数 (与方程的阶数有关), 而有的解不包含任意常数. 为了确切表达任意常数的个数, 我们定义通解和特解的概念.

定义 1.3 (通解与特解)

设 n 阶微分方程 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 的解

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

包含 n 个独立的任意常数 C_1, C_2, \dots, C_n , 则称它为通解. 如果方程的解不包含任意常数, 则称它为特解.



注 当任意常数一旦确定之后, 通解也就变成了特解.

注 这里所说的 n 个任意常数 C_1, C_2, \dots, C_n 是独立的, 其含义是 Jacobi 行列式不为 0.

定解问题: 我们简单介绍 Cauchy 初值条件以及边值条件.

定义 1.4 (Cauchy 初值条件)

对于函数 y , 如果它满足:

- (1) 它是微分方程 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 的解;
- (2) 它在同一点 x_0 处满足初始条件, 取给定的值, 即

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

则称 y 满足 Cauchy 初值条件.



定义 1.5 (边值条件)

边值条件是在求解微分方程时使用的一类条件, 它们指定了方程解在定义域边界上的行为.



在常微分方程情况下, 边值条件通常涉及以下两种类型:

- (1) Dirichlet 条件: 直接指定了未知函数在边界上的值. 例如对于区间上的二阶 ODE, Dirichlet 条件形如

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

这里 α, β 是给定的常数.

(2) Neumann 条件: 指定了未知函数在边界上的导数值. 例如对于区间上的二阶 ODE, Neumann 条件形如

$$y'(a) = \gamma, \quad y'(b) = \delta,$$

这里 γ, δ 也是给定的常数.

除此以外, 还有其他类型的边值条件, 如混合边值条件 (同时包含函数值和导数值的条件) 和周期性边值条件 (对于周期函数).

1.2 几何解释

考虑一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 是平面区域 G 内的连续函数. 假设

$$y = \varphi(x) \quad (x \in I)$$

是方程的解, (其中 I 是解的存在区间), 则 $y = \varphi(x)$ 在 Oxy 平面上是一条光滑的曲线 Γ , 称它为微分方程的积分曲线或解曲线.

由于 $y = \varphi(x)$, 我们可以将微分方程改写为

$$\varphi'(x) = f(x, y),$$

亦即 Γ 在其上任一点 $P_0(x_0, y_0)$ 的切线斜率为 $f(x_0, y_0)$, 则切线方程为

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0),$$

即使我们并不知道积分曲线 $\Gamma: y = \varphi(x)$ 是什么.

这样, 在区域 G 内的每一点 $P(x, y)$, 我们可以做一个以 $f(P)$ 为斜率的短小的直线段 $l(P)$, 来标明积分曲线 (如果存在) 在该点的切线方向. 称 $l(P)$ 为微分方程在 P 点的线素, 称区域 G 连同上述全体线素为微分方程的线素场或方向场.

由此可见, 微分方程的任何积分曲线 Γ 与它的线素场是吻合的, 即积分曲线所到之处与线素均相切. 反之, 如果一条连续可微的曲线 Λ 与微分方程的线素场吻合, 则 Λ 是微分方程的一条积分曲线.

在构造方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 的线素场时, 通常利用由关系式 $f(x, y) = k$ 确定的曲线 L_k , 称它为线素场的等斜线. 显然, 等斜线上各点线素的斜率都等于 k , 因此, 等斜线简化了线素场逐点构造的方法.

这里需指出, 一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 在许多情况下取如下形式:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

其中, $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 是区域 G 内的连续函数.

当 $Q(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 方程的右端函数 $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ 在 (x_0, y_0) 点的近旁是连续的. 因此, 方程的线素场在 (x_0, y_0) 点附近是完全确定的. 然而, 如果 $Q(x_0, y_0) = 0$, 那么线素场在 (x_0, y_0) 点就失去意义.

但是, 只要 $P(x_0, y_0) \neq 0$, 我们就可以把方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

这里需要把 $x = x(y)$ 看作未知函数. 此时, 微分方程的右端函数 $\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ 在 (x_0, y_0) 点近旁是连续的. 因此它在那里的线素场也是确定的.

这样, 当 $P(x_0, y_0)$ 和 $Q(x_0, y_0)$ 不同时为零时, 我们可以在 (x_0, y_0) 近旁考虑上述两个微分方程, 虽然它们

的未知函数略有不同. 此时, 我们可以把它们统一写成下面的对称形式:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

只是当 $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ 时, 上述的三个微分方程在 (x_0, y_0) 点都是不定式, 因此线素场在 (x_0, y_0) 点没有意义. 我们称这样的点为相应微分方程的**奇异点**.

虽然在奇异点微分方程是不定式, 但是在积分曲线族的分布中奇异点是关键性的点. 之后我们引入动力系统的概念, 这里的奇异点将称为相应动力系统的奇点.

第2章 初等积分法

所谓微分方程的初等积分法,就是通过初等函数及其有限次积分的表达式求解微分方程的方法.

2.1 恰当方程

定义 2.1 (恰当方程)

考虑对称形式的一阶微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (2.1)$$

如果存在一个可微函数 $\Phi(x, y)$, 使得它的全微分为

$$d\Phi(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

则称方程 2.1 为恰当方程 (exact equation) 或全微分方程.



因此, 当方程 2.1 为恰当方程时, 可将它改写为全微分的形式

$$d\Phi(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

从而

$$\Phi(x, y) = C, \quad (2.2)$$

其中 C 为任意常数, 我们称 2.2 式为方程 2.1 的一个通积分 (general integration) 或通解 (general solution).

事实上, 将任意常数 C 取定后, 利用逆推法容易验证: 由 2.2 式确定的隐函数 $y = u(x)$ (或 $x = v(y)$) 就是方程 2.1 的一个解. 反之, 若 $y = u(x)$ (或 $x = v(y)$) 是微分方程 2.1 的一个解, 则有

$$d\Phi(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

其中 $y = u(x)$ (或 $x = v(y)$). 从而 $y = u(x)$ (或 $x = v(y)$) 满足 2.2 式, 其中积分常数 C 取决于解 $y = u(x)$ (或 $x = v(y)$) 的初值 (x_0, y_0) , 亦即 $C = \Phi(x_0, y_0)$.

在一般情况下, 我们需要解决的问题是:

- (1) 如何判断一个给定的微分方程是否为恰当方程?
- (2) 当它是恰当方程时, 如何求出相应全微分的原函数?
- (3) 当它不是恰当方程时, 能否将它的求解问题转化为一个与之相关的恰当方程的求解问题?

下面的定理对问题 (1) 和 (2) 给出了完满的解答. 至于问题 (3) 则是贯穿本章随后各节的一个中心问题.

定理 2.1

设函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在区域 $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ 上连续, 且有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$, 则微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

是恰当方程的充要条件为恒等式

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)$$

在 R 内成立. 且方程的通积分为

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C,$$

或者

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C,$$

其中 (x_0, y_0) 是 R 中任意取定的一点.



证明 必要性 方程为恰当方程, 则存在 $\Phi(x, y)$ 使得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y).$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

由偏导数的连续性假设, 有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

即

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

充分性 已知 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 我们要构造 $\Phi(x, y)$ 使

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y).$$

令

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \psi(y),$$

则显然 $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y)$. 而

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \psi'(y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \psi'(y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \psi'(y) \\ &= Q(x, y) - Q(x_0, y) + \psi'(y). \end{aligned}$$

令

$$\psi'(y) = Q(x_0, y),$$

则有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y).$$

此时

$$\psi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy,$$

所以有

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy.$$

同理, 我们令

$$\Phi(x, y) = \psi(x) + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$$

可类似得到另一个函数

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

注 求解恰当方程的关键是构造相应全微分的原函数 $\Phi(x, y)$, 这实际上就是场论中的位势问题. 在单连通区域 R 上, 条件

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

保证了曲线积分

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

与积分的路径无关. 因此, 上式确定了一个单值函数 $\Phi(x, y)$. 如果区域不是单连通的, 那么一般而言 $\Phi(x, y)$ 也许是多值的.

注 事实上, 这也可由 Green 公式简单推出.

命题 2.1

若函数 $p(x), q(x)$ 在区间 I 上连续可微, 则方程

$$p(x) dx + q(x) dy$$

是恰当的, 其通解为

$$\int_{x_0}^x p(x) dx + \int_{y_0}^y q(x) dy = C.$$

2.2 变量分离方程

定义 2.2 (变量分离方程)

如果微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

中的函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 均能表示为关于 x 的函数与关于 y 的函数的乘积, 则称该微分方程为变量分离方程.

由上述定义, 我们可以将 $P(x), Q(x)$ 分别写成

$$P(x) = X(x)Y_1(y), \quad Q(x) = X_1(x)Y(y).$$

则变量分离方程可以写成

$$X(x)Y_1(y) dx + X_1(x)Y(y) dy = 0.$$

考虑特殊情形: $P(x) = X(x)$ 和 $Q(y) = Y(y)$, 则微分方程为

$$X(x) dx + Y(y) dy = 0.$$

这显然是一个恰当方程, 且其一个通解为

$$\int X(x) dx + \int Y(y) dy = C.$$

一般而言, 变量分离方程不一定是恰当方程. 但它的名字揭示了: 我们可以把变量进行分离. 如果我们用因子 $X_1(x)Y_1(y)$ 去除变量分离方程, 就得到

$$\frac{X(x)}{X_1(x)} dx + \frac{Y(y)}{Y_1(y)} dy = 0.$$

这是一个恰当方程, 它的通解为

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)} dx + \int \frac{Y(y)}{Y_1(y)} dy = C.$$

当 $X_1(x)Y_1(y) \neq 0$ 时, 上述方程和变量分离方程是同解的. 假设存在实数 a 使得 $X_1(a) = 0$, 则函数 $x = a$ 也是变量分离方程的解, 但不是分离变量后方程的解. 因此, 在分离变量后, 要注意补上这些可能丢失的解. 即补上形如

$$x = a_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

和

$$y = b_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

的特解. 其中 a_i 是 $X_i(x) = 0$ 的根, b_i 是 $Y_i(y) = 0$ 的根.

2.3 一阶线性方程

我们先给出一阶线性方程的定义.

定义 2.3 (一阶线性方程)

形如

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

的微分方程称为一阶线性方程. 其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $I = (a, b)$ 上连续.

当 $q(x) \equiv 0$ 时, 即得

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

此时我们称一阶线性方程是齐次的. 当 $q(x)$ 不恒为零时, 则称一阶线性方程为非齐次的.



注 这里的“齐次”与“非齐次”指的是有关未知函数 y 的式 (y, y', y'', \dots) 次数相同 (将不含有 y 的式看作 0 次的).

下面我们首先讨论齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

的解法.

解 改写成对称形式, 即

$$dy + p(x)y dx = 0,$$

这是一个分离变量方程. 当 $y \neq 0$ 时, 方程两侧同除以 y , 得

$$\frac{dy}{y} + p(x) = 0.$$

积分后, 即得齐次线性方程的解

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C \neq 0).$$

当 $C = 0$ 时, 对应于方程的特解 $y = 0$, 因此, C 可以是任意常数, 我们得到了齐次线性方程的通解. ■

下面我们继续来看非齐次线性方程的解法.

解 同样地, 我们改写成

$$dy + p(x)y dx = q(x) dx.$$

一般地, 上述方程并非恰当方程. 但如果我们将方程两侧同乘以一个非零因子 $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, 我们得到

$$e^{\int p(x)dx} dy + e^{\int p(x)dx} p(x)y dx = e^{\int p(x)dx} q(x) dx,$$

它是全微分的形式

$$d(e^{\int p(x)dx} y) = d \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx.$$

直接积分, 得到通积分

$$e^{\int p(x)dx} y = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

得到通解

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right),$$

其中 C 是任意常数. ■

注 上述方法称为积分因子法. 因为我们用因子 $\mu(x)$ 乘方程的两侧后, 他就转化为一个全微分方程, 从而获得它的积分. 此外, 我们还有常数变易法, 将在后续学习中提及.

为确定起见, 通常把一阶线性方程通解中的不定积分写成变上限的定积分, 即

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \left[C + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right] \quad (x_0 \in I),$$

或

$$y = C e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_s^x p(t)dt} ds.$$

利用这种形式, 容易得到 Cauchy 初值问题

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

的解为

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_s^x p(t)dt} ds,$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 I 上连续.

下面给出线性微分方程的一些性质.

定理 2.2

齐次线性方程的解或者恒等于零, 或者恒不等于零.



定理 2.3

线性方程的解是整体存在的, 即任一解都在 $p(x)$ 和 $q(x)$ 有定义且连续的整个区间 I 上存在.



定理 2.4

齐次线性方程的任何解的线性组合仍是它的解; 齐次线性方程的任一解与非齐次线性方程的任一解之和是非齐次线性方程的解; 非齐次线性方程的任意两解之差必是相应的齐次线性方程的解.



定理 2.5

非齐次线性方程的任一解与相应的齐次线性方程的通解之和构成非齐次线性方程的通解.



定理 2.6

线性方程的 Cauchy 初值问题的解存在且唯一.



2.4 初等变换法

下面介绍几个标准类型的微分方程, 它们可以通过适当的初等变换转化为变量分离方程或一阶线性方程.

2.4.1 齐次方程

定义 2.4 (齐次方程)

如果微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

中的函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 都是 x 和 y 的同次 (如 m 次) 齐次函数, 即

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y),$$

则称方程为齐次方程.



注 这与上节定义的齐次线性方程不是一回事.

对于齐次方程的解法, 我们可以作变量替换. 令

$$y = ux.$$

其中 u 是新的未知函数, x 仍为自变量. 则

$$\begin{cases} P(x, y) = P(x, xu) = x^m P(1, u), \\ Q(x, y) = Q(x, xu) = x^m Q(1, u). \end{cases}$$

代入齐次方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

得

$$x^m [P(1, u) + uQ(1, u)] dx + x^{m+1} Q(1, u) du = 0,$$

这就将齐次方程转化为了变量分离方程.

注 易知方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

为齐次方程的一个等价定义是, 它可以化为如下形式:

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

注 容易看出, $x = 0$ 是我们化为了的变量分离方程的一个特解. 但它未必是原方程的解. 这是因为变换 $y = ux$ 在 $x = 0$ 时是不可逆的.

2.4.2 Bernoulli 方程

定义 2.5 (Bernoulli 方程)

形如

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

的方程称为 **Bernoulli 方程**, 其中 n 为常数且 $n \neq 0, 1$.



对于 Bernoulli 方程的解法, 我们先以 $(1-n)y^{-n}$ 乘方程两边, 得到

$$(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} + (1-n)y^{1-n} p(x) = (1-n)q(x).$$

令 $z = y^{1-n}$, 有

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x),$$

这就将其转化为了关于未知函数 z 的一阶线性方程.

2.4.3 Riccati 方程


定义 2.6 (Riccati 方程)

假如一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$


的右端函数 $f(x, y)$ 是一个关于 y 的二次多项式, 即该方程可以写成

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

的形式, 其中 $p(x), q(x)$ 和 $r(x)$ 在区间 I 上连续且 $p(x)$ 不恒为零, 则称该方程为二次方程或 **Riccati 方程**. 

注 Riccati 方程是形式上最简单的非线性方程. 但一般而言, 它不能用初等积分法求解.

定理 2.7

设已知 Riccati 方程的一个特解 $y = \varphi_1(x)$, 则可用积分法求得它的通解. 

证明 对 Riccati 方程


$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

作变换 $y = u + \varphi_1(x)$, 其中 u 是新的未知函数. 代入 Riccati 方程, 得到

$$\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dx} = p(x)[u^2 + 2\varphi_1(x)u + \varphi_1^2(x)] + q(x)[u + \varphi_1(x)] + r(x).$$

由于 $y = \varphi_1(x)$ 是 Riccati 方程的解, 从上式消去相关的项后, 就有

$$\frac{du}{dx} = [2p(x)\varphi_1(x) + q(x)]u + p(x)u^2,$$

这是一个 Bernoulli 方程, 可用积分法求出通解. 


定理 2.8

设 Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

其中 a, b, m 都是常数且 $a \neq 0$. 又设 $x \neq 0$ 和 $y \neq 0$, 则当 m 为

$$0, -2, \frac{-4k}{2k+1}, \frac{-4k}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

时, 方程可通过适当的变换化为变量分离方程. 

证明 不妨设 $a = 1$ (否则作自变量变换 $\bar{x} = ax$ 即可), 我们考虑

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = bx^m. \quad (2.3)$$

当 $m = 0$ 时, 方程 2.3 是一个变量分离方程

$$\frac{dy}{dx} = b - y^2.$$

当 $m = -2$ 时, 作变换 $z = xy$, 其中 z 是新未知函数. 然后代入方程 2.3, 得到

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b + z - z^2}{x}.$$

这也是一个变量分离方程.

当 $m = \frac{-4k}{2k+1}$ 时, 作变换

$$x = \xi^{\frac{1}{m+1}}, \quad y = \frac{b}{m+1} \eta^{-1},$$

其中 ξ 和 η 分别为新的自变量和未知函数, 则方程 2.3 变为

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \frac{b}{(m+1)^2} \xi^n, \quad (2.4)$$

其中 $n = \frac{-4k}{2k-1}$. 再作变换

$$\xi = \frac{1}{t}, \quad \eta = t - zt^2,$$

其中 t 和 z 分别是新的自变量和未知函数, 则方程 2.4 变为

$$\frac{dz}{dt} + z^2 = \frac{b}{(m+1)^2} t^l, \quad (2.5)$$

其中 $l = \frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$.

上述方程与方程 2.3 在形式上一样, 只是右端自变量的指数从 m 变为 l . 比较 m 与 l 对 k 的依赖关系不难看出, 只要将上述变换的过程重复 k 次, 就能把方程 2.3 化为 $m=0$ 的情形.

当 $m = \frac{-4k}{2k-1}$ 时, 原微分方程就是 2.4 的类型, 因此可以把它化为微分方程 2.5 的形式, 从而可以化归到 $m=0$ 的情形. 至此证毕. ■

注 此定理由 Daniel Bernoulli 在 1725 年得到. 这个定理指出, 对于 Riccati 方程能用初等积分法求解, m 的取值是充分的. 实际上, Liouville 在 1841 年进而证明了这个条件还是一个必要条件.

注 Riccati 方程在历史上和近代都有重要应用. 例如, 它曾用于证明 Bessel 方程的解不是初等函数, 另外它也出现在现代控制论和向量场分支理论的一些问题中.

2.4.4 Gronwall 不等式

Gronwall 不等式在一阶常微分方程解的存在唯一性定理的证明过程中起到核心作用, 该不等式在 PDE 和 FPDE 中也有重要应用, 它的作用是给出相关未知函数的上界估计.

定理 2.9 (Gronwall-Bellman 不等式)

设 K 为非负常数, $f(t)$ 与 $g(t)$ 为区间 $[\alpha, \beta]$ 上的非负连续函数, 且满足

$$f(t) \leq K + \int_{\alpha}^t f(s)g(s) ds, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

则有

$$f(t) \leq Ke^{\int_{\alpha}^t g(s) ds}.$$

证明 设

$$V(t) = K + \int_{\alpha}^t f(s)g(s) ds, \quad \alpha \leq \beta,$$

则

$$V'(t) = f(t)g(t) \leq g(t)V(t),$$

即 $V'(t) - g(t)V(t) \leq 0$, 两边同乘 $e^{-\int_{\alpha}^t g(s) ds}$, 得

$$\left[V(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s) ds} \right]' \leq 0.$$

由单调性得

$$V(t)e^{-\int_{\alpha}^t g(s) ds} \leq V(\alpha) = K.$$

故

$$f(t) \leq V(t) \leq Ke^{\int_{\alpha}^t g(s) ds}.$$

■

第3章 存在和唯一性定理

3.1 Picard 存在和唯一性定理

定义 3.1 (Lipschitz 条件)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

其中常数 $L > 0$, 则称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内对 y 满足 **Lipschitz 条件**. 称 L 为 Lipschitz 常数.



Lipschitz 条件是一个比通常连续更强的光滑性条件. 直觉上, Lipschitz 连续函数限制了函数改变的速度, 符合 Lipschitz 条件的函数的斜率, 必小于一个称为 Lipschitz 常数的实数.

易知, 若函数 $f(x, y)$ 在凸区域 D 内对 y 有连续的偏微商, 并且 D 是有界闭区域, 则 $f(x, y)$ 在 D 内对 y 满足 Lipschitz 条件; 反之, 结论不一定正确. 例如 $f(x, y) = |y|$ 对 y 满足 Lipschitz 条件, 但当 $y = 0$ 时它对 y 没有微商.

现在, 我们要证明下述 Picard 定理.

定理 3.1 (Picard 定理)

设初值问题

$$(E): \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$R: [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

内连续, 而且对 y 满足 Lipschitz 条件. 则 (E) 在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且仅有一个解, 其中常数

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M > \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|.$$



为了突出思路, 我们把证明分成四步:

- (1) 将微分方程转化为对应的积分方程.
- (2) 构造 Picard 序列 $\{y_n(x)\}$.
- (3) 证明 Picard 序列 $y_n(x) \Rightarrow y(x)$ 是方程的解.
- (4) 证明解的唯一性.

证明 (1) 先证明初值问题 (E) 有解 $y = y(x)$, 等价于积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt \quad (3.1)$$

有解 $y = y(x)$.

设 $y = y(x)$ ($x \in I$) 是 (E) 的解, 则有

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (x \in I)$$

和

$$y(x_0) = y_0.$$

由此, 对上述微分方程进行积分并利用初值条件, 得到

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (x \in I),$$

即 $y = y(x)$ 是积分方程 3.1 的解.

反之, 设 $y = y(x)$ ($x \in I$) 是积分方程 3.1 的解, 则只要逆转上面的推导就可知道 $y = y(x)$ 是 (E) 的解. 因此, Picard 定理的证明等价于证明积分方程 3.1 在区间 I 上有且仅有一个解.

(2) 采用不动点的思想, 用逐次迭代法构造 Picard 序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \quad (x \in I, n = 0, 1, 2, \dots),$$

其中 $y_0(x) = y_0$.

当 $n = 0$ 时, 注意到 $f(x, y_0(x))$ 是 I 上的连续函数, 所以由递推式, 有

$$y_1(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \quad (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的, 而且满足不等式

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt \right| \leq M|x - x_0|.$$

这就是说, 在区间 I 上 $|y_1(x) - y_0| \leq Mh \leq b$.

因此, $f(x, y_1(x))$ 在 I 上是连续的. 所以由递推式, 有

$$y_2(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \quad (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的, 而且满足不等式

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))| dt \right| \leq M|x - x_0|,$$

从而我们有: $|y_2(x) - y_0| \leq Mh \leq b$ ($x \in I$).

如此类推, 用归纳法不难证明: 由递推式给出的 Picard 序列 $\{y_n(x)\}$ 在 I 上是连续的, 而且满足不等式

$$|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(3) 现证: Picard 序列 $\{y_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛到积分方程 3.1 的解.

序列 $\{y_n(x)\}$ 的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)]$$

的收敛性.

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))] dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))| dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt \right| \\ &\leq LM \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| \\ &= \frac{LM}{2} (x - x_0)^2 = \frac{M}{L} \frac{[L(x - x_0)]^2}{2} \end{aligned}$$

同理, 可得

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt \right|,$$

根据归纳法, 可以证明

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{[L|x - x_0|]^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

故

$$\sum_{j=0}^{\infty} |y_{j+1}(x) - y_j(x)| \leq \frac{M}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Lh)^{j+1}}{(j+1)!}.$$

则根据函数项级数的 Weierstrass 判别法, 可知 $\{y_n(x)\}$ 一致收敛, 因此对 Picard 序列的递推式取极限, 得

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

故 Picard 序列的极限 $y(x)$ 是方程的解.

(4) 最后证明解的唯一性. 若方程有两个互异的解 $\varphi(x), \psi(x)$, 记 $u(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, 则有

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) dt \right| \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \\ &= L \int_{x_0}^x |u(t)| dt. \end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式可得

$$|u(x)| \leq 0,$$

故 $\varphi(x) = \psi(x)$. ■

注 若 $f(x, y)$ 不满足 Lipschitz 条件, 则有 Picard 序列可能不收敛, 解仍存在的情形.

注 f 仅连续但不满足 Lipschitz 条件时, 解可能不唯一. 例如 $y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$.

注 我们也可以利用压缩映像原理来证明解的唯一性. 下面我们给出该原理但不再证明, 感兴趣的读者可以参考泛函分析相关教材.

定理 3.2 (压缩映像原理)

设 X 是完备的度量空间, T 是 X 上的压缩映射, 那么 T 有且仅有一个不动点, 即 $Tx = x$ 有且只有一个解.



下面我们介绍 Osgood 条件, 它是一个比 Lipschitz 条件更弱的条件.

定义 3.2 (Osgood 条件)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续, 而且满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|),$$

其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数, 且

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty,$$

则称 $f(x, y)$ 在 G 内对 y 满足 Osgood 条件. ♣

注 Lipschitz 条件是 Osgood 条件的特例, 因为 $F(r) = Lr$ 满足上述要求.