群作用

定义 1 (群作用)**.** 设 G 是群，X 是非空集合. 定义映射 $G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto g \cdot x$，若满足

1. 幺元：$e \cdot x = x$;

2. 兼容性：对任意 $g_1, g_2 \in G$，$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$,

则称映射“$\cdot$”为 G 在 X 上的一个**作用**.

群作用由公理化的定义有些抽象，下面建立群作用和置换之间的联系，也可看作是群作用的另一种定义.

定理 1. 设 G 是群，X 是非空集合，映射 $\varphi : G \to S_X,\ g \mapsto \varphi_g$. 则 φ 是同态当且仅当 φ 给出了一个群 G 在集合 X 上的群作用.

证明. 必要性：定义映射 $\cdot : G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto \varphi_g(x)$，这里 $\varphi_g \in S_X$ 是同态. 下面证明“$\cdot$”是群作用.

对任意 $g \in G$，$e \in G$ 是幺元，则

$$\varphi_{ge} = \varphi_g \varphi_e = \varphi_g,$$

于是 $\varphi_e = \mathrm{id}$. 则对任意 $x \in X$，

$$e \cdot x = \varphi_e(x) = \mathrm{id}(x) = x.$$

对任意 $g_1, g_2 \in G$，有

$$(g_1 g_2) \cdot x = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2}(x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

于是“$\cdot$”是群作用.

充分性：定义映射 $\varphi_g : X \to X,\ \varphi_g(x) \mapsto g \cdot x$，先证明 φ_g 是置换.

对任意 $x_1, x_2 \in X$，若 $\varphi_g(x_1) = \varphi_g(x_2)$，则 $g \cdot x_1 = g \cdot x_2$，用 g^{-1} 作用，得

$$g^{-1} \cdot (g \cdot x_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot x_2),$$

由兼容性公理得 $x_1 = x_2$，故 φ_g 是单射.

而 $\varphi_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = e \cdot x = x$，故对所有 $x \in X$，都存在原像 $g^{-1} \cdot x$，于是 φ_g 是满射.

因此 φ_g 是置换. 定义映射 $\varphi : G \to S_X,\ g \mapsto \varphi_g$，下面证明 φ 是同态.

对任意 $g_1, g_2 \in G$，任意 $x \in X$，有

$$\varphi_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = \varphi_{g_1} \cdot (\varphi_{g_2}(x)) = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2}(x),$$

于是 φ 是同态. □

定义 2 (轨道)**.** 设 G 是群，X 是非空集合. 对任意给定的 $x \in X$，称集合 $\{g \cdot x \mid \forall g \in G\}$ 为 x 的**轨道**，记作 $\mathrm{Orb}(x)$.

轨道就是在群 G 的作用下，x 所能到达的所有取值的集合.

定理 2. 设群 G 作用在集合 X 上. 定义关系 $xRy \iff \exists g \in G, y = g \cdot x$，则 R 是等价关系，且 x 所在的等价类是 $\mathrm{Orb}(x)$.

证明. R 是等价关系由反身性、对称性、传递性验证即可. 由 R 的定义可知 x 所在的等价类为 $\mathrm{Orb}(x)$. □

注. *由此，群 G 作用在集合 X 上，可将 X 分为若干轨道的无交并.*

定义 3 (稳定化子)**.** 设 G 是群，X 是非空集合. 对任意给定的 $x \in X$，集合 $\{g \mid g \cdot x = x\}$ 关于群 G 的运算构成群，称为 x 的**稳定化子**或**迷向子群**，记作 $\mathrm{Stab}(x)$.

也就是说，群 G 中有一些元素，作用在 x 上，得到的还是 x 自身. 例如 $e \in G$，$e \cdot x = x$. 下面证明 $\mathrm{Stab}(x) < G$.

证明. 已知 $\mathrm{Stab}(x) \subset G$. 对任意 $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}(x)$，

$$e \cdot x = (g_2^{-1} g_2) \cdot x = g_2^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) = g_2^{-1} \cdot x = x.$$

于是

$$(g_1 g_2^{-1}) \cdot x = g_1 \cdot (g_2^{-1} \cdot x) = g_1 \cdot x = x.$$

故 $g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$，由子群的充要条件，$\mathrm{Stab}(x) < G$. □

定义 4 (不动点)**.** 设群 G 作用在集合 X 上，集合 $\{x \mid g \cdot x = x, \forall g \in G\}$ 称为 X 在群 G 作用下的**不动点**.

定义 5 (齐性空间)**.** 若群 G 作用在集合 X 上，对任意 $x, y \in X$，都有 $g \in G$ 满足 $g \cdot x = y$，则称这个作用是**可传递**的或**可迁**的，集合 X 称为**齐性空间**.

注. *群 G 在每个轨道 $\mathrm{Orb}(x)$ 上的作用是可传递的.*

定义 6. 若对任意 $x \in X$，$\mathrm{Stab}(x) = e$，则称 G 的作用是**自由的**.

定义 7. 若对任意 $g \neq e$，存在 $x \in X$ 使得 $g \cdot x \neq x$，则称 G 的作用是**忠实的**或**有效的**.

定义 8. 若对任意 $g \in G$，$x \in X$，都有 $g \cdot x = x$，则称 G 的作用是**平凡的**.

定理 3 (轨道-稳定化子定理)**.** 设 $G/\mathrm{Stab}(x)$ 是 G 关于 $\mathrm{Stab}(x)$ 的左陪集空间，则存在双射 $\varphi : \mathrm{Orb}(x) \to G/\mathrm{Stab}(x)$. 特别地，当 G 是有限群时，有 $|G| = |\mathrm{Orb}(x)||\mathrm{Stab}(x)|$.

证明. 设 $\varphi: \mathrm{Orb}(x) \to G/\mathrm{Stab}(x)$, $g \cdot x \mapsto g\mathrm{Stab}(x)$. 设 $g \cdot x = h \cdot x$，则 $(h^{-1}g) \cdot x = x$，于是 $h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x)$，$h\mathrm{Stab}(x) = g\mathrm{Stab}(x)$，所以 φ 是映射.

对于任一 $g\mathrm{Stab}(x)$，都有原像 $g \cdot x$，故 φ 是满射.

对任意 $g_1 \cdot x, g_2 \cdot x \in \mathrm{Orb}(x)$，若 $\varphi(g_1 \cdot x) = \varphi(g_2 \cdot x)$，则 $g_1\mathrm{Stab}(x) = g_2\mathrm{Stab}(x)$，$g_2^{-1}g_1 \in \mathrm{Stab}(x)$，于是 $g_2^{-1}g_1 \cdot x = x$，于是 $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$，$\varphi$ 是单射.

于是 φ 是双射，有 $|\mathrm{Orb}(x)| = |G\mathrm{Stab}(x)| = [G : \mathrm{Stab}(x)]$. 特别地，当 G 有限时，由 Lagrange 定理，有 $|G| = |\mathrm{Orb}(x)||\mathrm{Stab}(x)|$. □

可以把群作用推广到集类上.

定义 9. 设 G 是群，$\mathcal{X}$ 是非空集类，定义映射 $G \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $(g, H) \mapsto g \cdot H$，若满足

1. 幺元：$e \cdot H = H$;

2. 兼容性：对任意 $g_1, g_2 \in G$，$(g_1g_2) \cdot H = g_1 \cdot (g_2 \cdot H)$,

则称映射“$\cdot$”为 G 在 $\mathcal{X}$ 上的一个**作用**.

定义 10 (共轭作用)**.** 若群 G 作用在自身，对任意 $g, x \in G$，有

$$g \cdot x = gxg^{-1},$$

可以验证这是一个作用，称为**共轭作用**.

现在可以用群作用的语言来描述共轭类、共轭子群、中心化子以及正规化子的概念.

定义 11 (共轭类)**.** 设群 G 到自身有共轭作用，则对任意 $x \in G$，称 $\mathrm{Orb}(x)$ 为 x 所在的**共轭类**.

定义 12 (共轭子群)**.** 设 $H < G$，则称 $g \cdot H = gHg^{-1}$ 为 H 在 G 作用下的**共轭子群**.

定义 13 (中心化子)**.** $x \in G$ 在共轭作用下的稳定化子 $\mathrm{Stab}(x)$ 称为 x 在 G 中的**中心化子**，记作 $C_G(x)$.

定义 14 (中心)**.** 群 G 中所有元素的中心化子的交称为群 G 的**中心**，即与 G 中所有元素都共轭的元素组成的集合，记作 $C_G(G)$.

定义 15 (正规化子)**.** $H < G$ 在共轭作用下的稳定化子 $\mathrm{Stab}(H)$ 称为 H 在 G 中的**正规化子**，记作 $N_G(H)$.

定义 16 (类方程)**.** 由于群 G 可以划分为若干共轭类，即

$$G = \bigsqcup_{i \in I} C(x_i),$$

其中 $C(x_i)$ 为以 x_i 为代表元的共轭类. 即 $C(x_i) = \mathrm{Orb}(x_i)$. 对任意 $z \in C_G(G)$，任意 $g \in G$，都有 $z = gzg^{-1}$，即 $|C(z)| = 1$. 则

$$|G| = \sum_{i \in I} |C(x_i)| = |C_G(G)| + \sum_{i \in I'} |C(x_i)| = |C_G(G)| + \sum_{i \in I'} \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}. \tag{1}$$

其中 $C_G(G) = \{x_i \mid i \in I \backslash I'\}$. 称方程 (1) 为**类方程**.

例 1. 考虑对称群 S_3，$|S_3| = 6$. 它的共轭类有 $\{e\}$，$\{(12), (13), (23)\}$ 以及 $\{(123), (132)\}$. 于是

$$6 = 1 + 3 + 2.$$