环的同态与同构

定义 1 (同态与同构)**.** 设 R_1 和 R_2 是两个环，映射 $f:R_1\to R_2$ 满足对任意 $a,b\in R_1$，

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\qquad f(ab)=f(a)f(b),$$

则称 f 是环 R_1 到 R_2 上的**同态映射**. 若 f 是单射，则称**单同态**，若 f 是满射，则称**满同态**，这时称 R_1 和 R_2 是**同态的**，若 f 是双射，则称**同构映射**，R_1 和 R_2 是**同构的**.

定义 2 (零同态)**.** 设 f 是环 R_1 到 R_2 上的同态，若对任意 $a\in R_1$，$f(a)=0$，则称 f 是 R_1 到 R_2 的**零同态**.

定义 3 (自然同态)**.** 设 R 是环，$I\lhd R$，映射 $\pi:R\to R/I$ 是同态，称为 R 关于 I 的**自然同态**.

环的同态与同构与群的类似，很多性质可以类推.

定义 4 (核)**.** 设 f 是环 R_1 到 R_2 的同态，称 $\ker f=\{a\in R_1\mid f(a)=0\}$ 为 f 的**核**.

立即可得，零同态 f 的核 $\ker f=R_1$.

定理 1 (环同态基本定理)**.** 设 f 是环 R_1 到 R_2 的满同态，则 $R_1/\ker f\cong R_2$.

证明. 由环的定义，R_1 和 R_2 对加法构成 Abel 群，于是由群同态基本定理，存在同构 $\varphi: R_1/\ker f\to R_2$，对任意 $a+I,b+I\in R_1/\ker f$，有

$$\varphi((a+I)(b+I))=\varphi(ab+I)=f(ab)=f(a)f(b)=\varphi(a+I)\varphi(b+I),$$

于是 φ 对乘法也是同构. $\square$

定理 2 (挖补定理)**.** 设环 S,R'，$R'\cap S=\varnothing$，设 $R<S$ 使得 $R\cong R'$，则存在 $S'\cong S$，且 $R'<S'$.

证明. 设 $\varphi:R\to R'$ 是同构映射. 令 $S'=R'\cup(S\backslash R)$，设映射 $\phi:S\to S'$，满足

$$\phi(x)=\begin{cases}x, & x\in S\backslash R,\\ \varphi(x), & x\in R,\end{cases}$$

容易验证 ϕ 是双射. 定义 S' 中的加法与乘法，对任意 $x',y'\in S'$，

$$x'+y'=\phi(x+y),$$

$$x'y' = \phi(xy),$$

其中

$$x = \begin{cases} x', & x' \in S\backslash R, \\ \varphi^{-1}(x'), & x' \in R', \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} y', & y' \in S\backslash R, \\ \varphi^{-1}(y'), & y' \in R', \end{cases}$$

如此，对任意 $x, y \in S$，设 $x' = \phi(x)$，$y' = \phi(y)$，则

$$x' + y' = \phi(a + b), \qquad x'y' = \phi(ab)$$

若 $x \in R$，则 $x' = \varphi(x) \in R'$，故 $a = \varphi^{-1}(x') = x$；若 $x \in S \setminus R$，则 $x' = x$，故 $a = x$. 同理 $b = y$，于是

$$\phi(x) + \phi(y) = x' + y' = \phi(x + y),$$

$$\phi(x)\phi(y) = x'y' = \phi(xy),$$

于是 ϕ 是同构.

S' 的加法和乘法在 R' 上的限制就是 R' 的加法和乘法，于是 $R' < S'$. $\square$