本科生论坛交流分享

竞赛问题的简化方法

汇报人：胡兴发

导　师：张本龚

2022年9月29日

主要内容

1. 数学竞赛问题的简化方法
   - 反例的构造
   - 问题的简化
2. 建模问题的简化方法——目标建模法

反例构造1

例1. 若正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $u_n \to 0$，而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛一般不意味着 $f(x) \to 0(x \to +\infty)$.

例如 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt(x = \sqrt{t})$ 收敛，但 $\sin x^2 \nrightarrow 0$（当 $x \to +\infty$ 时）.

反例构造2

例2.没有原函数的可积函数.

设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leq x\leq 0\\ 1, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

易见，f在区间 $[-1,1]$ 上可积.

然而，f在 $[-1,1]$ 上没有原函数.

反例构造2

事实上，如果$[-1,1]$上有原函数F，即

$$F'(x) = f(x), \ -1 \le x \le 1,$$

那么，由达布$(Darboux)$定理可知，F'应取得$F'(-1) = 0$与$F'(1) = 1$之间的每一个值，即f应该取得$f(-1) = 0$与 $f(1) = 1$之间的每一个值.此与f的定义相矛盾.因此，f在$[-1,1]$上没有原函数. 顺便指出，由$Darboux$定理可知，任何有跳跃间断点的函数都不可能有原函数.

反例构造3

例3.积分的极限不等于极限的积分的函数列.

在闭区间$[0,1]$上如下定义函数列:

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & 0<x\le \frac{1}{n}, \\ 0, & x=0\text{或}\frac{1}{n}<x\le 1. \end{cases}$$

易见，对每一正整数n, f_n在$[0,1]$上都是可积的，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=1.$$

反例构造3

但是，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(x\right)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right)dx.$$

反例构造3

更为极端的例子是

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3 x, & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ n^2 - 2n^3\left(x - \frac{1}{2n}\right), & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, \ \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

此时，对任何$b \epsilon (0,1]$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2} = \infty,$$

反例构造3

而

$$\int_0^b \lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right)dx = \int_0^b 0dx = 0.$$

问题简化1

例4.设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$$

证：能否"不妨设" $b=0$?

记$\beta_n = b_n - b$，$\alpha_n = a_n - a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} \\ = &\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1}{n} + b\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \end{aligned}$$

问题简化2

例5.设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，c为(a,b)内一点，满足$f''(c)\neq 0$.则 在(a,b)内存在$x_1\neq x_2$使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c).$$

证：能否“不妨设”$f'(c)=0$?

记$F(x)=f(x)-f'(c)x$.则题设条件化为

$$F'(c)=0,\ \ F''(c)=f''(c)\neq 0.$$

(这意味着c是$F(x)$的严格极大值点或严格极小值点)

问题简化2

而需要求证的化为：寻找两个点有相同的函数值.

证明：不妨设$F''(c) > 0$, 且c是$F(x)$的严格极小值点.

于是存在α, β有：$a < \alpha < c < \beta < b$，使得 $F(\alpha) > F(c)$且 $F(\beta) > F(c)$.

当$F(\alpha) = F(\beta)$时，问题已经得证.

当$F(\alpha) > F(\beta)$时，因为$F(c) < F(\beta) < F(\alpha)$，由连续函数的介质定理可知：存在$\xi \epsilon (\alpha, c)$, 使得$F(\xi) = F(\beta)$，结论成立。

同理可证，当$F(\alpha) < F(\beta)$时结论也成立。

问题简化3

例6.证明： $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1},\forall x>0.$

证：

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}, && \forall x>0.\\
\Leftrightarrow\ & x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), && \forall x>0.\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}, && \forall x>0.\\
\Leftrightarrow\ & 1-\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<x, && \forall x>0.\\
\Leftrightarrow\ & \ln(1+x)<x, && \forall x>-1, x\neq 0.
\end{aligned}$$

思考题

求出使下列不等式对任意自然数n都成立的最大自然数α和最小数β：

$$\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\alpha}} \le \boldsymbol{e} \le \left(1+\frac{1}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\beta}}.$$

主要内容

1. 数学竞赛问题的简化方法
2. 建模问题的简化方法——目标建模法

目标建模法

目标建模法是一种逆向建模方法，其实质是根据问题的目标，为了达到这个目标，而进行的建模过程。

现在以2022国赛建模C题第三问为例，介绍如何使用目标建模法。

目标建模法

看完题目后，我们就想象到这道题目最后的结果是什么形式，即问题的目标。

对于这道题，我们要根据玻璃文物的化学成分对未知玻璃文物的化学成分进行分类。其本质是二分类问题。

目标建模法

为了实现这个目标，我们首先生成一组虚拟变量，用0来代表高钾玻璃，1代表铅钡玻璃，自然联想到用Logistic回归来预测未知玻璃种类.

目标建模法的另外一个优点是便于写作，可以提前设计好结果的表现形式，这样队友编程也有目标。

目标建模法

$f^{'}(c)=0$ 即为逆的罗尔定理， $f^{'}(c)\neq 0$ 即为逆的拉格朗日定理，而罗尔定理与拉格朗日中值定理并没有本质区别。