紧空间

定义 1 (开覆盖)**.** 设 X 为拓扑空间，若存在一族开集组成的集族 $\mathcal{F}$，使得 $\bigcup_{i\in I} O_i = X$, $O_i \in \mathcal{F}$，则称 $\mathcal{F}$ 为 X 的一个**开覆盖**.

定义 2 (子覆盖)**.** 设 $\mathcal{F}$ 是 X 的一个开覆盖，若存在 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，且 $\mathcal{F}'$ 也是 X 的一个开覆盖，则称 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 的**子覆盖**.

定义 3 (紧性)**.** 若拓扑空间 X 的任一开覆盖都包含有限子覆盖，则称 X 为**紧的**.

下面给出紧空间的若干性质.

定理 1. 紧空间在连续映射下的像仍是紧的.

证明. 不妨设连续映射 $f : X \to Y$ 是满射. 设 $\mathcal{F}$ 是 Y 的一族开覆盖，由连续映射的定义，$\{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{F}\}$ 是开集，$f^{-1}(O_i)_{i\in I}$ 给出了 X 的一个开覆盖，又 X 是紧的，故开覆盖存在有限子覆盖，记为 $\{f^{-1}(O_i),\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$，有 $\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(O_i) = X$，$f(X) = \bigcup_{i=1}^{k} O_i = Y$，于是存在 $\mathcal{F}$ 的有限子覆盖，故 Y 是紧的. $\square$

定理 2. 紧空间的任一闭子集仍是紧的.

证明. 设 X 为紧空间,$C \subset X$ 为闭集,则 $X\backslash C$ 为开集,存在 C 的一族开覆盖 $\mathcal{F} = \{O_i : i \in I\}$，$C \subset \bigcup_{i\in I} O_i$，于是 $\bigcup_{i\in I} O_i \cup (X\backslash C)$ 是 X 的一个开覆盖，而 X 是紧的，故存在有限子覆盖 $\{O_i\ (1 \leqslant i \leqslant k),\ X\backslash C\}$，于是 $O_i\ (1 \leqslant i \leqslant k)$ 是 C 的一族开覆盖，为 $\mathcal{F}$ 的有限子覆盖，故 C 是紧的. $\square$

紧空间的任一紧子集却不一定是闭的，有以下结论.

定理 3. Hausdorff 空间的紧子集是闭的.

证明. 设紧集 A 是 Hausdorff 空间 X 的子集，即证 $X\backslash A$ 为开集. 设 $x \notin A$，$z_i \in A$，则对任意开集 $V_i \ni z_i$，有 $U_i \ni x_i$ 使得 $U_i \cap V_i = \varnothing$，由于 A 为紧集，故存在正整数 k，使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i$，令 $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$，$U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$，则 $U \cap V = \varnothing$，故 $U \cap A = \varnothing$，$U \subset X\backslash A$，于是 $X\backslash A$ 为开集，A 为闭集. $\square$

同胚映射需要保证双射、连续以及逆映射连续，连续双射未必是同胚映射，在从紧空间到 Hausdorff 空间的映射却是成立的.

定理 4. 从紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射是同胚映射.

证明. 设 $f : X \to Y$，闭集 $C \subset X$，则由定理2，C 为紧集. 由定理1，$f(C)$ 为紧的，由定理3，$f(C)$ 是闭的，由连续映射等价命题，f^{-1} 连续，故 f 为同胚映射. $\square$

定理 5 (Bolzano-Weierstrass)**.** 紧空间的任一无限子集必有至少一个极限点.

证明. 设 X 为紧空间，$S \subset X$ 没有极限点，下证 S 为有限集.

对任意 $x \in X$，存在开集 $O(x)$，满足

$$O(x) \cap S = \begin{cases} \varnothing, \ x \notin S, \\ \{x\}, \ x \in S, \end{cases}$$

否则 S 有极限点. 取遍 x，可以得到一族 $O(x)$ 构成 X 的开覆盖. 由于 X 是紧的，故开覆盖存在有限子覆盖，有 $x_1, \cdots, x_k$，使得 $X \subset \bigcup_{i=1}^k O(x_i)$，而 $O(x_i)$ 至多包含 S 中的一个点，于是 S 为有限集. □

定理 6 (Heine-Borel)**.** 实数轴上任一闭区间是紧集.

证明. 对任意 $[a,b] \in \mathbb{R}$，定义它的一族开覆盖 $\mathcal{F}$. 设 $A \subset [a,b]$，以如下方式定义.

$$X = \left\{x \in [a,b] : 存在\mathcal{F}的有限子覆盖包含\,[a,x]\right\}.$$

于是 X 非空 ($a \in X$) 且有界 $x \leqslant b$，由确界原理，X 有上确界. 设 $s = \sup X$，下证 $s \in X$ 且 $s = b$.

设 $s \in O \in \mathcal{F}$，由于 O 是开集，故存在 $\varepsilon > 0$，$(s-\varepsilon, s] \subset O$，若 $s < b$，则有 $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset O$. 对任意 $\varepsilon > 0$，有 $s - \varepsilon \in X$，于是 $[a, s-\varepsilon] \subset X$，故 $[a, s-\varepsilon]$ 可被 $\mathcal{F}$ 的有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^k U_i$ 包含，又 $(s-\varepsilon, s] \subset O$，于是 $[a,s]$ 可被 $O \cup \bigcup_{i=1}^k U_i$ 包含，故 $s \in X$.

若 $s < b$，则 $s + \varepsilon/2 \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset O$，有 $s + \varepsilon/2 \in X$，这与 s 是 X 的上确界矛盾！于是 $s = b$. □

推论 1. Euclidean 空间上的有界闭集是紧集.

证明. 由两个紧空间的积空间仍为紧空间即得. □

定理 7. Euclidean 空间上的紧集是有界闭集.

证明. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$，Euclidean 空间显然是 Hausdorff 空间，由定理3，A 是闭集. 构造一列开球 $\{B(0, r_i),\ r_k = k,\ k \in \mathbb{Z}^+\}$，是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖，自然是 A 的一个开覆盖. 又 A 是紧集，故该开覆盖存在有限子覆盖，于是 r_i 有限，A 有界. □

于是，在 Euclidean 空间中，有界闭集和紧集是等价的.

定理 8. 定义在紧空间上的连续实值函数有界且能达到边界.

证明. 设 $f : X \to \mathbb{R}$，由定理1，$f(X) \subset \mathbb{R}$ 是紧的，由定理7，$f(X)$ 是有界闭集. 又闭集的性质，存在 $x_1, x_2 \in X$，$f(x_1) = \inf f(X)$，$f(x_2) = \sup f(X)$，于是函数有界且能达到边界. □

定理 9 (Lebesgue 数引理). 设 X 为紧度量空间，$\mathcal{F}$ 为 X 的一个开覆盖，则存在 $\delta > 0$(称为 Lebesgue 数)，使得对任意 $x \in X$，存在 $U \in \mathcal{F}$，$B(x,\delta) \subset U$.

证明. 反证法，设序列 $\{A_n\}$ 是 X 的一列子集，每一项都不包含于 $\mathcal{F}$ 的任一开集中，且序列的直径趋于 0. 对每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，存在 $x_n \in A_n$. 对于序列 $\{x_n\}$，要么包含有限个离散的点，存在某点无限重复出现，要么包含无限个点，由于 X 是紧的，故存在极限点.

记无限重复出现的点或极限点为 p，设 $U \in \mathcal{F}$ 是包含 p 的开集，则存在 $\varepsilon > 0$，$B(p,\varepsilon) \subset U$，存在足够大的正整数 N，使得 A_N 的直径小于 $\varepsilon/2$ 且 $x_N \in B(p,\varepsilon/2)$，于是对 $x \in A_N$，有 $d(x_N,p) < \varepsilon/2$，$d(x,x_N) < \varepsilon/2$，于是

$$d(x,p) < d(x,x_N) + d(x_N,p) < \varepsilon.$$

即 $A_N \subset U$，这与 A_n 的构造假设矛盾！ □

定义 4 (局部紧). 若拓扑空间 X 中每一点都有紧的邻域，则称 X 是**局部紧的**.

定义 5 (单点紧化).