

# 本科生论坛交流分享

## 竞赛问题的简化方法

汇报人：胡兴发

指导老师：张本龚

2022年9月29日

# 主要内容

## ① 数学竞赛问题的简化方法

反例的构造

问题的简化

## ② 建模问题的简化方法——目标建模法

# 反例构造1

**例1.** 若正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $u_n \rightarrow 0$ , 而  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛一般不意味着  $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$ .

例如  $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt (x = \sqrt{t})$  收敛, 但  $\sin x^2 \not\rightarrow 0$   
(当  $x \rightarrow +\infty$  时) .

## 反例构造2

例2. 没有原函数的可积函数.

设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

易见,

$f$  在区间  $[-1, 1]$  上可积。然而,  $f$  在  $[-1, 1]$  上没有原函数。事实上, 如

# 问题简化

设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$$

证: 能否 “不妨设”  $b = 0$ ?

记  $\beta_n = b_n - b, \alpha_n = a_n - a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1}{n} + b \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \end{aligned}$$

# 主要内容

- ① 数学竞赛问题的简化方法
- ② 建模问题的简化方法——目标建模法