群作用

定义 1 (群作用)**.** 设 G 是群，X 是非空集合. 定义映射 $G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto g \cdot x$，若满足

1. 幺元：$e \cdot x = x$;
2. 兼容性：对任意 $g_1, g_2 \in G$，$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$,

则称映射 “$\cdot$” 为 G 在 X 上的一个**作用**.

群作用由公理化的定义有些抽象，下面建立群作用和置换之间的联系，也可看作是群作用的另一种定义.

定理 1. 设 G 是群，X 是非空集合，映射 $\varphi : G \to S_X,\ g \mapsto \varphi_g$. 则 φ 是同态当且仅当 φ 给出了一个群 G 在集合 X 上的群作用.

证明. 必要性：定义映射 $\cdot : G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto \varphi_g(x)$，这里 $\varphi_g \in S_X$ 是同态. 下面证明 “$\cdot$” 是群作用.

对任意 $g \in G$，$e \in G$ 是幺元，则

$$\varphi_{ge} = \varphi_g \varphi_e = \varphi_g,$$

于是 $\varphi_e = \mathrm{id}$. 则对任意 $x \in X$，

$$e \cdot x = \varphi_e(x) = \mathrm{id}(x) = x.$$

对任意 $g_1, g_2 \in G$，有

$$(g_1 g_2) \cdot x = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2}(x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

于是 “$\cdot$” 是群作用.

充分性：定义映射 $\varphi_g : X \to X,\ \varphi_g(x) \mapsto g \cdot x$，先证明 φ_g 是置换.

对任意 $x_1, x_2 \in X$，若 $\varphi_g(x_1) = \varphi_g(x_2)$，则 $g \cdot x_1 = g \cdot x_2$，用 g^{-1} 作用，得

$$g^{-1} \cdot (g \cdot x_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot x_2),$$

由兼容性公理得 $x_1 = x_2$，故 φ_g 是单射.

而 $\varphi_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = e \cdot x = x$，故对所有 $x \in X$，都存在原像 $g^{-1} \cdot x$，于是 φ_g 是满射.

因此 φ_g 是置换. 定义映射 $\varphi : G \to S_X,\ g \mapsto \varphi_g$，下面证明 φ 是同态.

对任意 $g_1, g_2 \in G$，任意 $x \in X$，有

$$\varphi_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = \varphi_{g_1} \cdot (\varphi_{g_2}(x)) = \varphi_{g_1} \varphi_{g_2}(x),$$

于是 φ 是同态. □

定义 2 (轨道)**.** 设 G 是群，X 是非空集合. 对任意给定的 $x \in X$，称集合 $\{g \cdot x \mid \forall g \in G\}$ 为 x 的**轨道**，记作 $\mathrm{Orb}(x)$.

轨道就是在群 G 的作用下，x 所能到达的所有取值的集合.

定义 3 (稳定化子)**.** 设 G 是群，X 是非空集合. 对任意给定的 $x \in X$，集合 $\{g \mid g \cdot x = x\}$ 关于群 G 的运算构成群，称为 x 的**稳定化子**或**迷向子群**，记作 $\mathrm{Stab}(x)$.

也就是说，群 G 中有一些元素，作用在 x 上，得到的还是 x 自身. 例如 $e \in G$，$e \cdot x = x$. 下面证明 $\mathrm{Stab}(x) < G$.

证明. 已知 $\mathrm{Stab}(x) \subset G$. 对任意 $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}(x)$，

$$e \cdot x = (g_2^{-1} g_2) \cdot x = g_2^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) = g_2^{-1} \cdot x = x.$$

于是

$$(g_1 g_2^{-1}) \cdot x = g_1 \cdot (g_2^{-1} \cdot x) = g_1 \cdot x = x.$$

故 $g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$，由子群的充要条件，$\mathrm{Stab}(x) < G$. □

定义 4 (齐性空间)**.** 若群 G 作用在集合 X 上，对任意 $x, y \in X$，都有 $g \in G$ 满足 $g \cdot x = y$，则称这个作用是**可传递**的或**可迁**的，集合 X 称为**齐性空间**.

定义 5. 若对任意 $x \in X$，$\mathrm{Stab}(x) = e$，则称 G 的作用是**自由的**.

定义 6. 若对任意 $g \neq e$，存在 $x \in X$ 使得 $g \cdot x \neq x$，则称 G 的作用是**忠实的**或**有效的**.

定义 7. 若对任意 $g \in G$，$x \in X$，都有 $g \cdot x = x$，则称 G 的作用是**平凡的**.

定理 2 (轨道-稳定化子定理)**.** 设 $G/\mathrm{Stab}(x)$ 是 G 关于 $\mathrm{Stab}(x)$ 的左陪集空间，则存在双射 $\varphi : \mathrm{Orb}(x) \to G/\mathrm{Stab}(x)$. 特别地，当 G 是有限群时，有 $|G| = |\mathrm{Orb}(x)||\mathrm{Stab}(x)|$.

证明. 设 $\varphi : \mathrm{Orb}(x) \to G/\mathrm{Stab}(x)$, $g \cdot x \mapsto g\mathrm{Stab}(x)$. 设 $g \cdot x = h \cdot x$，则 $(h^{-1}g) \cdot x = x$，于是 $h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x)$，$h\mathrm{Stab}(x) = g\mathrm{Stab}(x)$，所以 φ 是映射.

对于任一 $g\mathrm{Stab}(x)$，都有原像 $g \cdot x$，故 φ 是满射.

对任意 $g_1 \cdot x, g_2 \cdot x \in \mathrm{Orb}(x)$，若 $\varphi(g_1 \cdot x) = \varphi(g_2 \cdot x)$，则 $g_1\mathrm{Stab}(x) = g_2\mathrm{Stab}(x)$，$g_2^{-1} g_1 \in \mathrm{Stab}(x)$，于是 $g_2^{-1} g_1 \cdot x = x$，于是 $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$，$\varphi$ 是单射.

于是 φ 是双射，有 $|\mathrm{Orb}(x)| = |G\mathrm{Stab}(x)| = [G : \mathrm{Stab}(x)]$. 特别地，当 G 有限时，由 Lagrange 定理，有 $|G| = |\mathrm{Orb}(x)||\mathrm{Stab}(x)|$. □