覆盖性质的特征理论

一般拓扑学论题之一

蒋继光

序　言

本书介绍基本覆盖性质的特征理论, 重心是仿紧空间和次亚紧空间的刻画. 所谓基本覆盖性质还包括亚紧性, 次仿紧性, 正规覆盖, 可缩性和强仿紧性等. 某类覆盖性质的特征或刻画 (characterizations) 是指与该性质的原始定义等价的命题. 这些特征命题一般比原始定义更弱. 自从 A.H.Stone [1948] 建立 T_2 仿紧性的重合定理以来，寻找仿紧空间及广义仿紧空间的各种各样的特征的努力一直延续至今. 发现不少美妙定理与精巧技术，形成系统理论. 本书试图叙述这一领域的主要成果，全部给予证明. 仿紧空间的刻画分别在节 6 与节 10 介绍，节 6 介绍不附加分离公理的仿紧性的刻画. 节 10 则介绍包含 T_2 仿紧空间为子类的 λ 完满正规空间的刻画. 作为它的另一子类, 正规 λ 强仿紧空间, 在节 11 中介绍. 节 4 介绍次亚紧空间的刻画. 这三节是特征理论的重心. 节 7 介绍正规覆盖的刻画，包含了点集拓扑学发展早期的一些好结果. 节 8 介绍集体正规空间与可缩空间的刻画. 这两节的内容是基本的, 不仅有其自身的意义，也是节 10 中定理证明需要引用的. 节 9 与节 5 分别介绍次仿紧与亚仿紧空间的刻画. 每种覆盖性质有一类型刻画，我们称之为分解定理, 即这种刻画表现为比它较弱的两种拓扑性质之和 (或两类较弱空间类的交). 其中一类是可扩型空间，另一类我们称之为弱覆盖性质. 我们在节 2 与节 3 中分别介绍这些空间需要的知识. 其中也有值得学习和欣赏的好结果。

有关覆盖性质的特征理论的已有文献，我愿推荐: [Bur84], [Jun80], [Gao2008] 和 [Yas89].

本书假定读者了解点集拓扑学的基础知识, 如 [Eng77] 的前 5 章, 或 [Gao2008] 的前 6 章. 集合论只需了解基数与序数的一般性质.

本书的参考文献只限于本书所引用者. 我在此向每一位作者谨致敬意和谢忱. 最后, 我对部分作者被引用的工作 (他们引入的概念和建立的定理的) 做了一个索引. 按照每一位作者被引用论文的最早发表年份为序排列他们的姓名. 这个索引有助于了解特征理论的发展历史.

蒋继光

于成都四川大学竹林村

乙未暮春

目　录

第一章　预备

覆盖性质有一类型的刻画是把它们分解成另两类较弱的拓扑性质的和. 其中一类是可扩型性质，另一类是较弱的其它覆盖性质. 例如, 一个拓扑空间是仿紧的当且仅当它是可扩的和次亚紧的. 我们把这种类型的刻画叫分解定理. 本章第 2 节介绍用于各种分解定理的弱覆盖性质. 第 3 节则介绍用作另一分解因子的可扩型性质. 它们的应用将在后面的章节中介绍.

1.1　记号、术语与基本事实

集合简称*集*, 集的元素简称*元*. 本书中的全称量词"对每一个"或符号"$\forall$"经常省略. 倒如, "对每一个 $\alpha \in \Delta$, $A_\alpha \subset B_\alpha$", 常简述为"$A_\alpha \subset B_\alpha$". 但存在量词 $\exists$ 不可省略. 等号"="的基本用法是, 它两端的集具有相同的元. 我们还赋与它一种广义的用法, 让 P, Q 表示由若干字母组成的符号, 则 $P = Q$ 可以表示 P 是 Q 的一个名称 (暂用的或专用的). 例如 $A = \{x, y\}$,

我们用 α, β, γ 等表示序数. $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$. $\beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta < \alpha$. 基数是初始序数, 用 κ, λ 等表示. $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 表最小无限基数. 它的元, 即自然数, 用 m, n, i, k 等表示. 对 $n > 0, n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. 我们用 $|A|$ 表示 A 的*势*或*基数*. 记 $[A]^0 = \{\phi\}$. 对 $n \geq 1, [A]^n = \{S \subset A : |S| = n\}$. $[A]^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} [A]^n$.

1.2　空间与覆盖

第二章　仿紧空间与次亚紧空间

第三章 正规覆盖与集体正规空间

第四章　λ 完满正规与次仿紧空间

名词索引