商空间

定义 1 (分划). 设 X 为拓扑空间，$\mathcal{P}=\left\{M_i : M_i\cap M_j=\varnothing, i\neq j, \bigcup_{i\in I} M_i=X\right\}$ 则称 $\mathcal{P}$ 为 X 的一个**分划**.

定义 2 (商拓扑). 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个分划，Y 中的元素是 $\mathcal{P}$ 中的若干集合，定义满射 $\pi : X\to Y$，$\pi(x)=M_{i_x}\ni x$，Y 带有的拓扑是满足 π 连续的最大的拓扑. 即对任意 $O\subset Y$，O 是开集当且仅当 $\pi^{-1}(O)\subset X$ 是开集，则称 Y 带有的拓扑为**商拓扑**.

商拓扑空间 Y 就是把 X 分划后的每一类的点黏合为一个点得到的空间.

定理 1. 设 Y 为商空间，Z 为任意拓扑空间，则 $f : Y\to Z$ 连续当且仅当 $f\circ\pi : X\to Z$ 连续.

证明. 设开集 $U\subset Z$，$f^{-1}(U)$ 是开集当且仅当 $\pi^{-1}\circ f^{-1}(U)=(f\circ\pi)^{-1}(U)$ 是开集. □

定义 3 (商映射). 设 $f : X\to Y$ 是连续满射，Y 上的拓扑是满足 f 连续的最大拓扑，即 $O\subset Y$ 是开集当且仅当 $f^{-1}(O)\subset X$ 是开集，则称 f 是**商映射**.

下面推论可由1推广得到.

推论 1. 设 $f : X\to Y$ 是商映射，Z 是任意拓扑空间，则 $g : Y\to Z$ 连续当且仅当 $g\circ f : X\to Z$ 连续.

自然映射 π 是特殊的商映射，将 X 映为它的一个分划生成的商空间 Y_*.

定理 2. 设 $f : X\to Y$ 是商映射，则 Y_* 和 Y 同胚.

证明. $\{f^{-1}(y) : y\in Y\}$ 构成 X 的一个划分. 设 $h : Y_*\to Y$，$h(f^{-1}(y))=y$. 则 h 是双射，$h=\pi\circ f^{-1}$ 连续，$h^{-1}=f\circ\pi^{-1}$ 连续，于是 h 为同胚映射. □

注. 为便于理解，画出交换图如下.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, "h"] \\
 & Y_*
\end{tikzcd}
$$

定理 3. 设 $f : X\to Y$ 是连续满射，若 f 将开集映为开集，或将闭集映为闭集，则 f 是商映射.

证明. 不妨设 f 将开集映为开集,设 $U \subset Y$,$f^{-1}(U) \subset X$ 为开集当且仅当 $U = f \circ f^{-1}(U) \subset Y$ 为开集，于是 f 是商映射，闭集时也可类似证明. □

推论 2. 设连续满射 $f : X \to Y$，X 为紧空间，Y 为 Hausdorff 空间，则 f 是商映射.

证明. 只需证明 f 将闭集映为闭集. 设闭集 $C \subset X$，则 C 为紧的，$f(C)$ 为紧的，而 Y 是 Hausdorff 空间，于是 $f(C)$ 是闭的. □

定义 4. 若映射 f 将开集映为开集，则 f 称为**开映射**，若映射 g 将闭集映为闭集，则称 g 为**闭映射**.

由上可知，开或闭连续满射都是商映射，但商映射不一定是开的或闭的. 例如，存在商映射，既不是开的也不是闭的.