Gammatone 滤波器的实现

Gammatone滤波器冲击响应：

$$
g(t) = \frac{at^{n-1}\cos(2\pi f_ct+\phi)}{e^{2\pi b t}}
$$

其中:

- f_c：中心频率
- b ：带宽，$1.019*ERB(f_c)$

中心频率处的增益和相移

$g(t)$ 可分解为两部分的乘积，即
$$
g(t)=a \times r(t) \times s(t)
$$
其中
$$
\begin{align}
r(t)&=t^{n-1}e^{-2\pi bt}\
s(t)&=cos(2\pi f_c t+\phi)
\end{align}
$$

时域相乘==频域卷积，即：
$$
G(f)=a\times R(f)*S(f)
$$

可以分别计算 $R(f)$ 和 $S(f)$ ，即：
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
R(f)=FT(t^{n-1}e^{-2\pi b t})
&=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1} FT(e^{-2\pi bt})}{\partial f^{n-1}}\
&=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}\frac{1}{2\pi b+j2\pi f}}{\partial f^{n-1}}\
&=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{(j)^{n-1}(n-1)!}{2\pi}\frac{1}{(b+jf)^n}\
&=\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\frac{1}{(1+jf/b)^n}
\end{aligned}
\end{equation}
$$

$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
S(f)=FT\left(cos(2\pi f_ct+\phi)\right)
&=e^{j\phi}\delta(f-f_c)+e^{-j\phi}\delta(f+f_c)
\end{aligned}
\end{equation}
$$
所以有
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
G(f)&=a \times R(f)*S(f)\
&=a \times e^{j\phi}\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\frac{1}{(1+j(f-f_c)/b)^n}+ae^{-j\phi}\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\frac{1}{(1+j(f+f_c)/b)^n}\
&=a\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[e^{j\phi}\left(\frac{1}{(1+j(f-f_c)/b)}\right)^n+e^{-j\phi}\left(\frac{1}{(1+j(f+f_c)/b)}\right)^n\right]
\end{aligned}
\end{equation}
$$
对于中心频率处，有
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
\left.G(f)\right|{f=f_c}&=\left.a\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[e^{j\phi}\left(\frac{1}{(1+j(f-f_c)/b)}\right)^n+e^{-j\phi}\left(\frac{1}{(1+j(f+f_c)/b)}\right)^n\right]\right|{f=f_c}\
&=a\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[e^{j\phi}+e^{-j\phi}\frac{1}{(1+2jf_c/b)^n}\right]\

&=a\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\left[e^{j\phi}+e^{-j\phi}\frac{1}{(1+2jQ)^n}\right]
\end{aligned}
\end{equation}
$$
通常 $cos(2\pi f_c t+\phi)$ 中的起始相位 ϕ 为0，即：
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
Gain(f=f_c)&=\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n }\left[1+\frac{1}{(1+j2Q)^n}\right]\
&=\frac{6}{(2\pi b)^4}\left[1+\frac{1}{(1+j2f/b)^4}\right]\
&=\frac{6}{(2\pi b)^4}\left[1+\frac{1}{(1-4Q^2+4jQ)^2}\right]\
&=\frac{6}{(2\pi b)^4}\left[1+\frac{1}{1-8Q^2+16Q^4-16Q^2+2(1-4Q^2)4jQ}\right]\
&=\frac{6}{(2\pi b)^4}\left[1+\frac{1}{16Q^4-24Q^2+1+8jQ(1-4Q^2)}\right]\
&=\frac{6}{(2\pi b)^4}\left[\frac{16Q^4-24Q^2+2+8jQ(1-4Q^2)}{16Q^4-24Q^2+1+8jQ(1-4Q^2)}\right]\
&=\frac{3}{(2\pi b)^4}\frac{r_1e^{\phi_1}}{r_2e^{\phi_2}}\
\end{aligned}
\end{equation}
$$
其中
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
\begin{cases}
r_1 = \sqrt{(16Q^4-24Q^2+2)^2+(8Q-32Q^3)^2}\
\phi_1 = \arctan{\frac{8Q-32Q^3}{16Q^4-24Q^2+2}}\
r_2 = \sqrt{(16Q^4-24Q^2+1)^2+(8Q-32Q^3)^2}\
\phi_2 = \arctan{\frac{8Q-32Q^3}{16Q^4-24Q^2+1}}
\end{cases}
\end{aligned}
\end{equation}
$$

$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
Gain_{f_c} = \frac{3}{(2\pi b)^4}\frac{\sqrt{(16Q^4-24Q^2+2)^2+(8Q-32Q^3)^2}}{\sqrt{(16Q^4-24Q^2+1)^2+(8Q-32Q^3)^2}}\
\phi_{f_c} = \arctan{\frac{8Q-32Q^3}{16Q^4-24Q^2+2}}-\arctan{\frac{8Q-32Q^3}{16Q^4-24Q^2+1}}\
\end{aligned}
\end{equation}
$$

根据Glassberg and Moore给出的ERB的公式
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
Q=\frac{f_c}{b}=\frac{f_c}{24.7*4.37/1000*f_c+24.7}=\frac{1}{0.108+24.7/f_c}
\end{aligned}
\end{equation}
$$
随着中心频率的增大，Q越来越大，此时增益中 $\frac{1}{(1+2jQ)^n}$ 可以近似忽略，此时中心频率处：
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
\begin{cases}
G(f_c)=\frac{a(n-1)!}{(2\pi b)^n}\
\phi(f_c) = 0
\end{cases}
\end{aligned}
\end{equation}
$$

IIR 滤波器实现

$g(t)$ 可分解为两部分的乘积，即
$$
g(t)=a \times r(t) \times s(t)
$$
其中
$$
\begin{align}

r(t)&=t^{n-1}e^{-2\pi bt}\
s(t)&=cos(2\pi f_c t+\phi)
\end{align}
$$

时域相乘==频域卷积，即：
$$
G(f)=a\times R(f)*S(f)
$$

可以分别计算 $R(f)$ 和 $S(f)$ ，即：
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
R(f)=FT(t^{n-1}e^{-2\pi b t})
&=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1} FT(e^{-2\pi bt})}{\partial f^{n-1}}\
&=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}\frac{1}{2\pi b+j2\pi f}}{\partial f^{n-1}}\
&=\frac{1}{(j2\pi)^{n-1}}\frac{(j)^{n-1}(n-1)!}{2\pi}\frac{1}{(b+jf)^n}\
&=\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}\frac{1}{(1+jf/b)^n}
\end{aligned}
\end{equation}
$$

$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
S(f)=FT\left(cos(2\pi f_ct+\phi)\right)
&=e^{j\phi}\delta(f-f_c)+e^{-j\phi}\delta(f+f_c)
\end{aligned}
\end{equation}
$$

$R(f)$ 是低通滤波器，由n个一阶低通滤波器及联得到；$S(f)$ 的功能则是频率搬移，将低通滤波器转换为带通滤波器。在设计滤波器的时候，可以反过来，首先对输入信号降频 f_c ，然后在应用低通滤波器 $R(f)$ ，问题就变的简单了。

1. 降频

   $$
   \begin{equation}
   \begin{aligned}
   x'(t)=IFT(X(f-f_c))&=IFT\left(\int{x(t)e^{-j2\pi(f-f_c)t}dt}\right)\
   &=IFT\left(FT(e^{j2\pi f_c t}x(t))\right)\
   &=e^{j2\pi f_c t}x(t)
   \end{aligned}
   \end{equation}
   $$
   这里其实只考虑了单边谱，因此计算增益的时候应该 $\times 2$

2. 低通滤波器的设计

   使用冲击响应不变法，对 $r(t)$ 进行采样，采样间隔为T，即：
   $$
   \begin{equation}
   \begin{aligned}
   r_d(i) = r(iT)= (iT)^{n-1}e^{-2\pi bTi}=T^{n-1}i^{n-1}e^{-2\pi bTi}\label{eq1}
   \end{aligned}
   \end{equation}
   $$
   令 $k=e^{-2\pi bT}$ ，上式就可以简化为
   $$
   \begin{equation}
   \begin{aligned}
   r_d(i)=T^{n-1}i^{n-1}k^{i}
   \end{aligned}
   \end{equation}
   $$

   因为
   $$
   \begin{equation}
   \begin{aligned}

Z(if(i))&=\sum{if(i)z^{-i}}=-z\frac{\partial\sum{f(i)z^{-i}}}{\partial z}=z^{-1}\frac{\partial\sum{f(i)(z^{-1})^i}}{\partial z^{-1}}\
\end{aligned}
\end{equation}
$$

$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
Z(k^{i})&=\frac{1}{1-kz^{-1}}
\end{aligned}
\end{equation}
$$
所以
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
Z(ik^i)&=z^{-1}\frac{\partial Z(k^{i})}{\partial z^{-1}}=z^{-1}\frac{\partial \frac{1}{1-kz^{-1}}}{\partial z^{-1}}=\frac{kz^{-1}}{(1-kz^{-1})^2}\

Z(i^2k^i)&=z^{-1}\frac{\partial Z(iz^{i})}{\partial z^{-1}}=z^{-1}\frac{\frac{kz^{-1}}{(1-kz^{-1})^2}}{\partial z^{-1}}=z^{-1}\left[\frac{k}{(1-kz^{-1})^2}+\frac{2k^2z^{-1}}{(1-kz^{-1})^3}\right]\

Z(i^3k^i)&=z^{-1}\frac{\partial Z(i^2k^{i})}{\partial z^{-1}}=z^{-1}\frac{z^{-1}\left[\frac{k}{(1-kz^{-1})^2}+\frac{2k^2z^{-1}}{(1-kz^{-1})^3}\right]}{\partial z^{-1}}\
&=z^{-1}\left[\frac{k}{(1-kz^{-1})^2}+\frac{2k^2z^{-1}}{(1-kz^{-1})^3}\right]+z^{-2}\left[\frac{2k^2}{(1-kz^{-1})^3}+\frac{2k^2}{(1-kz)^3}+\frac{6k^3z^{-1}}{(1-kz^{-1})^4}\right]\
&=\frac{z^{-1}k(1-kz^{-1})^2+2k^2z^{-2}(1-kz^{-1})+4k^2z^{-2}(1-kz^{-1})+6k^3z^3}{(1-kz^{-1})^4}\
&=\frac{kz^{-1}+k^3z^{-3}-2k^2z^{-2}+2k^2z^{-2}-2k^3z^{-3}+4k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+6k^3z^{-3}}{(1-kz^{-1})^4}\
&=\frac{k^3z^{-3}+4k^2z^{-2}+kz^{-1}}{(1-kz^{-1})^4}\
&=\frac{kz^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{(1-2kz^{-1}+k^2z^{-2})^2}\
&=\frac{kz^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+2k^2z^{-2}+4k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}\
&=\frac{kz^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+6k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}\
\end{aligned}
\end{equation}
$$
因此
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
Z(r_d(i)) &= Z\left(\frac{(n-1)!}{(2\pi b)^n}T^3*i^3k^i\right)=\frac{6T^3}{(2\pi b)^4}Z(i^3k^i)\
&=\frac{6T^3k}{(2\pi b)^4}\frac{z^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+6k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}\
\end{aligned}
\end{equation}
$$
令 $c=\frac{6T^3k}{(2\pi b)^4}$,则上式子可重写为
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
Z(r_d(i))&=c\frac{z^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+6k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}\
\end{aligned}
\end{equation}
$$
最终得到Gammatone滤波器的公式
$$
\begin{equation}
y(n)=c\left[\underbrace{x(n-1)+4kx(n-2)+k^2x(n-3)}\text{x part}+\underbrace{4ky(n-1)-6k^2y(n-2)+4k^3y(n-3)-k^4y(n-4)}\text{y part}\right]
\begin{aligned}
\end{aligned}
\end{equation}
$$

iii. 滤波结果升频
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
y'(t)=Real\left(IFT(Y(f+f_c))\right)&=Real\left(IFT\left(\int{y(t)e^{-j2\pi(f+f_c)t}dt}\right)\right)\
&=Real\left(IFT\left(FT(e^{-j2\pi f_c t}y(t))\right)\right)\
&=Real\left(e^{-j2\pi f_c t}y(t)\right)
\end{aligned}
\end{equation}
$$
升频后信号的实部即为最终结果。

滤波器中心频率增益归一

因为实现过程中将带通滤波器转换为低通滤波器，因此只需要对低通滤波器0频处的增益归一为1/2即可。
因此，归一化系数应该是
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
scale &= \frac{1}{Z(r_d(i)|{z=1})/2}=\frac{1}{c\frac{z^{-1}(1+4kz^{-1}+k^2z^{-2})}{1-4kz^{-1}+6k^2z^{-2}-4k^3z^{-3}+k^4z^{-4}}|{z=1}/2}\
&= \frac{(1-k)^4}{c*(1+4k+k^2)}
\end{aligned}
\end{equation}
$$

误差

低通滤波器经移频之后，左右两部分可能存在overlap，从而使得带通滤波器中心频率处的增益略大于低通滤波器0频处的增益。误差系数为
$$
\begin{equation}
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(16Q^4-24Q^2+2)^2+(8Q-32Q^3)^2}}{\sqrt{(16Q^4-24Q^2+1)^2+(8Q-32Q^3)^2}} \approx 1
\end{aligned}
\end{equation}
$$