覆盖性质的特征理论

一般拓扑学论题之一

蒋继光

序　言

本书介绍基本覆盖性质的特征理论, 重心是仿紧空间和次亚紧空间的刻画. 所谓基本覆盖性质还包括亚紧性, 次仿紧性, 正规覆盖, 可缩性和强仿紧性等. 某类覆盖性质的特征或刻画 (characterizations) 是指与该性质的原始定义等价的命题. 这些特征命题一般比原始定义更弱. 自从 A.H.Stone [1948] 建立 T_2 仿紧性的重合定理以来，寻找仿紧空间及广义仿紧空间的各种各样的特征的努力一直延续至今. 发现不少美妙定理与精巧技术，形成系统理论. 本书试图叙述这一领域的主要成果，全部给予证明. 仿紧空间的刻画分别在 §2.3 与 §4.2 介绍, §2.3 介绍不附加分离公理的仿紧性的刻画. §4.2 则介绍包含 T_2 仿紧空间为子类的 λ 完满正规空间的刻画. 作为它的另一子类, 正规 λ 强仿紧空间, 在 §4.3 中介绍. §2.1 介绍次亚紧空间的刻画. 这三节是特征理论的重心. §3.1 介绍正规覆盖的刻画，包含了点集拓扑学发展早期的一些好结果. §3.2 介绍集体正规空间与可缩空间的刻画. 这两节的内容是基本的, 不仅有其自身的意义，也是 §4.2 中定理证明需要引用的. §4.1 与 §2.2 分别介绍次仿紧与亚仿紧空间的刻画. 每种覆盖性质有一类型刻画，我们称之为分解定理, 即这种刻画表现为比它较弱的两种拓扑性质之和 (或两类较弱空间类的交). 其中一类是可扩型空间，另一类我们称之为弱覆盖性质. 我们在 §1.2 与 §1.3 中分别介绍这些空间需要的知识. 其中也有值得学习和欣赏的好结果。

有关覆盖性质的特征理论的已有文献，我愿推荐: [Bur84], [Jun80], [Gao2008] 和 [Yas89].

本书假定读者了解点集拓扑学的基础知识, 如 [Eng77] 的前 5 章, 或 [Gao2008] 的前 6 章. 集合论只需了解基数与序数的一般性质.

本书的参考文献只限于本书所引用者. 我在此向每一位作者谨致敬意和谢忱. 最后, 我对部分作者被引用的工作 (他们引入的概念和建立的定理) 做了一个索引. 按照每一位作者被引用论文的最早发表年份为序排列他们的姓名. 这个索引有助于了解特征理论的发展历史.

蒋继光

于成都四川大学竹林村

乙未暮春

目　录

第一章　预备

覆盖性质有一类型的刻画是把它们分解成另两类较弱的拓扑性质的和. 其中一类是可扩型性质，另一类是较弱的其它覆盖性质. 例如, 一个拓扑空间是仿紧的当且仅当它是可扩的和次亚紧的. 我们把这种类型的刻画叫分解定理. 本章 §1.2 介绍用于各种分解定理的弱覆盖性质. §1.3 则介绍用作另一分解因子的可扩型性质. 它们的应用将在后面的章节中介绍.

§ 1.1. 记号、术语与基本事实

集合简称集, 集的元素简称元. 本书中的全称量词"对每一个"或符号"$\forall$"经常省略. 例如, "对每一个 $\alpha \in \Delta$, $A_\alpha \subset B_\alpha$", 常简述为"$A_\alpha \subset B_\alpha$". 但存在量词 $\exists$ 不可省略. 等号"="的基本用法是, 它两端的集具有相同的元. 我们还赋与它一种广义的用法, 让 P, Q 表示由若干字母组成的符号, 则 $P = Q$ 可以表示 P 是 Q 的一个名称 (暂用的或专用的). 例如 $A = \{x, y\}$, 这里 A 是右边那个无序对的暂用名称. $\mathbb{R} = \{x : x$ 是一个实数$\}$ 表示我们总用 $\mathbb{R}$ 表示实数直线并赋予区间拓扑. $\phi = \{u : u \neq u\}$ 表示唯一的空集. P 也可以是 Q 的一个缩写或简记. 如 $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$, 叫 X 的幂集. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ 叫一个有序对. 当 $A \neq \phi$ 且 $B \neq \phi$ 时, $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$. $B^A = \{f \subset A \times B : f$ 是从 A 到 B 内的一个函数$\}$. $A \times \phi = \phi$. $B^\phi = \{\phi\}$. 映射与函数同义. 若 $f \in B^A$, 常记 $f : A \to B$. 称 f 是一个单射或者 1-1 的, 如果 A 内不同的元在 f 下有不同的像. 称为 f 是一个满射或到上的, 如果 B 的每个元皆是 A 内某个元的像. 既是单射又是满射则称为一个双射. 设 $C \subset A$, 则 $A|_C = f \cap (C \times B)$ 叫 f 在 C 上的限制.

我们用 α, β, γ 等表示序数. $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$. $\beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta < \alpha$. 基数是初始序数, 用 κ, λ 等表示. $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 表最小无限基数. 它的元, 即自然数, 用 m, n, i, k 等表示. 对 $n > 0, n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. 我们用 $|A|$ 表示 A 的势或基数. 记 $[A]^0 = \{\phi\}$. 对 $n \geq 1, [A]^n = \{S \subset A : |S| = n\}$. $[A]^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} [A]^n$.

1.1.1　集族

设 Δ 是以序数为元的一个集. 符号 $\{D_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 称为集 X 的一个子集族或 X 内的一个集族, 是指存在一个函数 $f : \Delta \to \mathscr{P}(X)$ 使得 $\forall \alpha \in \Delta, f(\alpha) = D_\alpha$. Δ 叫这个集族的指标集. $\mathscr{P}(X)$ 的每子集 $\mathscr{A}$ 就是一个集族. 因为设 $|\mathscr{A}| = \lambda$ 且设 $f : \lambda \to \mathscr{A}$ 是一个双射. 令 $A_\alpha = f(\alpha)$, 则 $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \lambda\}$.

现设 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是 X 的一个子集族. 我们把 $|\Delta|$ 称为族 $\mathscr{D}$ 的势. 设 $E\subset X$. 下列记号是常用的.

$\mathscr{D}|_E=\{D_\alpha\cap E:\alpha\in\Delta\}$.

$(\mathscr{D})_E=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta,D_\alpha\cap E\neq\phi\}$, $\mathrm{st}(E,\mathscr{D})=\bigcup(\mathscr{D})_E$.

设 $x\in X$. $(\mathscr{D})_x=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta,x\in D_\alpha\}$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{D})=\bigcup(\mathscr{D})_x$.

若 $\Gamma\subset\Delta$, 则集族 $\{D_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ 称 $\mathscr{D}$ 的一个子族. 当 Δ 是空集时, 我们认为所有的族 $\{D_\alpha:\alpha\in\phi\}$ 皆等于单元集 $\{\phi\}$.

与集族类似, 以序数 β 为定义域的函数 $x:\beta\to X$ 称集 X 内的的一个序列或点列, 记为 $x=\{x_\alpha:\alpha\in\beta\}$. 此处 $x_\alpha=x(\alpha)$ 称一个 β 序列. ω 序列也记为 $(x_0,x_1,\ldots)$. 0 序列是 ϕ. 为了免与开区间混淆, (x_0,x_1) 也常记为 $<x_0,x_1>$.

1.1.2 空间与覆盖

拓扑空间简称为空间, 不附加任何分离公理. 正规、正则空间也不必是 T_1 的. 此后, 凡 X,Y 皆表空间. 设 $x\in X$, 记 $\mathrm{top}(x)=\{W:W$ 是 X 的开集, 使得 $x\in W\}$. 此即 x 的开邻域系. 设 $A\subset X$, A° 与 $\overline{A}$ 分别表示 A 在 X 内的内部和闭包. 设 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是 X 的一个子集族, 则记 $\mathscr{D}^\circ=\{D_\alpha^\circ:\alpha\in\Delta\}$, $\overline{\mathscr{D}}=\{\overline{D}_\alpha:\alpha\in\Delta\}$. 当 $\bigcup\mathscr{D}=X$ 时, 称 $\mathscr{D}$ 是 X 的一个覆盖. 二覆盖之间的一个基本关系叫加细. 设 $\mathscr{V}=\{V_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 是 X 的另一子集族, 称 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$, 如果 $\forall\beta\in\Gamma$, $\exists\delta(\beta)\in\Delta,V_\beta\subset D_{\delta(\beta)}$. 称 $\mathscr{V}$ 垫于 $\mathscr{D}$, 如果 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$ 且 $\forall B\subset\Gamma$, $\overline{\bigcup_{\beta\in B}V_\beta}\subset\bigcup_{\beta\in B}D_{\delta(\beta)}$. 若 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$ ($\mathscr{V}$ 垫于 $\mathscr{D}$), 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个部分加细 (部分垫状加细). 若进一步合条件 $\bigcup\mathscr{V}=\bigcup\mathscr{D}$, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个加细 (垫状加细). 称 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个收缩 (精确加细), 如果 $\mathscr{W}=\{W_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 使得 $\forall\alpha\in\Delta,\overline{W_\alpha}\subset D_\alpha$ ($W_\alpha\subset D_\alpha$) 且 $\bigcup\mathscr{W}=\bigcup\mathscr{D}$. 称 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{D}$ 的精确垫状加细, 如果 $\bigcup\mathscr{W}=\bigcup\mathscr{D}$ 且对每个 $B\subset\Delta$, $\overline{\bigcup_{\alpha\in B}W_\alpha}\subset\bigcup_{\alpha\in B}D_\alpha$. 族 $\mathscr{D}$ 称为开的 (闭的), 如果它每个元是 X 的开 (闭) 子集.

定义 1.1.1. 设 $\lambda\geq 2$. X 是 λ 可缩的, 如果 X 的每个势 $\leq\lambda$ 的开覆盖有一个开收缩, ω 可缩常称为可数可缩.

λ 可缩空间显然是正规的. 并且 X 是 λ 可缩的当且仅当它的每个势 $\leq\lambda$ 的开覆盖有一个闭收缩.

注释 1.1.1. 前一定义中的"势 $\leq\lambda$"与"势 $=\lambda$"等价. 换言之, X 是 λ 可缩的 $\Leftrightarrow$ X 的每一个形如 $\mathscr{V}=\{V_\beta:\beta\in\lambda\}$ 的开覆盖有一个开收缩.

事实上, 若 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是符合条件 $|\Delta|\leq\lambda$ 的开覆盖. 设 $f:\Delta\to\lambda$ 是单射. 若 $\beta=f(\alpha),\alpha\in\Delta$, 令 $V_\beta=U_\alpha$. 若 $\beta\in\lambda\backslash f(\Delta)$, 令 $V_\beta=\phi$. 令 $\mathscr{V}=\{V_\beta:\beta<\lambda\}$, 则 $\mathscr{V}=\mathscr{U}\bigcup\{\phi\}$, 且 $\mathscr{V}$ 与 $\mathscr{U}$ 有相同的开收缩. 这个注释对本书的所有覆盖性质皆是成立.

定义 1.1.2. (i) 集族 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha<\lambda\}$ 是上升的, 如果 $\forall\alpha,\beta\,(\alpha<\beta<\lambda\Rightarrow D_\alpha\subset D_\beta)$.

(ii) 集族 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是定向的, 如果 $\forall\alpha,\beta\in\Delta\,\exists\gamma\in\Delta\,(D_\alpha\bigcup D_\beta\subset D_\gamma)$. 对此 $\mathscr{D}$, 我们记 $\mathscr{D}^F=\{\bigcup_{\alpha\in S}D_\alpha:S\in[\Delta]^{<\omega}\}$, 易见 $\mathscr{D}^F$ 总是定向的. 并且 $\mathscr{D}$ 是定向 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}^F$ 加细 $\mathscr{D}$.

二集 A 与 B 是相交的如果 $A\bigcap B\neq\phi$, 是非交的如果 $A\bigcap B=\phi$.

定义 1.1.3. 设 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是 X 内的子集族.

(i) $\mathscr{D}$ 在 X 内是星形有限的 (非交的), 如果 $\forall\beta\in\Delta,|\Delta_\beta|<\omega$ $(|\Delta_\beta|\leq 1)$, 此处 $\Delta_\beta=\{\alpha\in\Delta:D_\alpha\bigcap D_\beta\neq\phi\}$.

(ii) $\mathscr{D}$ 在 $x\in X$ 处是点有限的 (点非交的), 如果 $|\Delta(x)|<\omega$ $(|\Delta(x)|\leq 1)$, 此处 $\Delta(x)=\{\alpha\in\Delta:x\in D_\alpha\}$. 称 $\mathscr{D}$ 在 X 内是点有限的 (点非交的), 如果 $\mathscr{D}$ 在 X 的每一点处是点有限的 (点非交的).

易见:

1) $\mathscr{D}$ 在 X 内是非交的 $\Leftrightarrow\mathscr{D}$ 在 X 内是点非交的.

2) 若 $\mathscr{D}$ 在 X 内是非交的, 则 $\forall\alpha,\beta\in\Delta\,(D_\alpha\neq D_\beta\Rightarrow D_\alpha\cap D_\beta=\phi)$.

(iii) 设 $n\geq 1$, 称 $\mathscr{D}$ 在 X 内是局部有限的 (n 局部有限的), 如果 $\forall x\in X\,\exists W\in\operatorname{top}(x),|\Delta(W)|<\omega$ $(|\Delta(W)|\leq n)$. 此处 $\Delta(W)=\{\alpha\in\Delta:W\cap D_\alpha\neq\phi\}$. 称 $\mathscr{D}$ 在 X 内是有界局部有限的 (离散的), 如果存在 $n\geq 1$, $\mathscr{D}$ 在 X 内是 n 局部有限 (1 局部有限) 的,

事实 1.1.1. $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是 X 内的离散闭集族 $\Leftrightarrow\bigcup\mathscr{D}$ 闭于 X 且 $\mathscr{D}$ 在每一点 $x\in\bigcup\mathscr{D}$ 处是离散的.

证明. $(\Rightarrow)$ 是平凡的. $(\Leftarrow)$. 设 $\bigcup\mathscr{D}$ 是闭集, 且 $\mathscr{D}$ 在每点 $x\in\bigcup\mathscr{D}$ 处是离散的, 则显然 $\mathscr{D}$ 是离散的. 只需再证它的任意元 D_α 是闭集. 设 $x\in\overline{D_\alpha}$, 则 $\exists\beta\in\Delta,x\in D_\beta$. 依前一定义 (iii) 的记号, 存 x 的邻域 W 使得 $|\Delta(W)|\leq 1$. 因 $W\cap D_\alpha\neq\phi$ 且 $x\in W\cap D_\beta$, 则 $\alpha=\beta,x\in D_\alpha$. □

事实 1.1.2. 设 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是 X 的覆盖.

(i) 若 $\mathscr{D}$ 有局部有限开加细, 则 $\mathscr{D}$ 有局部有限的精确开加细.

(ii) 若 X 有局部有限开覆 $\mathscr{V}$ 使得 $\overline{\mathscr{V}}$ 加细 $\mathscr{D}$, 则 $\mathscr{D}$ 有局部有限开收缩.

(iii) 若 $\mathscr{D}$ 有垫状加细, 则 $\mathscr{D}$ 有精确的垫状加细.

其次, 在前两条中, 若将“局部有限”改为“离散”, 结论仍真. 或将“开”加细 (覆盖) 改为“闭”亦真. 甚至改变为后面将介绍的“函数开 (集)“或“半开覆盖”, 结论也成立.

证明. (i) 和 (ii) 的基本证法同 (iii). 下面我们只证 (iii). 设 $\mathscr{D}$ 有一个垫状加细 $\mathscr{W}=\{W_\beta:\beta\in\Gamma\}$. $\forall\beta\in\Gamma\,\exists\delta(\beta)\in\Delta$ 满足 $W_\beta\subset D_{\delta(\beta)}$ 并使得 $\forall B\subset\Gamma,\overline{\bigcup_{\beta\in B}W_\beta}\subset\bigcup_{\beta\in B}D_{\delta(\beta)}$. $\forall\alpha\in\Delta$, 令 $V_\alpha=\bigcup\{W_\beta:\beta\in\Gamma,\delta(\beta)=\alpha\}$. $\forall C\subset\Delta$,

$$\begin{aligned}\overline{\bigcup_{\alpha\in C}V_\alpha}&=\overline{\bigcup\{W_\beta:\beta\in\Gamma,\delta(\beta)=\alpha,\alpha\in C\}}\\&\subset\bigcup\{D_{\delta(\beta)}:\beta\in\Gamma,\delta(\beta)=\alpha,\alpha\in C\}=\bigcup_{\alpha\in C}D_\alpha.\quad\square\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

1.1.3 内部保持族与半开覆盖

定义 1.1.4. X 的子集族 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 称为<u>内部保持的</u>(Junnila) (或<u>闭包保持的</u>), 如果 $\forall B\subset\Delta$, $(\bigcap_{\alpha\in B}D_\alpha)^\circ=\bigcap_{\alpha\in B}D_\alpha^\circ$, (或 $\overline{\bigcup_{\alpha\in B}D_\alpha}=\bigcup_{\alpha\in B}\overline{D_\alpha}$).

熟知每个局部有限族是闭包保持的, 由下面的事实知, 每个点有限的或上升的开覆盖是内部保持的. 显然, $\mathscr{D}$ 是内部保持的, 当且仅当集族 $\{X\backslash D_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是闭包保持的.

事实 1.1.3. 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是 X 的开集族, 则下列各条等价.

(i) $\mathscr{U}$ 是内部保持的.

(ii) $\forall x \in \bigcup \mathscr{U}$, $\bigcap(\mathscr{U})_x$ 是开集.

(iii) $\forall B \subset \Delta$, $\bigcap_{\alpha \in B} U_\alpha$ 是开集.

证明. 由定义可直接推出. □

事实 1.1.4. 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是 X 的一个内部保持开集族. B 是以序数为元的集. 设 $\forall \beta \in B$, $\Delta_\beta \subset \Delta$. 则集族 $\{\bigcap_{\alpha \in \Delta_\beta} U_\alpha : \beta \in B\}$ 与 $\{\bigcup_{\alpha \in \Delta_\beta} U_\alpha : \beta \in B\}$ 皆是 X 内的内部保持开集族. □

定义 1.1.5. (Junnila) X 的覆盖 $\mathscr{D}$ 是<u>半开的</u>, 如果 $\forall x \in X, x \in (\mathrm{st}(x, \mathscr{D}))^\circ$, 即, $\mathrm{st}(x, \mathscr{D}) \in \mathrm{top}(x)$.

事实 1.1.5. X 的覆盖 $\mathscr{D}$ 是半开的 $\Leftrightarrow \forall A \subset X, \overline{A} \subset \mathrm{st}(A, \mathscr{D})$. □

由上述事实知, 每个闭包保持闭覆盖是半开的, 开覆盖显然是半开的.

1.1.4 函数开集

定义 1.1.6. X 在的子集 A 称<u>函数开的</u>, 或是一个<u>补零集</u>, 如果存在一个连续函数 $f : X \to [0, 1]$ 使得 $A = f^{-1}(0, 1] = \{x \in X : 0 < f(x) \leq 1\}$.

易见, 对于任意的 $a, 0 \leq a \leq 1$, 形如 $f^{-1}(a, 1]$ 或 $f^{-1}[0, a)$ 的集皆是函数开集. 由 Engelking[1977] 知, 两个函数开集之交是函数开的, 可数多个函数开集的并是函数开的. X 的子集族称为函数开的, 如果它的每个元是函数开集. 设 $\mathscr{U}$ 是 X 内的一个函数开的局部有限族, 则 $\bigcup \mathscr{U}$ 是函数开集. 完全 (perfect) 正规空间内的每个开集是函数开集. 因为伪度量空间是完全正规的, 我们有下列的

事实 1.1.6. 伪度量空间的每个开集是函数开集. □

§ 1.2. 弱覆盖性质

仿紧空间的自然推广是亚紧 (metacompact) 空间. T_2 仿紧空间的推广是次仿紧空间. 作为这三者的最有意义的公共推广是次亚紧空间. 我们把次亚紧空间, 和比它弱而又能应用于分解定理的覆盖性质称为弱覆盖性质. 本节介绍它们的定义和相互关系. 下面首先介绍 Worrell 与 Wicke [1965] 引入的次亚紧空间 (他们原文中称为 θ 可细空间) 及刻画命题1.2.1.

定义 1.2.1. (i) X 的子集族的一个序列 $\{\mathscr{E}_n : n < \omega\}$ 称为一个 θ 序列, 如果 $\forall x \in X, \exists m < \omega$ 使得 $x \in \cup\mathscr{E}_m$, 且 $\mathscr{E}_m$ 在点 x 是点有限的. X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 称为一个 θ 覆盖, 如果 $\mathscr{U}$ 有由一列开加细所组成的 θ 序列.

(ii) 设 $\lambda \geq \omega$. X 是 λ 次亚紧的, 如果 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的开覆盖是 θ 覆盖. ω 次亚紧空间常称可数次亚紧的.

(iii) 设 $\lambda \geq 2$. X 是 λ 次仿紧的[Bur69], 如果 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的开覆盖有 σ 离散闭加细.

由 §2.1 知每个 λ 次仿紧空间是 λ 次亚紧的.

命题 1.2.1. X 的一个开覆盖 $\mathscr{U}$ 是 θ 覆盖 $\Leftrightarrow$ X 有可数闭覆盖 $\{F_n\}$ 使得 $\forall n < \omega, \mathscr{U}|_{F_n}$ 在子空间 F_n 内有点有限的开加细.

证明. $(\Rightarrow)$ 设 $\mathscr{U}$ 是 θ 覆盖. 则 $\mathscr{U}$ 有一列开加细 $\mathscr{V}_n = \{V_{n,\alpha} : \alpha \in \Delta_n\}$, $n < \omega$, 它们构成一个 θ 序列. 对 $m, n < \omega$, 令

$$F_{m,n} = \{x \in X : |\{\alpha \in \Delta_m : x \in V_{m,\alpha}\}| \leq n\}, n \geq 1; F_{m,0} = \phi.$$

则 $\{F_{m,n} : m, n < \omega\}$ 是 X 的可数闭覆盖, 并且 $\mathscr{V}_m|_{F_{m,n}}$ 是 $\mathscr{U}|_{F_{m,n}}$ 在子空间 $F_{m,n}$ 内的点有限开加细.

$(\Leftarrow)$ 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是 X 的开覆盖. 且设可数闭覆盖 $\{F_n : n < \omega\}$ 有命题所说的性质, 即 $\mathscr{U}|_{F_n}$ 在子空间 F_n 上有点有限的开加细 $\mathscr{V}_n$. 不妨设 $\mathscr{V}_n = \{V_{n,\alpha} : \alpha \in \Delta\}$ 使得 $V_{n,\alpha} \subset U_\alpha \cap F_n$. 取 X 的开集 $V'_{n,\alpha}$ 使得 $V_{n,\alpha} = V'_{n,\alpha} \cap F_n$.$\forall n < \omega$, 令

$$\mathscr{G}_n = \{V'_{n,\alpha} \cap U_\alpha : \alpha \in \Delta\} \cup \{(V'_{m,\alpha} \backslash F_n) \cap U_\alpha : m \neq n, \alpha \in \Delta\}.$$

容易验证每个 $\mathscr{G}_n$ 是的 $\mathscr{U}$ 开加细, 且 $\{\mathscr{G}_n : n < \omega\}$ 构成一个 θ 序列. □

推论 1.2.0.1. X 是 λ 次亚紧的 $\Leftrightarrow$ 对于 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的开覆盖 $\mathscr{U}$, X 有可数闭覆盖 $\{F_n : n < \omega\}$, 使得每个 $\mathscr{U}|_{F_n}$ 在子空间 F_n 内有点有限的开加细. □

Smith[1975] 首先给出次亚紧空间的下列有用的推广.

定义 1.2.2. X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 称为弱 $\overline{\theta}$ 覆盖, 如果 $\mathscr{U}$ 有一个开加细 $\mathscr{G} = \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{G}_n$, 符合以下条件

(i) 对每点 $x \in X$, 存在 $n < \omega$ 使得 $\mathscr{G}_n$ 在 x 是点有限的, 且 $(\mathscr{G}_n)_x \neq \phi$.

(ii) $\mathscr{G}^* = \{\bigcup \mathscr{G}_n : n < \omega\}$ 是 X 的点有限开覆盖.

上面的 $\mathscr{G}$ 称为 $\mathscr{U}$ 的一个弱 $\overline{\theta}$ 加细. 设 $\lambda \geq \omega$, 称 X 是 λ 弱 $\overline{\theta}$ 可细 的, 如果 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的开覆盖是弱 $\overline{\theta}$ 覆盖.

稍后, 刘应明在 [Liu77] 提出了一类具有 σ 相对离散结构的空间, 叫狭义拟仿紧空间. 据 [Smith80] 说, Chaber 研究了具有 σ 相对局部有限结构的空间, 称为具 b_1 性质的空间. 该

文接着引入 $B(LF,\omega^2)$ 可细空间作为这两类空间及弱 $\bar{\theta}$ 可细空间的共同推广. 本作者删去 $B(LF,\omega^2)$ 可细空间定义中的条件 (ii), 称它为 $L\omega^2$ 可细空间, 并把它应用到 λ 完满正规空间的分解定理中. 作者还曾在 Jiang[1987a] 中引入过更弱的 b_2^* 性质 (本书 §2.2 中改称 $A\omega^2$ 可细空间), 并应用它建立了仿紧和亚紧空间的分解定理.

定义 1.2.3. ([Smi80], [PS89a]) 让性质 P 代表离散的 (D), 局部有限的 (LF) 和闭的 (C). 设 δ 是可数序数. 空间 X 是 $B(P,\delta)$ 可细的, 如果 X 的每个开覆盖 $\mathscr{U}$ 有一个符合以下条件的加细 $\mathscr{E}=\bigcup_{\beta<\delta}\mathscr{E}_\beta$.

(i) 对每个 $\beta<\delta$, $\mathscr{E}_\beta$ 是子空间 $X\setminus\bigcup_{\mu<\beta}(\bigcup\mathscr{E}_\mu)$ 内的相对 P 的闭子集族.

(ii) 对每个 $\bigcup_{\mu<\beta}(\bigcup\mathscr{E}_\mu)$ 是闭集.

对于的 $P=C$ 情形, 还要求每个 $\mathscr{E}_\beta$ 是 $\mathscr{U}$ 的 1-1 部分加细.

上面的 $\mathscr{E}$ 称为 $\mathscr{U}$ 一个 $B(P,\delta)$ 加细.

定义 1.2.4. X 是狭义拟仿紧的, 如果 X 的每个开覆盖有个加细 $\mathscr{F}=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{F}_n$, 使得 $\forall n<\omega$, $\mathscr{F}_n|_{X\setminus\bigcup_{i<n}\bigcup\mathscr{F}_i}$ 是子空间 $X\setminus\bigcup_{i<n}\bigcup\mathscr{F}_i$ 内的离散闭集族.

事实 1.2.1. X 是狭义拟仿紧空间 $\Leftrightarrow$ X 是 $B(D,\omega)$ 可细的.

这是因为在定义1.2.3 中, 当 $\delta=\omega$ 时, 从条件 (i) 可推出 (ii). 但当 $\delta>\omega$ 时条件 (ii) 不可省略. 作者在分解定理的应用中发现, 条件 (ii) 不是必需的. 去掉它而引入下面的

定义 1.2.5. 下面 $\omega^2=\omega\cdot\omega$ 表示序数积, $\delta\in\{\omega,\omega^2\},\lambda\geq\omega$.

(i) X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为接合的, 如果 $\overline{\bigcup\mathscr{B}}=\bigcup\{\overline{B}:B\in\mathscr{B}\}$.

(ii) X 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 称为一个 $D\delta$ 覆盖, ($L\delta$ 覆盖, $C\delta$ 覆盖), 如果 $\mathscr{U}$ 有一个加细 $\mathscr{F}=\bigcup_{\beta<\delta}\mathscr{F}_\beta$ 使得 $\forall\beta<\delta$, $\mathscr{F}_\beta=\{F_{\beta,\alpha}:\alpha\in\Delta\}$ 是子空间 $X\setminus\bigcup_{\mu<\beta}(\bigcup\mathscr{F}_\mu)$ 内的离散 (局部有限, 接合) 的闭子集族, 并且 $\forall\alpha,F_{\beta,\alpha}\subset U_\alpha$. 这个 $\mathscr{F}$ 称为 $\mathscr{U}$ 的 $D\delta$ 加细 ($L\delta$ 加细, $C\delta$ 加细).

空间 X 称为λ-$D\delta$ 可细的, 如果 X 的每个势 $\leq\lambda$ 的开覆盖是 $D\delta$ 覆盖. 类似地定义 λ-$L\delta$ 可细空间等.

命题 1.2.2. 设 $\mathscr{U}=\{U(\alpha):\alpha\in\Delta\}$ 是 X 的开覆盖, 则下列各条件等价.

(i) $\mathscr{U}$ 是一个 $L\delta$ 覆盖.

(ii) $\mathscr{U}$ 有一个加细 $\mathscr{E}=\bigcup_{\beta<\delta}\mathscr{E}_\beta$ 使得 $\forall\beta<\delta$, $\mathscr{E}_\beta$ 是子空间 $X\setminus\bigcup_{\mu<\beta}(\bigcup\mathscr{E}_\mu)$ 内的局部有限闭集族.

(iii) $\mathscr{U}$ 有一个加细 $\mathscr{P}=\bigcup_{\beta<\delta}\mathscr{P}_\beta$ 使得 $\forall\beta<\delta$, $\mathscr{P}_\beta|_{(X\setminus\bigcup_{\mu<\beta}(\bigcup\mathscr{P}_\mu))}$ 是子空间 $X\setminus\bigcup_{\mu<\beta}(\bigcup\mathscr{P}_\mu)$ 内的局部有限闭集族.

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) 是平凡的.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 设 $\mathscr{U}$ 有一个符合条件 (iii) 的加细 $\mathscr{P}=\bigcup_{\beta<\delta}\mathscr{P}_\beta$, 对每个 $\beta<\delta$ 以及 $P\in\mathscr{P}_\beta$ 取定一个 $\sigma(\beta,P)\in\Delta$ 使得 $P\subset U(\sigma(\beta,P))$. $\square$

推论 1.2.0.2. (i) $D\delta$ 覆盖 $\Rightarrow L\delta \Rightarrow C\delta$.

(ii) 仿定义 §*1.2.5*, 称开覆盖 $\mathscr{U}$ 是一个 $B(P,\delta)$ 覆盖, 如果 $\mathscr{U}$ 有一个 $B(P,\delta)$ 加细. 则 $B(D,\delta)$ 覆盖 $\Rightarrow C\delta$. $B(LF,\delta) \Rightarrow L\delta$. $B(C,\delta) \Rightarrow C\delta$. $B(C,\omega)$ 覆盖 $\Leftrightarrow C\omega$ 覆盖.

下一结果首先发表在 [Smi80], 后来 [Zhu84],[Lon86] 也独立得到.

定理 1.2.1. 每个 $D\omega$ 覆盖是弱 $\overline{\theta}$ 覆盖. 于是 λ 狭义仿紧空间是 λ 弱 $\overline{\theta}$ 可细的.

证明.

定理 1.2.2. ([Liu77]) 每个点有限开覆盖是 $D\omega$ 覆盖. λ 亚紧空间 λ 是狭义拟仿紧的.

证明.

定理 1.2.3. ([Zhu84, [Lon86]) 每个 θ 覆盖是 $D\omega$ 覆盖. 每个 λ 次亚紧空间是 λ 狭义拟仿紧的.

证明.

前述各类弱覆盖性质有下列蕴涵关系:

$$\begin{tikzcd}
\text{次亚紧} \arrow[r] & \text{狭义拟仿紧} \arrow[r] \arrow[d] & B(D,\omega^2)\text{ 可细} \arrow[r] \arrow[d] & B(LF,\omega^2) \arrow[r] \arrow[d] & B(C,\omega^2) \arrow[d] \\
 & \text{弱 }\overline{\theta}\text{ 可细} \arrow[r] & D\omega^2\text{ 可细} \arrow[r] & L\omega^2 \arrow[r] & C\omega^2
\end{tikzcd}$$

一个自然的问题是上面这些竖箭头是否可逆向? 我猜测皆不可逆值得关注的是

§ 1.3. 可扩型空间

本节介绍各类可扩型性质, 包括集体正规的概念和所需的性质. 它们主要应用于各类覆盖性质的分解定理. 集体正规空间是 Bing[1951] 为了研究空间的可度量性而引入的. Katětov [1958] 的研究首先涉及可扩性质. 可扩空间的定义和系统研究则始于 Krajewski[1971].

定义 1.3.1. (i) 设 $\mathscr{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是 X 的一个子集族. X 的子集 $\mathscr{G}$ 称为 $\mathscr{F}$ 的一个扩张, 如果 $\mathscr{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 使得 $\forall \alpha \in \Delta$, $F_\alpha \subset G_\alpha$. 一个扩张称为开的, 如果它的每个元是开集.

(ii) 设 $\lambda \geq 2$, X 是 λ 集体正规的, 如果 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的离散闭子集族的有一个离散的开扩张.

(iii) 设 $\lambda \geq \omega$, X 是 λ 可扩的 (λ 几乎可扩的), 如果 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的局部有限子集族有一个局部有限的 (点有限的) 开扩张.

注释 1.3.1. 显然, X 是 λ 可扩的 $\Leftrightarrow X$ 内的每个势 $\leq \lambda$ 的局部有限闭子集族有一个局部有限的开扩张.

事实 1.3.1. (i) X 是 λ 集体正规的 $\Leftrightarrow X$ 内的每个势 $\leq \lambda$ 的离散闭子集族有一个非交的开扩张.

(ii) X 是 λ 可数集体正规的 $\Leftrightarrow X$ 是正规的.

证明. (i), (ii) 可分别参见 [Eng77] 的 §5.1.17 以及 §2.1.14. □

定义 1.3.2. 设 $\lambda \geq \omega$.

(i) X 是 λ 有界可扩的 (λ 有界几乎可扩的), 如果 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的有界局部有限闭集族有一个局部有限的 (点有限的) 开扩张.

(ii) X 是 λ 离散可扩的 (λ 集体几乎正规的), 如果 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的离散闭集族有一个局部有限的 (点有限的) 开扩张.

这里的集体几乎正规空间在 [Boo73] 中称为点式集体正规的.

(ii) 中的概念出自 [SK71], 有界可扩性出自 [Katě58].

第二章　仿紧空间与次亚紧空间

本章介绍仿紧与次亚紧空间的刻画, 且不附加分离公理. 无论从内容或方法来说, §2.1 和 §2.3 是本书的主要部分.

§ 2.1. 次亚紧空间

次亚紧空间的主要刻画定理是 Junnila[1978] 建立的. 它是覆性质特征理论的重要工作. 本节前部分介绍这一工作. 后部分介绍作者提出的次亚紧空间的分解定理和与它密切相关的集体 θ 正规空间的刻画定理. 它们是 Jiang[1988] 工作的改进.

定义 2.1.1. 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$, $\mathscr{V}, \mathscr{V}_n, n < \omega$ 是 X 的开覆盖.

(i) 称

§ 2.2. 亚紧空间

§ 2.3. 仿紧空间

在点集拓扑学发展初期, Alexandroff 与 Urysohn[1923,1929] 详细研究了紧 (T_2) 拓扑空间. Alexandroff[1924] 引入局部有限子集族的概念. 为了推广紧空间, J. Dieudonne[1944]

第三章　正规覆盖与集体正规空间

经过了 Tukey[1940], Stone[1948] 以及 Michael[1953] 等工作之后, Morita[1962,1964] 给出了正规覆盖的一组刻画. Kodama-Nagami[1974] 作了补充. 我们将在 §3.1 中介绍这些工作. 集体正规空间的刻画, 在 Smith[1977,1978] 中作了专门研究. 在 [1978] 中, 在正规空间的范围内得到集体正规空间的一组刻画. 在该文末的问题 (3) 中提出: 若不附加正规性条件, 能否得到集体正规空间的好的刻画? 我们将在 §3.2 中给出肯定回答. §3.2 还建立了可缩空间的刻画. 这两节的主要结果也将应用到 §4.1 的讨论中.

§ 3.1. 正规覆盖

Junnila[1978,1979] 用半开覆盖刻画了仿紧和次亚紧等空间.

§ 3.2. 集体正规空间

本节将应用在 §1.1.2 中引入的 $C\omega^2$ 和 $D\omega^2$ 覆盖的概念, 分别刻画正规空间和集体正规空间.

第四章　λ 完满正规与次仿紧空间

§4.1. 次仿紧空间

§4.2. λ 完满正规空间

§4.3. 正规 λ 强仿紧空间

参考文献

Alexandroff, P.

[Ale24] Sur les ensembles de la premiere classe et les ensembles abstraits, C. R. Acad. Paris 178 (1924),185-187.

Alexandroff, P. and Urysohn, P.

[AU23] Une condition necessaire et suffisante pour qu'une class ($\mathscr{L}$) soit une class ($\mathscr{D}$), C. R. Acad. Paris 177 (1923), 1274-1276.

[AU29] Memoire sur les espaces topologiques compactes, Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam 14 (1929) 1-96.

Arens, R. and Dugundji,J.

[AD50] Remark on the concept of compactness, Portugaliae Math., 9 (1950), 141- 143.

Arhangel'skit, A. V.

[Arh61] New criteria for paracompactness and metrizability of an arbitrary T_1 space, DokI. Akad. Nauk SSSR,141 (1961),1051-1055.

[Arh66] Mappings and spaces, Russian Math. Surveys 21, no.4 (1966),115-162.

Bing, R. H.

[Bin51] Metrization of topological spaces, Canad. J. Math., 3 (1951),175-186.

Boone, J. R.

[1971] Some characterizations of paracompactness in k-spaces, Fund. Math. ,72,145-155.

[1973] A characteriztion of metacompactness in the class of A-refinable spaces, Gen. Topology Appl. 3,253-264.

[1975] On irreducible spaces, Bull. Austral. Math. Soc.,12,143-148.

Bourbaki.N.

[1961] Topologie generale, ch. I et I . Paris.

Burke, D. K.

[1969] On subparacompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc.,23,655-663.

[1970] On p-spaces and wA-spaces, Pacific J. Math. ,35,285-296.

[1974] A note on R. H. Bings Example G, Top. Conf. VPI. Lecture Notes in Mathematies, 375 (Springer-Verdag, New York) 47-52. 9

[1980] Orthocompactness and perfect mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 49,484-486.

[1979] Refinements of locally countable collections, Topology Proc.;4,19-27.

[1984] Covering properties, in K. Kunen and J. Vaughan, Eds, Maniabook of Set-Theoetic Topology. (North-Holl and Amsterdam.)

Cech, E.

[1937] On bicompact spaces, Ann. of Math. ,38,823-844.

Chaber,J.

[1979] On subparacompactness and related properties, Gen. Topology Appl. 10,13-37.

Chiba,K.

[1986] On the D-property of o-products, Math. Japonica, 32,5-10. Corson,H. H.

[1959] Normality in subsets of product spaces, Amer. J. Math., 81, 785- 796.

Dai Mumin(戴牧民)

[1981] σ-按点族正规，σ-亚紧性和 σ-按点有限基, 数学学报, 24,656-667.

[1983] 一类包含 Lindelof 空间和可分空间的拓扑空间, 数学年刊, 4A (5),571-575.

[1983a] 包含 * Lindelof 数的几个拓扑空间基数不等式, 数学学报, 26, 731-735.

[1986] 涉及到 Calibre 和 * Lindelof 性的几个反例，数学学报;29,399-402.

Dieudonne,J.

[1944] Une généralisation des spaces compacts, Journ. de Math. Pures et Appl.,23,65-76.

Dowker, C. H.

[1951] On countably paracompact spaces, Canad. Journ. of Math., 3, 219-224.

Engelking, R.

[1977] General Topology (Polish Scientfic Publishers, Warszawa)

[1978] Dimension Theory (Polish Scientfic Publishers, Warszawa)

FrinK.A. H.

[1937] Distance functions and the metrization problem. Bull. Amer. Math Soc..43.133-142.

Go Guoshi(高国士)

[1980] 仿紧性与完备映象, 数学学报，第 5 期 794-796.

[1986] 两个映射定理，数学年刊,A,666-669. 〔1986al 关于闭包保持和定理，, 数学学报,29,58-62.

Gao zhimin (高智民) [1987] *I Siwiec 6 –1M.*#**,30,671-674.

Gittine, R. F.

[1974] Some results on weak covering conditions, Canad. J. Math., 20, 1152-1156. [1977] Open mapping theory, in : G. M. Reed, ed. Set-Theoretic Topologv (Academic Dress,New York 141-191. Cruenhagent.

[1979] Paracompactness in normal locally connected, locally compact spaces Toology Proc. ,4,393-405. eP [1979a] On closed images of orthocompact spaces. Proc.tAmer. Math. Soc. 77,389-394.

[19847 Generalized metric spaces, in : K. Kunen and J. Vaughan, Eds, Hand- oook of Set-Theoretic Topology (North-Holland Amsterdam)

Guíko. S. P

[1977] Un the properties of sets lying in 2-products, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 237,505-508. (in Russian). Heath,R. W. [1964] Screenabilitv. pointwise paracompactness and metrization of Moore

spaces, Canad. J. Math. 16.763-770.

Henriksen,M. and Isbell J. R [1958] Some Droperles of compactifications, Duke Math. Journ., 25, 842- 845. [19707 A note on subparacompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. ,25,842- 4 Huang Haoran (7 18) [1987〕关于 c-可膨账性和 csf-可膨账性工（I)，江西师范大学学报，第 2 期,1-10（第 4 期,27-34)．

Jiang Jiguang(蒋继光）

[19867 关于仿紧性与拓扑空间的可度量往，数学学报，29,697-701.

[1987〕仿紧性的一个刻画，四川大学学报,24,256-261.

〔1987a]：仿紧性的一个刻画 (直)，科学通报，第 15 期，1128-1131.

[19877 Metrizability of topological spaces with a cs-regular base, O and A in General Topology, 5,243-248.

[1988 A characterization of submetacompactness, Chin. Ann. of Math. 9B (2),151-155.

[1989〕仿紧性与性质 b1, 数学学报，32,551-555

Jiang Shouli(I=7)

[1986] Every strict p-space is 6-refinable. Topology Proc.,11,309-316.

19887 On an Junnilas problem, O and A in General Topology, 6,43-4/

Jiang Zehan (江泽涵)

[1978]《拓扑学引论》, 上海科技出版社：

Jones E. B. L1937] Concerning normal and completely normal spaces, Bull. Amer. Soc. 43,671-677.

[1978] On submetacompactness, Topology PrOc.,3,375-405.

[1978a] Covering properties and I quasi-uniformities of topological spaces Doctoral dissertation. V.P. I. and State Univ

[1979] Paracompaciness, metacompactness,and sen 11-onen covers Proc Amer Math. Soc 1.73.244-240.

1979a Metacompactness, paracompactness, and interior-preserving Open covers, Trans. Amer. Math. Soc. -249,373-385.

[1980] Three covering properties, in; G. M. Reed, ed, Surveys in General Topology (Academic Press New York 195-245).

Kao Kuoshi and Wu Lisheng()

[1983] Mapping theoemss on mesocompact spaces, Proc. Amer. Soc., 89, 355-358.

Katětov M. [1951] Measures in fully normal spaces, Fund. Math. 38 73-8417 5 1958 Extension of locally finite coverings, Colloq. Math. 6,145-151. KatutaY. Japan Acad. 45,692-695. [19697 On strongly

[1975] Expandability and its generalizations. Fund. Math. 87.231-250. Kombarov,A. P. and Malyhin, V.l. [1973] On -products, Dokl. Akad. Nauks SSSR, 213,774-776.. (in Rus- sian)

Kramer T.R. [1973] A note on countably subparacompact spaces, Pacific J. Math. 46,

[1976] 209-213. On the product of two topological spaces, Gen. Topology Apol..6.1- 16.

Krajewski,L.L. [1971] Expanding locally finite collections, Canad. J. Math. ,23,58-68.

Kuratowskiak

[1933] Topologie I Warszawa

Lane, D. J

[1980] Paracompactness in perfectly normal, locally connected, locally com dact spaces, Proc. Amer. Math. Soc.,80.693-696. Lewis, I. W.

[1977] On covering DroDerties of subspaces of R. H. Bing's Example G Gen. Topology Appl.,7,109-122。

Lin Shou(林寿)

[1988] 闭映射不能保持工仿紧性及紫式仿紧性，苏州大学学报, 第 2 期,184-187.

Liu Yingming (刘应明)

[1977] 一类包含弱仿紧空间与次仿紧空间的拓扑空间，数学学报，20，212-214.

[1978] σ-集体正规与正规，四川大学学报，第 1 期, 11-17.

Long Bing (龙冰)

[1986] 几个覆盖性质与分离性，数学学报，29,666-669.

LutzerAD.J. das [1972] Another property of the Sorgenfrey line, compositio Math. 24,359- 363. Macke. 1967 Directed covers and paracompact spaces, Canad. J. Math. , 19,049- 654 [1969] Product spaces and paracompactness, J. London Math. Soc.,1,90- 94

McAuley,L. F.

[1958] A note on complete collectionwise normalty and -Proc. Amer. Math. Soc. 9,796-799.

Michael. .A

[1953] A note on paracompact spaces,Proc. Amer. Math. Soc., 4 831-838.

[1955] Point-finite and locally finite coverings, Canad. J. Math: , 7, 275. bat 270 G8811

[1957] Another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. , 8 822-828. a 1959 Yet another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. SoC. y 10,309-314.

[1963] The product of a normal space and a metric space need. not oe nor- mal, Bull. Amer. Math. Soc. ,69,375-376.

[1968] b1-quotient maps and cartesian product of goutient Maps, Ann. Inst Fourier (Grenoble) 18,287-302.

197119 Paracompactness and the Lindelof property in finite and countable cartesion products, Compositio Math. 23 199-214. Moore,R. L.

[1935] A set of axioms for plane analysis situs, Fund. Math..25.13-28.

MoritaK

[1962] Paracompactness and product spaces Fund Math. 50. 223-236.'39 E19647 Products of normal spaces with metric spaces ,Math. Ann. ,154,365- 382.
Mrowka.s. [19597 Compactness and product spaces, Coll. Math. 7,19-22. Nagami,K. [19557 Paracompactness and strong screenability, Nagaya Math. Journ., 8, 83-88. [1969] 2-spaces. Fund. Math.65.168-192.
Nagatay.
[19577 A theorem for metrizability of a topological space, Proc. Japan A-cad. ,33,128-139. [1985] Modern General Topology, North-Hollark Publ. Co. Amsterdam.
Nvikos,P.d.
[1977] CoveriNń Droperl es on G-scalletedi spaces ; Topology. Proc., 2,509- 542. Pol, R ESTER
[1977] A perfectly normal locally metrizable non-paracompact space, Fund Math. 97,37-42. Potocznyah. [1973] Closure-preserving families of compact sets, Gen. Topology ApDI. 3,243-248 Potoczny ,H. and Junnila H. J. K
[1975]Closure-preserving families and metacompactness, Proc. Math. Soc. 53.523-529.
Przvmusinste
[1980] Normality and paracompactness in finite and countable cartesian products Fund. Math.. 105.87-104.
[1984] Products of normal spaces, in. K. Kunen and J. Vaughan, Eds. Handbook Set-Theoretic Topology. North-Holland Amsterdam.
Pu Paoming, Jiang Jiguang and Hu Shuli. (蒲保明, 蒋继光, 胡淑礼)
[1985〕拓扑学, 高等教育出版社.
Rudin.M. E.
[1971] A normal space X for which XX I is not normal, Fund. Math., 73, 179-186.
[1975] The normality - of products with a compact factor, Gen. topology AD,5,45-59.
[1977] 2-products of metric spaces are normal, Preprint.
[1983] A norma screnao non-arcompact snace. Topology Appl. , 15, 313-322.
[1983a] Collectionwise norm ally in screenaole spaces, Proc. Amer. Matn Soc.,87,347-350.
RudinaMbt.and StarbidaM
1975 Products with a metric factor, Gen. Topology Appl. ,5,235-248.
Sconyers, W. B
[1970] Metacompact spaces and well-ordered open coverings, Notices Amer Math. Soc..18,230
Singal,M. K. and Arva,S. [1969] On m-paracompact spaces, Math. Ann 13181.119-133.
Siwiec, F. and Mancuso, V.J.
[1971] Relations among Certain maDDIngs and conditions for therecque lence. Gen. Topology ADDl. 1,33-41.
Smirnov, Yu. M.
[1956] On strongly paracompact spaces, Izv. Akad. Nauk SSSR, Math. Ser. 20,253-274.

Smith, J. C.

[1975] Properties of weak refinable spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 53, 511-517.

[1976] On 0-expandable spaces, Glasnik Math. 11 (31) ,335-346.

19807 Irreducible spaces and property b, Topology Proc. 5,187-200. Smith J. C. and Krajewski,L. L collectionwise normality, Trans. Amer. Math.

[1971] Exoandability and Soc.,160,437-451.

Sorgenfrev-R.H.

[1947] On the topological product of paracompact spaces, Bull. Amer. Math. Soc.,53,631-632. Starbird,M.

[1974] Normality in products with a compact factor, Thesis, Univ. of wis consin. Madison

[1948] Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc.,54, 977-982.

[1960] on paracompactness. facific lourn. of Math. ,10,1043-1047.

[1971] a or prcompactness. rund. Matn..72.189-201.

Telzarsky.R.

[1975 Spaces defined by topological games,Fund. Math. ,88,193-223

[1976] Concerning two covering properties, Collog. Math. , 46,57-61.

Teng Hui (滕辉)

[1989] On collectionwise normality of product spaces, O and A in General Topology,7,31-42.

Tietze,H.

[$_1951 UberFunktionen, dieaufeinerabgeschlossenenMengestetigsind.Journ.furdiereineandangew.$
14.

Tukey. J. W.

[1940] Convergence and uniformity in topology, Ann. of Math. Studies. Princeton.

Urysohn,P.

L1925] Über die Mächtigkeit der zusammenhangenden Mengen, Math. Ann. I 94,262-295.
Vaughan I E. [1970] Linearly ordered collections and paracompactness, Proc. Amer, Math Soc ,24,186-192.

Wang Guojun (王国俊)

[19887] I-fuzzy 拓扑空间论, 陕西师范大学出版社.

Wang Shutang(ER*)

19647 Remarks on c,-additive spaces, Fund. Math. ,55,125-136.

[1981] The rational line partitions every selt-dense metrizable space, LOpolo by Appl.,12,331-332.

Watson Was.

[1982] Locallv compact normal spaces in the constructiole universe, Canad. I Math. ,34,1091-1096.

wicked Elle. and WorrellarsTam

[1979] A covering propertv which implies isocompactness. Lopology HrOC. .213-224. 1966 A characterization of metacompact spaces, Portugal. Math. , 25,1/1- 174.

[1966a] The Closed continuons images or metacompact tonologica spaces Portugal. Math. 25.175-179.

[1967] Some properties of fully normalcy and their relations to Cech com deteness.Notices Amer. Math. DOC. ,14.555. [1968] Paracompactness as a relaxation of full normalcy ; Notices Amel Math. Soc.15,661.

Worrell Ir. J. M. and Wicke H. H.

[1965] Charcterizations of developable topological space, Canad. I. Math. 17.820-830. [1979] A covering property which implies isocompactness, Proc. Math. Soc.,79,331-334.

Wu Lisheng (吴利生) [1984] 关于有限到一伪开映射的一点注记，苏州大学学报，第 1 期,8- 12

[1985] d-refinabilty and some related propertics, 中日一般拓扑学学术会议上的报告，北京：[1987〕关于序闭镶加细的一点注记，苏州大学学报，第 1 期,L-6

Xiong Jicheng (熊金城) [1982〕点集拓扑讲义，人民教育出版社.

Yauma, I

[1976] Solution of K. Telgarskys proolem, Proc. Japan. Acad. , 52, 4348- 350.

[1984] Generalized metric spaces(在中国讲学的讲义)

[1989] On a problem of paracompactness, in, Aostracts, China-Japan Topol- o:y Symposium.

Yang Changcheng(杨长诚)

[1986〕中紧性及其推广, 四川大学硕士论文摘要汇集，1987 年,1-2 期

Yang Shoulian and Williams S. W. (74)

[1987 On the countable box product of compact ordinals, Topology Proc. Zenor

[1973] Certain subsets of products of -refinaole spaces are realcompact, Proc. Amer. Soc.,40,612-614.

Zhong Ning(钟宁)

[1984] 关于。一可膨账空间，硕士论文，数学年刊, 7A(4), 1986,482-488

Zhu Jun (朱俊)

[1984] 拟仿紧和狭义拟仿紧空间的一些性质, 数学研究与评论, 第 1 期, 9-13.

[19887] On collectionwise subnormal spaces, Chin. Ann. of Math. 9B (2). 21 6-220

名词索引