

映射与运算

定义 1 (映射). 设集合 A, B 非空, 若 A 中的任一元素都能通过某一对应法则 f 唯一地对应到 B 中的一个元素, 则称 f 是从 A 到 B 的**映射**, 记作 $f: A \rightarrow B$. 设 $x \in A$, 则 $y \in B$, 称 y 是 x 在 f 下的**像**, 记作 $f(x)$; 称 x 是 y 在 f 下的**原像**, 记作 $f^{-1}(y)$.

定义 2 (单射). 设映射 $f: A \rightarrow B$, 对任意 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是**单射**.

不同元素在单射下的像也不同.

定义 3 (满射). 设映射 $f: A \rightarrow B$, 对任意 $y \in B$, 都存在原像 $f^{-1}(y)$, 则称 f 是**满射**.

定义 4 (双射). 若映射 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 是**双射**.

双射 $f: A \rightarrow B$ 是 A 中元素与 B 中元素的一一对应.

定义 5 (恒等映射). 设映射 $i: A \rightarrow A, i(x) = x$, 则称 i 为**恒等映射**.

定义 6 (嵌入映射). 设非空集合 $A_0 \subset A$, 映射 $f: A_0 \rightarrow A, i(x) = x$, 则称 i 是**嵌入映射**.

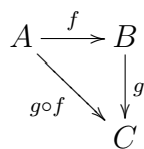
嵌入映射有扩大值域的作用.

定义 7 (开拓与限制). 设非空集合 $A_0 \subset A$, 映射 $f: A_0 \rightarrow B, g: A \rightarrow B$, 对任意 $x \in A_0$, 有 $f(x) = g(x)$, 则称 g 是 f 的**开拓**, f 是 g 的**限制**.

开拓映射有扩大定义域的作用, 限制映射有缩小定义域的作用.

定义 8 (映射的复合). 设映射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则定义复合映射: $g \circ f = g(f(x)): A \rightarrow C$.

可以用交换图表示这个过程.



定义 9 (直积). 设非空集合 A, B , 定义 A 与 B 的**直积** $A \times B = \{(a, b) \mid \forall a \in A, b \in B\}$.

定义 10 (代数运算). 设非空集合 A, B, D , 称映射 $A \times B \rightarrow D$ 为 A 与 B 到 D 的一个**代数运算**. 即对任意 $a \in A, b \in B$, 都有唯一的 $d \in D$ 满足 $f(a, b) = d$, 记作 $a \circ b = d$.

定义 11 (二元运算). 设 A 为非空集合. 代数运算 $f: A \times A \rightarrow A$ 称为**二元运算**, 简称**运算**.

在二元运算下, A 中的元素经过运算仍在 A 中, 于是二元运算满足**封闭性**.

定义 12 (结合性). 若在非空集合 A 上定义了一种运算 “ \circ ”, 对任意 $a, b, c \in A$, 都有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

则称运算 “ \circ ” 是**结合的**.

定义 13 (交换性). 若在非空集合 A 上定义了一种运算 “ \circ ”, 对任意 $a, b \in A$, 都有

$$a \circ b = b \circ a,$$

则称运算 “ \circ ” 是**交换的**.

习惯上将运算 “ \circ ” 称为乘法, 并略去不写. 要注意这里的乘法是一种抽象的运算, 与数的乘法不是一回事. 那么, 结合性可以写为 $(ab)c = a(bc)$, 交换性可以写为 $ab = ba$.

定义 14 (分配性). 若在非空集合 A 上定义了两种运算 “ \circ ” 和 “ $+$ ”, 分别称为乘法和加法, 对任意 $a, b, c \in A$, 若有

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c),$$

则称乘法对加法是**左分配的**, 若有

$$(a + b) \circ c = (a \circ c) + (b \circ c),$$

则称乘法对加法是**右分配的**. 若乘法对加法既是左分配的, 又是右分配的, 则称乘法对加法是**分配的**.

与乘法类似, 这里的加法也是一种抽象的运算, 不能简单看作数的加法.