数学分析 A

指导教师： 李嘉 副教授

授课教师： 谭兵 副教授

主页：https://bingtan.me

西南大学数学与统计学院

2024 年 12 月 12 日

目录

7 实数的完备性习题课

6 微分中值定理及其应用习题课

6.1 拉格朗日定理和函数的单调性习题与答案

例子 6.1. 证明: (1) 方程 $x^3-3x+c=0$ (这里 c 为常数) 在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根; (2) 方程 $x^n+px+q=0$ (n 为正整数, p,q 为实数) 当 n 为偶数时至多有两个实根; 当 n 为奇数时至多有三个实根.

例子 6.1. 证明：(1) 方程 $x^3-3x+c=0$ (这里 c 为常数) 在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根；(2) 方程 $x^n+px+q=0$ (n 为正整数，p,q 为实数) 当 n 为偶数时至多有两个实根；当 n 为奇数时至多有三个实根.

证明

(1) 令 $f(x)=x^3-3x+c$, 则 $f'(x)=3x^2-3$. 由方程 $3x^2-3=0$ 得 $x=\pm1$, 抛物线 $y=3x^2-3$ 的开口向上，于是 $f'(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内恒为负. 用反证法证明原命题. 如果在区间 $[0,1]$ 内有两个不同的实根 x_1,x_2, 不妨设 $x_1<x_2$, 则 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(-1,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，但这是不可能的. 所以方程 $x^3-3x+c=0$ 在区间 $(0,1)$ 内不可能有两个不同的实根.

(2) 令 $f(x)=x^n+px+q$，则 $f'(x)=nx^{n-1}+p$. 当 $n\leq 3$ 时，显然成立，当 $n\geq 4$ 时，(i) 设 n 为正偶数. 如果方程 $x^n+px+q=0$ 有三个以上的实根，则存在实数 x_1,x_2,x_3，使得 $x_1<x_2<x_3$，并且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$. 根据罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，但这是不可能的. 因为 $f'(x)=0$ 是奇次方程 $nx^{n-1}+p=0$，它在 $\mathbb{R}$ 上有且仅有一个实根 $x=\sqrt[n]{-\frac{p}{n}}$. 故方程 $f(x)=0$ 当 n 为偶数时至多有两个实根. (ii) 设 n 为正奇数. 如果方程 $x^n+px+q=0$ 有四个以上不同的实根，则根据罗尔中值定理，存在 ξ_1,ξ_2,ξ_3，使得 $\xi_1<\xi_2<\xi_3$，并且 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$，但这是不可能的. 因为 $f'(x)=0$ 是偶次方程 $nx^{n-1}+p=0$，它在 $\mathbb{R}$ 上最多只有两个实根. 故方程 $f(x)=0$ 当 n 为奇数时至多有三个实根. $\square$

例子 6.2. 证明：(1) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x) \geq m$，则 $f(b) \geq f(a) + m(b-a)$；(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)| \leq M$，则 $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$；(3) 对任意实数 x_1, x_2，都有 $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

例子 6.2. 证明：(1) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x) \geq m$，则 $f(b) \geq f(a) + m(b-a)$；(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)| \leq M$，则 $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$；(3) 对任意实数 x_1, x_2，都有 $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

证明

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，所以在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(1) 因为 $f'(x) \geq m$，于是 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq m$，因此 $f(b) \geq f(a) + m(b-a)$.

(2) 因为 $|f'(x)| \leq M$, 于是 $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M$. 因此 $|f(b)-f(a)| \leq M(b-a)$.

(3) 当 $x_1 = x_2$ 时，结论成立. 当 $x_1 \neq x_2$ 时，不妨设 $x_1 < x_2$，令 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$, $|f'(x)| \leq 1$, 由 (2) 的结论知, $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

□

例子 6.3. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式：(1) $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$，其中 $0 < a < b$；(2) $\frac{h}{1+h^2} < \arctan h < h$，其中 $h > 0$.

例子 6.3. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式：(1) $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$，其中 $0 < a < b$；(2) $\frac{h}{1+h^2} < \arctan h < h$，其中 $h > 0$.

证明

(1) $\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a$，令 $f(x) = \ln x$，则 $f'(x) = \frac{1}{x}$. 因为 $0 < a < b$，所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 故至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$，而 $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$. 于是，$\frac{1}{\xi} = \frac{\ln b-\ln a}{b-a}$，由 $0 < a < \xi < b$ 知 $\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$，因而 $\frac{1}{b} < \frac{\ln b-\ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$，故 $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

(2) $\arctan h = \arctan h - \arctan 0$，令 $f(x) = \arctan x$，则 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. $f(x)$ 在 $[0, h]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是存在 $\xi \in (0, h)$，使得 $\arctan h - \arctan 0 = \frac{h}{1+\xi^2}$. 又因 $\xi \in (0, h)$，故 $\frac{h}{1+h^2} < \frac{h}{1+\xi^2} < h$，故 $\frac{h}{1+h^2} < \arctan h < h$. □

例子 6.4. 应用函数的单调性证明下列不等式：(1) $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$；(2) $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$；(3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, x > 0$.

例子 6.4. 应用函数的单调性证明下列不等式：(1) $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$；(2) $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$；(3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, x > 0$.

证明

(1) 令 $f(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续且 $f(0) = 0$，又

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内严格递增. 故当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x) > f(0) = 0$，故 $\tan x > x - \frac{x^3}{3}$.

(2) 先证明 $\sin x < x$. 令 $f(x) = x - \sin x$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续且 $f(0) = 0$，又 $f'(x) = 1 - \cos x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 于是在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内，$f(x)$ 严格递增. 所以 $f(x) = x - \sin x > f(0) = 0$，即 $x > \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

再证 $\frac{2x}{\pi} < \sin x$. 令 $g(x) = \frac{\sin x}{x}$，则

$$g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - \tan x)\cos x}{x^2}.$$

为了确定 $x - \tan x$ 的符号，令 $h(x) = x - \tan x$，则

$$h'(x) = 1 - \sec^2 x = -\tan^2 x < 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

因此 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内严格递减. 又因 $h(x)$ 在 $x = 0$ 连续，故 $h(x) < h(0) = 0$，因此，$g'(x) < 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 于是，$g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内严格递减，又因为 $g(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 连续，所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g(x) > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$，故当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{2x}{\pi} < \sin x$.

(3) 令 $f(x)=x-\frac{x^2}{2(1+x)}-\ln(1+x), x\geq 0$;

$$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}, x\geq 0,$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $x=0$ 处连续且 $f(0)=0, g(0)=0$,

$$f'(x)=1-\frac{x^2+2x}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x^2}{2(1+x)^2}>0, x>0$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0, x>0.$$

所以当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0, g(x)>g(0)=0$，由此可得,

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}, x>0.$$

□

例子 6.5. 设 f 为 $[a,b]$ 上二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$，并存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

例子 6.5. 设 f 为 $[a,b]$ 上二阶可导函数，$f(a)=f(b)=0$，并存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

证明

因 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上满足拉格朗日中值定理, 故存在 $\xi_1\in(a,c)$, 使 $f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$，由 $f(c)>0, f(a)=0, c-a>0$ 得 $f'(\xi_1)>0$. 同理，存在 $\xi_2\in(c,b)$, 使 $f'(\xi_2)<0$. 于是有 $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, $a<\xi_1<\xi_2<b$，又因为 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上可导，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}<0.$$

□

例子 6.6. 证明：若函数 f, g 在区间 $[a, b]$ 上可导，且 $f'(x) > g'(x), f(a) = g(a)$，则在 $(a, b]$ 内有 $f(x) > g(x)$.

例子 6.6. 证明：若函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>g'(x), f(a)=g(a)$，则在 $(a,b]$ 内有 $f(x)>g(x)$.

证明

令 $F(x)=f(x)-g(x), x\in[a,b]$，则 $F(a)=f(a)-g(a)=0, F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$. 于是，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增，故当 $x\in(a,b]$ 时，$F(x)>F(a)=0$，即 $f(x)>g(x)$. □

6.2 柯西中值定理和不定式极限习题与答案

例子 6.7. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi).$$

例子 6.7. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi).$$

证明

令 $F(x)=x^2[f(b)-f(a)]-\left(b^2-a^2\right)f(x)$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导可知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $F(a)=F(b)=a^2f(b)-b^2f(a)$，故由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $2\xi[f(b)-f(a)]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi)$. □

例子 6.8. 设函数 f 在点 a 处具有连续的二阶导数. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

例子 6.8. 设函数 f 在点 a 处具有连续的二阶导数. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

解答

证明：因为 f 在点 a 处具有连续的二阶导数，所以 f 在点 a 的某邻域 $U(a)$ 内具有一阶导数，于是由洛必达法则，分子分母分别对 h 求导，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)+f'(a)-f'(a-h)}{h}\\
&=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right]\\
&=\frac{1}{2}[f''(a)+f''(a)]=f''(a).
\end{aligned}$$

证明

错误解法：两次应用洛必达法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}=f''(a).$$

□

例子 6.9. 求下列不定式极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$; (5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$; (8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; (9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$; (11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$; (12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

例子 6.9. 求下列不定式极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$; (5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$; (8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; (9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$; (11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$; (12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解答

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x}=1.$$

(2)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(1-2\sin x)'}{(\cos 3x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{-2\cos x}{-3\sin 3x}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{-\cos x}=1.$$

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x\sec^2 x}{\sin x}=2.$$

(5)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x-6}{\sec x+5}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec x\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}=1.$$

(6)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln(\tan x)}$，因为

$$\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln(\tan x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=0,\text{故所求极限为}1.$$

(8)

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{1-x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(9)

$$\lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(10)

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot (-\tan x) = 0.$$

(11)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-4\sin 2x}{24x}=-\frac{1}{3}.$$

(12) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\frac{\tan x}{x}}{x^2}}$，因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\tan x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sec^2 x-\tan x}{2x^2\tan x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sec^2 x-\tan x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x-\sec^2 x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{6x}\cdot\frac{1}{\cos^3 x}=\frac{1}{3},$$

故所求的极限值为$\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

例子 6.10. 设 $f(0)=0, f'$ 在原点的某邻域内连续，且 $f'(0)\neq 0$. 证明：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=1$.

例子 6.10. 设 $f(0)=0$, f' 在原点的某邻域内连续，且 $f'(0)\neq 0$. 证明：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=1$.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{f(x)\ln x}$，而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x)\ln x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}\\ &= -\frac{1}{f'(0)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{f^2(x)}{x}=-\frac{1}{f'(0)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{2f(x)f'(x)}{1}=0,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=\mathrm{e}^0=1$. □

例子 6.11. 证明：$f(x) = x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ 为有界函数.

例子 6.11. 证明：$f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ 为有界函数.

证明

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x\mathrm{e}^{x^2}}\\ &= \frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\mathrm{e}^{x^2}} = 0\end{aligned}$$

注意到 $f(x)$ 为奇函数 (或同理可得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$). 于是，对于 $\varepsilon_0=1$，存在 $M>0$，使得当 $|x|>M$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon_0=1$. 在 $[-M,M]$ 上，由闭区间上连续函数的有界性定理知，存在 $S>0$，使得当 $x\in[-M,M]$ 时，$|f(x)|<S$. 于是，对于一切 $x\in(-\infty,+\infty), |f(x)|<\max\{S,1\}$. 故 $f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ 为有界函数. □

6.3 泰勒公式习题与答案

例子 6.12. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$.

例子 6.12. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$; (3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$.

解答

(1) 因为 $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2), \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, 所以 $\mathrm{e}^x\sin x=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. 故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x(1+x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

所以：原式 $= \lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}.$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]-x\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right]}{x^2[x+o(x)]}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

6.4 函数的极值与最大 (小) 值习题与答案

例子 6.13. 求下列函数的极值：(1) $f(x)=2x^3-x^4$；(2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$；(3) $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$；(4) $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

例子 6.13. 求下列函数的极值：(1) $f(x)=2x^3-x^4$；(2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$；(3) $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$；(4) $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

解答

(1) $f'(x)=6x^2-4x^3, f''(x)=12x-12x^2, f'''(x)=12-24x$，由 $f'(x)=0$，即 $6x^2-4x^3=0$ 得 $f(x)$ 的稳定点为 $x=0$ 和 $x=\frac{3}{2}$，因为 $f'(0)=f''(0)=0, f'''(0)=12$，由极值的第三充分条件知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不取极值. 因为 $f'(\frac{3}{2})=0, f''(\frac{3}{2})=-9$，由极值的第二充分条件知，$f(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 处取极大值，极大值为 $f(\frac{3}{2})=\frac{27}{16}$.

(2)

$$f'(x) = \frac{2\left(1+x^2\right) - 2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

由 $f'(x)=0$ 得稳定点为 $x=\pm 1$. 因 $f''(1)=-1<0$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(1)=1$；因为 $f''(-1)=1>0$，故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(-1)=-1$.

也可以列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	极小值为 -1	$\nearrow$	极大值为1	$\searrow$

(3)

$$f'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2-6\ln x+2(\ln x)^2}{x^3}.$$

由 $f'(x)=0$ 得稳定点为 $x=1$ 和 $x=\mathrm{e}^2$. 因 $f''(1)=2>0$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(1)=0$；因 $f''(\mathrm{e}^2)=\frac{-2}{\mathrm{e}^6}<0$，故 $x=\mathrm{e}^2$ 是 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(\mathrm{e}^2)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}$.

(4)

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{2\left(1+x^2\right)}=\frac{1-x}{1+x^2},\quad f''(x)=\frac{-1-2x+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

由 $f'(x)=0$ 得稳定点为 $x=1$，因 $f''(1)=-\frac{1}{2}<0$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

例子 6.14. 证明：若函数 f 在点 x_0 处有 $f'_+(x_0) < 0(> 0), f'_-(x_0) > 0(< 0)$，则 x_0 为 f 的极大 (小) 值点.

例子 6.14. 证明：若函数 f 在点 x_0 处有 $f'_+(x_0) < 0(> 0), f'_-(x_0) > 0(< 0)$，则 x_0 为 f 的极大 (小) 值点.

证明

假设 $f'_+(x_0) < 0, f'_-(x_0) > 0$. 由 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ 及极限的保号性知，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ 时有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$，于是此时有 $f(x) < f(x_0)$；由 $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ 可知，存在 $\delta_2 > 0$，使得当 $x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$ 时有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$，于是此时有 $f(x) < f(x_0)$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $x \in U(x_0; \delta)$ 时，$f(x) \leq f(x_0)$，故 x_0 为 f 的极大值点. 同理可证，当 $f'(x_0) > 0, f'_-(x_0) < 0$ 时，x_0 为 f 的极小值点. □

例子 6.15. 求下列函数在给定区间上的最大最小值：(1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1, 2]$；(2) $y = 2\tan x - \tan^2 x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$；(3) $y = \sqrt{x}\ln x, (0, +\infty)$.

例子 6.15. 求下列函数在给定区间上的最大最小值：(1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1, 2]$；(2) $y = 2\tan x - \tan^2 x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$；(3) $y = \sqrt{x}\ln x, (0, +\infty)$.

解答

(1) $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-1)(x-3)$, 由方程 $y' = 0$ 得稳定点 $x = 0$, 1,3. 由于 $3 \notin [-1, 2]$，故舍去. $y(-1) = -10, y(0) = 1, y(1) = 2, y(2) = -7$，比较它们的大小知，函数在 $x = -1$ 处取最小值 -10，在 $x = 1$ 处取最大值 2.

(2) 令 $t = \tan x$，由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 知 $t \in [0, +\infty)$.

$$y = 2\tan x - \tan^2 x = 2t - t^2 = -(t-1)^2 + 1.$$

于是，当 $t = 1$，即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时，函数取最大值 1. 又因 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(2\tan x - \tan^2 x\right) = -\infty$，最小值不存在.

(3) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$，由 $y' = 0$ 得稳定点 $x = \mathrm{e}^{-2}$. 当 $0 < x < \mathrm{e}^{-2}$ 时，$y' < 0$；当 $\mathrm{e}^{-2} < x < +\infty$ 时，$y' > 0$. 故函数在 e^{-2} 处取最小值，最小值为 $y(\mathrm{e}^{-2}) = -\frac{2}{\mathrm{e}}$. 又因 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\ln x) = 0$，$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x}\ln x) = +\infty$，故最大值不存在.

例子 6.16. 有一个无盖的圆柱形容器，当给定体积为 V 时，要使容器的表面积为最小，问底的半径与容器高的比例应该怎样？

例子 6.16. 有一个无盖的圆柱形容器，当给定体积为 V 时，要使容器的表面积为最小，问底的半径与容器高的比例应该怎样?

解答

设底的半径为 r，则 $V = \pi r^2 h$，容器的高 $h = \frac{V}{\pi r^2}$，容器的表面积

$$S(r) = 2\pi rh + \pi r^2 = \pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

于是 $S'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$，由 $S'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. 又因为 $S''(r) = 2\pi + \frac{4V}{r^3}, S''(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}) = 6\pi > 0$，故 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 是 $S(r)$ 的极小值点，此时 $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$，故 $\frac{r}{h} = 1$. 即当底的半径与容器的高的比例为 $1:1$ 时，容器的表面积为最小.

例子 6.17. 设 $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ 在 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 处都取得极值，试求 a 与 b；并问这时 f 在 x_1 与 x_2 是取得极大值还是极小值?

例子 6.17. 设 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1, x_2=2$ 处都取得极值，试求 a 与 b；并问这时 f 在 x_1 与 x_2 是取得极大值还是极小值?

解答

$f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1$, 由 $f'(1)=0, f'(2)=0$ 得方程组 $\begin{cases} a+2b+1=0 \\ \frac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases}$, 解得 $a=-\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{6}$. $f''(x)=-\frac{a}{x^2}+2b=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$, 故 $f''(1)=\frac{1}{3}>0, f''(2)=-\frac{1}{6}<0$, 于是 f 在 $x_1=1$ 取得极小值，在 $x_2=2$ 取得极大值.

例子 6.18. 在抛物线 $y^2 = 2px$ 哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短.

例子 6.18. 在抛物线 $y^2=2px$ 哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短.

解答

设 $M_0(x_0,y_0)$ 为抛物线 $y^2=2px$ 上的一点，则过该点的切线斜率为 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}\right|_{x=x_0}=\frac{p}{y_0}$，故点 M_0 处的法线方程为 $y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0)$. 设法线与抛物线 $y^2=2px$ 的另一交点为 (x_1,y_1)，则由韦达定理可知，两交点的距离 d 满足

$$d^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=\frac{4\left(y_0^2+p^2\right)^3}{y_0^4}.$$

令 $f(y)=\frac{4\left(y^2+p^2\right)^3}{y^4}$，则 $f'(y)=\frac{8\left(p^2+y^2\right)^2\left(y^2-2p^2\right)}{y^5}$，由 $f'(y)=0$ 得 $y=\pm\sqrt{2}p$. 故所求点的坐标为 $(p,\pm\sqrt{2}p)$.

6.5 函数的凸性与拐点习题与答案

例子 6.19. 确定下列函数的凸性区间与拐点：

$$(1) y=2x^3-3x^2-36x+25; \qquad (2) y=x+\frac{1}{x}; \qquad (3) y=x^2+\frac{1}{x};$$

$$(4) y=\ln\left(x^2+1\right); \qquad (5) y=\frac{1}{1+x^2}.$$

例子 6.19. 确定下列函数的凸性区间与拐点:

$(1) y=2x^3-3x^2-36x+25$;　　$(2) y=x+\dfrac{1}{x}$;　　$(3) y=x^2+\dfrac{1}{x}$;

$(4) y=\ln\left(x^2+1\right)$;　　$(5) y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

解答

(1) $y'=6x^2-6x-36, y''=12x-6$. 由 $y''=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$. 当 $x<\frac{1}{2}$ 时, $y''<0$; 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $y''>0$. 故 y 的凹区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, 凸区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, y 的拐点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{13}{2}\right)$.

(2) $y'=1-\frac{1}{x^2}, y''=\frac{2}{x^3}$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $y''<0$; 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y''>0$, 故 y 的凹区间为 $(-\infty,0)$, y 的凸区间为 $(0,+\infty)$. 由于 $y''=0$ (即 $\frac{2}{x^3}=0$) 无实根, 故 y 无拐点.

(3) $y' = 2x - \frac{1}{x^2}, y'' = 2 + \frac{2}{x^3}$. 由 $y'' = 0$ 得 $x = -1$. 由 $y'' < 0$ 得 $-1 < x < 0$. 由 $y'' > 0$ 得 $x < -1$ 或 $x > 0$. 故 y 的凹区间为 $(-1, 0)$，y 的凸区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, +\infty)$. 于是拐点为 $(-1, 0)$

(4) $y' = \frac{2x}{x^2+1}, y'' = \frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$，由 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 由 $y'' < 0$ 得 $\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} < 0$，解得 $x < -1$ 或 $x > 1$. 由 $y'' > 0$ 得 $\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} > 0$，解得 $-1 < x < 1$. 故 y 的凹区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$，凸区间为 $(-1, 1)$. 拐点为 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$

(5) $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, y'' = \frac{-2\left(1+x^2\right)^2+4x\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$，由 $y'' = 0$ 得 $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，当 $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时，$y'' < 0$；当 $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 时，$y'' > 0$. 故 y 的凹区间为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$，凸区间为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$，拐点为 $(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$.

例子 6.20. 问 a 和 b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

例子 6.20. 问 a 和 b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

解答

$y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b$. 由 $(1,3)$ 为该曲线的拐点知，$f''(1) = 0$, $3 = f(1)$，由此得到方程组

$$\begin{cases} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 = 3 \\ 6a \cdot 1 + 2b = 0 \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$.

例子 6.21. 应用凸函数概念证明如下不等式：(1) 对任意实数 a, b，有 $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b\right)$；(2) 对任何非负实数 a, b，有 $2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b$.

例子 6.21. 应用凸函数概念证明如下不等式：(1) 对任意实数 a, b，有 $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b\right)$；(2) 对任何非负实数 a, b，有 $2 \arctan \left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a+\arctan b$.

解答

(1) $(\mathrm{e}^x)''=\mathrm{e}^x$. 因 $\mathrm{e}^x>0$ 恒成立，故 e^x 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数，令定义中的 $\lambda=\frac{1}{2}$，则有 $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b\right)$.

(2) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}, (\arctan x)''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$，当 $x \geq 0$ 时 $f''(x) \leq 0$，从而 $\arctan x$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凹函数. 故由定义可知，对任意非负实数 a, b，有

$$f\left(\frac{1}{2} a+\left(1-\frac{1}{2}\right) b\right) \geq \frac{1}{2} f(a)+\left(1-\frac{1}{2}\right) f(b).$$

即 $\arctan \left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\arctan a+\arctan b)$.

例子 6.22. 证明：若 f, g 均为区间 I 上凸函数，则 $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 也是 I 上凸函数.

例子 6.22. 证明：若 f, g 均为区间 I 上凸函数，则 $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 也是 I 上凸函数.

证明

因为 f, g 均为区间 I 上的凸函数，所以对任意的 $x_1, x_2 \in I$ 及 $\lambda \in (0,1)$，总有

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \le \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right),$$

$$g\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \le \lambda g\left(x_1\right) + (1-\lambda) g\left(x_2\right),$$

由于 $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$，因而 $f\left(x_1\right) \le F\left(x_1\right), f\left(x_2\right) \le F\left(x_2\right)$，$g\left(x_1\right) \le F\left(x_1\right), g\left(x_2\right) \le F\left(x_2\right)$，于是

$$\lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right) \le \lambda F\left(x_1\right) + (1-\lambda) F\left(x_2\right),$$

$$\lambda g\left(x_1\right) + (1-\lambda) g\left(x_2\right) \le \lambda F\left(x_1\right) + (1-\lambda) F\left(x_2\right),$$

综上可得

$$\max\left\{f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right),g\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\right\}\leq\lambda F\left(x_1\right)+(1-\lambda)F\left(x_2\right).$$

即 $F\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\leq\lambda F\left(x_1\right)+(1-\lambda)F\left(x_2\right)$，故 $F(x)$ 是 I 上的凸函数.$\square$

6.6 函数图像的讨论习题与答案

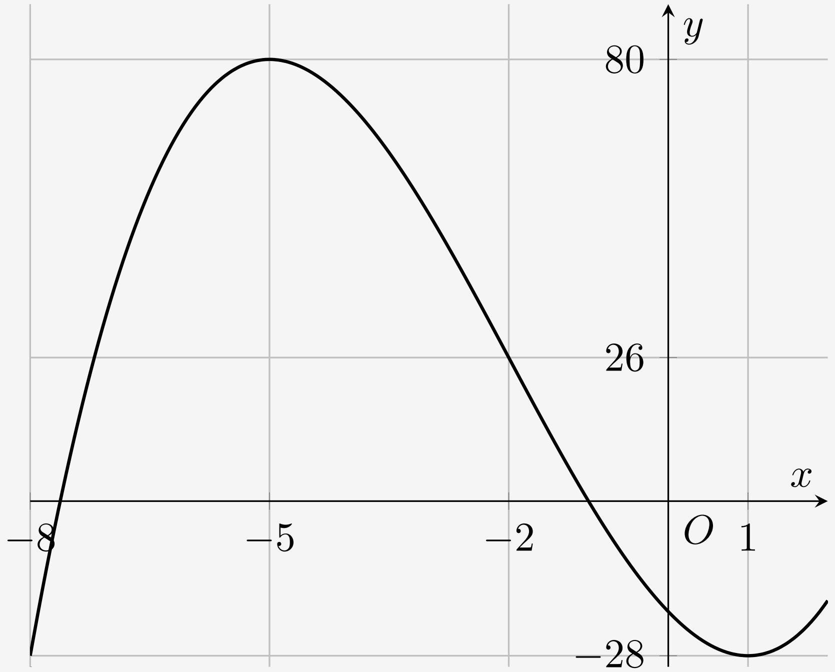
例子 6.23. 按函数作图步骤，作下列函数图像：(1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$；(6) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$.

例子 6.23. 按函数作图步骤，作下列函数图像：(1) $y=x^3+6x^2-15x-20$；(6) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$.

解答

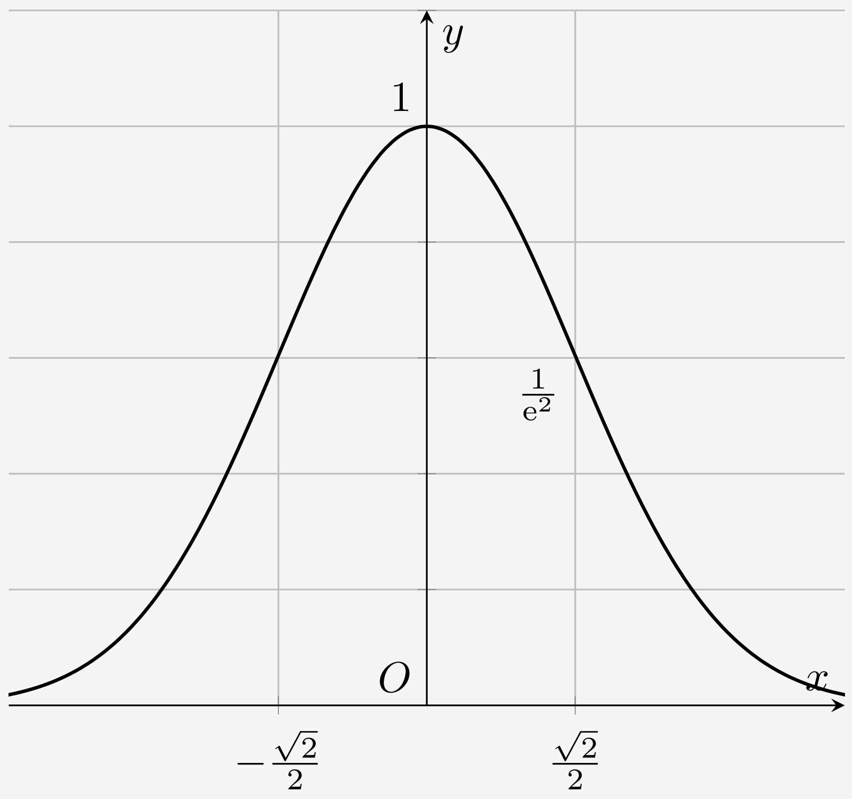
(1) 函数 $y=x^3+6x^2-15x-20$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 容易求得曲线与坐标轴交于以下几点：$(-1,0),\left(\frac{-5+\sqrt{105}}{2},0\right),\left(\frac{-5-\sqrt{105}}{2},0\right),(0,-20)$. $y'=3x^2+12x-15$，由 $y'=0$ 得稳定点 $x=-5,1$. $y''=6x+12$，由 $y''=0$ 得 $x=-2$.

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$+$	0	-	-	-	0	$+$
y''	-	-	-	0	$+$	$+$	$+$
y	增凹	极大值 $f(-5) = 80$	减凹	拐点 $(-2, 26)$	减凸	极小值 $f(1) = -28$	增凸



(6) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是一个偶函数. 曲线在 x 轴上方，与坐标轴的交点为 $(0,1)$. $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$，由 $y'=0$ 得 $x=0$. $y''=-2\mathrm{e}^{-x^2}+4x^2\mathrm{e}^{-x^2}=2\mathrm{e}^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$，令 $y''=0$ 得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x^2}=0$，所以曲线有水平渐近线 $y=0$.

x	0	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	0	-	-	-
y''	-	-	0	$+$
y	极大值 1	减凹	拐点	减凸



y
1
$\frac{1}{e^2}$
O
x
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.7　第六章总练习题与答案

例子 6.24. 证明：若 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$.

例子 6.24. 证明：若 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内可导，且 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$.

证明

补充定义 $f(x)$ 在 a,b 的值如下：$f(a) = f(b) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$. 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足罗尔中值定理的条件，于是存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$. □

例子 6.25. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $a\cdot b>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证明

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}},$$

因而取 $F(x) = \frac{f(x)}{x}, G(x) = \frac{1}{x}, x \in [a,b]$，则函数 F 和 G 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件. 于是存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \left(\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}\right) \Big/ \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

□

例子 6.26. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且 $0 \le f'(x) \le f(x), f(0)=0$. 证明：在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

例子 6.26. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且 $0 \le f'(x) \le f(x), f(0)=0$. 证明：在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

证明

令 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x), x\in[0,+\infty)$，则 $g(0)=0, g(x)\ge 0$. 因为 $f'(x)\le f(x)$，所以 $g'(x)=-\mathrm{e}^{-x}f(x)+\mathrm{e}^{-x}f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)\le 0, x\in[0,+\infty)$. 因此，$g$ 为 $[0,+\infty)$ 上的递减函数. 于是，$0\le g(x)\le g(0)=0$，$x\in[0,+\infty)$，故 $g(x)\equiv 0$，由此得在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$. □

7　实数的完备性习题课

例子 7.1. 证明数集 $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ 有且只有两个聚点 $\xi_1 = -1$ 和 $\xi_2 = 1$.

例子 7.1. 证明数集 $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$ 有且只有两个聚点 $\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$.

证明 当 n 取奇数 $n=2k-1$ 时，S 中的互异子列 $\left\{-1+\frac{1}{2k-1}\right\}$ 收敛于 -1，所以 $\xi_1=-1$ 是 S 的聚点；当 n 取偶数 $n=2k$ 时，S 中的互异子列 $\left\{1+\frac{1}{2k}\right\}$ 收敛于 1；所以 $\xi_2=1$ 是 S 的聚点.

设实数 $a\neq-1, a\neq 1$. 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\min\{|a+1|,|a-1|\}$，因为子列 $\left\{-1+\frac{1}{2k-1}\right\}$ 收敛于 -1，子列 $\left\{1+\frac{1}{2k}\right\}$ 收敛于 1，所以在 $U(-1;\varepsilon_0)$ 外子列 $\left\{-1+\frac{1}{2k-1}\right\}$ 中的项至多只有有限个，在 $U(1;\varepsilon_0)$ 外子列 $\left\{1+\frac{1}{2k}\right\}$ 中的项也至多只有有限个，故在邻域 $U(a;\varepsilon_0)$ 内最多只有子列 $\left\{-1+\frac{1}{2k-1}\right\}$ 及子列 $\left\{1+\frac{1}{2k}\right\}$ 中的有限多项，从而只有数集 $S=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$ 中的有限多项，所以 a 不是数集 S 的聚点. □

例子 7.2. 设 $\{(a_n, b_n)\}$ 是一个严格开区间套，即满足

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_2 < b_1$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. 证明：存在唯一的一点 ξ，使得

$$a_n < \xi < b_n, n = 1, 2, \cdots$$

例子 7.2. 设 $\{(a_n, b_n)\}$ 是一个严格开区间套，即满足

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_2 < b_1$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. 证明：存在唯一的一点 ξ，使得

$$a_n < \xi < b_n, n = 1, 2, \cdots$$

证明

由题设知，$\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套．由区间套定理知，存在唯一的点 ξ，使得 $a_n \leq \xi \leq b_n, n = 1, 2, \cdots$．又因 $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$，所以 $a_{n-1} < \xi < b_{n-1}$，$n = 2, 3, \cdots$，即 $a_n < \xi < b_n, n = 1, 2, \cdots$. □

例子 7.3. 设 $H=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\middle|\ n=1,2,\cdots\right\}$. 问 (1) H 能否覆盖 $(0,1)$? (2) 能否从 H 中选出有限个开区间覆盖 (i) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，(ii) $\left(\frac{1}{100},1\right)$?

例子 7.3. 设 $H=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\middle|\ n=1,2,\cdots\right\}$. 问 (1) H 能否覆盖 $(0,1)$? (2) 能否从 H 中选出有限个开区间覆盖 (i) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, (ii) $\left(\frac{1}{100},1\right)$?

解答

(1) $\forall x_0\in(0,1)$, 有 $\frac{1}{x_0}>1$. $\exists n_0\in\mathbb{N}$, 有 $n_0<\frac{1}{x_0}\le n_0+1$, 所以 $\frac{1}{n_0+2}<\frac{1}{n_0+1}\le x_0<\frac{1}{n_0}$. 即 $x_0\in\left(\frac{1}{n_0+2},\frac{1}{n_0}\right)\in H$. 故 H 能覆盖 $(0,1)$.

(2) 不能从 H 中选出有限个开区间覆盖 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 因对 H 中任意有限个开区间，设其左端点最小的为 $\frac{1}{n_0+2}$，则当 $0<x<\frac{1}{n_0+2}$ 时，这有限个开区间就不能覆盖 x.

(3) 从 H 中选出 98 个开区间 $I_1,I_2,\cdots,I_{98}$，因为 $\frac{1}{98+2}=\frac{1}{100}$，所以这些开区间覆盖了 $\left(\frac{1}{100},1\right)$. 故可以从 H 中选出有限个开区间覆盖 $\left(\frac{1}{100},1\right)$.

例子 7.4. 用有限覆盖定理证明连续函数的一致连续性定理.

例子 7.4. 用有限覆盖定理证明连续函数的一致连续性定理.

证明

一致连续性定理：若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，所以任给 $x\in[a,b]$，任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_x>0$，对任意 $x'\in U(x;\delta_x)$，有 $|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $H=\left\{U\left(x;\frac{\delta_x}{2}\right)\middle|\,x\in[a,b]\right\}$. 则 H 是 $[a,b]$ 的无限开覆盖. 由有限覆盖定理，从中可以选出有限个开区间来覆盖 $[a,b]$. 不妨设选出的这有限个开区间为 $U\left(x_i;\frac{\delta_{x_i}}{2}\right), i=1,2,\cdots,n$. 取

$\delta = \min\left\{ \frac{\delta_{x_i}}{2} \middle| \; i = 1, 2, \cdots, n \right\}$. 对任意 $x', x'' \in [a, b]$，不妨设 $x' \in U\left(x_i; \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$，即 $|x' - x_i| < \frac{\delta_{x_i}}{2}$. 当 $|x' - x''| < \delta$ 时，由于

$$
\begin{aligned}
|x'' - x_i| &= |x'' - x' + x' - x_i| \\
&\le |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \le \delta_{x_i},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|f(x') - f(x'')| &= |f(x') - f(x_i) + f(x_i) - f(x'')| \\
&\le |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x'')| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

由一致连续定义，f 在 $[a, b]$ 上一致连续. □

例子 7.5. 求以下数列的上、下极限:

(1) $\{1+(-1)^n\}$ (2) $\left\{(-1)^n\frac{n}{2n+1}\right\}$ (3) $\{2n+1\}$

(4) $\left\{\frac{2n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$ (5) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ (6) $\left\{\sqrt[n]{\cos\frac{n\pi}{3}}\right\}$

例子 7.5. 求以下数列的上、下极限：

(1) $\{1+(-1)^n\}$　(2) $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}\right\}$　(3) $\{2n+1\}$

(4) $\left\{\dfrac{2n}{n+1}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$　(5) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}$　(6) $\left\{\sqrt[n]{\cos\dfrac{n\pi}{3}}\right\}$

解答

(1) 当 n 为偶数时，$1+(-1)^n=2$. 当 n 为奇数时，$1+(-1)^n=0$，而数列 $\{1+(-1)^n\}$ 没有其他的聚点. 故

$$\varlimsup_{n\to\infty}[1+(-1)^n]=2,\qquad \varliminf_{n\to\infty}[1+(-1)^n]=0.$$

(2) 令 $a_n=(-1)^n\frac{n}{2n+1}$，则由数列 $\{a_n\}$ 的偶数项、奇数项组成的数列分

别是

$$b_n=(-1)^{2n}\frac{2n}{4n+1}=\frac{2n}{4n+1},c_n=(-1)^{2n-1}\frac{2n-1}{4n-1}=-\frac{2n-1}{4n-1}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}, \lim\limits_{n\to\infty} c_n=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 都是数列 $\{a_n\}$ 的聚点，由于 $\{a_n\}$ 没有其他的聚点，因此 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=\frac{1}{2}, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=-\frac{1}{2}$.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)=+\infty$，故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(2n+1)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(2n+1)=+\infty$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$，数列 $\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$ 的项共有 5 个不同的值：$-1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 1.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{2n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}=2,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{2n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}=-2.$$

(5) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi\left(n^2+1\right)}{n^2}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi$,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\sin\frac{\pi}{n}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\sin\frac{\pi}{n}=\pi.$$

(6) 因为 $\frac{1}{2}\le\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|\le 1$，所以 $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\le x_n\le 1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}=1$，由追敛性得知

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|}=\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|}=1.$$