映射与运算

定义 1 (映射)**.** 设集合 A，B 非空，若 A 中的任一元素都能通过某一对应法则 f 唯一地对应到 B 中的一个元素，则称 f 是从 A 到 B 的**映射**，记作 $f : A \to B$. 设 $x \in A$，则 $y \in B$，称 y 是 x 在 f 下的**像**，记作 $f(x)$；称 x 是 y 在 f 下的**原像**，记作 $f^{-1}(y)$.

定义 2 (单射)**.** 设映射 $f : A \to B$，对任意 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是**单射**.

不同元素在单射下的像也不同.

定义 3 (满射)**.** 设映射 $f : A \to B$，对任意 $y \in B$，都存在原像 $f^{-1}(y)$，则称 f 是**满射**.

定义 4 (双射)**.** 若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 是**双射**.

双射 $f : A \to B$ 是 A 中元素与 B 中元素的一一对应.

定义 5 (恒等映射)**.** 设映射 $i : A \to A$，$i(x) = x$，则称 i 为**恒等映射**.

定义 6 (嵌入映射)**.** 设非空集合 $A_0 \subset A$，映射 $f : A_0 \to A$，$i(x) = x$，则称 i 是嵌入映射.

嵌入映射有扩大值域的作用.

定义 7 (开拓与限制)**.** 设非空集合 $A_0 \subset A$，映射 $f : A_0 \to B$，$g : A \to B$，对任意 $x \in A_0$，有 $f(x) = g(x)$，则称 g 是 f 的**开拓**，f 是 g 的**限制**.

开拓映射有扩大定义域的作用，限制映射有缩小定义域的作用.

定义 8 (映射的复合)**.** 设映射 $f : A \to B$，$g : B \to C$，则定义复合映射：$g \circ f = g\left(f\left(x\right)\right) : A \to C$.

可以用交换图表示这个过程.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

定义 9 (直积)**.** 设非空集合 A，B，定义 A 与 B 的**直积** $A \times B = \{(a, b) \mid \forall a \in A, b \in B\}$.

定义 10 (代数运算)**.** 设非空集合 A，B，D，称映射 $A \times B \to D$ 为 A 与 B 到 D 的一个**代数运算**. 即对任意 $a \in A$，$b \in B$，都有唯一的 $d \in D$ 满足 $f(a, b) = d$，记作 $a \circ b = d$.

定义 11 (二元运算)**.** 设 A 为非空集合. 代数运算 $f : A \times A \to A$ 称为**二元运算**，简称**运算**.

在二元运算下，A 中的元素经过运算仍在 A 中，于是二元运算满足**封闭性**.

定义 12 (结合性)**.** 若在非空集合 A 上定义了一种运算“$\circ$”，对任意 $a, b, c \in A$，都有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

则称运算“$\circ$”是**结合的**.

定义 13 (交换性)**.** 若在非空集合 A 上定义了一种运算“$\circ$”，对任意 $a, b \in A$，都有

$$a \circ b = b \circ a,$$

则称运算“$\circ$”是**交换的**.

习惯上将运算“$\circ$”称为乘法，并略去不写. 要注意这里的乘法是一种抽象的运算，与数的乘法不是一回事. 那么，结合性可以写为 $(ab)c = a(bc)$，交换性可以写为 $ab = ba$.

定义 14 (分配性)**.** 若在非空集合 A 上定义了两种运算“$\circ$”和“$+$”，分别称为乘法和加法，对任意 $a, b, c \in A$，若有

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c),$$

则称乘法对加法是**左分配的**，若有

$$(a + b) \circ c = (a \circ c) + (b \circ c),$$

则称乘法对加法是**右分配的**. 若乘法对加法既是左分配的，又是右分配的，则称乘法对加法是**分配的**.

与乘法类似，这里的加法也是一种抽象的运算，不能简单看作数的加法.