可解群与幂零群

定义 1 (换位子)**.** 设 $g_1, g_2 \in G$，称

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$$

为 g_1 和 g_2 的**换位子**.

可见，换位子的作用是换位，即 $g_2 g_1 [g_1, g_2] = g_1 g_2$. 且有

$$[g_1, g_2] [g_2, g_1] = e.$$

即 $[g_2, g_1] = [g_1, g_2]^{-1}$.

定义 2 (换位子群)**.** 设 $H < G$，$K < G$，称

$$[H, K] = \langle \{[h, k] \mid h \in H, k \in K\} \rangle$$

为 H 和 K 的**换位子群**.

可见，$[H, K] = [K, H]$.

性质 1. 设 $\alpha : G \to G_1$ 是同态，则

1. 对任意 $g_1, g_2 \in G$，$\alpha([g_1, g_2]) = [\alpha(g_1), \alpha(g_2)]$.
2. 对任意 $H < G$，$K < G$，$\alpha([H, K]) = [\alpha(H), \alpha(K)]$.

引理 1. 设 $H < G$，$K < G$，则

1. $[H, K] = \{1\} \iff H \subset C_G(K)$;
2. $[H, K] \subset K \iff H \subset N_G(K)$;
3. 若 $H \lhd G$，$G \lhd G$，则 $[H, K] \lhd G$ 且 $[H, K] \subset H \cap K$;
4. 若 $H_1 < H$，$K_1 < K$，则 $[H_1, K_1] < [H, K]$.

推论 1. 设 $H < G$，$K < G$，则

1. G 是交换群当且仅当 $[G, G] = \{1\}$;
2. $K \lhd G \iff [K, K] \lhd G$;
3. $[G, G] \lhd G$.

定义 3 (正规列). 设群 G 的幺元为 1，它的子群 G_i 有如下排列

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_t \supset G_{t+1} = \{1\},$$

且 $G_i \lhd G_{i-1}, 2 \leqslant i \leqslant t+1$，则称这个序列为**次正规列**. 若还有 $G_i \lhd G$，则称这个序列为**正规列**. 上述序列中有 t 个包含号，所以称序列的长度为 t. 称 G_i/G_{i-1} 为次正规序列的**因子**.

定义 4 (因子列). 次正规序列

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_t \supset G_{t+1} = \{1\}$$

的因子

$$G_1/G_2, G_2/G_3, \cdots, G_t/G_{t+1}$$

称为次正规序列的**因子列**.

注. *因子列没有包含关系.*

定义 5 (加细). 设有两个次正规序列

$$G = G'_1 \supset G'_2 \supset \cdots \supset G'_r \supset G'_{r+1} = \{1\},$$

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_t \supset G_{t+1} = \{1\},$$

若对任意 G'_i，都有 $G_j = G'_i$，则称后者是前者作为次正规序列的**加细**.

注. *正规序列的加细也有类似的定义. 若正规序列加细后仍是正规序列，则称后者是前者作为正规序列的加细. 但是，若正规序列加细后不再是正规序列，则把这个正规序列看作次正规序列，后者是前者作为次正规序列的加细.*

定义 6 (导出列). 定义 $G^{(0)} = G$，$G^{(i)} = \left[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}\right], i \geqslant 1$，称序列

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \cdots$$

为 G 的**导出列**.

定义 7 (降中心列). 定义 $\varGamma_1(G) = G$，$\varGamma_i(G) = [G, \varGamma_{i-1}(G)], i \geqslant 2$，称序列

$$G = \varGamma_1(G) \supset \varGamma_2(G) \supset \cdots$$

为 G 的**降中心列**.

定义 8 (升中心列). 定义 $C_0(G) = \{1\}$，$C_i(G)/C_{i-1}(G) = C(G/C_{i-1}(G)), i \geqslant 1$，称序列

$$\{1\} = C_0(G) \subset C_1(G) \subset C_2(G) \subset \cdots$$

为 G 的**升中心列**.

注. *$C_i(G)$ 是存在的，可以写成显性表达式.*

定义 9 (可解群，幂零群). 设 G 是群，若有 k，使 $G^{(k)} = \{1\}$，则称 G 是**可解群**. 若有 k，使 $\varGamma_k(G) = \{1\}$，则称 G 是**幂零群**.