Tietze 扩张定理

定义 1 (度量空间). 设定义在集合 $X \times X$ 上的一个实值函数 d，对任意 $x, y, z \in X$，满足

1. $d(x,y) \geqslant 0 \iff x = y$ 取等；
2. $d(x,y) = d(y,x)$；
3. $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$，

则称 d 为 X 上的一个**度量**，(X,d) 为一个**度量空间**.

度量空间是一种特殊的拓扑空间，我们赋予了开集的意义.

定义 2 (开球). 对 $x \in X$，定义 x 的**开球** $B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$，其中 $\varepsilon > 0$，称为开球 B 的**半径**.

定义 3. 设 $O \subset X$，对任意 $x \in O$，总存在开球 $B(x,\varepsilon) \subset O$，则称 O 为**开集**.

容易验证，这样定义的开集满足拓扑公理.

度量空间中离散的两个点，可以被两个不交的开集包含，称这种性质为 Hausdorff 性. 一般地，可以定义 Hausdorff 空间.

定义 4. 对任意 $x, y \in X$，$x \neq y$，若总存在开集 O_x，O_y 满足 $O_x \cap O_y = \varnothing$，则称 X 为 **Hausdorff 空间**.

并非所有拓扑空间都具有 Hausdorff 性，例如有限补拓扑空间，包含任意两个离散的点的开集总相交.

定义 5 (点到点集的距离). 设 $x \in X$，$A \subset X$，定义 x 到 A 的距离

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}.$$

引理 1. 定义的 $d(x,A)$ 对 x 是连续的.

证明. 对任意 $\varepsilon > 0$，$x_0 \in X$，使得 $d(x,x_0) < \varepsilon/2$，存在 $y \in A$ 满足 $d(x_0,y) < d(x_0,A) + \varepsilon/2$，则有

$$d(x,A) \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y) < d(x_0,A) + \varepsilon,$$

将 x 与 x_0 互换，有 $d(x_0,A) < d(x,A) + \varepsilon$，故 $|d(x,A) - d(x_0,A)| < \varepsilon$. □

引理 2. $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

证明. $\Rightarrow$：$d(x,A)=\inf d(x,y)=0, y\in A$，于是对任意 $\varepsilon>0$，存在 y_0，有

$$d(x,y_0)<\inf d(x,y)+\varepsilon=\varepsilon,$$

故 $B(x,\varepsilon)\backslash\{x\}\cap A\neq\varnothing$.

$\Leftarrow$：$x\in\overline{A}$，故存在开集 $U\ni x$ 满足 $U\backslash\{x\}\cap A\neq\varnothing$，对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $y_0\in A$，使得 $d(x,y_0)<\varepsilon$，故 $d(x,A)=\inf d(x,y_0)=0$. □

引理 3 (Urysohn). 设 A，B 为 X 上的两个不交闭集，则存在 X 上的连续函数 f 使得 $|f(x)|\leqslant 1$，$f\big|_A=1$，$f\big|_B=-1$.

证明. 因为 A，B 为不交闭集，则 $d(x,A)+d(x,B)\neq 0$，定义函数

$$f(x)=\frac{d(x,B)-d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},$$

则由引理1，得 $f(x)$ 为符合条件的连续函数. □

定理 1 (Tietze). 定义在度量空间中一闭集上的连续实值函数可以延拓到整个空间.

证明. 设 F 为 X 上的一闭集，f 是定义在 F 上的连续函数. 先考虑 f 有界的情形，即存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$.

设 $A=\{x\in F: M/3\leqslant f(x)\leqslant M\}$，$B=\{x\in F: -M\leqslant f(x)\leqslant -M/3\}$，由于连续映射下，闭集的原像仍为闭集，于是 A，B 为不交闭集. 由引理3，定义函数

$$g_1(x)=\frac{M}{3}\cdot\frac{d(x,B)-d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},\qquad x\in X,$$

则 $|g_1(x)|\leqslant\dfrac{M}{3}$，$|f(x)-g_1(x)|\leqslant\dfrac{2M}{3}$，下面以 $f(x)-g_1(x)$ 为新的连续函数来研究，则有

$$|g_2(x)|\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{M}{3},$$

$$|f(x)-g_1(x)-g_2(x)|\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{2M}{3}.$$

同理，对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$，有

$$|g_k(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{M}{3},$$

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{k}g_i(x)\right|\leqslant\frac{2^kM}{3^k},$$

由 Weierstrass 判别法可知 $\sum g_k(x)$ 是一致收敛的，记其和函数为 $g(x)$，则

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)=f(x).$$

且

$$|g(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|g_k(x)|\leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=M.$$

当 f 无界时，考虑 $\arctan f(x)$ 即可. □