连续映射

定义 1 (连续映射). 设拓扑空间 X 和 Y，映射 $f : X \to Y$，若对 Y 中的任一开集 U，$f^{-1}(U)$ 为 X 中的开集，则称 f 为从 X 到 Y 的**连续映射**.

定义 2 (同胚映射). 设映射 $f : X \to Y$ 满足以下条件：

1. f 是双射；
2. f 是连续映射；
3. f^{-1} 是连续映射.

则称 f 为从 X 到 Y 的**同胚映射**，称拓扑空间 X 和 Y **同胚**.

定理 1. 两个连续映射的复合仍为连续映射.

证明. 设 $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ 为两个连续映射，则对 Z 中任意开集 U，$g^{-1}(U)$ 为 Y 中的开集，$f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ 为 X 中的开集. 于是 $g \circ f$ 为连续映射. $\square$

定理 2. 设连续映射 $f : X \to Y$，$A \subset X$，并有 A 上的子空间拓扑，则 f 在 A 上的限制映射 $f\big|_A : A \to Y$ 也是连续映射.

证明. 设开集 $O \subset Y$，注意到 $(f\big|_A)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A$ 为开集. $\square$

定义 3 (恒等映射). 设映射 $\mathrm{id} : X \to X$，$\mathrm{id}(x) = x,\ x \in X$，称 id 为 X 上的**恒等映射**.

定义 4 (嵌入映射). 设 $A \subset X$，定义映射 $i : A \to X$，$i(x) = x,\ x \in A$，称为 X 的**嵌入映射**.

定理 3. 下面五个命题等价.

1. $f : X \to Y$ 是一个连续映射；
2. 若 β 是 Y 的一个拓扑基，则 β 的任意元素的原像都是开的；
3. 对任意 $A \subset X$，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$；
4. 对任意 $B \subset Y$，$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$；
5. Y 中任意闭集的原像都是闭的.

证明. 1$\to$ 2 : f 为连续映射，则开集的原像都是开集，而 β 中的元素为开集，则原像仍为开集.

2$\to$ 3 : 设 $A \subset X$，显然 $f(A) \subset \overline{f(A)}$，考虑 $x \in \overline{A}\backslash A$，$f(x) \notin f(A)$，即证 $f(x)$ 为 $f(A)$ 的极限点. 考虑 Y 的拓扑基 β，对 $B \in \beta$，存在邻域 N，使得 $f(x) \in B \subset N$，下证 $N\backslash\{f(x)\} \cap f(A) \neq \varnothing$.

由于 B 的原像仍为开的，故 $x \in f^{-1}(B)$ 为一开集，又 x 为 A 的极限点，故 $f^{-1}(B)\backslash\{x\} \cap A \neq \varnothing$，于是 $B\backslash\{f(x)\} \cap f(A) \neq \varnothing$，而 $B \subset N$，故有 $N\backslash\{x\} \cap f(A) \neq \varnothing$.

3$\to$ 4 : $f^{-1}(B) \in X$，则 $f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subset \overline{B}$，则

$$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1} \circ f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

4$\to$ 5 : 对任意闭集 $B \subset Y$，有 $B = \overline{B}$，则由命题 4，有

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)},$$

而显然 $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$，于是 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$，故 $f^{-1}(B)$ 为闭集.

5$\to$ 1 : 对任意闭集 $B \subset Y$，有 $f^{-1}(B)$ 为闭集，则 $Y\backslash B$ 和 $X\backslash f^{-1}(B)$ 均为开集，而 $f^{-1}(Y\backslash B) = X\backslash f^{-1}(B)$ 为开集，故 f 为连续映射. $\square$