本科生论坛交流分享

竞赛问题的简化方法

汇报人：胡兴发

指导老师：张本龚

2022年9月29日

主要内容

反例构造1

例1.若正项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$收敛，则$u_n \to 0$，而$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛一般不意味着$f(x) \to 0(x \to +\infty)$.

例如$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt (x = \sqrt{t})$收敛，但$\sin x^2 \nrightarrow 0$（当$x \to +\infty$时）.

反例构造2

例2.没有原函数的可积函数.

设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leq x\leq 0\\ 1, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

易见，

f在区间$[-1,1]$上可积。然而，f在$[-1,1]$上没有原函数。事实上，如

问题简化

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$$

证：能否“不妨设” $b = 0$?

记$\beta_n = b_n - b$，$\alpha_n = a_n - a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1}{n} + b \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

主要内容