

自由模

设 R 是幺环, 定义

$$R^{(n)} = R \times R \times \cdots \times R = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^{(n)}$, 记 x 的第 i 个分量为 $\text{ent}_i x$. 对任意 $x, y \in R^{(n)}$, $a \in R$, 定义

$$1. \text{ent}_i(x + y) = \text{ent}_i x + \text{ent}_i y;$$

$$2. \text{ent}_i(ax) = a \text{ent}_i x.$$

可以依定义验证 $R^{(n)}$ 是一个左 R -模.

对 $1 \leq i \leq n$, 设 $e_i \in R^{(n)}$ 满足 $\text{ent}_j e_i = \delta_{ij}$. 这里 δ_{ij} 为 Kronecker 记号, 即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

则对任意 $x \in R^{(n)}$, 有 $x = \sum_{i=1}^n (\text{ent}_i x) e_i$, 于是有

1. e_1, e_2, \cdots, e_n 生成 $R^{(n)}$, 即

$$R^{(n)} = Re_1 + Re_2 + \cdots + Re_n.$$

2. 任意 $x \in R^{(n)}$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ 的表示法唯一, 即

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 \iff x_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

定义 1 (自由模). 幺环 R 上的模 M 若与 $R^{(n)}$ 同构, 则称为秩 n 的自由模.

定义 2 (基). 设 M 是 R -模, $u_1, u_2, \cdots, u_n \in M$, 满足

1. u_1, u_2, \cdots, u_n 生成 M , 即

$$M = Ru_1 + Ru_2 + \cdots + Ru_n.$$

2. 任意 $x \in M$, $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ 的表示法唯一, 即

$$\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0 \iff x_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

则称 u_1, u_2, \dots, u_n 为 M 的一组基.

注. 立即可得 e_1, e_2, \dots, e_n 是 $R^{(n)}$ 的一组基.

定理 1. R -模 M 是秩 n 的自由模当且仅当 M 存在一组基 u_1, u_2, \dots, u_n .

证明. 必要性: 若 M 是秩 n 的自由模, 则存在模同构 $\varphi: R^{(n)} \rightarrow M$ 满足 $u_i = \varphi(e_i)$. 于是

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i u_i,$$

于是 u_1, u_2, \dots, u_n 生成 M .

若 $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$, 则

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0,$$

由于 e_1, e_2, \dots, e_n 是 $R^{(n)}$ 的一组基, 于是 $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 \iff x_i = 0$. 于是 u_1, u_2, \dots, u_n 是 M 的一组基.

充分性: 若 M 存在一组基 u_1, u_2, \dots, u_n , 设 $\eta: M \rightarrow R^{(n)}$ 满足

$$\eta\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

则对任意 $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i, y = \sum_{i=1}^n y_i u_i \in M$,

$$\begin{aligned} \eta(x+y) &= \eta\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i\right) = \eta\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i + \sum_{i=1}^n y_i e_i \\ &= \eta(x) + \eta(y). \end{aligned}$$

对任意 $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i \in M, a \in R$, 有

$$a\eta(x) = a \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n ax_i e_i = \eta(ax).$$

于是 η 是模同态.

对任意 $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i, y = \sum_{i=1}^n y_i u_i \in M$, 若 $\eta(x) = \eta(y)$, 则

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

于是

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i = 0 \iff x_i - y_i = 0 \iff x_i = y_i \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

于是 $x = y$, 因而 η 是单射.

对任意 $y \in R^{(n)}$, 设 $y = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, 则 $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i \in M$ 且 $\eta(x) = y$. 于是 η 是满射.

综上, η 是模同构, 于是 $M \cong R^{(n)}$, 即 M 是秩 n 的自由模. \square

下述定理是自由模更一般、更抽象的刻画.

定理 2. 设 R 是幺环, M 是 R -模, $u_1, u_2, \dots, u_n \in M$, 则 M 是秩 n 的自由模且 u_1, u_2, \dots, u_n 是 M 的一组基的充分必要条件是对任意 R -模 M' 中的 n 个元素 v_1, v_2, \dots, v_n , 存在唯一的模同态 $\eta: M \rightarrow M'$ 使得 $\eta(u_i) = v_i$.

证明. 必要性: 设 u_1, u_2, \dots, u_n 是 M 的一组基, 对任意 $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i \in M$, 定义

$$\eta \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

任意 $x \in M$ 都能唯一地对应到 M' 中的一个元素, 于是 η 是映射.

参考定理1的证明, 可以证明 η 是模同态.

对 $u_i = \sum_{j=1}^n x_j u_j \in M$, 有 $x_j = \delta_{ij}$, 于是 $\eta(u_i) = \sum_{j=1}^n x_j v_j = v_i$.

上面证明了 η 的存在性, 下证其唯一性. 设同态 $\eta': M \rightarrow M'$ 也使得 $\eta'(u_i) = v_i$, 则

$$\eta'(x_i u_i) = \sum_{j=1}^n x_j \eta'(u_j) = \sum_{j=1}^n x_j v_j = \eta \left(\sum_{j=1}^n x_j u_j \right).$$

于是 $\eta' = \eta$.

充分性: 设 $M' = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$, 因而有唯一的模同态 $\eta: M \rightarrow M'$ 使得 $\eta(u_i) = u_i$. 设 $\theta: M' \rightarrow M$ 是嵌入映射, 即 $\theta(x) = x, \forall x \in M'$. 则 $\eta \cdot \theta: M \rightarrow M$ 满足 $\eta \cdot \theta(u_i) = u_i$, 而 $\text{id}: M \rightarrow M$ 也满足 $\text{id}(u_i) = u_i$. 因而由唯一性有 $\theta \cdot \eta = \text{id}$. 于是 $\eta(M) = M' = M$, 即 u_1, u_2, \dots, u_n 生成 M .

设同态 $\sigma: M \rightarrow R^{(n)}$ 满足 $\sigma(u_i) = e_i$, 若 $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$, 则

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \sigma(u_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 \iff x_i = 0,$$

于是 u_1, u_2, \dots, u_n 是 M 的一组基, 于是 M 是秩 n 的自由模. □

下面总假定 R 是交换幺环.

定义 3 (坐标). 设 M 是自由 R 模, u_1, u_2, \dots, u_n 是 M 的一组基. 对任意 $x \in M$, 存在唯一的 x_1, x_2, \dots, x_n 使得 $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$, 称 x_1, x_2, \dots, x_n 是 x 在基 u_1, u_2, \dots, u_n 下的坐标, 记为

$$\text{crd}(x; u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

x 可以写为

$$x = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \text{crd}(x; u_1, u_2, \dots, u_n).$$

定理 3. 设 M 是自由 R 模, u_1, u_2, \dots, u_n 和 v_1, v_2, \dots, v_n 是 M 的两组基, 则 $m = n$.

推论 1. $R^{(m)} \cong R^{(n)} \iff m = n$.

推论 2. R 上两个自由模同构当且仅当它们的秩相同.

把线性空间中的基变换与坐标变换推广, 得到以下推论.

推论 3. 设 u_1, u_2, \dots, u_n 与 v_1, v_2, \dots, v_n 是自由 R 模 M 的两组基, 则存在 n 阶方阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 使得

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \mathbf{A},$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \mathbf{B},$$

且 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. 对任意 $x \in M$, 有

$$\text{crd}(x; v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathbf{B} \text{crd}(x; u_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$\text{crd}(x; u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbf{A} \text{crd}(x; v_1, v_2, \dots, v_n).$$

\mathbf{A} 称为从基 u_1, u_2, \dots, u_n 到基 v_1, v_2, \dots, v_n 的过渡矩阵, 记作

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}.$$

定义 4 (方阵环). 交换幺环 R 上的 n 阶方阵的集合 $M_n(R)$ 关于方阵的加法和乘法作成环, 称为 R 上的 n 阶方阵环.

定理 4. 设 M 是交换幺环 R 上的自由模, 则 $\text{End}_R M \cong M_n(R)$.

证明. 由于 M 是自由模, 于是存在一组基 u_1, u_2, \dots, u_n . 定义映射 $\varphi: \text{End}_R M \rightarrow M_n(R), \eta \mapsto \mathbf{M}(\eta)$. 对 $\eta \in \text{End}_R M$, 定义

$$\eta(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i, \quad a_{ij} \in R.$$

定义 $\varphi(\eta) = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(R)$.

若 $\varphi(\eta_1) = \varphi(\eta_2) = \mathbf{A}$, 则对任意 $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$, 有

$$\eta_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \eta_1(u_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k = \sum_{i=1}^n x_i \eta_2(u_i) = \eta_2 \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i \right),$$

于是 $\eta_1 = \eta_2$, φ 是单射.

对任意 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_n(R)$, 存在 η 满足

$$\eta(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i,$$

则 $\varphi(\eta) = (a_{ij}) = \mathbf{A}$, 于是 φ 是满射.

对任意 $\eta_1, \eta_2 \in \text{End}_R M$,

$$(\eta_1 + \eta_2)(u_j) = \eta_1(u_j) + \eta_2(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i + \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i = \sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) u_i,$$

于是

$$\varphi(\eta_1 + \eta_2) = (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \varphi(\eta_1) + \varphi(\eta_2).$$

$$(\eta_1 \eta_2)(u_j) = \eta_1 \left(\sum_{k=1}^n b_{kj} u_k \right) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \eta_1(u_k) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} u_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) u_i,$$

于是 $\varphi(\eta_1 \eta_2) = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

于是 φ 是环同构, $\text{End}_R M \cong M_n(R)$. □

定理 5. 设 M 是交换幺环 R 上的自由模, u_1, u_2, \dots, u_n 是 M 的一组基, $\eta \in \text{End}_R M$, 则下列条件等价.

1. η 是可逆映射;
2. η 是 M 的自同构;
3. $\eta(u_1), \eta(u_2), \dots, \eta(u_n)$ 也是一组基;
4. $\mathbf{M}(\eta)$ 是 $M_n(R)$ 中的可逆矩阵;
5. $\det(\mathbf{M}(\eta))$ 是 R 中可逆元素.