本科生论坛交流分享

竞赛问题的简化方法

汇报人：胡兴发

导　师：张本龚

2022年9月29日

主要内容

1 数学竞赛问题的简化方法

- 反例的构造
- 问题的简化

2 建模问题的简化方法——目标建模法

反例构造1

例1.若正项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$收敛，则$u_n \to 0$，而$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛一般不意味着$f(x) \to 0(x \to +\infty)$.

例如$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt (x = \sqrt{t})$收敛，但$\sin x^2 \nrightarrow 0$（当$x \to +\infty$时）.

反例构造2

例2.没有原函数的可积函数.

设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leq x\leq 0\\ 1, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

易见，f在区间 $[-1,1]$ 上可积.

然而，f在 $[-1,1]$ 上没有原函数.

反例构造2

事实上，如果$[-1,1]$上有原函数F，即

$$F'(x)=f(x),\ -1\leq x\leq 1,$$

那么，由达布($Darboux$)定理可知，F'应取得$F'(-1)=0$与$F'(1)=1$之间的每一个值，即f应该取得$f(-1)=0$与 $f(1)=1$之间的每一个值.此与f的定义相矛盾.因此，f在$[-1,1]$上没有原函数. 顺便指出，由$Darboux$定理可知，任何有跳跃间断点的函数都不可能有原函数.

问题简化

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$$

证：能否“不妨设” $b = 0$?

记$\beta_n = b_n - b$，$\alpha_n = a_n - a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$， $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

$$\lim \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{}$$

主要内容