

# 凯莱《一般拓扑学》公理集合论附录中 引起悖论的误译

龙 冰

## 摘要

科学出版社数学名著译丛 1982 年翻译出版了 John L. Kelley 《一般拓扑学》一书的中文版, 2010 年全新排版出版了第二版. 本文讨论新版公理集合论附录中的误译. 其中对序类的误译和正则公理抵触而明显产生悖论.

关键词: 集合 (set); 类 (class); 序类 (ordinal); 序数 (ordinal number); 分类公理模式 (classification axiom-scheme).

## 1 引言

科学出版社 1982 年在数学名著译丛中首度出版了吴从炘和吴让泉翻译的凯莱 (John L. Kelley) 《General Topology》[1] 一书的中文版《一般拓扑学》. 时隔 28 年, 2010 年又全新排版出版了中文第二版 [2], 可见原著对一般拓扑学领域的发展影响甚大. 反映在教材编写上也是如此 [3]. 译者两版中文译本的工作无疑是值得肯定的. 不太为人知的是, Kelley 该书关于公理集合论附录的重要意义. 该书第 0 章预备知识介绍了一般拓扑学所需的 (非公理化的) 集合论知识, 大部分读者满足于此. 附录将第 0 章的集合论浓缩式地公理化, 虽然称之为初等集合论, 却艰深难懂. 领略一下, 公理集合论附录的英文原文 31 页. 讲了集合的各种运算和大部分公理, 花了整整 21 页后读者才在无穷公理中见识到了真正的集合存在. 之前只是说, 属于某个类的类是集合, 但没有见到集合. 只是假定, 如果集合存在的话怎样怎样. 比如, 如果集合存在的话, 空类  $0$  是一个集合, 即空集. 如此, 必然有大部分读者敬而畏之, 望而止步.

事实上, 凯莱《一般拓扑学》的公理集合论附录独树一帜, 影响不可忽视. 对 ZFC 公理集合论 [4][5] 的扩展主要有三个学派 [7], 它们都在类下面讨论集合, 而 ZFC 则不直接涉及类. Von Neumann–Bernays–Gödel 集合论 [9] 是 ZFC 的保守扩展, 它使用有限公理模式, 得到和 ZFC 相同的结果. Morse–Kelley 集合论 [8] 和 Tarski–Grothendieck 集合论 [10] 都比 ZFC 更强, 后者加了 Tarski 公理以支持范畴论. 凯莱一书的附录概括总结了 Morse–Kelley 集合论, 这方面的研究开始于王浩的工作 [6]. Morse–Kelley 集合论与 Von Neumann–Bernays–Gödel 集合论不同, 不能有限公理化. 但在它的框架下可以证明 ZFC 和 Neumann–Bernays–Gödel 是一致的.

鉴于凯莱一书公理集合论附录的不应忽视的重要性和本身的艰深难读, 读者自然期望它的中文翻译能妙笔生花, 使名著的阅读更为容易. 对照了一下两版中文, 似乎没有改动. 本文试图纠正已是明显悖论的误译, 也商榷在几处是否可能消除潜在的误解以增加可读性. 虽然有批评, 本文作者对于译者面对艰深名著的翻译所作的专业努力仍表示赞赏.

## 2 不能混淆序类和序数

### 2.1 Ordinal 是序类, Ordinal Number 才是序数

在 Morse-Kelley 公理集合论里, 一个集合是满足属于关系  $\in$  的一种特殊的类. 见附录 ([2] 第 173 页) 的

**定义 1**  $x$  为一集合当且仅当对于某一  $y$ ,  $x \in y$ .

在确定  $x \in y$  之前,  $x$  只能叫做类, 不能叫集合. 附录第 A8 节原文的标题是 Ordinals. 该节首先给出正则公理 IV. 附录在定理 38 之后 ([2] 第 177 页) 指出, 自己属于自己这种逻辑自指 (self-reference) 会导致罗素 (Russell) 悖论. 正则公理的目的是防止集合出现  $x \in x$  或  $x \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x$  之类的逻辑自指. 该节从第一个定义/定理 (定理 101) 开始一直到定义 115 之前, 都未自动假设一个 ordinal  $\in$  另一个类. 所以一个 ordinal 是一个类, 但不必是一个集合. 事实上, 原著 ([1] 第 268 - 269 页) 有

**113 THEOREM**  $R$  is an ordinal and  $R$  is not a set.

与 ordinal 不是同, 原著定义 ordinal number 如下

**115 DEFINITION**  $x$  is an ordinal number if and only  $x \in R$ .

重大区别在于, 一个 ordinal number 必定是一个集合, 原因是属于关系  $\in$ .

但是, 中译本不加区别, 把 ordinal 和 ordinal number 都译成了序数. 正确的翻译是, 单纯的 ordinal 应当译为序类, 它不一定是集合. 序数一词应当保留给 ordinal number, 它必定是一个集合. 如果按不加区别的错误译法, 在下面两段 ([2] 第 185 页) 中, 从错译的定理和正确翻译的定义, 我们看到的是悖论: 一个序数不是集合而同时又必定是一个集合.

**定理 113**  $R$  是一个序数, 但不是一个集.

**定义 115**  $x$  是一个序数当且仅当  $x \in R$ .

显然, 定理 113 需要更正为:

**定理 113**  $R$  是一个序类, 但不是一个集合.

整个这一节都应当加以更正, 才能不抵触正则公理 IV. 这里就不详细列出更正了.

### 2.2 定理 140 的证明的误译

下面的定理作为选择公理的应用而被证明. 它对基数的定义和大小的可比较性是至关重要的. 可是, 证明的翻译有严重错误.

**定理 140** 如果  $x$  是一个集, 存在 1-1 函数, 它的值域是  $x$  而它的定义域是一个序数.

在 [2] 第 188 页的证明中,

1) 第 14 行, “应用定理 128, 存在函数  $f$  使得  $f$  的定义域是一个序数”是错误的翻译, 源自对之前的定理 128 的错误翻译, 根据原文以及定理 128 的正确翻译, 此处应为“应用定理 128, 存在函数  $f$ , 使得  $f$  的定义域是一个序类”. 要待验证以下两条以后, 我们才能确定,  $f$  的定义域是一个序数.

2) 第 14 行, 我们见到了正确地翻译出的理由之一: “所以  $f$  的定义域  $= R$  是不可能的”.

3) 第 18 行, “从而  $f$  的定义域  $= R$ ”, 它的明显跟上条 2) 矛盾, 是翻译错误. 根据原文, 应译为: “从而  $f$  的定义域  $\in R$ ”.

### 3 分类公理模式

有两点需要商榷.

#### 3.1 Classification axiom-scheme 的翻译

“Classification axiom-scheme”被翻译成“分类公理图式”. Scheme 是指一种方案、一种计划、一种体系或一种模式, 按照它可以行事. 这里规定以一种特定方式无限种可能地行事的公理, 是一个无限化的公理. 综述, scheme 译为模式, classification axiom-scheme 称为分类公理模式更为妥当.

#### 3.2 分类公理模式的表述

第二条公理的原文是这样表述的:

II. Classification axiom-scheme. An axiom results if ... 意思是说, “如果..., 那么一条公理就由此而产生了.” 所以, 简洁的翻译是: “此为公理, 如果...”

译本是这样翻译的: “一个公理的许多结论, 如果...” 没有谓语, 动词改变意思成了复数名词.

### 4 定理 94 证明的误译

#### 4.1 原著英文 ([1] 第 264 页)

**94 THEOREM** *If  $x$  is an  $r$ -section of  $y$  and  $f$  is an  $r$ - $r$  order-preserving function on  $x$  to  $y$ , then for each  $u$  in  $x$  it is false that  $f(u) r u$ .*

**PROOF** It must be shown that  $\{u : u \in x \text{ and } f(u) r u\}$  is void. If not there is an  $r$ -first member  $v$  of this class. Then  $f(v) r v$ , and if  $u r v$ , then  $u r f(u)$  or  $u = f(u)$ . Since  $f(v) r v$ , then  $f(v) r f(f(v))$  or  $f(v) = f(f(v))$ , but since  $f$  is  $r$ - $r$  order preserving  $f(f(v)) r f(v)$  and this is a contradiction.

## 4.2 书中误译 ([2] 第 182 页)

**定理 94** 如果  $x$  为  $y$  的一个  $r$ - 截片且  $f$  是一个在  $x$  上到  $y$  的  $r$ - $r$  保序函数, 则对于在  $x$  中的每个  $u$ ,  $f(u)ru$  不真.

**证明** 为了得此定理必须证明  $\{u : u \in x \text{ 且 } f(u)ru\}$  是空的. 如果不存在一个此类的  $r$ - 首元  $v$ , 则  $f(v)rv$ , 并且如果  $urv$ , 则  $urf(u)$  或者  $u = f(u)$ . 由于  $f(v)rv$ , 于是  $\underline{f(v)r(f(v))}$  或者  $f(v) = f(f(v))$ . 但是由于  $f$  是  $r$ - $r$  保序的, 所以  $f(f(v))rf(v)$ , 从而推得一矛盾.

## 4.3 更正译文

**定理 94** 如果  $x$  为  $y$  的一个  $r$  截片且  $f$  是一个在  $x$  上到  $y$  的  $r$ - $r$  保序函数, 则对于在  $x$  中的每个  $u$ ,  $f(u)ru$  不真.

**证明** 必须证明  $\{u : u \in x \text{ 且 } f(u)ru\}$  是空的. 如果不空, 那末存在该类的一个  $r$  首元  $v$ . 然后  $f(v)rv$ , 并且, 如果  $urv$ , 则  $urf(u)$  或者  $u = f(u)$ . 由于  $f(v)rv$ , 于是  $\underline{f(v)r(f(v))}$  或者  $f(v) = f(f(v))$ . 但是由于  $f$  是  $r$ - $r$  保序的, 所以  $f(f(v))rf(v)$ , 从而推得一矛盾.

# 5 其它勘误

译文页/行	原著英文	误译	更正译文
182 / -2	$g^{-1}$ is order preserving	$f^{-1}$ 是保序的	$g^{-1}$ 是保序的
184 / 3	The class $E$ is the $\in$ -relation.	类 $E$ 是 $E$ 关系.	类 $E$ 是 $\in$ 关系.

## 参考文献

- [1] John L. Kelley, *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics 27, ISBN 9780387901251, 1975, Springer Verlag.
- [2] J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 数学名著译丛, 吴从炘 / 吴让泉译, ISBN 9787030271181, 2010, 科学出版社.
- [3] 蒲保明, 蒋继光, 胡淑礼, 拓扑学, 1985, 高等教育出版社.
- [4] 蒋继光, 一般拓扑学专题选讲, ISBN 7540812842, 1991, 四川教育出版社.
- [5] H. B. Enderton, *Elements of Set Theory*, ISBN 9780122384400, 1977, Academic Press.
- [6] Hao Wang, *On Zermelo's and von Neumann's axioms for set theory*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 35 (3): 150–155.
- [7] 基维百科, 集合论, [https://en.wikipedia.org/wiki/Set\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Set_theory)
- [8] 基维百科, Morse–Kelley 集合论, [https://en.wikipedia.org/wiki/Morse–Kelley\\_set\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Morse–Kelley_set_theory)

- [9] 基维百科, Von Neumann-Bernays-Gödel 集合论,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Von\\_Neumann-Bernays-Gödel\\_set\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann-Bernays-Gödel_set_theory)
- [10] 基维百科, Tarski-Grothendieck 集合论,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Tarski-Grothendieck\\_set\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Tarski-Grothendieck_set_theory)