

群的直积

定义 1 (群的扩张). 设 G, A, B 是群, 若有 $N \triangleleft G$, 使得 $A \cong N$, $B \cong G/N$, 则称群 G 是 B 过 A 的扩张. 称 N 为扩张核.

注. 群的扩张与域的扩张完全不同, 域从子域扩成扩域, 而群不一定是子群, 甚至不一定和子群同构.

定义 2 (正合序列). 设 G_1, G_2, \dots, G_n 是群, 有同态映射如下,

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n$$

且满足 $f_i(G_i) = \ker f_{i+1}$, 则称这个序列为正合序列.

注. 这里群的个数可以是有限的, 也可以是无限的.

定义 3 (短正合序列). 设 1 是 A 的幺元, $1'$ 是 B 的幺元, 则正合序列

$$\{1\} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varphi} \{1'\}$$

称为短正合序列.

注. 不难看出, λ 是单射, μ 是满射. 这是短正合序列的本质体现. 因此在书写上, 可简写为

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1$$

定理 1. 设 G, A, B 是群, 则 G 是 B 过 A 的扩张当且仅当存在短正合序列

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1$$

证明. 必要性: 设存在 $N \triangleleft G$, 使得 $A \cong N, B \cong G/N$. 设同构映射 $f: A \rightarrow N, h: G/N \rightarrow B$, 把 f 开拓到 λ , 则 λ 是单同态. 设 $\mu = h \circ \pi$, 则 μ 是满同态. 于是存在短正合序列.

充分性: 设存在短正合序列

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1$$

则 λ 是单同态, μ 是满同态. 且

$$\lambda(A) = \ker \mu \triangleleft G.$$

设 $N = \ker \mu$, 而 $\lambda: A \rightarrow \lambda(A)$ 是单同态, 又是满射, 于是 λ 是同构, $A \cong \lambda(A) = N$.

对于满同态 $\mu: G \rightarrow B$, 由同态基本定理, 有 $G/\ker \mu \cong B$, 于是 $G/N \cong B$. 因此 G 是 B 过 A 的扩张. \square

定理 2. 设 G, G', A, B 是群.

1. 若 G 是 B 过 A 的扩张, $G \cong G'$, 则 G' 也是 B 过 A 的扩张.
2. 若 G 和 G' 都是 B 过 A 的扩张, 且存在同态 $f: G \rightarrow G'$, 使下图交换, 则 f 是同构映射. 称 G 和 G' 是 B 过 A 的**等价扩张**.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\lambda} & G & \xrightarrow{\mu} & B \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow f & & \downarrow \text{id}_B \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\lambda'} & G' & \xrightarrow{\mu'} & B \longrightarrow 1 \end{array}$$

证明. 1. 由于 G 是 B 过 A 的扩张, 于是有短正合序列

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 1$$

设 $f: G \rightarrow G'$ 是同构, 则 $f \circ \lambda: A \rightarrow G'$ 是单同态, $\mu \circ f^{-1}$ 是满同态, 且 $f \circ \lambda(A) = f(\ker \mu) = \ker \mu f^{-1}$, 于是 G' 是 B 过 A 的扩张.

2. 先证 f 是单射. 只需证明 $\ker f = \{e\}$, 这里 e 是 G 的幺元, 并设 e' 是 G' 的幺元. 设 $f(x) = e'$, 下证 $x = e$.

由交换图,

$$\mu(x) = \mu' f(x) = \mu'(e') = 1,$$

于是 $x \in \ker \mu = \lambda(A)$, 存在 $a \in A$ 使 $x = \lambda(a)$, 即

$$e' = f(x) = f\lambda(a) = \lambda'(a),$$

又 λ 是单射, 于是 $a = 1$, $x = \lambda(1) = e$.

再证 f 是满射. 对任意 $x' \in G'$, 由 μ 是满射, $\mu(G) = B$, 则存在 $x \in G$, 使得 $\mu(x) = \mu'(x')$. 即

$$\mu' f(x) = \mu'(x'),$$

于是

$$\mu' (x' [f(x)]^{-1}) = \mu'(e') = 1,$$

即

$$x' f(x)^{-1} \in \ker \mu' = \lambda'(A) = f\lambda(A) \subset f(G),$$

于是 $x' \in f(G)f(x) \subset f(G)$. □

注. 1 的证明中, 用了两次扩张的充要条件, 即定理 1. 对于 $f(\ker \mu) = \ker \mu f^{-1}$, 可以由核的定义以及集合的包含关系证得.

定义 4 (内直积). 设 G 是 B 过 A 的扩张, N 为扩张核, 若存在 $H < G$, 使得 $H \cap N = \{e\}$ 且 $G = HN$, 则称此扩张为**非本质扩张**, G 称为 N 与 H 的**半直积**, 记作 $G = H \ltimes N$. 进一步, 若 $H \triangleleft G$, 则称这种扩张为**平凡扩张**, G 是 N 与 H 的**内直积**, 记作 $G = H \otimes N$.

注. 对非本质扩张, 有 $B \cong H$. 因为

$$B \cong G/N = HN/N \cong H/(H \cap N) = H/\{e\} \cong H.$$

例 1. 设 $G = (\mathbb{Z}, +)$, $A = N = 2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$, $B = G/N = \mathbb{Z}_2$, 则 G 是 B 过 A 的扩张. 由于不存在子群 $H \cong B = \mathbb{Z}_2$, 于是这个扩张不是非本质扩张.

定理 3. 设 $A < G$, $B < G$, 则

1. $G = AB$ 且 $A \cap B = \{e\}$ 当且仅当对任意 $g \in G$, 存在唯一 $a \in A, b \in B$ 使得 $g = ab$.
2. 若 $G = AB$ 且 $A \cap B = \{e\}$, 则 A, B 都是 G 的正规子群的充要条件为对任意 $a \in A, b \in B, ab = ba$. 此时 $G = A \otimes B$.

证明. 1. 必要性: 由 $G = AB$, 对任意 $g \in G$, 存在 $a \in A, b \in B$ 使得 $g = ab$, 假设另有 $a' \in A, b' \in B$ 使得 $g = a'b'$, 则 $ab = a'b'$, $bb'^{-1} = a^{-1}a' = e$, 于是 $a = a', b = b'$.

充分性: 若对任意 $g \in G$, 存在唯一 $a \in A, b \in B$ 使得 $g = ab$, 则 $G = AB$. 若 $c \in A \cap B$, 则 $c = ec = ce$, 于是 $c = e$.

2. 必要性: 若 $A \triangleleft G$, 则 $bab^{-1} \in A$, 于是 $a^{-1}bab^{-1} \in A$. 又 $B \triangleleft G$, 则 $a^{-1}ba \in B$, 于是 $a^{-1}bab^{-1} \in B$, 故 $a^{-1}bab^{-1} \in A \cap B$. 于是 $a^{-1}bab^{-1} = e$, $ba = ab$.

充分性: 若对任意 $a \in A, b \in B$ 有 $ab = ba$, 由于 $G = AB$, 对任意 $g \in G$, 存在 $a \in A, b \in B$ 使得 $g = ab$, 于是对任意 $a_0 \in A$,

$$ga_0g^{-1} = aba_0b^{-1}a^{-1} = aa_0bb^{-1}a^{-1} = aa_0a^{-1} \in A,$$

于是 $A \triangleleft G$, 同理 $B \triangleleft G$. □

可以将内直积的概念推广到多个正规子群的情况.

定义 5. 设 N_1, N_2, \dots, N_k 是 G 的正规子群. 若 G 中任意元素分解为 N_i 中元素的乘积是唯一的, 则称 G 是 N_1, N_2, \dots, N_k 的**内直积**, 记作

$$G = N_1 \otimes N_2 \otimes \dots \otimes N_k = \bigotimes_{i=1}^k N_i.$$

以上讨论了一个群的内直积分解, 下面说明两个群的内直积总是存在且唯一.

定义 6 (外直积). 设 A, B 是两个群, 定义集合 $G = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, 定义 G 中元素的运算 $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$. 则可验证 G 关于上述运算构成群, 称为 A 和 B 的**外直积**, 记作 $G = A \times B$.

定理 4. 设 A 和 B 是两个群, 则一定存在 B 过 A 的平凡扩张 G , 且 G 在同构意义下唯一.

证明. 设 $G = A \times B$, 则 G 是群. 记 $A' = \{(a, 1') \mid a \in A\}$, $B' = \{(1, b) \mid b \in B\}$, 则可证 $A' \triangleleft G$, $B' \triangleleft G$, 且 $G = A'B'$, $A' \cap B' = \{(1, 1')\}$.

由内直积定义, $G = A' \otimes B' = B' \otimes A'$. 则 G 是 B' 过 A' 的平凡扩张. 容易在 A 和 A' , B 和 B' 建立同构, 即 $A \rightarrow A', a \mapsto (a, 1')$, $B \rightarrow B', b \mapsto (1, b)$, 故 G 是 B 过 A 的平凡扩张.

设 G_1 也是 B 过 A 的平凡扩张. 则有 $A_1 \triangleleft G_1$, $B_1 \triangleleft G_1$, $G_1 = A_1B_1$, $A_1 \cap B_1 = \{e'\}$, 且 $A \cong A_1$, $B \cong B_1$. 下证 $G \cong G_1$.

设 $f_1 : A \rightarrow A_1, a \mapsto a_1$, $f_2 : B \rightarrow B_1, b \mapsto b_1$ 是两个同构映射. 令 $f : G \rightarrow G_1, (a, b) \mapsto f_1(a)f_2(b)$. 下证 f 是同构.

因为 f_1 和 f_2 都是满射, 于是对任意 $f_1(a)$ 和 $f_2(b)$ 都有原像 a 和 b . 于是 f 是满射.

假设 $f_1(a')f_2(b') = f_1(a)f_2(b)$, 由于 G_1 是平凡扩张, 因此分解是唯一的. $f_1(a') = f_1(a)$, $f_2(b') = f_2(b)$. 又因为 f_1 和 f_2 是单射, 于是 $a' = a, b' = b$, $(a, b) = (a', b')$.

而

$$\begin{aligned} f((a, b)(a', b')) &= f((aa', bb')) = f_1(aa')f_2(bb') = f_1(a)f_1(a')f_2(b)f_2(b') \\ &= f_1(a)f_2(b)f_1(a')f_2(b') = f((a, b))f((a', b')), \end{aligned}$$

于是 f 是同构映射. □

注. 外直积 $G = G_1 \times G_2$ 中, G_1 和 G_2 一般不是 G 的子群, 但是存在某个同构关系, 使得 G_1, G_2 分别和 G 的两个子群同构. 而在内直积 $G = H \otimes N$ 中, H 和 N 都是 G 的正规子群. 内直积和外直积在本质上是一致的.