数学分析 A

指导教师： 李嘉 副教授

授课教师： 谭兵 副教授

主页： https://bingtan.me

西南大学数学与统计学院

2024 年 11 月 19 日

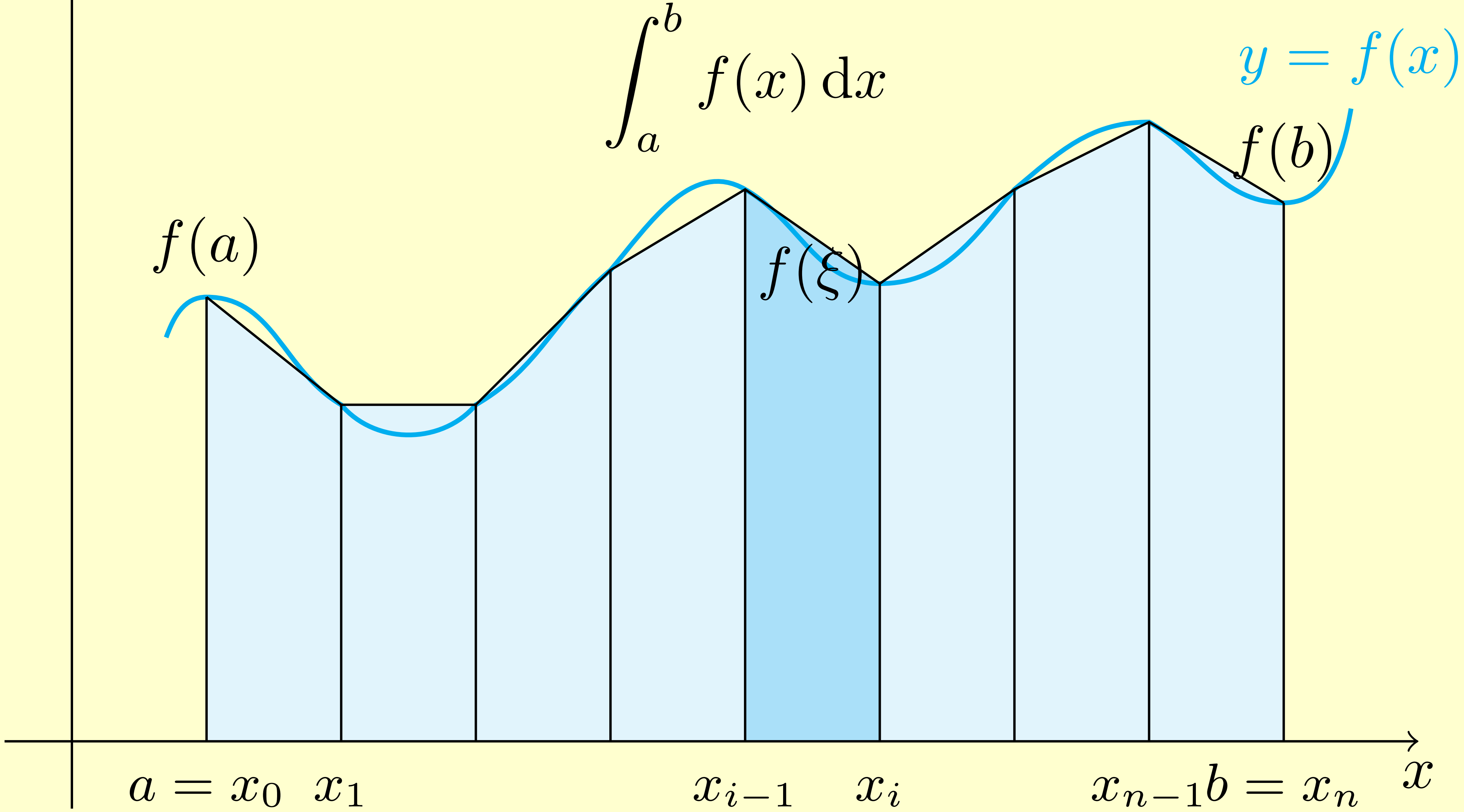
目录

第五章　导数和微分

5.1 导数的概念

微积分的基本思想：以直代曲

$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \;(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$



5.1.1 导数的定义

导数的概念引入：

(1) 瞬时速度

$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s\left(t_0\right)}{t-t_0}.$$

5.1.1 导数的定义

导数的概念引入：

(1) 瞬时速度

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s\left(t_0\right)}{t - t_0}.$$

(2) 切线的斜率

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}.$$

定义 5.1.1 (导数). 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} \tag{5.1.1}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 可导，并称该极限为函数 f 在点 x_0 的导数，记作 $f'\left(x_0\right)$，有时还写作 $y'\big|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ 或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\big|_{x=x_0}$.

注 5.1.1. (1) 令 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，则 (5.1.1) 式可改写为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{5.1.2}$$

有时(5.1.2)也写成

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

注 5.1.1. (1) 令 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，则 (5.1.1) 式可改写为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{5.1.2}$$

有时(5.1.2)也写成

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

故导数是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限，该增量比称为函数关于自变量的平均变化率，也称差商，而导数 $f'(x_0)$ 则为 f 在 x_0 处关于 x 的变化率.

(2) 既然导数是用极限定义的，我们当然也可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述它：如果 $\exists A \in \mathbb{R}$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall 0 < |x - x_0| < \delta$，有

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A\right| < \varepsilon,$$

则 f 在 x_0 处可导，导数为 A.

(3) 若(5.1.1)或(5.1.2)式极限不存在，则称 f 在点 x_0 不可导.

例子 5.1.1. 求函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 的导数，并求曲线在点 $(1, 1)$ 的切线方程.

例子 5.1.1. 求函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 的导数，并求曲线在点 $(1,1)$ 的切线方程.

解答

由定义求得

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

由此知道抛物线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 的切线斜率为 $k=f'(1)=2$，所以切线方程为

$$y-1=2(x-1)\quad 即\quad y=2x-1.$$

例子 5.1.2. 证明函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x_0 = 0$ 不可导.

例子 5.1.2. 证明函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x_0=0$ 不可导.

证明

因为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时极限不存在，所以 f 在点 $x=0$ 不可导. □

例子 5.1.3. 显然常量函数 $f(x) = C$ 在任何一点 x 的导数都等于零，即

$$f'(x) = 0.$$

定义 5.1.2 (有限增量公式). 设 $f(x)$ 在点 x_0 可导，即有 $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，则 $\varepsilon=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ 为当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量，故 $\varepsilon\cdot\Delta x=o(\Delta x)$，即

$$\Delta y=f'(x_0)\,\Delta x+o(\Delta x).$$

称上式为 $f(x)$ 在点 x_0 的有限增量公式. 注意，当 $\Delta x=0$ 时该公式仍成立.

由有限增量公式即可推得下面的定理(5.1.1).

定理 5.1.1. 若函数 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 连续.

除了由有限增量公式推得定理5.1.1，此处再给出三种证明方法.

由有限增量公式即可推得下面的定理(5.1.1).

定理 5.1.1. *若函数 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 连续.*

除了由有限增量公式推得定理5.1.1，此处再给出三种证明方法.

证明

法一：需证 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，即证明 $\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$. 故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)\right]\\ &= \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\right)\\ &= f'(x_0)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

法二: 将函数增量 Δy 改写为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$, 且 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为一有界量, Δx 为一无穷小量, 故 $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ 为 $\Delta x \to 0$ 时一无穷小量, 即 $x \to x_0$ 时有 $f(x) \to f(x_0)$, 即 f 在点 x_0 连续.

法三：利用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明. 由于 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ 存在，由局部有界性知，存在 $M > 0, \eta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < M.$$

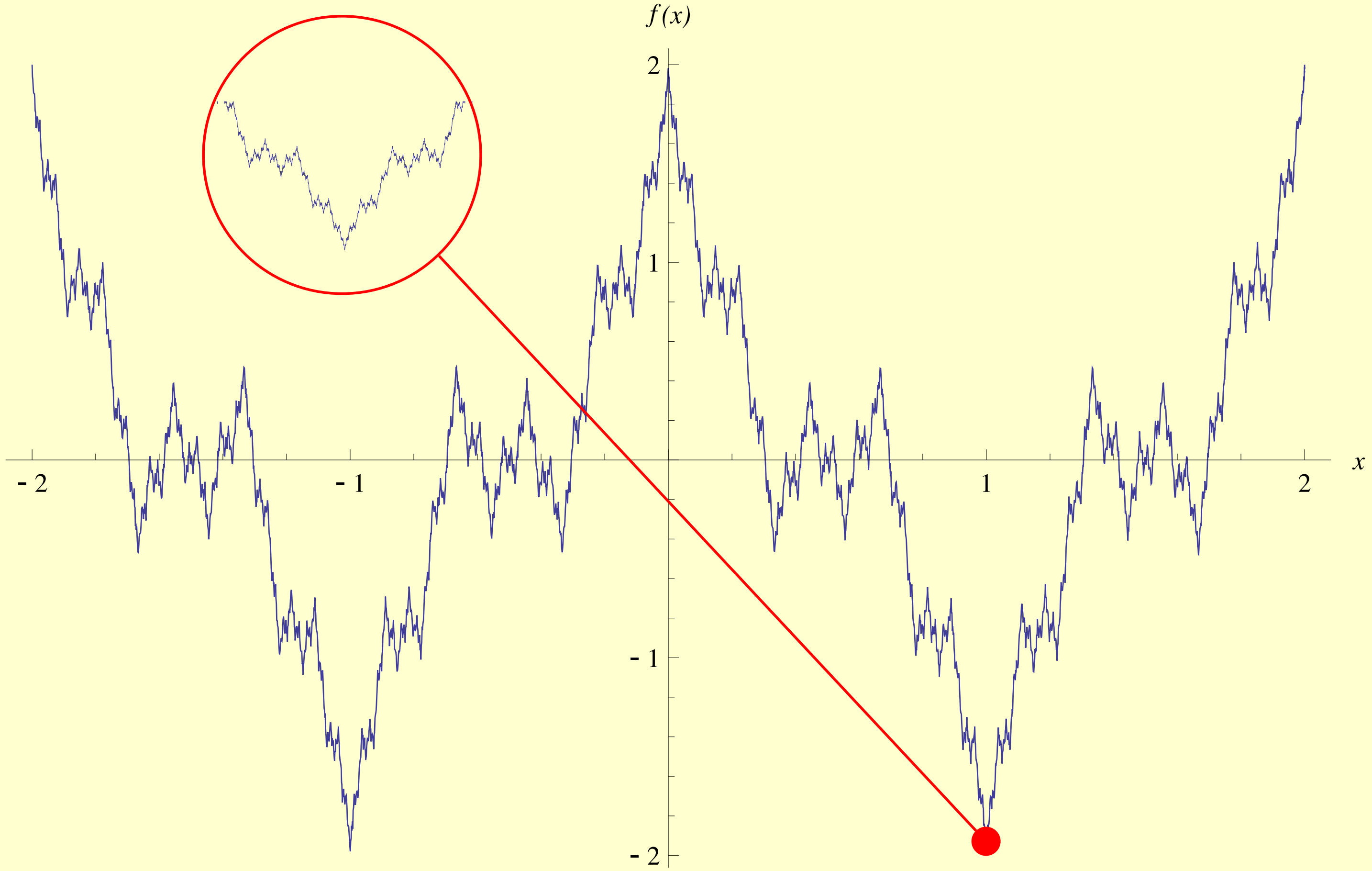
对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\left\{\eta, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot |x - x_0| < M |x - x_0| \leq \varepsilon.$$

故 f 在点 x_0 连续. $\square$

注 5.1.2. 应当指出，可导仅是函数在该点连续的充分条件，而不是必要条件，可记作可导必连续，连续不一定可导 (例如 $y = |x|$ 在 0 处连续但不可导，参见例子5.1.2). 若在某点不连续则在该点不可导.

Weierstrass 函数是一种在区间上处处连续但处处不可导的典型函数：$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$，其中 $0 < a < 1$，b 是正奇数且满足 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.



例子 5.1.4. 证明函数 $f(x) = x^2 D(x)$ 仅在点 $x_0 = 0$ 可导，其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

例子 5.1.4. 证明函数 $f(x)=x^2D(x)$ 仅在点 $x_0=0$ 可导，其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

证明

当 $x_0\neq 0$ 时，由归结原则可得 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 不连续，所以由定理5.1.1，$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 不可导.

当 $x_0=0$ 时，由于 $D(x)$ 为有界函数，因此得到

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0.$$

故函数 $f(x)=x^2D(x)$ 仅在点 $x_0=0$ 可导，且 $f'(0)=0$. □

定义 5.1.3 (右导数和左导数). 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0, x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}, \quad (0<\Delta x<\delta)$$

存在，则称该极限值为 f 在点 x_0 的右导数，记作 $f'_+(x_0)$.

类似地，定义左导数为

$$f'_-\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

右导数和左导数统称为单侧导数.

定理 5.1.2. 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域上有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 都存在且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

例子 5.1.5. 设 $f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x\geq 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右导数与导数.

例子 5.1.5. 设 $f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x\geq 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右导数与导数.

解答

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}, & \Delta x>0\\ 1, & \Delta x<0\end{cases}$$

因此

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}=0,\quad f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}1=1.$$

因为 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以 f 在点 $x=0$ 不可导.

例子 5.1.6. 对函数 $f(x) = |\ln|x||, x \neq 0$，求 $f'_{+}(1)$ 和 $f'_{-}(1)$.

例子 5.1.6. 对函数 $f(x)=|\ln|x||, x\neq 0$，求 $f'_{+}(1)$ 和 $f'_{-}(1)$.

解答

根据 $f(1)=|\ln 1|=0$，得到

$$
\begin{aligned}
f'_{+}(1) &= \lim_{x\to 1^{+}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^{+}} \frac{|\ln x|}{x-1} = \lim_{\Delta x\to 0^{+}} \frac{|\ln(1+\Delta x)|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^{+}} \left|\ln\left[(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]\right| = \ln \mathrm{e} = 1.
\end{aligned}
$$

类似地得到 $f'_{-}(1)=-1$.

注 5.1.3. 注意到:

(1) 函数 f 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ 存在.

(2) 函数 f 在 x_0 处可导 $\not\Rightarrow$ 其绝对值 $|f|$ 在 x_0 处可导. 比如函数 $f(x) = x$.

(3) 可以定义函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 甚至一般区间 I 上的可导性. 对内部点 $x_0 \in I$, $f'(x_0)$ 是通常意义下的导数, 对端点 $x_0 \in I$, $f'(x_0)$ 定义为左导数或右导数.

5.1.2 导函数

若函数在区间 I 上每一点都可导（对区间端点考虑其单侧导数），则称 f 为区间 I 上的可导函数. 此时对任意的 $x \in I$，都有 f 的一个导数 $f'(x)$（或单侧导数）与之对应，故定义了一个定义域为 I 的函数，称为 f 在 I 上的导函数，简称为导数，记作 f', y' 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in I.$$

$f'(x_0)$ 有时还写作 $y'|_{x=x_0}$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$.

例子 5.1.7. 证明

(i) $(x^n)' = nx^{n-1}, n$ 为正整数;

(ii) $(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$;

(iii) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\,(a > 0, a \neq 1, x > 0)$，特别 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

(iv) $(a^x)' = a^x \ln a$，特别 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

(v) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$，其中 $a \in \mathbb{R}, x > 0$.

例子 5.1.7. 证明

(i) $(x^n)' = nx^{n-1}, n$ 为正整数;

(ii) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;

(iii) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\,(a > 0, a \neq 1, x > 0)$, 特别 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

(iv) $(a^x)' = a^x \ln a$, 特别 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

(v) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 其中 $a \in \mathbb{R}, x > 0$.

证明

(i) 对于 $y = x^n$，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + \mathrm{C}_n^n \Delta x^{n-1},$$

因此

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + \mathrm{C}_n^n \Delta x^{n-1}\right) = \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} = n x^{n-1}.$$

(ii) 法一：下面证第一个等式，类似地可证第二个等式. 由于

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

以及 $\cos x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，因此得到

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

(ii) 法二：

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right)=\cos x\\
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right)=-\sin x
\end{aligned}
$$

(iii) 由于

$$\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

所以

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}. \tag{5.1.3}$$

若 $a=\mathrm{e}$，且以 e 为底的自然对数常写作 $\ln x$，则由 $\ln \mathrm{e}=1$ 及(5.1.3)式有 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

(iv)

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a$. 特别地，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

(v)

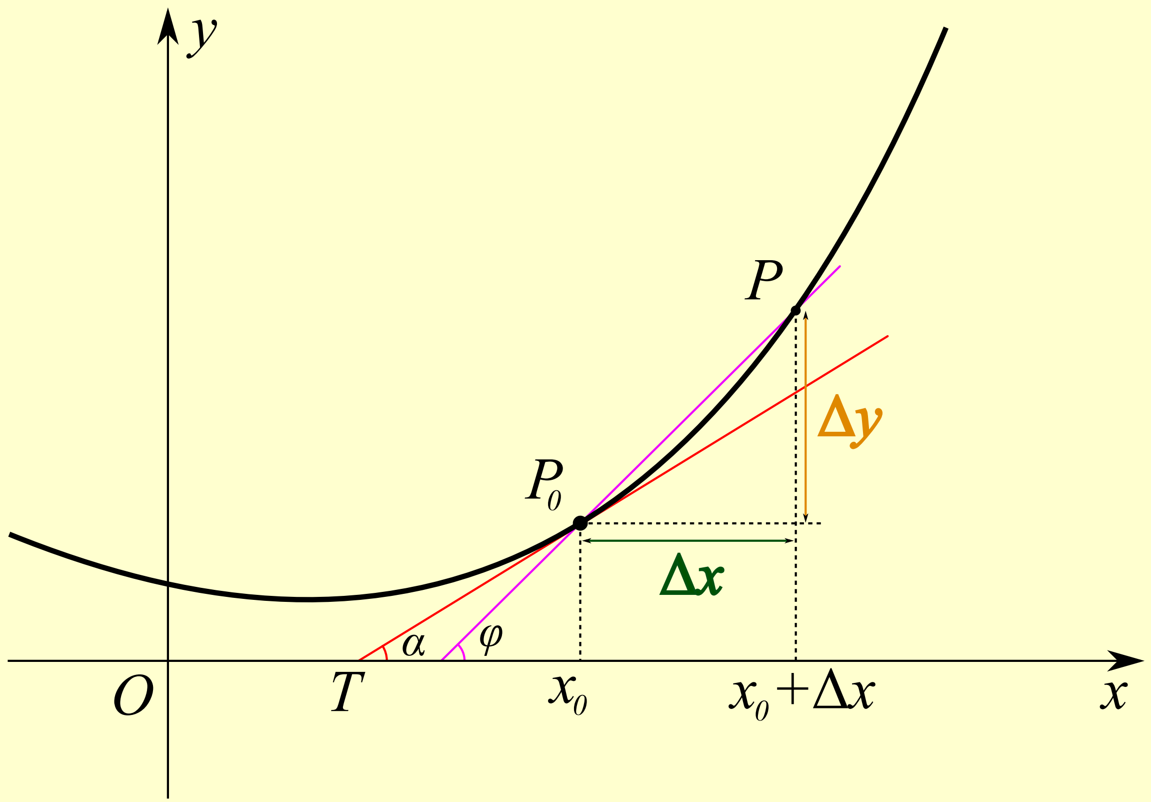
$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$\square$

5.1.3 导数的几何意义

若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的切线斜率为 k，即割线斜率在 $x\to x_0$ 时的极限，即

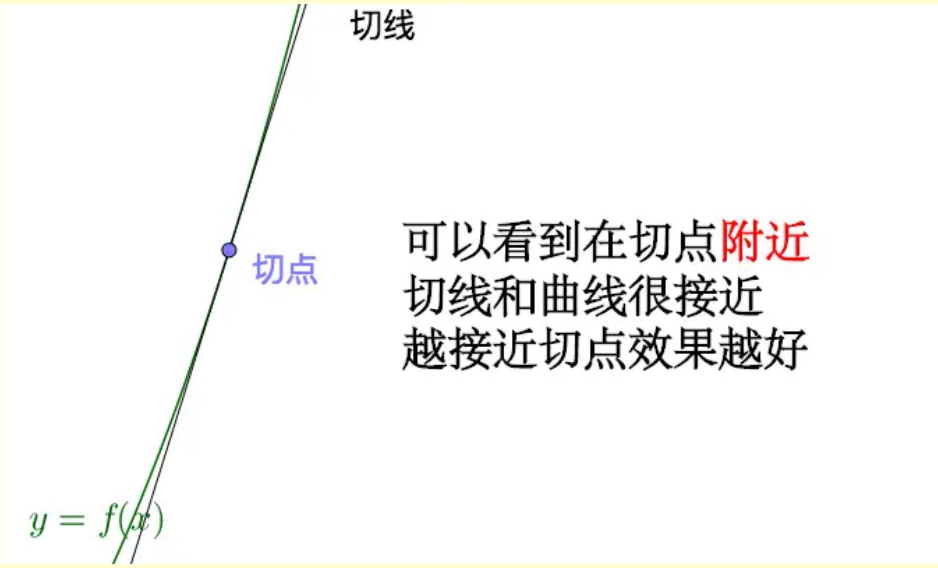
$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$



由导数定义知 $k = f'(x_0)$，故曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线方程为

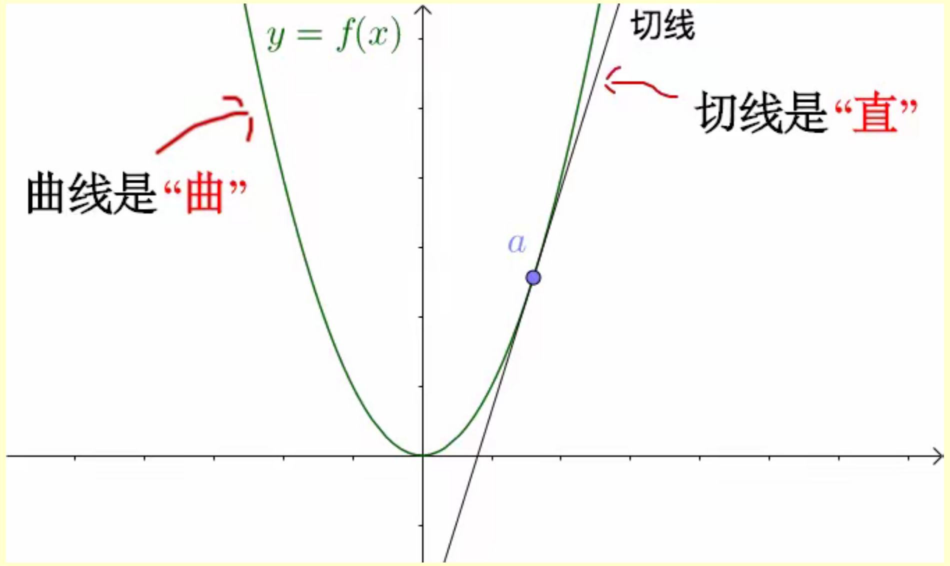
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.1.4}$$

这意味着函数 f 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线斜率. 若 α 表示该切线与 x 轴正向的夹角，则 $f'(x_0) = \tan\alpha$，从而根据 $f'(x_0)$ 的正负即可判断切线与 x 轴正向的夹角及关系.



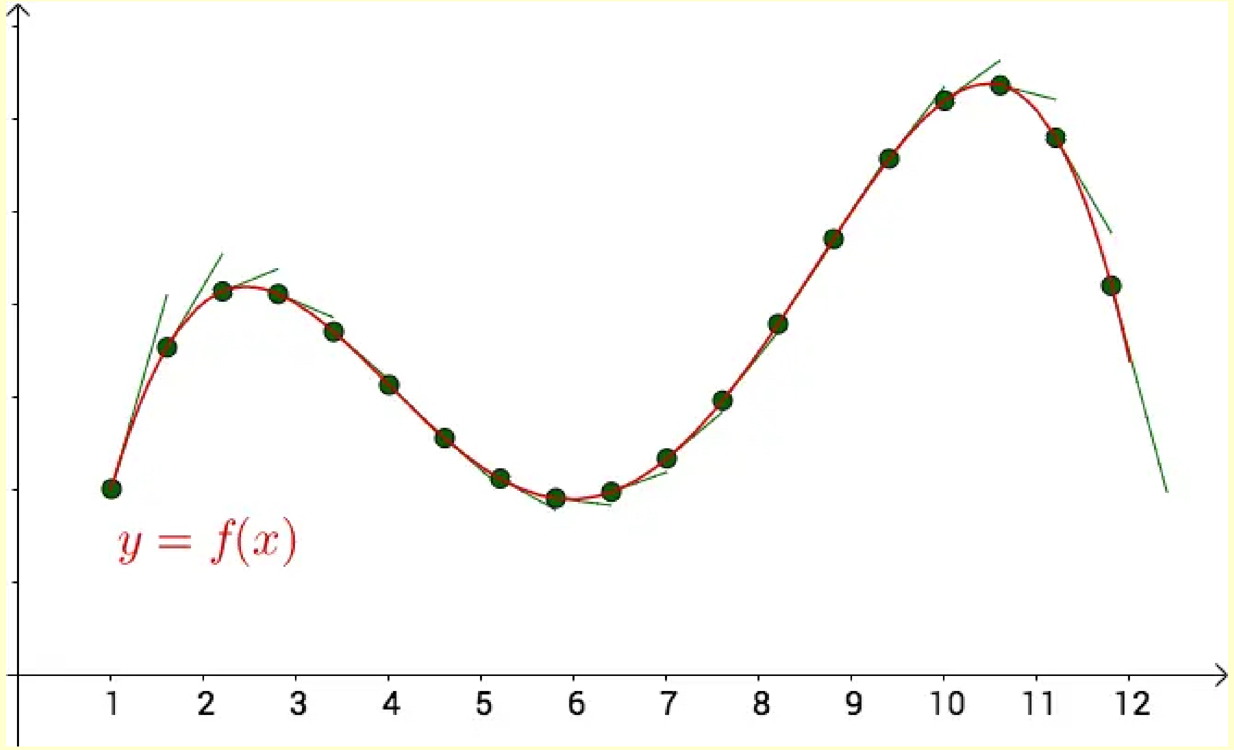
切线
切点
可以看到在切点附近
切线和曲线很接近
越接近切点效果越好
$y = f(x)$

(a)



$y = f(x)$
切线
切线是“直”
曲线是“曲”
a

(b)



$y = f(x)$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

(c)

例子 5.1.8. 求曲线 $y = x^3$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程与法线方程.

例子 5.1.8. 求曲线 $y = x^3$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程与法线方程.

解答

由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2\right) = 3x_0^2.$$

所以根据(5.1.4)式，曲线 $y = x^3$ 在点 P 的切线方程为

$$y - y_0 = 3x_0^2(x - x_0).$$

由解析几何知道，若切线斜率为 k，则法线斜率为 $-\frac{1}{k}$. 从而过点 P 的法线

方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

因此曲线 $y = x^3$ 过点 $P(x_0 \neq 0)$ 的法线方程为

$$y - x_0^3 = -\frac{1}{3x_0^2}(x - x_0).$$

若 $x_0 = 0$，则法线方程为 $x = 0$.

定义 5.1.4 (极大 (小) 值). 若函数 f 点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x \in U(x_0)$ 有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))$$

则称函数 f 在点 x_0 取得极大 (小) 值，称点 x_0 为极大 (小) 值点. 极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点.

定义 5.1.4 (极大 (小) 值). 若函数 f 点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x \in U(x_0)$ 有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))$$

则称函数 f 在点 x_0 取得极大 (小) 值，称点 x_0 为极大 (小) 值点. 极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点.

注 5.1.4. (1) 极值点不一定是最值点，极值只是局部范围内的最值; (2) 最值点不一定是极值点; (3) 极大值不一定大于极小值.

例子 5.1.9. 证明：若 $f'_+(x_0) > 0$，则存在 $\delta > 0$，对任意 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 有 $f(x_0) < f(x)$.

例子 5.1.9. **证明：若 $f'_+(x_0) > 0$，则存在 $\delta > 0$，对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有 $f(x_0) < f(x)$.**

证明

因为

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

所以由保号性可知，存在正数 δ，对一切 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$，有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

从而不难推得，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，有 $f(x_0) < f(x)$. □

注 5.1.5. 用类似的方法还可讨论 $f'_+(x_0) < 0, f'_-(x_0) > 0, f'_-(x_0) < 0$ 时的情况，可知若 $f'(x_0)$ 存在且不为零，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

定理 5.1.3 (费马定理). 设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义，且在点 x_0 可导. 若点 x_0 为 f 的极值点，则必有 $f'(x_0) = 0$.

定理 5.1.3 (费马定理). 设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义，且在点 x_0 可导. 若点 x_0 为 f 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$.

证明

若 $f'(x_0)\neq 0$，不妨设 $f'(x_0)>0$，则

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

由局部保号性，$\exists\delta_1>0$，对 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta_1)$，有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,\ \text{即有} f(x)>f(x_0)\,. \tag{5.1.5}$$

同理, 由 $f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, 得 $\exists\delta_2>0$, 对 $\forall x\in(x_0-\delta_2,x_0)$,

有

$$\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}>0, \text{ 即有} f(x)<f\left(x_0\right). \tag{5.1.6}$$

结合(5.1.5)与(5.1.6)得 x_0 不可能是 $f(x)$ 的极值点，与已知矛盾，从而得 $f'\left(x_0\right)=0$. □

费马定理的几何意义：若函数 $f(x)$ 在极值点 $x=x_0$ 可导，则在该点的切线平行于 x 轴.

有

$$\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}>0,\ \text{即有} f(x)<f\left(x_0\right). \tag{5.1.6}$$

结合(5.1.5)与(5.1.6)得 x_0 不可能是 $f(x)$ 的极值点，与已知矛盾，从而得 $f'\left(x_0\right)=0$. □

费马定理的几何意义：若函数 $f(x)$ 在极值点 $x=x_0$ 可导，则在该点的切线平行于 x 轴.

注 5.1.6. (1) 满足 $f'(x)=0$ 的点称为稳定点 (也称为驻点)；(2) 极值点不一定是稳定点 (例：$f(x)=|x|, x_0=0$)；(3) 稳定点不一定是极值点 (例：$f(x)=x^3, x_0=0$).

5.2 求导法则

5.2.1 导数的四则运算

定理 5.2.1 (导数的四则运算). 若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)=u(x)\pm v(x)$，$f(x)=u(x)v(x)$，$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}\left(v\left(x_0\right)\neq 0\right)$ 在 x_0 点也可导，且

$$
\begin{aligned}
&(1)\ [u(x)\pm v(x)]'|_{x=x_0}=u'\left(x_0\right)\pm v'\left(x_0\right);\\
&(2)\ [u(x)v(x)]'|_{x=x_0}=u'\left(x_0\right)v\left(x_0\right)+u\left(x_0\right)v'\left(x_0\right);\\
&(3)\ \left.\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]\right|_{x=x_0}=\frac{u'\left(x_0\right)v\left(x_0\right)-u\left(x_0\right)v'\left(x_0\right)}{v^2\left(x_0\right)}.
\end{aligned}
$$

证明

(1) 根据定义

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) \pm v(x_0+\Delta x)] - [u(x_0) \pm v(x_0)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \\
&= u'(x_0) \pm v'(x_0).
\end{aligned}
$$

(2) 根据定义

$$
\begin{aligned}
& f'(x_0) \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)\,v(x_0+\Delta x) - u(x_0)\,v(x_0)}{\Delta x} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)\,v(x_0+\Delta x) - u(x_0)\,v(x_0+\Delta x) + u(x_0)\,v(x_0+\Delta x) - u(x_0)\,v(x_0)}{\Delta x} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} v(x_0+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x_0) \frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \\
= & u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0)\,.
\end{aligned}
$$

(3) 根据定义

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0)u(x_0+\Delta x) - u(x_0)v(x_0+\Delta x)}{v(x_0)v(x_0+\Delta x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x_0)(u(x_0+\Delta x) - u(x_0)) - u(x_0)(v(x_0+\Delta x) - v(x_0))}{v(x_0)v(x_0+\Delta x)\Delta x}\right]$$

$$= \frac{v(x_0)u'(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

或者参见书上的做法:

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]'\Bigg|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{v(x_0)-v(x)}{v(x)v(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= -\lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{v(x)v(x_0)} = \frac{-v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

故

$$f'(x_0) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\Big|_{x=x_0} = u'(x_0)\frac{1}{v(x_0)} + u(x_0)\left(-\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}\right)$$

$$= \frac{u'(x_0)\,v(x_0) - u(x_0)\,v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

$\square$

故

$$f'(x_0) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\bigg|_{x=x_0} = u'(x_0)\frac{1}{v(x_0)} + u(x_0)\left(-\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}\right)$$
$$= \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

$\square$

注 5.2.1. 利用数学归纳法可将定理5.2.1(2) 推广到任意有限个函数乘积的情形，如 $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

注 5.2.2. 注意到:

(1) 设 $f = \varphi + \psi$，若 f 在点 x_0 可导，则 φ, ψ 在点 x_0 可导.

解此命题是错误的. 例如，设 $\varphi(x) = D(x)$，$\psi(x) = -D(x)$，其中 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数. 则 $f = \varphi + \psi \equiv 0$ 处处可导，但 φ, ψ 处处不可导.

(2) 设 $f = \varphi + \psi$，若 φ 在点 x_0 可导，ψ 在点 x_0 不可导，则 f 在点 x_0 一定不可导.

证此命题是正确的. 采用反证法，假设 f 在点 x_0 可导. 由于 φ 在点 x_0 可导，则 $\psi = f - \varphi$ 在点 x_0 可导，这与 ψ 在点 x_0 不可导矛盾.

(3) 设 $f=\varphi\cdot\psi$，若 f 在点 x_0 可导，则 φ,ψ 在点 x_0 可导.

解此命题是错误的. 例如，设 $\varphi(x)=\psi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ -1, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$. 则 $f=\varphi\cdot\psi\equiv 1$ 处处可导，但 φ,ψ 处处不可导.

(4) 设 $f=\varphi\cdot\psi$，若 φ 在点 x_0 可导，ψ 在点 x_0 不可导，则 f 在点 x_0 一定不可导.

证此命题是错误的. 若 $\varphi(x_0)\neq 0$，则 f 在点 x_0 一定不可导. 采用反证法，假设 f 在点 x_0 可导. 由于 φ 在点 x_0 可导且 $\varphi(x_0)\neq 0$，则 $\psi=\frac{f}{\varphi}$ 在点 x_0 可导，这与 ψ 在点 x_0 不可导矛盾.

若 $\varphi(x_0)=0$，则 f 在点 x_0 不一定不可导. 例如，若令 $\varphi\equiv 0$，则 $f=\varphi\cdot\psi\equiv 0$ 处处可导.

推论 5.2.1. 若函数 $v(x)$ 在点 x_0 可导且 c 为常数，则 $(cv(x))'_{x=x_0} = cv'(x_0)$.

推论 5.2.1. 若函数 $v(x)$ 在点 x_0 可导且 c 为常数，则 $(cv(x))'_{x=x_0} = cv'(x_0)$.

推论 5.2.2. 若函数 $v(x)$ 在点 x_0 可导且 $v(x_0) \neq 0$，则函数 $f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ 在点 x_0 也可导，且 $f'(x_0) = -\dfrac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$.

例子 5.2.1.(i) 设 $f(x) = x^3 + 5x^2 - 9x + \pi$，求 $f'(x)$.

(ii) 设 $y = \cos x \ln x$，求 $y'|_{x=\pi}$.

例子 5.2.1.(i) 设 $f(x) = x^3 + 5x^2 - 9x + \pi$，求 $f'(x)$.
(ii) 设 $y = \cos x \ln x$，求 $y'|_{x=\pi}$.

解答

(i)

$$f'(x) = \left(x^3\right)' + 5\left(x^2\right)' - 9(x)' + (\pi)'$$
$$= 3x^2 + 10x - 9.$$

(ii)

$$y' = (\cos x)' \ln x + \cos x(\ln x)' = -\sin x \ln x + \frac{1}{x}\cos x.$$

所以 $y'|_{x=\pi} = -\frac{1}{\pi}$.

例子 5.2.2.(i) 证明：$(\tan x)' = \sec^2 x$，$(\cot x)' = -\csc^2 x$.

(ii) 证明：$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$，其中 n 为正整数.

(iii) 证明：$(\sec x)' = \sec x \tan x$，$(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

例子 5.2.2(i) **证明：** $(\tan x)' = \sec^2 x$， $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

(ii) **证明：** $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$， 其中 n 为正整数.

(iii) **证明：** $(\sec x)' = \sec x \tan x$， $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

证明

(i)

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$
\begin{aligned}
(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' &= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
(\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x. \\
(\csc x)' &= \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x.
\end{aligned}
$$

$\square$

5.2.2 反函数的导数

定理 5.2.2. 设 $y=f(x)$ 为 $x=\varphi(y)$ 的反函数，若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续，严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0\,(x_0=\varphi(y_0))$ 可导，且 $f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$.

证明 设 $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0), \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 由于 φ 在点 y_0 的某邻域上连续且严格单调，故 $f = \varphi^{-1}$ 在点 x_0 的某邻域上连续且严格单调，故当且仅当 $\Delta y = 0$ 时有 $\Delta x = 0$，且当 $\Delta y \to 0$ 时有 $\Delta x \to 0$. 由 $\varphi'(y_0) \neq 0$，可得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

□

证明设 $\Delta x=\varphi\left(y_0+\Delta y\right)-\varphi\left(y_0\right),\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$. 由于 φ 在点 y_0 的某邻域上连续且严格单调，故 $f=\varphi^{-1}$ 在点 x_0 的某邻域上连续且严格单调，故当且仅当 $\Delta y=0$ 时有 $\Delta x=0$，且当 $\Delta y\to 0$ 时有 $\Delta x\to 0$. 由 $\varphi'\left(y_0\right)\neq 0$，可得

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'\left(y_0\right)}.$$

□

注 5.2.3. 导数 $\varphi'\left(x_0\right)\neq 0$ 的条件不能去掉. 例如 $\varphi(x)=x^3$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可逆函数，φ 处处可导，但其反函数 $f(y)=y^{1/3}$ 在 $y=0$ 处不可导.

例子 5.2.3. 证明:

(i) $(a^x)' = a^x \ln a$，其中 $a > 0, a \neq 1$，特别地，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

(ii) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(iii) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

例子 5.2.3. 证明：

(i) $(a^x)' = a^x \ln a$，其中 $a > 0, a \neq 1$，特别地，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

(ii) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(iii) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

证明

(i) 由于 $y = a^x, x \in \mathbb{R}$ 为对数函数 $x = \log_a y, y \in (0, +\infty)$ 的反函数，故

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{y}{\log_a \mathrm{e}} = a^x \ln a.$$

(ii) 由于 $y=\arcsin x, x\in(-1,1)$ 是 $x=\sin y, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，故

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1).$$

$$(\arccos x)'=\frac{1}{-\sin(\arccos x)}\Leftrightarrow \cos(\arccos x)=x\Leftrightarrow -\sin(\arccos x)(\arccos x)'=1$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1).$$

(iii) 由于 $y=\arctan x, x\in\mathbb{R}$ 是 $x=\tan y, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，因此

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}, x\in(-\infty,+\infty).$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arccot} x)' &= \frac{1}{-\csc^2(\operatorname{arccot} x)} \Leftrightarrow \cot(\operatorname{arccot} x) = x \Leftrightarrow -\csc^2(\operatorname{arccot} x)(\operatorname{arccot} x)' = 1 \\
&= -\frac{1}{1+\cot^2(\operatorname{arccot} x)} \\
&= -\frac{1}{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)
\end{aligned}
$$

$\square$

5.2.3 复合函数的导数

定理 5.2.3. 设 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 x_0 可导，且 $(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\,\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\,\varphi'(x_0)$.

引理 5.2.1. $f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是：在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上，存在一个在点 x_0 连续的函数 $H(x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),$$

从而 $f'(x_0)=H(x_0)$.

证明

$$(\Rightarrow)\text{ 若 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 可导，令 } H(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in U^\circ(x_0)\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}\text{，则因}$$

$$\lim_{x\to x_0} H(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=H(x_0)$$

有 $H(x)$ 在点 x_0 连续，且满足在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上有 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$，因此若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，这样的 $H(x)$ 是存在的.

$(\Leftarrow)$ 设存在 $H(x), x \in U(x_0)$，其在点 x_0 连续，且当 $x \in U(x_0)$ 时有 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$，因存在极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x \to x_0} H(x)=H(x_0),$$

所以 $f(x)$ 点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=H(x_0)$. $\square$

证明 证明定理5.2.3

法二：由 $f(u)$ 在点 u_0 可导，由引理5.2.1必要性部分，存在一个在点 u_0 连续的函数 $F(u)$, 使得 $f'(u_0) = F(u_0)$, 且 $f(u) - f(u_0) = F(u)(u - u_0), u \in U(u_0)$. 由 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 可导，同理知存在一个在点 x_0 连续的函数 $\Phi(x)$, 使得 $\varphi'(x_0) = \Phi(x_0)$，且 $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \Phi(x)(x - x_0), x \in U(x_0)$. 故

$$f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = F(\varphi(x))\Phi(x)(x - x_0), x \in U(x_0).$$

由于 φ, Φ 在点 x_0 连续且 F 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 连续, 故 $H(x) = F(\varphi(x))\Phi(x)$ 在点 x_0 连续. 由引理5.2.1充分性部分证得 $f \circ \varphi$ 在点 x_0 可导，且 $(f \circ \varphi)'(x_0) = H(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$. □

注 5.2.4. 复合函数的求导公式也称为链式法则，函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 的复合函数在点 x 的求导公式一般也写作

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

对于由多个函数复合而得到的复合函数，反复应用上式即可. 例如三个函数构成的复合函数的导数为

$$(f(g(h(x))))'=f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

注 5.2.4. 复合函数的求导公式也称为链式法则，函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 的复合函数在点 x 的求导公式一般也写作

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

对于由多个函数复合而得到的复合函数, 反复应用上式即可. 例如三个函数构成的复合函数的导数为

$$(f(g(h(x))))'=f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

注 5.2.5. $f'(\varphi(x))=f'(u)|_{u=\varphi(x)}$ 与 $(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的含义不可混淆.

例子 5.2.4.(i) 设 $y=\sin x^2$，求 y'.

(ii) 设 $y=\ln|x|$，求 y'.

(iii) 设 α 为实数，求幂函数 $y=x^\alpha\,(x>0)$ 的导数. 求 $a^x\,(a>0)$ 的导数.

(iv) 设 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求 $f'(0), f'(1)$.

(v) 求下列函数的导函数：(1) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; (2) $f(x)=\tan^2\frac{1}{x}$; (3) $y=\arctan\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$.

例子 5.2.4(i) 设 $y=\sin x^2$，求 y'.

(ii) 设 $y=\ln|x|$，求 y'.

(iii) 设 α 为实数，求幂函数 $y=x^{\alpha}\,(x>0)$ 的导数. 求 $a^x\,(a>0)$ 的导数.

(iv) 设 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求 $f'(0),f'(1)$.

(v) 求下列函数的导函数：(1) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; (2) $f(x)=\tan^2\frac{1}{x}$; (3) $y=\arctan\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$.

解答

(i) 将 $\sin x^2$ 看作 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 的复合函数，故

$$\left(\sin x^2\right)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$$

必须指出：$\left(\sin x^2\right)'\neq\cos x^2$.

(ii) 我们知道，当 $x \neq 0$ 时，$(|x|)' = \operatorname{sgn} x$. 由复合函数的求导得

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}.$$

(iii) 因为 $y = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln x}$ 可看作 $y = \mathrm{e}^u$ 与 $u = \alpha\ln x$ 的复合函数，故

$$(x^\alpha)' = \left(\mathrm{e}^{\alpha\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{x\ln a}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{x\ln a}}{\mathrm{d}x\ln a}\cdot\frac{\mathrm{d}x\ln a}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a.$$

(iv) 由于

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

因此 $f'(0) = 0, f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(v)(1)

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(v)(2)

$$\left(\tan^2\frac{1}{x}\right)' = 2\tan\frac{1}{x}\left(\tan\frac{1}{x}\right)' = 2\tan\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= -\frac{2}{x^2}\tan\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}.$$

(v)(3) $(\arctan(\mathrm{e}^{-x}))' = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot(-1) = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}.$

例子 5.2.5. 设 f 为可导函数，证明：若 $x=1$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\left(x^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^2(x),$$

则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

例子 5.2.5. 设 f 为可导函数，证明：若 $x=1$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x^2\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x),$$

则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

证明

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x^2\right)=2xf'\left(x^2\right),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)=2f(x)f'(x),$$

所以当 $x=1$ 时有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(x^2\right)\Big|_{x=1}=2f'(1)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)\Big|_{x=1}=2f(1)f'(1)$，由题设，有 $2f'(1)=2f(1)f'(1)$，于是 $f'(1)(1-f(1))=0$，从而 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$. □

例子 5.2.6. 设 $y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\,(x>4)$，求 y'.

例子 5.2.6. 设 $y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\,(x>4)$，求 y'.

解答

先对函数式取对数，得

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\\ &= 2\ln(x+5) + \frac{1}{3}\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4).\end{aligned}$$

再对上式两边分别求导数，得

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)}.$$

整理后得到

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right].$$

例子 5.2.7. 设 $y = u(x)^{v(x)}$，其中 $u(x) > 0$，且 $u(x), v(x)$ 均可导，求 y'.

例子 5.2.7. 设 $y = u(x)^{v(x)}$，其中 $u(x) > 0$，且 $u(x), v(x)$ 均可导，求 y'.

解答

对函数式取对数，有

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

对上式两侧分别求导数，有

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)},$$

即

$$y' = y \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

代入有 $y' = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + u(x)^{v(x)-1} u'(x) v(x)$.

或

$$
\begin{aligned}
y' = \left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\right)' &= \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))' \\
&= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) \\
&= u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x) + u(x)^{v(x)-1}u'(x)v(x).
\end{aligned}
$$

对数求导法：(1) 幂指函数 $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x)\ln f(x)$，然后使用复合函数求导法则. (2) $y = f(x)$ 是多项式乘积时，函数两端求对数，使用复合函数求导法则.

5.2.4　基本求导法则与公式

基本求导法则

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv', (cu)' = cu'$，其中 c 为常数.

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2} (v \neq 0)$.

(4) 反函数导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{-1}$.

(5) 复合函数导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

(6) 广义幂法则 $(f^g)' = (e^{g \ln f})' = f^g\left(g' \ln f + \dfrac{g}{f} f'\right)$.

基本初等函数导数公式

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	x^a	$ax^{a-1}\,(a \neq 0)$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a\,(a > 0, a \neq 1)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\ln a}\,(a > 0, a \neq 1)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

对数运算基本法则

(1) 对数运算的性质

$$\log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N;\quad \log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N;$$

$$\log_{a^n} M^m=\frac{m}{n}\log_a M;\quad a^{\log_a M}=M.$$

以上运算需要的条件是 $a>0$ 且 $a\neq 1, M>0, N>0$，$m,n\in\mathbb{R}$.

(2) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ $(a>0$ 且$a\neq 1, b>0, b\neq 1)$.

(3) 换底公式 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. 需要满足的条件：$a>0$ 且 $a\neq 1, c>0$ 且 $c\neq 1, b>0$.

5.3 参变量函数的导数

平面曲线 C 一般的表达形式是参变量 (参量) 方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta \tag{5.3.1}$$

表示. 设 $x = \varphi(t)$ 的反函数为 $t = \varphi^{-1}(x)$，并设它满足反函数求导的条件，于是把 y 看做复合函数

$$y = \psi(t), t = \varphi^{-1}(x).$$

平面曲线 C 一般的表达形式是参变量 (参量) 方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \tag{5.3.1}$$

表示. 设 $x = \varphi(t)$ 的反函数为 $t = \varphi^{-1}(x)$，并设它满足反函数求导的条件，于是把 y 看做复合函数

$$y = \psi(t), t = \varphi^{-1}(x).$$

并利用复合函数和反函数的求导法则，就有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \psi'(t)\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

若 φ, ψ 在 $[\alpha, \beta]$ 上都存在连续的导函数，且 $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$ ，这时称 C 为光滑曲线. 其特点是在曲线 C 上不仅每一点都有切线，且切线与 x 轴正向的夹角 $\alpha(t)$ 是 t 的连续函数.

例子 5.3.1. 试求由上半椭圆的参量方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad 0 < t < \pi$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数.

例子 5.3.1. 试求由上半椭圆的参量方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad 0 < t < \pi$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数.

解答

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = -\frac{b}{a}\cot t.$$

例子 5.3.2. 设 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}, \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi}$.

例子 5.3.2. 设 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}, \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi}$.

解答

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t - \sin t)' = a(1 - \cos t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(1 - \cos t)' = a \sin t,\ \text{故}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$\text{故} \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \frac{\pi}{2}} = 1, \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi} = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = 0.$$

5.4 高阶导数

5.4.1 高阶导数的定义

定义 5.4.1 (二阶导数). 若函数 f 的导函数 f' 在点 x_0 可导, 则称 f' 在点 x_0 的导数为 f 在点 x_0 的二阶导数，记作 $f''(x_0)$，即

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x},$$

同时称 f 在点 x_0 为二阶可导.

若 f 在区间 I 上每一点都二阶可导, 则得到一个定义在 I 上的函数, 这个函数称为 f 的二阶导函数，记作 $f''(x), x\in I$，或者简单记为 f''.

一般地，可由 f 的 $n-1$ 阶导函数定义 f 的 n 阶导函数（或简称 n 阶导数）.

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},$$

二阶以及二阶以上的导数都称为高阶导数, 函数 f 在点 x_0 处的 n 阶导数记作

$$f^{(n)}(x_0),\, y^{(n)}\Big|_{x=x_0} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=x_0}.$$

相应地, n 阶导函数记作

$$f^{(n)}, y^{(n)} \text{ 或} \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

这里 $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 亦可写作 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}y$, 它是对 y 相继进行 n 次求导运算 “$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$” 的结果.

例子 5.4.1. 求幂函数 $y = x^n$ (n 为正整数) 的各阶导数.

例子 5.4.1. 求幂函数 $y=x^n$ (n 为正整数) 的各阶导数.

解答

由幂函数的求导公式得

$$
\begin{aligned}
y' &= nx^{n-1},\\
y'' &= n(n-1)x^{n-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(n-1)} &= \left(y^{(n-2)}\right)' = n(n-1)\cdots 2x,\\
y^{(n)} &= \left(y^{(n-1)}\right)' = (n(n-1)\cdots 2x)' = n!,\\
y^{(n+1)} &= y^{(n+2)} = \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

例子 5.4.2. 求 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的各阶导数.

例子 5.4.2. 求 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的各阶导数.

解答

对于 $y=\sin x$, 由三角函数的求导公式得

$$
\begin{aligned}
y' &= \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\
y'' &= -\sin x = \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \\
y''' &= -\cos x = \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \\
y^{(4)} &= \sin x = \sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

一般地，可推得

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}_+.$$

类似地有

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}_+.$$

例子 5.4.3. 求 $y = \mathrm{e}^x$ 的各阶导数.

例子 5.4.3. 求 $y = \mathrm{e}^x$ 的各阶导数.

解答

因为 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, 所以 $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x, n \in \mathbb{N}_+$.

5.4.2 高阶导数的运算法则

- $$[u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

- $$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \\ &= u^{(n)} v^{(0)} + \mathrm{C}_n^1 u^{(n-1)} v^{(1)} + \mathrm{C}_n^2 u^{(n-2)} v^{(2)} + \cdots + \\ &\quad \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + u^{(0)} v^{(n)}.\end{aligned}$$

例子 5.4.4. 设 $y = x^2\mathrm{e}^x$, 求 $y^{(n)}$.

例子 5.4.4. 设 $y = x^2\mathrm{e}^x$, 求 $y^{(n)}$.

解答

令 $u(x) = \mathrm{e}^x, v(x) = x^2$, 应用莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k v^{(k)} \mathrm{e}^x \\ &= x^2\mathrm{e}^x + 2nx\mathrm{e}^x + n(n-1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left[x^2 + 2nx + n(n-1)\right]. \end{aligned}$$

例子 5.4.5. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ 的高阶导数.

例子 5.4.5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 0, \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$ 的高阶导数.

解答 当 $x>0$ 时, $f'(x)=2x, f''(x)=2, f^{(k)}(x)\equiv 0(k\geq 3)$. 当 $x<0$ 时, $f'(x)=-2x, f''(x)=-2, f^{(k)}(x)\equiv 0(k\geq 3)$. 当 $x=0$ 时，由左、右导数定义不难求得 $f'(0)=f'(0)=f'(0)=0$ ，而当 $k\geq 2$ 时，$f^{(k)}(0)$ 不存在. 整理后得

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -2x, & x<0, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ \text{不存在}, & x = 0, \\ -2, & x < 0, \end{cases}$$

当 $k \geq 3$ 时, $f^{(k)}(x) = 0(x \neq 0)$, $f^{(k)}(0)$ 不存在.

5.5 微分

5.5.1 微分的概念

5.5.2　微分的运算法则

5.5.3 高阶微分

5.5.4 微分在近似计算中的应用