覆盖性质有一类型的刻画是把它们分解成另两类较弱的拓扑性质的和. 其中一类是可扩型性质, 另一类是较弱的其它覆盖性质. 例如, 一个拓扑空间是仿紧的当且仅当它是可扩的和次亚紧的. 我们把这种类型的刻画叫分解定理. 本章第 2 节介绍用于各种分解定理的弱覆盖性质. 第 3 节则介绍用作另一分解因子的可扩型性质. 它们的应用将在后面的章节中介绍.

0.1 记号、术语与基本事实

集合简称集, 集的元素简称*元*. 本书中的全称量词"对每一个"或符号"$\forall$"经常省略. 例如, "对每一个 $\alpha \in \Delta$, $A_\alpha \subset B_\alpha$", 常简述为"$A_\alpha \subset B_\alpha$". 但存在量词 $\exists$ 不可省略. 等号"="的基本用法是, 它两端的集具有相同的元. 我们还赋与它一种广义的用法, 让 P, Q 表示由若干字母组成的符号, 则 $P = Q$ 可以表示 P 是 Q 的一个名称 (暂用的或专用的). 例如 $A = \{x, y\}$, 这里 A 是右边那个无序对的暂用名称. $\mathbb{R} = \{x : x$ 是一个实数$\}$ 表示我们总用 $\mathbb{R}$ 表示实数直线并赋予区间拓扑. $\phi = \{u : u \neq u\}$ 表示唯一的*空集*. P 也可以是 Q 的一个缩写或简记. 如 $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$, 叫 X 的幂集. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ 叫一个*有序对*. 当 $A \neq \phi$ 且 $B \neq \phi$ 时, $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$. $B^A = \{f \subset A \times B : f$ 是从 A 到 B 内的一个函数$\}$. $A \times \phi = \phi$. $B^\phi = \{\phi\}$. 映射与函数同义. 若 $f \in B^A$, 常记 $f : A \to B$. 称 f 是一个单射或者 1-1 的, 如果 A 内不同的元在 f 下有不同的像. 称为 f 是一个满射或到上的, 如果 B 的每个元皆是 A 内某个元的像. 既是单射又是满射则称为一个双射. 设 $C \subset A$, 则 $A|_C = f \cap (C \times B)$ 叫 f 在 C 上的*限制*.

我们用 α, β, γ 等表示序数. $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$. $\beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta < \alpha$. 基数是初始序数, 用 κ, λ 等表示. $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 表最小无限基数. 它的元, 即自然数, 用 m, n, i, k 等表示. 对 $n > 0, n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. 我们用 $|A|$ 表示 A 的*势*或*基数*. 记 $[A]^0 = \{\phi\}$. 对 $n \geq 1, [A]^n = \{S \subset A : |S| = n\}$. $[A]^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} [A]^n$.

0.1.1 集族

设 Δ 是以序数为元的一个集. 符号 $\{D_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 称为集 X 的一个子集*族*或 X 内的一个*集族*是指存在一个函数 $f : \Delta \to \mathscr{P}(X)$ 使得 $\forall \alpha \in \Delta, f(\alpha) = D_\alpha$. Δ 叫这个集族的指标集. $\mathscr{P}(X)$ 的每子集 $\mathscr{A}$ 就是一个集族. 因为设 $|\mathscr{A}| = \lambda$ 且设 $f : \lambda \to \mathscr{A}$ 是一个双射. 令 $A_\alpha = f(\alpha)$, 则 $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \lambda\}$.

现设 $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是 X 的一个子集族. 我们把 $|\Delta|$ 称为族 $\mathscr{D}$ 的势. 设 $E \subset X$. 下列记号是常用的.

$\mathscr{D}|_E = \{D_\alpha \cap E : \alpha \in \Delta\}$.

$(\mathscr{D})_E = \{D_\alpha : \alpha \in \Delta, D_\alpha \cap E \neq \phi\}, \mathrm{st}(E, \mathscr{D}) = \bigcup(\mathscr{D})_E$.

设 $x \in X$. $(\mathscr{D})_x = \{D_\alpha : \alpha \in \Delta, x \in D_\alpha, \mathrm{st}(x, \mathscr{D}) = \bigcup(\mathscr{D})_x$.

若 $\Gamma \subset \Delta$, 则集族 $\{D_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ 称 $\mathscr{D}$ 的一个子族. 当 Δ 是空集时, 我们认为所有的族 $\{D_\alpha : \alpha \in \phi\}$ 皆等于单元集 $\{\phi\}$.

与集族类似, 以序数 β 为定义域的函数 $x : \beta \to X$ 称集 X 内的的一个序列或点列, 记为

$x = \{x_\alpha : \alpha \in \beta\}$. 此处 $x_\alpha = x(\alpha)$ 称一个 β 序列. ω 序列也记为 $(x_0, x_1, \ldots)$. 0 序列是 ϕ. 为了免与开区间混淆, (x_0, x_1) 也常记为 $< x_0, x_1 >$.

0.1.2 空间与覆盖

拓扑空间简称为空间. 不附加任何分离公理. 正规、正则空间也不必是 T_1 的. 此后的, 凡 X,Y 皆表空间. 设 $x \in X$, 记 $\mathrm{top}(x) = \{W : W$ 是 X 的开集, 使得 $x \in W\}$. 此即 x 的邻域系. 设 $A \subset X$, A° 与 $\overline{A}$ 分别表示 A 在 X 中的内部和闭包. 设 $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是 X 的一个子集族, 则记 $\mathscr{D}^\circ = \{D_\alpha^\circ : \alpha \in \Delta\}$, $\overline{\mathscr{D}} = \{\overline{D}_\alpha : \alpha \in \Delta\}$. 当 $\bigcup \mathscr{D} = X$ 时, 称 $\mathscr{D}$ 是 X 的一个覆盖. 二覆盖之间的一个基本关系叫加细. 设 $\mathscr{V} = \{V_\beta : \beta \in \Gamma\}$ 是 X 的另一子集族, 称 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$, 如果 $\forall \beta \in \Gamma$, $\exists \delta(\beta) \in \Delta, V_\beta \subset D_{\delta(\beta)}$. 称 $\mathscr{V}$ 垫于 $\mathscr{D}$, 如果 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$ 且 $\forall B \subset \Gamma$, $\overline{\bigcup_{\beta \in B} V_\beta} \subset \bigcup_{\beta \in B} D_{\delta(\beta)}$. 若 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$ ($\mathscr{V}$ 垫于 $\mathscr{D}$), 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个部分加细 (部分垫状加细). 若进一步合条件 $\bigcup \mathscr{V} = \bigcup \mathscr{D}$, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个加细 (垫状加细). 称 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个收缩 (精确加细), 如果 $\mathscr{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 使得 $\forall \alpha \in \Delta, \overline{W_\alpha} \subset D_\alpha$ ($W_\alpha \subset D_\alpha$) 且 $\bigcup \mathscr{W} = \bigcup \mathscr{D}$. 称 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{D}$ 的精确垫状加细, 如果 $\bigcup \mathscr{W} = \bigcup \mathscr{D}$ 且对每个 $B \subset \Delta$, $\overline{\bigcup_{\alpha \in B} W_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in B} D_\alpha$. 族 $\mathscr{D}$ 称为开的 (闭的), 如果它每个元是 X 的开 (闭) 子集.

定义 0.1.1. *设 $\lambda \geq 2$. X 是 λ 可缩的, 如果 X 的每个势 $\leq \lambda$ 的开覆盖有一个开收缩, ω 可缩常称为可数可缩.*

λ 可缩空间显然是正规的. 并且 X 是 λ 可缩的当且仅当它的每个势 $\leq \lambda$ 的开覆盖有一个闭收缩.

注释 0.1.1. 前一定义中的"势 $\leq \lambda$"与"势 $= \lambda$"等价. 换言之, X 是 λ 可缩的 $\Leftrightarrow X$ 的每一个形如 $\mathscr{V} = \{V_\beta : \beta \in \lambda\}$ 的开覆盖有一个开收缩.

事实上, 若 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是合条件 $|\Delta| \leq \lambda$ 的开覆盖. 设 $f : \Delta \to \lambda$ 是双射

定义 0.1.2. *(i) 集族 $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ 是上升的, 如果 $\forall \alpha, \beta \, (\alpha < \beta < \lambda \Rightarrow D_\alpha \subset D_\beta)$.*

(ii) 集族 $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 是定向的, 如果 $\forall \alpha, \beta \in \Delta \, \exists \gamma \in \Delta \, (D_\alpha \bigcup D_\beta \subset D_\gamma)$. 对此 $\mathscr{D}$, 我们记 $\mathscr{D}^F = \{\bigcup_{\alpha \in S} D_\alpha : s \in [\Delta]^{<\omega}\}$, 易见 $\mathscr{D}^F$ 总是定向的. 并且 $\mathscr{D}$ 是定向 $\Leftrightarrow \mathscr{D}^F$ 加细 $\mathscr{D}$.

二集 A 与 B

0.1.3 内部保持族与半开覆盖

0.1.4 函数开集

0.2 弱覆盖性质

0.3 可扩型空间