

本科生论坛交流分享

竞赛问题的简化方法

汇报人：胡兴发

导 师：张本龚

2022年9月29日

主要内容

① 数学竞赛问题的简化方法

反例的构造

问题的简化

② 建模问题的简化方法——目标建模法

反例构造1

例1. 若正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $u_n \rightarrow 0$, 而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛一般

不意味着 $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$.

例如 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt (x = \sqrt{t})$ 收敛, 但 $\sin x^2 \not\rightarrow 0$

(当 $x \rightarrow +\infty$ 时) .

反例构造2

例2. 没有原函数的可积函数.

设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

易见, f 在区间 $[-1, 1]$ 上可积.

然而, f 在 $[-1, 1]$ 上没有原函数.

反例构造2

事实上, 如果 $[-1, 1]$ 上有原函数 F , 即

$$F'(x) = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

那么, 由达布(*Darboux*)定理可知, F' 应取得 $F'(-1) = 0$ 与 $F'(1) = 1$ 之间的每一个值, 即 f 应该取得 $f(-1) = 0$ 与 $f(1) = 1$ 之间的每一个值. 此与 f 的定义相矛盾. 因此, f 在 $[-1, 1]$ 上没有原函数. 顺便指出, 由 *Darboux* 定理可知, 任何有跳跃间断点的函数都不可能具有原函数.

反例构造3

例3. 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

在闭区间 $[0, 1]$ 上如下定义函数列:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

易见, 对每一正整数 n , f_n 在 $[0, 1]$ 上都是可积的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

反例构造3

但是,

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

反例构造3

更为极端的例子是

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n^2 - 2n^3\left(x - \frac{1}{2n}\right), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

此时，对任何 $b \in (0, 1]$ ，都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = \infty,$$

反例构造3

而

$$\int_0^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^b 0 dx = 0.$$

问题简化1

例4. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$$

证: 能否 “不妨设” $b = 0$?

记 $\beta_n = b_n - b$, $\alpha_n = a_n - a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1}{n} + b \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \end{aligned}$$

问题简化2

例5. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, c 为 (a, b) 内一点, 满足 $f''(c) \neq 0$. 则在 (a, b) 内存在 $x_1 \neq x_2$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

证: 能否 “不妨设” $f'(c) = 0$?

记 $F(x) = f(x) - f'(c)x$. 则题设条件化为

$$F'(c) = 0, \quad F''(c) = f''(c) \neq 0.$$

(这意味着 c 是 $F(x)$ 的严格极大值点或严格极小值点)

问题简化2

而需要求证的化为：寻找两个点有相同的函数值.

证明：不妨设 $F''(c) > 0$, 且 c 是 $F(x)$ 的严格极小值点.

于是存在 α, β 有： $a < \alpha < c < \beta < b$ ，使得 $F(\alpha) > F(c)$ 且 $F(\beta) > F(c)$.

当 $F(\alpha) = F(\beta)$ 时，问题已经得证.

当 $F(\alpha) > F(\beta)$ 时，因为 $F(c) < F(\beta) < F(\alpha)$ ，由连续函数的介值定理可知：存在 $\xi \in (\alpha, c)$ ，使得 $F(\xi) = F(\beta)$ ，结论成立。

同理可证，当 $F(\alpha) < F(\beta)$ 时结论也成立。

问题简化3

证明: $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}, \forall x > 0.$

证:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, \quad \forall x > 0.$$

$$\Leftrightarrow x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) < x, \quad \forall x > 0.$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x) < x, \quad \forall x > -1, x \neq 0.$$

思考题

求出使下列不等式对任意自然数 n 都成立的最大自然数 α 和最小数 β :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

主要内容

① 数学竞赛问题的简化方法

② 建模问题的简化方法——目标建模法