覆盖性质的特征理论

一般拓扑学论题之一

蒋继光

序　言

本书介绍基本覆盖性质的特征理论, 重心是仿紧空间和次亚紧空间的刻画. 所谓基本覆盖性质还包括亚紧性, 次仿紧性, 正规覆盖, 可缩性和强仿紧性等. 某类覆盖性质的特征或刻画 (characterizations) 是指与该性质的原始定义等价的命题. 这些特征命题一般比原始定义更弱. 自从 A.H.Stone [1948] 建立 T_2 仿紧性的重合定理以来，寻找仿紧空间及广义仿紧空间的各种各样的特征的努力一直延续至今. 发现不少美妙定理与精巧技术，形成系统理论. 本书试图叙述这一领域的主要成果，全部给予证明. 仿紧空间的刻画分别在 §2.3 与 §4.2 介绍, §2.3 介绍不附加分离公理的仿紧性的刻画. §4.2 则介绍包含 T_2 仿紧空间为子类的 λ 完满正规空间的刻画. 作为它的另一子类, 正规 λ 强仿紧空间, 在 §4.3 中介绍. §2.1 介绍次亚紧空间的刻画. 这三节是特征理论的重心. §3.1 介绍正规覆盖的刻画，包含了点集拓扑学发展早期的一些好结果. §3.2 介绍集体正规空间与可缩空间的刻画. 这两节的内容是基本的, 不仅有其自身的意义，也是 §4.2 中定理证明需要引用的. §4.1 与 §2.2 分别介绍次仿紧与亚仿紧空间的刻画. 每种覆盖性质有一类型刻画，我们称之为分解定理, 即这种刻画表现为比它较弱的两种拓扑性质之和 (或两类较弱空间类的交). 其中一类是可扩型空间，另一类我们称之为弱覆盖性质. 我们在 §1.2 与 §1.3 中分别介绍这些空间需要的知识. 其中也有值得学习和欣赏的好结果。

有关覆盖性质的特征理论的已有文献，我愿推荐: [Bur84], [Jun80], [Gao2008] 和 [Yas89].

本书假定读者了解点集拓扑学的基础知识, 如 [Eng77] 的前 5 章, 或 [Gao2008] 的前 6 章. 集合论只需了解基数与序数的一般性质.

本书的参考文献只限于本书所引用者. 我在此向每一位作者谨致敬意和谢忱. 最后, 我对部分作者被引用的工作 (他们引入的概念和建立的定理的) 做了一个索引. 按照每一位作者被引用论文的最早发表年份为序排列他们的姓名. 这个索引有助于了解特征理论的发展历史.

蒋继光

于成都四川大学竹林村

乙未暮春

目　录

第一章　预备

覆盖性质有一类型的刻画是把它们分解成另两类较弱的拓扑性质的和. 其中一类是可扩型性质，另一类是较弱的其它覆盖性质. 例如, 一个拓扑空间是仿紧的当且仅当它是可扩的和次亚紧的. 我们把这种类型的刻画叫分解定理. 本章第 2 节介绍用于各种分解定理的弱覆盖性质. 第 3 节则介绍用作另一分解因子的可扩型性质. 它们的应用将在后面的章节中介绍.

1.1　记号、术语与基本事实

集合简称*集*, 集的元素简称*元*. 本书中的全称量词“对每一个”或符号“$\forall$”经常省略. 倒如, “对每一个 $\alpha \in \Delta$, $A_\alpha \subset B_\alpha$”, 常简述为“$A_\alpha \subset B_\alpha$”. 但存在量词 $\exists$ 不可省略. 等号“$=$”的基本用法是, 它两端的集具有相同的元. 我们还赋与它一种广义的用法, 让 P, Q 表示由若干字母组成的符号, 则 $P = Q$ 可以表示 P 是 Q 的一个名称 (暂用的或专用的). 例如 $A = \{x, y\}$, 这里 A 是右边那个无序对的暂用名称. $\mathbb{R} = \{x : x \text{ 是一个实数}\}$ 表示我们总用 $\mathbb{R}$ 表示实数直线并赋予区间拓扑. $\phi = \{u : u \neq u\}$ 表示唯一的*空集*. P 也可以是 Q 的一个缩写或简记. 如 $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$, 叫 X 的幂集. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ 叫一个*有序对*. 当 $A \neq \phi$ 且 $B \neq \phi$ 时, $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$. $B^A = \{f \subset A \times B : f \text{ 是从 } A \text{ 到 } B \text{ 内的一个函数}\}$. $A \times \phi = \phi$. $B^\phi = \{\phi\}$. 映射与函数同义. 若 $f \in B^A$, 常记 $f : A \to B$. 称 f 是一个单射或者 1-1 的, 如果 A 内不同的元在 f 下有不同的像. 称为 f 是一个满射或到上的, 如果 B 的每个元皆是 A 内某个元的像. 既是单射又是满射则称为一个双射. 设 $C \subset A$, 则 $A|_C = f \cap (C \times B)$ 叫 f 在 C 上的*限制*.

我们用 α, β, γ 等表示序数. $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$. $\beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta < \alpha$. 基数是初始序数, 用 κ, λ 等表示. $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 表最小无限基数. 它的元, 即自然数, 用 m, n, i, k 等表示. 对 $n > 0, n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. 我们用 $|A|$ 表示 A 的*势*或*基数*. 记 $[A]^0 = \{\phi\}$. 对 $n \geq 1, [A]^n = \{S \subset A : |S| = n\}$. $[A]^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} [A]^n$.

1.1.1　集族

设 Δ 是以序数为元的一个集. 符号 $\{D_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ 称为集 X 的一个*子集族*或 X 内的一个*集族*是指存在一个函数 $f : \Delta \to \mathscr{P}(X)$ 使得 $\forall \alpha \in \Delta, f(\alpha) = D_\alpha$. Δ 叫这个集族的指标集. $\mathscr{P}(X)$ 的每子集 $\mathscr{A}$ 就是一个集族. 因为设 $|\mathscr{A}| = \lambda$ 且设 $f : \lambda \to \mathscr{A}$ 是一个双射. 令 $A_\alpha = f(\alpha)$, 则 $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \lambda\}$.

现设 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是 X 的一个子集族. 我们把 $|\Delta|$ 称为族 $\mathscr{D}$ 的势. 设 $E\subset X$. 下列记号是常用的.

$\mathscr{D}|_E=\{D_\alpha\cap E:\alpha\in\Delta\}$.

$(\mathscr{D})_E=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta,D_\alpha\cap E\neq\phi\}$, $\mathrm{st}(E,\mathscr{D})=\bigcup(\mathscr{D})_E$.

设 $x\in X$. $(\mathscr{D})_x=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta,x\in D_\alpha$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{D})=\bigcup(\mathscr{D})_x$.

若 $\Gamma\subset\Delta$, 则集族 $\{D_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ 称 $\mathscr{D}$ 的一个子族. 当 Δ 是空集时, 我们认为所有的族 $\{D_\alpha:\alpha\in\phi\}$ 皆等于单元集 $\{\phi\}$.

与集族类似, 以序数 β 为定义域的函数 $x:\beta\to X$ 称集 X 内的的一个序列或点列, 记为 $x=\{x_\alpha:\alpha\in\beta\}$. 此处 $x_\alpha=x(\alpha)$ 称一个 β 序列. ω 序列也记为 $(x_0,x_1,\ldots)$. 0 序列是 ϕ. 为了免与开区间混淆, (x_0,x_1) 也常记为 $<x_0,x_1>$.

1.1.2 空间与覆盖

拓扑空间简称为空间. 不附加任何分离公理. 正规、正则空间也不必是 T_1 的. 此后的, 凡 X,Y 皆表空间. 设 $x\in X$, 记 $\mathrm{top}(x)=\{W:W$ 是 X 的开集, 使得 $x\in W\}$. 此即 x 的邻域系. 设 $A\subset X$, A° 与 $\overline{A}$ 分别表示 A 在 X 中的内部和闭包. 设 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 是 X 的一个子集族, 则记 $\mathscr{D}^\circ=\{D_\alpha^\circ:\alpha\in\Delta\}$, $\overline{\mathscr{D}}=\{\overline{D}_\alpha:\alpha\in\Delta\}$. 当 $\bigcup\mathscr{D}=X$ 时, 称 $\mathscr{D}$ 是 X 的一个覆盖. 二覆盖之间的一个基本关系叫加细. 设 $\mathscr{V}=\{V_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 是 X 的另一子集族, 称 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$, 如果 $\forall\beta\in\Gamma$, $\exists\delta(\beta)\in\Delta,V_\beta\subset D_{\delta(\beta)}$. 称 $\mathscr{V}$ 垫于 $\mathscr{D}$, 如果 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$ 且 $\forall B\subset\Gamma$, $\overline{\bigcup_{\beta\in B}V_\beta}\subset\bigcup_{\beta\in B}D_{\delta(\beta)}$. 若 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{D}$ ($\mathscr{V}$ 垫于 $\mathscr{D}$), 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个部分加细 (部分垫状加细). 若进一步合条件 $\bigcup\mathscr{V}=\bigcup\mathscr{D}$, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个加细 (垫状加细). 称 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个收缩 (精确加细), 如果 $\mathscr{W}=\{W_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ 使得 $\forall\alpha\in\Delta,\overline{W_\alpha}\subset D_\alpha$ ($W_\alpha\subset D_\alpha$) 且 $\bigcup\mathscr{W}=\bigcup\mathscr{D}$. 称 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{D}$ 的精确垫状加细, 如果 $\bigcup\mathscr{W}=\bigcup\mathscr{D}$ 且对每个 $B\subset\Delta$, $\overline{\bigcup_{\alpha\in B}W_\alpha}=\bigcup_{\alpha\in B}D_\alpha$. 族 $\mathscr{D}$ 称为开的 (闭的), 如果它每个元是 X 的开 (闭) 子集.

定义 1.1.1. *设 $\lambda\geq 2$. X 是 λ 可缩的, 如果 X 的每个势 $\leq\lambda$ 的开覆盖有一个开收缩, ω 可缩常称为可数可缩.*

λ 可缩空间显然是正规的. 并且 X 是 λ 可缩的当且仅当它的每个势 $\leq\lambda$ 的开覆盖有一个闭收缩.

注释 1.1.1. 前一定义中的与

1.1.3 内部保持族与半开覆盖

1.1.4 函数开集

1.2 弱覆盖性质

1.3 可扩型空间

第二章　仿紧空间与次亚紧空间

2.1　次亚紧空间

2.2　亚紧空间

2.3　仿紧空间

第三章　正规覆盖与集体正规空间

3.1　正规覆盖

3.2　集体正规空间

第四章　λ 完满正规与次仿紧空间

4.1　次仿紧空间

4.2　λ 完满正规空间

4.3　正规 λ 强仿紧空间

名词索引