群的同态与同构

定义 1 (同态映射)**.** 设群 $(G_1,\circ),(G_2,*)$ 之间存在映射 $f:G_1\to G_2$，若对任意 $g_1,g_2\in G_1$，有 $f(g_1\circ g_2)=f(g_1)*f(g_2)$，则称 f 为**同态映射**. 符号不至于混淆时，常记作 $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$.

如果 f 是单射，则称为**单同态**；如果 f 是满射，则称为**满同态**. 若 $f:G_1\to G_2$ 是满同态，则称 G_1 和 G_2 是**同态的**.

定义 2 (同构)**.** 若同态映射 $f:G_1\to G_2$ 是双射，则称 f 是**同构映射**，G_1 和 G_2 是**同构的**，记作 $G_1\cong G_2$.

注. 容易验证，同构是等价关系.

定义 3 (自然同态)**.** 设 $H\lhd G$，映射 $\pi:G\to G/H, g\mapsto gH$ 是同态映射，称为**自然同态**.

性质 1. 设同态映射 $f:G_1\to G_2$，$g:G_2\to G_3$，则 $gf:G_1\to G_3$ 也是同态映射.

性质 2. 幺元同态到幺元，逆元同态到逆元，子群同态到子群.

定义 4 (核)**.** 设同态映射 $f:G_1\to G_2$，$e_1\in G_1$，$e_2\in G_2$ 是幺元，G_2 的幺元 e_2 的完全原像 $\{a\in G_1\mid f(a)=e_2\}$ 称为同态映射 f 的**核**，记作 $\ker f$.

例 1. 若 f 是单同态，则 $\ker f=\{e_1\}$.

命题 1. 若 $H\lhd G$，$\pi:G\to G/H$，则 $\ker\pi=H$.

命题 2. 设同态映射 $f:G_1\to G_2$，则 $\ker f\lhd G_1$.

证明. 对任意 $g\in G_1$，$a\in\ker f$，

$$f(gag^{-1})=f(g)f(a)f(g^{-1})=f(g)f(g^{-1})=f(gg^{-1})=f(e_1)=e_2,$$

于是 $gag^{-1}\in\ker f$. 由正规子群定义得 $\ker f\lhd G_1$. □

定理 1 (群同态基本定理)**.** 设满同态 $f:G_1\to G_2$，则 $G_1/\ker f\cong G_2$.

证明. 记 $N=\ker f\lhd G_1$，设 $\varphi:G_1/N\to G_2,\ gN\mapsto f(g)$. 若 $g_1N=g_2N$，则 $g_1^{-1}g_2\in N$，$f(g_1^{-1}g_2)=f(g_1)^{-1}f(g_2)=e_2$，于是 $f(g_1)=f(g_2)$. 这表明 g_N 在 φ 下的像是唯一的，所以 φ 是映射.

若 $f(g_1)=f(g_2)$，则 $e_2=f(g_1)^{-1}f(g_2)=f(g_1^{-1}g_2)$，于是 $g_1^{-1}g_2\in N$，$g_1N=g_2N$，因此 φ 是单射.

由于 f 是满射，因此 φ 是满射，故 φ 是双射.

对任意 $aN,bN\in G/N$，由于 f 是同态，有

$$\varphi(aNbN)=\varphi(abN)=f(ab)=f(a)f(b)=\varphi(aN)\varphi(bN).$$

因此 φ 是同构映射，故 $G_1/\ker f\cong G_2$. □

推论 1 (第一同构定理)**.** 设 f 是群 G 的同态，则 $G/\ker f \cong f(G)$.

定理 2 (第二同构定理)**.** 若 $H < G$，$N \lhd G$，则 $H \cap N \lhd H$ 且

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

证明. 令 $\varphi : H \to HN/N,\ h \mapsto hN$，显然 φ 是映射. 对任意 $hnN \in HN/N$，由于 $hnN = hN$，有

$$\varphi(h) = hN = hnN,$$

故 φ 是满射. 对任意 $h_1, h_2 \in H$，

$$\varphi(h_1h_2) = h_1h_2N = h_1Nh_2N = \varphi(h_1)\varphi(h_2),$$

故 φ 是同态. 而

$$\ker\varphi = \{h \in H \mid \varphi(h) = hN = e_2 = N\} = \{h \in H \mid h \in N\} = H \cap N,$$

由同态基本定理，有

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

□

定理 3 (第三同构定理)**.** 若 $H \lhd G$，$N \lhd G$，$N \subset H$，则

$$G/H \cong (G/N)/(H/N).$$

证明. 由 $H \lhd G$，$N \lhd G$ 以及 $N \subset H$，有 $N \lhd H$，且 $H/N \lhd G/N$.

设 $\pi : G \to G/N,\ g \mapsto gN$ 以及 $\psi : G/N \to (G/N)/(H/N),\ gN \mapsto (gN)(H/N)$，则 $\varphi = \psi \circ \pi : G \to (G/N)/(H/N)$ 是群同态.

由于 π，ψ 是满射，故 φ 是满射. 又

$$\ker\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = H/N\},$$

$$\varphi(g) = \psi(\pi(g)) = (gN)(H/N),$$

$$(gN)(H/N) = H/N \iff gN = H/N \iff g \in H,$$

故 $\ker\varphi = G \cap H = H$，由群同态基本定理，

$$G/H \cong (G/N)/(H/N).$$

□