本科生论坛交流分享

竞赛问题的简化方法

汇报人：胡兴发

导　师：张本龚

2022年9月29日

主要内容

1. 数学竞赛问题的简化方法
   - 反例的构造
   - 问题的简化
2. 建模问题的简化方法——目标建模法

反例构造1

例1. 若正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $u_n \to 0$，而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛一般不意味着 $f(x) \to 0 (x \to +\infty)$.

例如 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt (x = \sqrt{t})$ 收敛，但 $\sin x^2 \nrightarrow 0$（当 $x \to +\infty$ 时）.

反例构造2

例2.没有原函数的可积函数.

设

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0\\ 1, & 0\le x\le 1\end{cases}$$

易见，f在区间 $[-1,1]$ 上可积.

然而，f在 $[-1,1]$ 上没有原函数.

反例构造2

事实上，如果$[-1,1]$上有原函数F，即

$$F'(x)=f(x),\ -1\leq x\leq 1,$$

那么，由达布$(Darboux)$定理可知，F'应取得$F'(-1)=0$与$F'(1)=1$之间的每一个值，即f应该取得$f(-1)=0$与 $f(1)=1$之间的每一个值.此与f的定义相矛盾.因此，f在$[-1,1]$上没有原函数. 顺便指出，由$Darboux$定理可知，任何有跳跃间断点的函数都不可能有原函数.

反例构造3

例3.积分的极限不等于极限的积分的函数列.

在闭区间$[0,1]$上如下定义函数列：

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & 0<x\le \frac{1}{n}, \\ 0, & x=0\text{或}\frac{1}{n}<x\le 1. \end{cases}$$

易见，对每一正整数n, f_n在$[0,1]$上都是可积的，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=1.$$

反例构造3

但是，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

反例构造3

更为极端的例子是

$$f_n(x)=\begin{cases}2n^3x, & 0\le x\le \frac{1}{2n}\\ n^2-2n^3\left(x-\frac{1}{2n}\right), & \frac{1}{2n}\le x\le \frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

此时，对任何$b\epsilon(0,1]$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty,$$

反例构造3

而

$$\int_{0}^{b}\lim_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)dx=\int_{0}^{b}0dx=0.$$

问题简化1

例4.设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$$

证：能否“不妨设”$b = 0$?

记$\beta_n = b_n - b$，$\alpha_n = a_n - a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1}{n} + b \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}
\end{aligned}$$

问题简化2

例5.设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，c为(a,b)内一点，满足$f''(c)\neq 0$.则 在(a,b)内存在$x_1\neq x_2$使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c).$$

证：能否“不妨设”$f'(c)=0$?

记$F(x)=f(x)-f'(c)x$.则题设条件化为

$$F'(c)=0,\ \ F''(c)=f''(c)\neq 0.$$

(这意味着c是$F(x)$的严格极大值点或严格极小值点)

问题简化2

而需要求证的化为：寻找两个点有相同的函数值.

证明：不妨设$F''(c)>0$, 且c是$F(x)$的严格极小值点.

于是存在α,β有：$a<\alpha<c<\beta<b$，使得 $F(\alpha)>F(c)$且 $F(\beta)>F(c)$.

当$F(\alpha)=F(\beta)$时，问题已经得证.

当$F(\alpha)>F(\beta)$时，因为$F(c)<F(\beta)<F(\alpha)$，由连续函数的介质定理可知： 存在$\xi\epsilon(\alpha,c)$,使得$F(\xi)=F(\beta)$，结论成立。

同理可证，当$F(\alpha)<F(\beta)$时结论也成立。

问题简化3

证明： $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}, \forall x>0.$

证：

$$\begin{aligned}
& \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}, && \forall x>0. \\
\Leftrightarrow\ & x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), && \forall x>0. \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}, && \forall x>0. \\
\Leftrightarrow\ & 1-\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<x, && \forall x>0. \\
\Leftrightarrow\ & \ln(1+x)<x, && \forall x>-1, x\neq 0.
\end{aligned}$$

主要内容

1. 数学竞赛问题的简化方法
2. 建模问题的简化方法——目标建模法