连通性

定义 1 (连通性)**.** 设 X 为拓扑空间，若对任意非空集合 A，B 满足 $A \cup B = X$，有 $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ 或 $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$，则称 X 是**连通的**.

定理 1. 实数轴是连通空间.

证明. 设 $\mathbb{R} = A \cup B$ 且 $A \cap B = \varnothing$. 存在 $a \in A$，$b \in B$，不失一般性，设 $X = \{a \in A : a < b\}$，令 $s = \sup X$.

若 $s \in X$，则对任意 $s < x < b$，$x \notin A$，则 $x \in B$，对任意 $\varepsilon > 0$，都有 $x \in (s, b)$ 使得 $|x - s| < \varepsilon$，故 s 是 B 的极限点，$s \in \overline{B}$，于是 $A \cap \overline{B} \neq \varepsilon$.

若 $s \notin X$，则对任意小的 $\varepsilon > 0$，都有 $a \in A$ 使得 $a > s - \varepsilon$，则 s 是 A 的极限点，故 $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$. □

定理 2. 实数轴的非空子集是连通的当且仅当这个子集是区间.

证明. 区间的连通性是平凡的. 下面假设 $X \subset \mathbb{R}$ 不是区间，则存在 $a, b \in X$，$p \notin X$ 满足 $a < p < b$，设 $A = \{a \in X : a < p\}$，$B = X \backslash A = \{b \in X : b > p\}$，则 $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$，推出 X 是不连通的. 于是实数轴的连通非空子集是区间. □

连通性也可以由其他命题刻画，有以下定理.

定理 3. 下列命题是等价的.

1. X 是连通的；
2. X 的既开又闭的子集只有 X 和 $\varnothing$；
3. X 不能表示成两个非空不交开集的并；
4. 不存在从 X 到多于一个点的离散空间的连续满射.

证明. $1 \to 2$: 假设既开又闭的 $A \subset X$，则 $B = X \backslash A$ 也是既开又闭的. 于是 $\overline{A} = A$，$\overline{B} = B$，

$$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = A \cap B = \varnothing,$$

而 X 是连通的，所以 A 和 B 必有一者为空集，另一者为 X.

$2 \to 3$: 假设 $X = U \cup V$，U, V 是开集且 $U \cap V = \varnothing$. 则 $U = X \backslash V$, $V = X \backslash U$，开集的补集是闭的，于是 U, V 是既开又闭的，所以 U 和 V 必有一者为空集.

$3 \to 4$: 假设离散空间中存在两个点 a，b，则 $f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b) = X$，$f^{-1}(a) \cap f^{-1}(b) = \varnothing$，且 $f^{-1}(a)$ 和 $f^{-1}(b)$ 都是非空开集，这与 3 矛盾.

$4\to 1$：如果 X 是不连通的，则存在 $A\cup B=X$ 使得 $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=A\cap B=\varnothing$，注意到 A，B 是不交开集. 于是令

$$f=\begin{cases}1,\ x\in A,\\ -1,\ x\in B,\end{cases}$$

则 f 是从 X 到 $\{1,-1\}$ 的连续满射. 由逆否命题的等价性得证. □

可以发现，空集 $\varnothing$ 也符合命题 2，于是约定空集也是连通的.

定理 4. 连通空间在连续映射下的像是连通的.

证明. 设 $f:X\to Y$ 是连续满射，且 X 是连通的. 设任意 $A\subset Y$ 既开又闭，则 $f^{-1}(A)$ 既开又闭，由于 X 的连通性，$f^{-1}(A)=\varnothing$ 或 X，于是 $A=\varnothing$ 或 Y，则 Y 是连通的. □

推论 1. 若 X 和 Y 同胚，则 X 连通当且仅当 Y 连通.

例 1. 利用连通性证明介值定理.

证明. 设连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$f(a)<0$，$f(b)>0$，则由定理2得，$[a,b]$ 是连通的，$\mathrm{Im}([a,b])$ 是连通的，于是 $[f(a),f(b)]$ 是区间，故存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=0$. □

定理 5. 令 X 为拓扑空间，若 $Z\subset X$ 是连通的，且 Z 在 X 中稠密，则 X 是连通的.

证明. 设 $A\subset X$ 既开又闭，由于 Z 是稠密的，于是 $A\cap Z\neq\varnothing$，于是 $A\cap Z\subset Z$ 是既开又闭的，Z 是连通的，于是 $A\cap Z=Z$，于是 $Z\subset A$，于是 $X=\overline{Z}\subset\overline{A}=A\subset X$，故 $A=X$，X 是连通的. □

推论 2. 若 Z 是 X 的连通子空间，对于 Y 满足 $Z\subset Y\subset\overline{Z}$，则 Y 是连通的. 特别地，$\overline{Z}$ 也是连通的.

证明. Z 在 Y 中的闭包为 $\overline{Z}\cap Y=Y$，则 Z 在 Y 中稠密，于是 Y 是连通的. □

定理 6. 设 $\mathcal{F}=\{M_i:\bigcup_{i\in I}M_i=X\}$ 是 X 的若干子集组成的集合，若 M_i 都是连通的，且 $\overline{M_i}\cap\overline{M_j}\neq\varnothing$, $i,j\in I$，则 X 是连通的.

证明. 设 $A\subset X$ 既开又闭，则对任意 $M_i\in\mathcal{F}$，$A\cap M_i$ 也是既开又闭的. 对任意 M_i，若 $A\cap M_i=\varnothing$，则 $A\cap\left(\bigcup_{i\in I}M_i\right)=A\cap X=\varnothing$，$A=\varnothing$.

若对某些 M_i，$A\cap M_i\neq\varnothing$ 既开又闭，且 M_i 为连通的，于是 $A\cap M_i=M_i$，$M_i\subset A$，$\overline{M_i}\subset\overline{A}$.

假设存在 M_j，使得 $A\cap M_j=\varnothing$，则 $M_j\subset X\backslash A$，于是 $\overline{M_j}\subset\overline{X\backslash A}=X\backslash A=X\backslash\overline{A}$.

而 $\overline{A}\cup\left(X\backslash\overline{A}\right)=\varnothing$，于是 $\overline{M_i}\cap\overline{M_j}=\varnothing$ 与题意不符. 于是对所有的 M_i，只要存在 M_{i_0} 使得 $M_{i_0}\cap A\neq\varnothing$，则任意 $M_i\in\mathcal{F}$，都有 $M_i\cap A\neq\varnothing$，则 $M_i\subset A$. 故

$$X=\bigcup_{i\in I}M_i\subset A\subset X,$$

故 $A=X$. □

定义 2. 设 $A, B \subset X$，若 $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$，则称 A 和 B 是**相互隔离的**.

定理 7. 若 X 和 Y 都是连通的，则 $X \times Y$ 也连通.

证明. 由于 $\{x\} \times Y$ 与 Y 同胚，于是 $\{x\} \times Y$ 是连通的. 同理，$X \times \{y\}$ 也是连通的，且与 $\{x\} \times Y$ 交于 (x, y). 由定理6，$Z(x, y) = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$ 也是连通的. 对任意 $Z(x_1, y_1)$ 和 $Z(x_2, y_2)$，$Z(x_1, y_1) \cap Z(x_2, y_2) = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1)\} \neq \varnothing$，于是

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X, y \in Y} Z(x, y)$$

是连通的. □

注. *若 $X \times Y$ 非空，则由 $X \times Y$ 连通可以推得 X 和 Y 都连通.*

若整个空间不是连通的，分为了若干相互分离的连通的部分，称为连通分支. 等价定义如下.

定义 3 (连通分支)**.** 设 U 是 X 的连通子集，若 U 不是 X 的任一连通子集的真子集，则称为 X 的**连通分支**.

定理 8. 拓扑空间的任一连通分支是闭集.

证明. 若连通集 $U \subset X$，则 $\overline{U}$ 是连通的，且 $U \subset \overline{U}$，若 U 不是闭集，则 $U \subsetneq \overline{U}$，于是 U 不是连通支集. □

定理 9. 拓扑空间的任意两个连通分支相互隔离.

证明. 若连通分支 $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \varnothing$，由定理6，得 $U \cup V$ 也是连通的，则 U、V 不再是极大连通子集，即连通分支. □

定义 4 (完全不连通)**.** 若拓扑空间 X 的每一点都是它的一个连通分支，则称 X 是**完全不连通**的.

定义 5 (局部连通)**.** 设 X 为拓扑空间，若对任意 $x \in X$，任意邻域 $U \ni x$，都有连通的邻域 V，使得 $x \in V \subset U$，则称 X 是**局部连通的**.

连通性的一个特例为道路连通性. 首先定义道路.

定义 6 (道路)**.** 设 X 为拓扑空间，连续映射 $\gamma : [0, 1] \to X$，称 γ 为**道路**. $\gamma(0)$ 和 $\gamma(1)$ 分别称为道路的**起点**和**终点**.

定义 7 (道路连通)**.** 设 X 为拓扑空间，对任意 $x_0, x_1 \in X$，都存在 γ 使得 $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$，则称 X 是**道路连通的**.

定理 10. 设拓扑空间 X 和 Y 同胚，则 X 道路连通当且仅当 Y 道路连通.

证明. 不妨设连续映射 $f:X\to Y$,则 f^{-1} 也连续. 若 X 道路连通,有连续映射 $\gamma:[0,1]\to X$，则 $\gamma'=f\circ\gamma:[0,1]\to Y$ 是 Y 的道路,对任意 y_0,y_1，都有 x_0,x_1 满足 $f(x_0)=y_0$，$f(x_1)=y_1$，且有 $\gamma(0)=x_0$，$\gamma(1)=x_1$，于是 $\gamma'(0)=y_0$，$\gamma'(1)=y_1$，故 Y 道路连通. 同理可设 Y 道路连通，得到 X 道路连通. □

定理 11. 道路连通空间是连通的.

证明. 设 X 是道路连通的，既开又闭的非空集合 $A\subsetneqq X$，则对 $x\in A$，$y\in X\backslash A$，存在从 x 到 y 的道路 γ，则 $\gamma^{-1}(A)\subsetneqq[0,1]$，而 $\gamma^{-1}(A)$ 是既开又闭且非空的，且 $[0,1]$ 是连通的，那么 $\gamma^{-1}(A)=[0,1]$，矛盾！于是 $A=X$，故 X 是连通的. □

设 α 是从 x 到 y 的道路，β 是从 y 到 z 的道路，则

$$\gamma=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \beta(2t-1), & \dfrac{1}{2}<t\leqslant 1\end{cases}$$

是从 x 到 z 的道路.

定理 12. Euclidean 空间的连通开集是道路连通的.

证明. 设 $X\subset\mathbb{R}^n$ 是连通开集. 对任意 $x\in X$，设 $U(x)=\left\{y\in X|\text{存在从}x\text{到}y\text{的道路}\right\}$，则 $U(x)$ 非空 $(x\in U(x))$，下证 $U(x)=X$.

设开球 $B(y,\varepsilon)$，对 $z\in B$，y 到 z 的道路是一条直线，于是有从 x 到 z 的道路，故 $z\in U(x)$，于是 $B(y,\varepsilon)\subset U(x)$，$U(x)$ 是开集. 而 $X\backslash U(x)=\bigcup\{U(y):y\in X\backslash U(x)\}$，且任意 $U(y)$ 为开集，于是 $X\backslash U(x)$ 为开集，$U(x)$ 为闭集. $U(x)$ 为既开又闭的非空集合，于是 $U(x)=X$. □

道路连通空间是连通的，但连通空间不一定道路连通. 下面是一个连通但不道路连通的反例.

例 2. 定义

$$Y=\{(0,y)\mid -1\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$Z=\left\{(x,\sin\frac{\pi}{x})\mid 0<x\leqslant 1\right\},$$

则 $X=Y\cup Z$ 是连通的，而不是道路连通的.

证明. Z 是 $(0,1]$ 上连续映射的像，因此 Z 连续. 而 Z 在 $\mathbb{R}^2$ 的闭包是 X，于是 X 是连通的.

假设存在道路

$$\gamma:[0,1]\to X,\quad \gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$

使得 $\gamma(0)=(0,0)$，$\gamma(1)=(1,0)$. 令

$$s=\sup\{t \mid \gamma_1(t)=0\},$$

则 $s<1$，$\gamma_1(s)=0$，且对任意 $t>s$，有 $\gamma_1(t)>0$. 于是对任意 $t>s$，有

$$\gamma_2(t)=\sin\frac{\pi}{\gamma_1(t)},$$

于是由 γ_1 的连续性，存在递减数列 $t_n\to s$ 使得 $\gamma_1(t_n)=\frac{2}{2n+1}$. 则

$$\gamma_2(t_n)=(-1)^n\nrightarrow\gamma_2(s),$$

矛盾！ $\square$

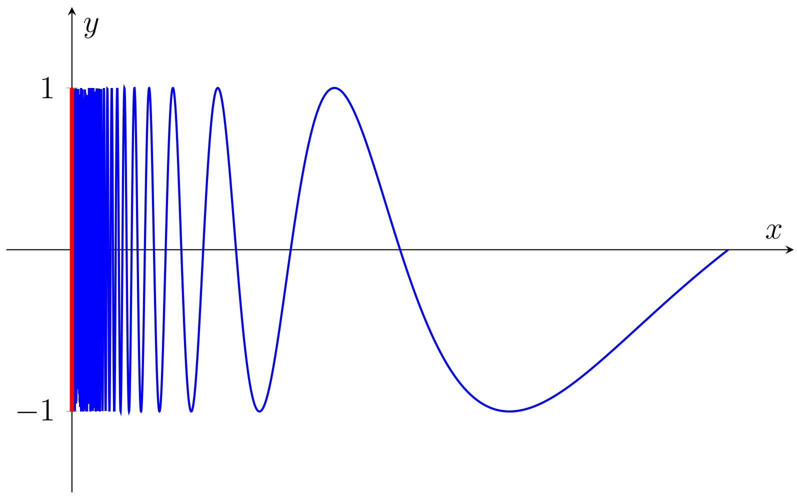

图 1: 拓扑学家的正弦曲线

与连通分支类似，定义道路连通分支.

定义 8 (道路连通分支). 设 U 是 X 的道路连通子集，若 U 不是 X 的任一道路连通子集的真子集，则称为 X 的**道路连通分支**.

然而，对于道路连通分支没有相互分离的结论，而且也不一定是闭的. 例如图1，Y 和 Z 既不相互分离，Z 也不是闭的.

与局部连通类似，定义局部道路连通.

定义 9 (局部道路连通). 设 X 为拓扑空间，若对任意 $x\in X$，任意邻域 $U\ni x$，都有道路连通的邻域 V，使得 $x\in V\subset U$，则称 X 是**局部道路连通的**.