拓扑空间

拓扑无需保距，研究形状的连续变形性质. 首先定义拓扑空间.

定义 1 (拓扑空间). 设 X 是一非空集合，集类 $\mathcal{T}\subset 2^X$，满足以下条件：

1. $\varnothing,\ X\in\mathcal{T}$;
2. 对任意并封闭：$\forall U_a\in\mathcal{T}, a\in I$，则 $\bigcup_{a\in I}U_a\in\mathcal{T}$;
3. 对有限交封闭：$\bigcap_{a=1}^{n}U_a\in\mathcal{T}$.

则称 $(X,\mathcal{T})$ 为一个**拓扑空间**，$\mathcal{T}$ 为集合 X 上的**拓扑**. $\mathcal{T}$ 中的元素 U_a 称为**开集**.

定义 2. 2^X 是 X 上最大的拓扑，称为**离散拓扑**.

定义 3. $\{\varnothing\ ,X\}$ 是 X 上最小的拓扑，称为**平凡拓扑**.

有了开集的定义，自然地定义它的补集为闭集.

定义 4 (闭集). 对 X 的子集 A，若 $X\backslash A$ 为开集，则称 A 为**闭集**.

定义 5 (邻域). 设 $x\in X$，如果集合 $N\subset X$ 满足：存在开集 U，使得 $x\in U\subset N$，则称 N 为 x 的**邻域**，称 $N\backslash\{x\}$ 为 x 的**去心邻域**.

定义 6 (内核). A 中包含的所有开集的并称为 A 的内核，记作 $\mathring{A}$.

定理 1. A 是开集当且仅当 $A=\mathring{A}$.

证明. 设 A 是开集，$\forall x\in A$，$\exists U_a\in A$，使得 $x\in U_a\subset\mathring{A}$，于是 $A\subset\mathring{A}$；$\mathring{A}=\bigcup_{a\in I}U_a$, $U_a\in A$，因此 $\mathring{A}\subset A$. 故 $A=\mathring{A}$.

反之，设 $A=\mathring{A}=\bigcup_{a\in I}U_a$，由拓扑空间定义，开集的任意并仍为开集，即 A 为开集. □

定义 7 (极限点). 设 $x\in X$，$A\subset X$. 若 x 的任一去心邻域中均有至少一点属于 A，即包含 x 的任一开集 U 中，有

$$(U\backslash\{x\})\cap A\neq\varnothing,$$

则称 x 为 A 的**极限点**，又称**聚点**.

定理 2. A 是闭集当且仅当 A 包含了它的全部极限点.

证明. 设 A 是闭集，则 $X\backslash A$ 是开集，由于开集是它的任意元素的邻域，于是 $X\backslash A$ 的任一点都不是 A 的极限点，于是 A 包含了它的全部极限点.

反之，设 A 包含了它的全部极限点，则对任意 $x \in X\backslash A$，总存在 x 的邻域 N 使得 $N \cap A = \varnothing$，于是 $N \subset X\backslash A$，故 $X\backslash A$ 是它的任意元素的邻域，故 $X\backslash A$ 为开集，A 为闭集. □

定义 8 (导集)**.** A 的极限点的集合称为 A 的**导集**，记作 A'.

定义 9 (闭包)**.** A 中的元素和它的极限点组成的集合，即 A 本身和 A 的导集的并集，称为 A 的**闭包**，记作 $\overline{A}$.

由定义立即有 $\overline{A} = A \cup A'$.

定理 3. *A 的闭包是包含 A 的最小闭集.*

证明. 对 $\forall x \in X\backslash\overline{A}$，存在 x 的开邻域 U 不包含 A 的极限点，于是 $x \in U \subset X\backslash\overline{A}$，于是 $X\backslash\overline{A}$ 是开集，故 $\overline{A}$ 是闭集.

对任意闭集 $B \supset A$，由定理2，B 包含 A 的全部极限点以及 B 的极限点，于是 $\overline{A} \subset B$. 故 A 的闭包是包含 A 的最小闭集. □

注. *该定理也就是说，A 的闭包是包含 A 的全体闭集的交.*

推论 1. *A 是闭集当且仅当 $A = \overline{A}$.*

定义 10 (稠密性)**.** 设 X 为拓扑空间,$A \subset X$,若 $\overline{A} = X$,即对任意 $x \in U \subset X$,$U\backslash\{x\} \cap A \neq \varnothing$，则称 A 是**稠密的**.

定义 11 (边界)**.** A 的闭包与 $X\backslash A$ 的交称为 A 的边界，记作 ∂A.

用数学语言描述，即 $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X\backslash A}$.

定义 12 (拓扑子空间)**.** 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$Y \subset X$，定义 Y 上的子空间拓扑：

$$\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y | O \in \mathcal{T}\}.$$

称 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 为 X 的**拓扑子空间**.

定义 13 (有限补拓扑)**.** 设集合 $X = \mathbb{R}$，赋予**有限补拓扑**，对任意开集 $U \subset \mathbb{R}$，$X\backslash U$ 是有限的或者为整个空间 X.

对任一无限集 $A \subset X$，X 中的任意元素 x 都是 A 的极限点. 反之，在这一拓扑下，有限集没有极限点.

定义 14 (拓扑基)**.** 设拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$，若一族开集 β 通过任意的一些并可以得到 X 中的任一开集，则称 β 为**拓扑基**，β 中的元素称为**基础开集**，也称 $\mathcal{T}$ 为 β **生成的拓扑**.

等价地，我们可以说对任意 $x \in X$ 及其邻域为 N，都存在开集 $O \subset \beta$，使得 $x \in O \subset N$.

定理 4. 设 β 是 X 的一个非空子集族，若 β 中元素的有限交仍在 β 中，$\bigcup \beta \in \beta$，则 β 给出 X 上的拓扑，且为其拓扑基.

证明. 设 $U, V \in \beta$，令

$$\mathcal{T} = \left\{ U = \bigcup_{V \in \beta'} V \,\middle|\, \beta' \subset \beta \right\},$$

下面证明 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑.

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{T}$. 令 $\beta' = \varnothing$，有 $\varnothing = \bigcup_{V \in \beta'} V \in \mathcal{T}$. 令 $\beta' = X$，有 $X = \bigcup_{V \in \beta'} V \in \mathcal{T}$.
2. 设 $U_a \in \mathcal{T},\ a \in I$. 设 $U_a = \bigcup_{V \in \beta_a} V$，其中 $\beta_a \subset \beta$. 则
$$\bigcup_{a \in I} U_a = \bigcup_{a \in I} \left(\bigcup_{V \in \beta_a} V \right) = \bigcup_{V \in \beta_a, a \in I} V = \bigcup_{V \in \bigcup_{a \in I} \beta_a} V \in \mathcal{T}.$$
3. 设 $U_1 = \bigcup_{V \in \beta_1} V$，$U_2 = \bigcup_{V \in \beta_2} V$，这里 $\beta_1, \beta_2 \in \beta$. 有
$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{V_1 \in \beta_1, V_2 \in \beta_2} V_1 \cap V_2.$$
对任意 $x \in V_1 \cap V_2$，存在 $W_x \in \beta$，使得 $X \in W_x \subset V_1 \cap V_2$. 于是有
$$V_1 \cap V_2 \subset \bigcup_{x \in V_1 \cap V_2} W_x \subset V_1 \cap V_2,$$
于是
$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{x \in V_1 \cap V_2} W_x \in \mathcal{T}.$$

所以 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑，并且由 $\mathcal{T}$ 的构造，β 是 $\mathcal{T}$ 的拓扑基. $\square$