复变函数的积分

定义 1. 设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$，$\gamma:[\alpha,\beta]\to\Omega$，$\gamma(\alpha)=z_0$，$\gamma(\beta)=z_1$. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $[\alpha,\beta]$ 的分划

$$\pi:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta,$$

及其标记点组 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $i=1,2,\cdots,n$，只要细度 $\lambda(\pi)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|t_i-t_{i-1}|<\delta$，就有

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\gamma(\xi_i)\right)\left(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\right)-A\right]<\varepsilon,$$

则称 f 在 γ 上可积，记作

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=A.$$

这里的 γ 是可求长的，如下定义.

定义 2. 设 $\gamma:[\alpha,\beta]\to\Omega$，任意分划 $\pi:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，则分划后折线段的长度为

$$L_\pi=\sum_{i=1}^{n}\left|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\right|,$$

定义集合 $\mathcal{L}=\left\{L_\pi\mid\pi\text{是分划}\right\}$，若 $\mathcal{L}$ 有上界，则称 γ 是**可求长的**，并定义长度 $L(\gamma)=\sup\mathcal{L}$.

以下的讨论总是基于 f 在 $\Gamma=\gamma([\alpha,\beta])\subset\Omega$ 上连续以及 γ 可求长展开的.

设 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$，$z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma(u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y)=\int_\gamma u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_\gamma u\,\mathrm{d}y+v\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

若 γ 是 C^1 的，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

令 $t=t(s)$，$s\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f\left(\gamma(t(s))\right)\gamma'(t(s))\,\mathrm{d}t(s)=\int_a^b f\left(\tilde\gamma(s)\right)\tilde\gamma'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

其中 $\tilde\gamma=\gamma\circ t$. 由此，积分与曲线参数化的选取无关.

例 1. $\displaystyle\int_\gamma\mathrm{d}z=\gamma(\beta)-\gamma(\alpha).$

例 2. $\displaystyle\int_\gamma z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left(\gamma(\beta)^2-\gamma(\alpha)^2\right).$

例 3. $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(|\gamma(\beta)|^2 - |\gamma(\alpha)|^2\right) + \mathrm{i}S_\gamma$. 其中 S_γ 与 γ 和原点的连线扫过的面积有关.

例 4. 若 $\gamma = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i}$.

例 5. 若 $\gamma = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $n \geqslant 2$ 时，$\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^n} = 0$.

例 6. 设 $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 是可求长闭曲线，则

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\gamma \mathrm{d}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) + \mathrm{i}\int_\gamma \mathrm{d}\omega = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(z).$$

称 $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ 为**环绕数**.

定理 1. 设 $f \in C(\Omega)$，$F \in H(\Omega)$，且 $F' = f$，$\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ 可求长，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)). \tag{4}$$

证明. 设 $f = u + \mathrm{i}v$，$F = A + \mathrm{i}B$，则由 C-R 方程，$A_x = B_y = u$，$B_x = -A_y = v$，则

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\gamma A_x\,\mathrm{d}x + A_y\,\mathrm{d}y + \int_\gamma B_y\,\mathrm{d}y + B_x\,\mathrm{d}x\\ &= A(\gamma(\beta)) - A(\gamma(\alpha)) + \mathrm{i}\left(B(\gamma(\beta)) - B(\gamma(\alpha))\right)\\ &= F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).\end{aligned} \tag{5}$$

□