

正规子群与商群

定义 1 (正规子群). 设 G 是群, $H < G$, 若有

$$ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, \forall h \in H,$$

则称 H 是 G 的正规子群, 记作 $H \triangleleft G$.

定理 1. 设 $H < G$, 则下列条件等价.

1. $H \triangleleft G$;
2. $gH = Hg, \forall g \in G$;
3. $g_1Hg_2H = g_1g_2H, \forall g_1, g_2 \in G$.

证明. □

定义 2 (商群). 设 $H < G$, 关系 R 定义为 $aRb \iff a^{-1}b \in H$, 则

$$R \text{ 为同余关系} \iff H \triangleleft G,$$

商集合 G/R 对同余关系 R 导出的运算也构成一个群, 称为 G 对 H 的商群, 记为 G/H .

证明. □

例 1.