等价关系与集合分类

定义 1 (关系)**.** 设集合 $R \subset A \times A$，$a, b \in A$，若 $(a, b) \in R$，则称 a 和 b 有**关系** R，记作 aRb；若 $(a, b) \notin R$，则称 a 与 b 没有关系.

定义 2 (等价关系)**.** 若关系 R 满足

1. 反身性：aRa, $\forall a \in A$;
2. 对称性：aRb，则 bRa，$\forall a, b \in A$;
3. 传递性：aRb, bRc 则 aRc，$\forall a, b, c \in A$.

则称 R 为**等价关系**.

定义 3 (集合的分类)**.** 非空集合 A 可以分成若干不交非空子集，即 $A = \bigcup_{i \in I} M_i$，$M_i \cap M_j = \varnothing$, $i \neq j$，则 $\{M_i | i \in I\}$ 称为 A 的一个**分类**或**分划**.

定理 1. 集合 A 的一个分类决定 A 中的一个等价关系.

证明. 设关系 R 满足
$$aRb \iff a \text{ 和 } b \text{ 在同一类},$$
则根据定义易得 R 是等价关系. □

定义 4 (等价类)**.** 设在集合 A 上定义了一个等价关系 R，$a \in A$，则所有与 a 有关系的元素构成一个集合 $\{b \in A \mid bRa\}$，称为 a 所在的**等价类**，记作 $\overline{a}$，a 称为这个等价类的**代表元**.

定义 5 (商集)**.** 设集合 A 中有等价关系 R，则以 R 为前提的所有等价类的集合 $\{\overline{a}\}$ 称为 A 对 R 的**商集**，记作 A/R.

定义 6 (自然映射)**.** 称从非空集合 A 到它的商集合 A/R 的映射 $\pi : A \to A/R$, $\pi(a) = \overline{a}$ 为**自然映射**.

容易验证 π 是映射，且是满射，但未必是单射，因为以 a 为代表元的等价类不一定只有 a 这一个元素，如果 $b \in \overline{a}$，那么 $\pi(a) = \pi(b) = \overline{a}$.

定理 2. 集合 A 中的一个等价关系决定 A 的一个分类.

证明. 对任意 $a \in A$，$\pi(a)$ 是 a 所在的等价类，于是 A 中的任何元素都有所在的等价类，这些等价类互不相交，于是构成了 A 的一个分类. □

定义 7 (同余关系)**.** 设集合 A 中有等价关系 R，并带有二元运算“$\circ$”，若满足

$$aRb,\ cRd \Rightarrow (a\circ b)R(c\circ d),\quad \forall a,b,c,d\in A,$$

则称 R 是**同余关系**，相应地，a 的等价类也称为 a 的**同余类**.

定理 3. 设“$\circ$”是 A 中的二元运算，并定义“$\overline{\circ}$”：$\overline{a}\overline{\circ}\overline{c}=\overline{a\circ c}$，则“$\overline{\circ}$”是 A 中的二元运算当且仅当 R 是同余关系.

证明. 若“$\overline{\circ}$”是二元运算，则对任意 $\overline{a},\overline{c}\in A/R$，有 $\overline{a}\ \overline{\circ}\ \overline{c}\in A/R$，于是 $\overline{a\circ c}\in A/R$，设 aRb，cRd，则

$$\overline{a}\ \overline{\circ}\ \overline{c}=\overline{b}\ \overline{\circ}\ \overline{d}=\overline{b\circ d}=\overline{a\circ c},$$

故 $(a\circ c)R(b\circ d)$.

若 R 是同余关系，则对任意 aRb，cRd，有 $(a\circ c)R(b\circ d)$，进而 $\overline{a\circ c}=\overline{b\circ d}$，故 $\overline{a}\ \overline{\circ}\ \overline{c}=\overline{b}\ \overline{\circ}\ \overline{d}\in A/R$，所以“$\circ$”是二元运算. $\square$