

---

# 数学分析 A

---

指导教师： 李嘉 副教授

授课教师： 谭兵 副教授

主页： <https://bingtan.me>

西南大学数学与统计学院

2024 年 11 月 18 日

# 目录

## 第五章 导数和微分

5.1	导数的概念 . . . . .	4
5.1.1	导数的定义 . . . . .	6
5.1.2	导函数 . . . . .	24
5.1.3	导数的几何意义 . . . . .	30
5.2	求导法则 . . . . .	40
5.2.1	导数的四则运算 . . . . .	41

5.2.2	反函数的导数 . . . . .	53
5.2.3	复合函数的导数 . . . . .	58
5.2.4	基本求导法则与公式 . . . . .	71
5.3	参变量函数的导数 . . . . .	74
5.4	高阶导数 . . . . .	79
5.5	微分 . . . . .	80
5.5.1	微分的概念 . . . . .	81
5.5.2	微分的运算法则 . . . . .	82
5.5.3	高阶微分 . . . . .	83
5.5.4	微分在近似计算中的应用 . . . . .	84

# 第五章 导数和微分

---

5.1	导数的概念 . . . . .	4
5.2	求导法则 . . . . .	40
5.3	参变量函数的导数 . . . . .	74
5.4	高阶导数 . . . . .	79
5.5	微分 . . . . .	80

---

# 5.1 导数的概念

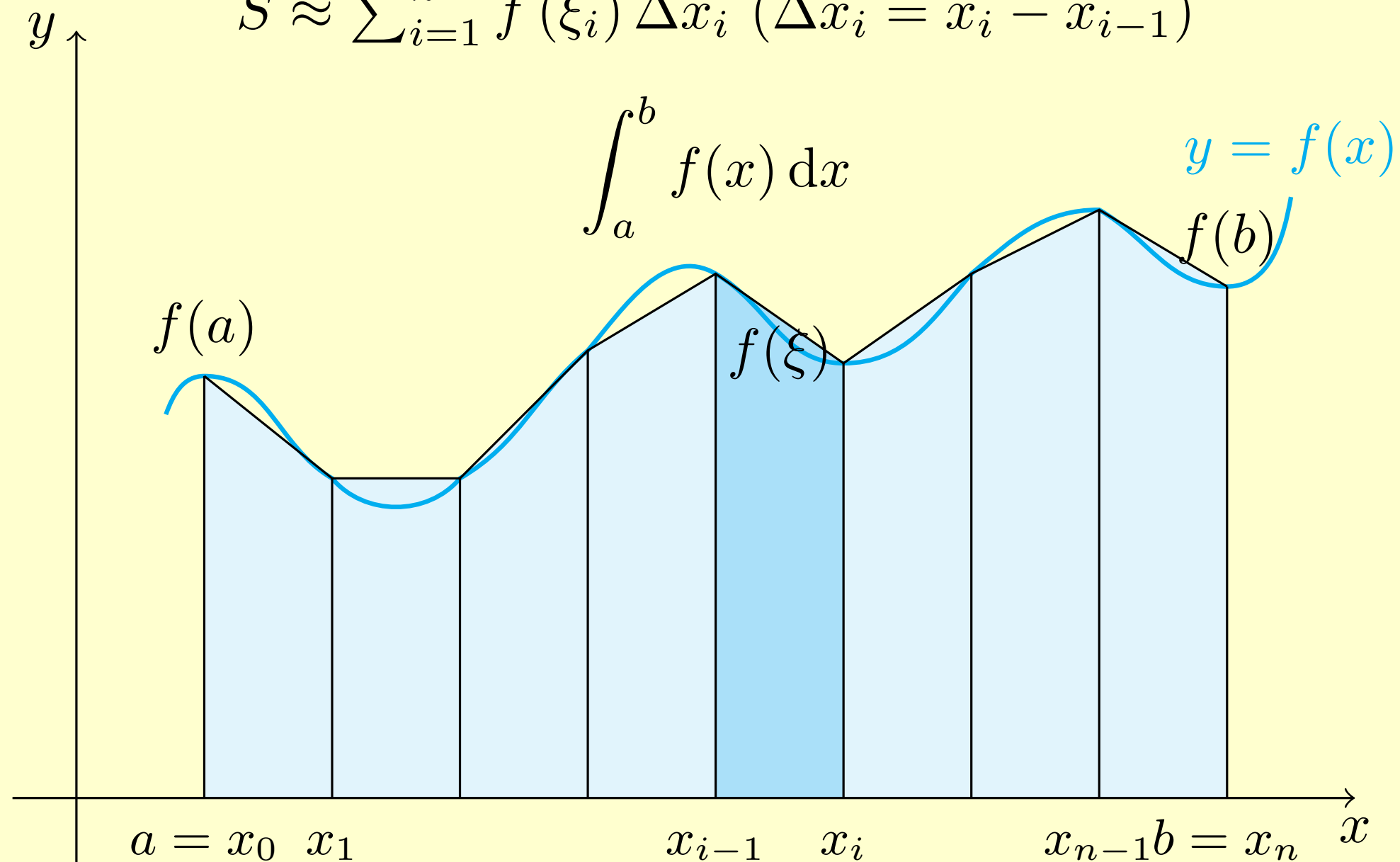
---

5.1.1	导数的定义 . . . . .	6
5.1.2	导函数 . . . . .	24
5.1.3	导数的几何意义 . . . . .	30

---

微积分的基本思想：以直代曲

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$



## 5.1.1 导数的定义

导数的概念引入：

(1) 瞬时速度

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

## 5.1.1 导数的定义

导数的概念引入：

(1) 瞬时速度

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

(2) 切线的斜率

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



定义 5.1.1 (导数). 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.1.1)$$

存在, 则称函数  $f$  在点  $x_0$  可导, 并称该极限为函数  $f$  在点  $x_0$  的导数, 记作  $f'(x_0)$ , 有时还写作  $y'|_{x=x_0}$ ,  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ ,  $\frac{df}{dx}(x_0)$  或  $\left. \frac{d}{dx} f \right|_{x=x_0}$ .

注 5.1.1. (1) 令  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , 则 (5.1.1) 式可改写为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (5.1.2)$$

有时(5.1.2)也写成

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

注 5.1.1. (1) 令  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , 则 (5.1.1) 式可改写为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (5.1.2)$$

有时(5.1.2)也写成

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

故导数是函数增量  $\Delta y$  与自变量增量  $\Delta x$  之比  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  的极限, 该增量比称为函数关于自变量的平均变化率, 也称差商, 而导数  $f'(x_0)$  则为  $f$  在  $x_0$  处关于  $x$  的变化率.

(2) 既然导数是用极限定义的, 我们当然也可以用  $\varepsilon - \delta$  语言来描述它: 如果  $\exists A \in \mathbb{R}$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$ , 有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon,$$

则  $f$  在  $x_0$  处可导, 导数为  $A$ .

(3) 若(5.1.1)或(5.1.2)式极限不存在, 则称  $f$  在点  $x_0$  不可导.

例子 5.1.1. 求函数  $f(x) = x^2$  在  $x = 1$  的导数, 并求曲线在点  $(1, 1)$  的切线方程.

例子 5.1.1. 求函数  $f(x) = x^2$  在  $x = 1$  的导数, 并求曲线在点  $(1, 1)$  的切线方程.

解答

由定义求得

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2. \end{aligned}$$

由此知道抛物线  $y = x^2$  在点  $(1, 1)$  的切线斜率为  $k = f'(1) = 2$ , 所以切线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{即} \quad y = 2x - 1.$$

例子 5.1.2. 证明函数  $f(x) = |x|$  在点  $x_0 = 0$  不可导.

例子 5.1.2. 证明函数  $f(x) = |x|$  在点  $x_0 = 0$  不可导.

证明

因为

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

当  $x \rightarrow 0$  时极限不存在, 所以  $f$  在点  $x = 0$  不可导. □



例子 5.1.3. 显然常量函数  $f(x) = C$  在任何一点  $x$  的导数都等于零, 即

$$f'(x) = 0.$$

定义 5.1.2 (有限增量公式). 设  $f(x)$  在点  $x_0$  可导, 即有  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , 则  $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$  为当  $\Delta x \rightarrow 0$  时的无穷小量, 故  $\varepsilon \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ , 即

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x).$$

称上式为  $f(x)$  在点  $x_0$  的有限增量公式. 注意, 当  $\Delta x = 0$  时该公式仍成立.

由有限增量公式即可推得下面的定理(5.1.1).

**定理 5.1.1.** 若函数  $f$  在点  $x_0$  可导, 则  $f$  在点  $x_0$  连续.

除了由有限增量公式推得定理5.1.1, 此处再给出三种证明方法.

由有限增量公式即可推得下面的定理(5.1.1).

**定理 5.1.1.** 若函数  $f$  在点  $x_0$  可导, 则  $f$  在点  $x_0$  连续.

除了由有限增量公式推得定理5.1.1, 此处再给出三种证明方法.

**证明**

法一: 需证  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 即证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ . 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \right) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

法二：将函数增量  $\Delta y$  改写为  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ ，且  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  为一有界量， $\Delta x$  为一无穷小量，故  $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$  为  $\Delta x \rightarrow 0$  时一无穷小量，即  $x \rightarrow x_0$  时有  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ ，即  $f$  在点  $x_0$  连续.

法三：利用  $\varepsilon - \delta$  语言证明. 由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$  存在，由局部有界性知，存在  $M > 0, \eta > 0$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \eta$  时有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < M.$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ ，取  $\delta = \min \left\{ \eta, \frac{\varepsilon}{M} \right\}$ ，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时有

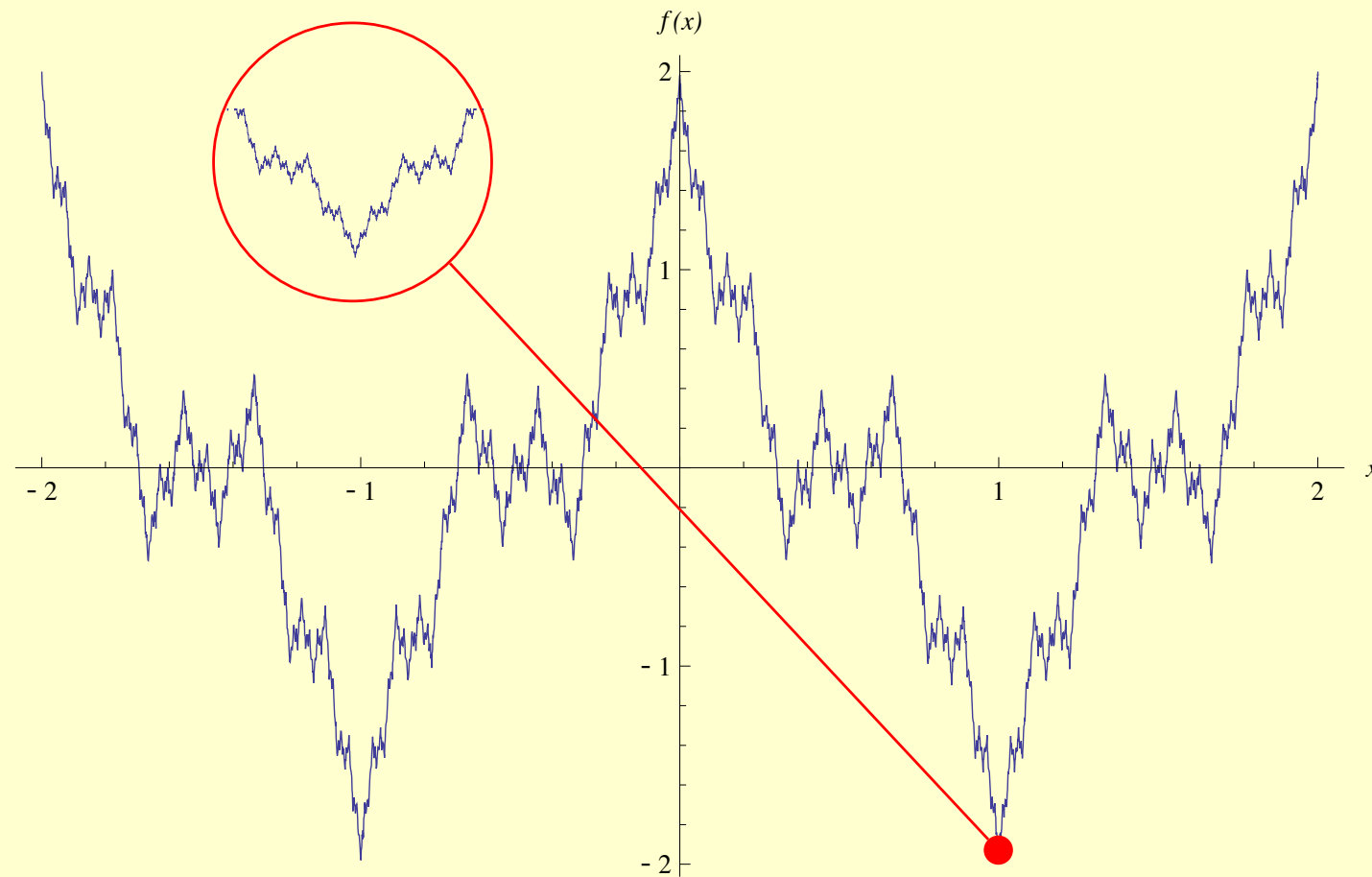
$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot |x - x_0| < M |x - x_0| \leq \varepsilon.$$

故  $f$  在点  $x_0$  连续. □

注 5.1.2. 应当指出, 可导仅是函数在该点连续的充分条件, 而不是必要条件, 可记作可导必连续, 连续不一定可导 (例如  $y = |x|$  在 0 处连续但不可导, 参见例子5.1.2). 若在某点不连续则在该点不可导.



Weierstrass 函数是一种在区间上处处连续但处处不可导的典型函数:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ , 其中  $0 < a < 1$ ,  $b$  是正奇数且满足  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ .



例子 5.1.4. 证明函数  $f(x) = x^2 D(x)$  仅在点  $x_0 = 0$  可导, 其中  $D(x)$  为狄利克雷函数.



例子 5.1.4. 证明函数  $f(x) = x^2 D(x)$  仅在点  $x_0 = 0$  可导, 其中  $D(x)$  为狄利克雷函数.

## 证明

当  $x_0 \neq 0$  时, 由归结原则可得  $f(x)$  在点  $x = x_0$  不连续, 所以由定理5.1.1,  $f(x)$  在点  $x = x_0$  不可导.

当  $x_0 = 0$  时, 由于  $D(x)$  为有界函数, 因此得到

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x D(x) = 0.$$

故函数  $f(x) = x^2 D(x)$  仅在点  $x_0 = 0$  可导, 且  $f'(0) = 0$ . □

定义 5.1.3 (右导数和左导数). 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某右邻域  $[x_0, x_0 + \delta)$  上有定义, 若右极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (0 < \Delta x < \delta)$$

存在, 则称该极限值为  $f$  在点  $x_0$  的右导数, 记作  $f'_+(x_0)$ .

类似地, 定义左导数为

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

右导数和左导数统称为单侧导数.

定理 5.1.2. 若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域上有定义, 则  $f'(x_0)$  存在的充要条件是  $f'_+(x_0)$  与  $f'_-(x_0)$  都存在且  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ .

例子 5.1.5. 设  $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$  讨论  $f(x)$  在点  $x = 0$  的左、右导数与导数.

例子 5.1.5. 设  $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$  讨论  $f(x)$  在点  $x = 0$  的左、右导数与导数.

解答

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}, & \Delta x > 0 \\ 1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

因此

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} 1 = 1.$$

因为  $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 所以  $f$  在点  $x = 0$  不可导.

例子 5.1.6. 对函数  $f(x) = |\ln |x||, x \neq 0$ , 求  $f'_+(1)$  和  $f'_-(1)$ .

例子 5.1.6. 对函数  $f(x) = |\ln |x||$ ,  $x \neq 0$ , 求  $f'_+(1)$  和  $f'_-(1)$ .

解答

根据  $f(1) = |\ln 1| = 0$ , 得到

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|\ln x|}{x - 1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(1 + \Delta x)|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left| \ln \left[ (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} \right] \right| = \ln e = 1. \end{aligned}$$

类似地得到  $f'_-(1) = -1$ .

注 5.1.3. 注意到:

- (1) 函数  $f$  在  $x_0$  处可导  $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$  存在.
- (2) 函数  $f$  在  $x_0$  处可导  $\nRightarrow$  其绝对值  $|f|$  在  $x_0$  处可导. 比如函数  $f(x) = x$ .
- (3) 可以定义函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  甚至一般区间  $I$  上的可导性. 对内部点  $x_0 \in I$ ,  $f'(x_0)$  是通常意义下的导数, 对端点  $x_0 \in I$ ,  $f'(x_0)$  定义为左导数或右导数.



## 5.1.2 导函数

若函数在区间  $I$  上每一点都可导（对区间端点考虑其单侧导数），则称  $f$  为区间  $I$  上的可导函数. 此时对任意的  $x \in I$ ，都有  $f$  的一个导数  $f'(x)$ （或单侧导数）与之对应，故定义了一个定义域为  $I$  的函数，称为  $f$  在  $I$  上的导函数，简称为导数，记作  $f', y'$  或  $\frac{dy}{dx}$ ，即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in I.$$

$f'(x_0)$  有时还写作  $y'|_{x=x_0}$  或  $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ .

### 例子 5.1.7. 证明

- (i)  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $n$  为正整数;
- (ii)  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ;
- (iii)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  ( $a > 0, a \neq 1, x > 0$ ), 特别  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;
- (iv)  $(a^x)' = a^x \ln a$ , 特别  $(e^x)' = e^x$ .
- (v)  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , 其中  $a \in \mathbb{R}, x > 0$ .

### 例子 5.1.7. 证明

- (i)  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $n$  为正整数;
- (ii)  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ;
- (iii)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  ( $a > 0, a \neq 1, x > 0$ ), 特别  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;
- (iv)  $(a^x)' = a^x \ln a$ , 特别  $(e^x)' = e^x$ .
- (v)  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , 其中  $a \in \mathbb{R}, x > 0$ .

证明

(i) 对于  $y = x^n$ , 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \Delta x + \cdots + C_n^n \Delta x^{n-1},$$

因此

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \Delta x + \cdots + C_n^n \Delta x^{n-1}) = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

(ii) 法一: 下面证第一个等式, 类似地可证第二个等式. 由于

$$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

以及  $\cos x$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数, 因此得到

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

(ii) 法二:

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) = -\sin x\end{aligned}$$

(iii) 由于

$$\frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

所以

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \quad (5.1.3)$$

若  $a = e$ ，且以  $e$  为底的自然对数常写作  $\ln x$ ，则由  $\ln e = 1$  及(5.1.3)式有  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

(iv)

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

即  $(a^x)' = a^x \ln a$ . 特别地,  $(e^x)' = e^x$ .

(v)

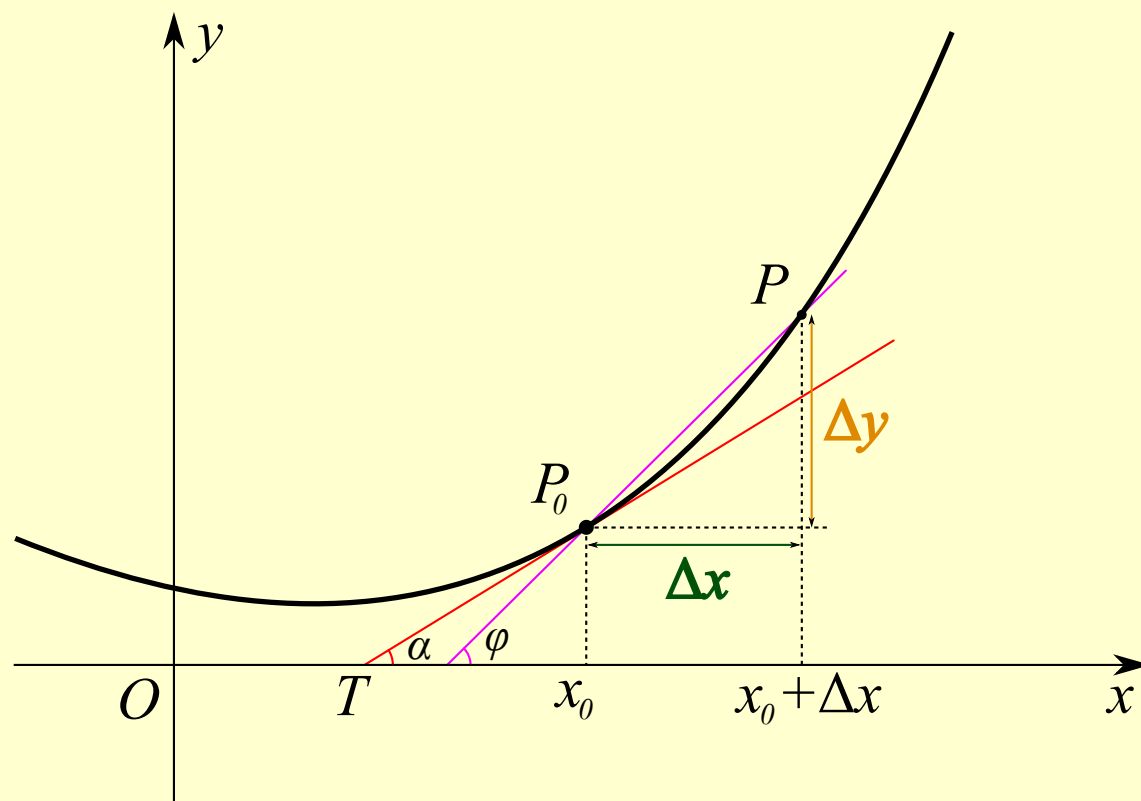
$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}.$$



### 5.1.3 导数的几何意义

若  $f(x)$  在点  $x = x_0$  的切线斜率为  $k$ ，即割线斜率在  $x \rightarrow x_0$  时的极限，即

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

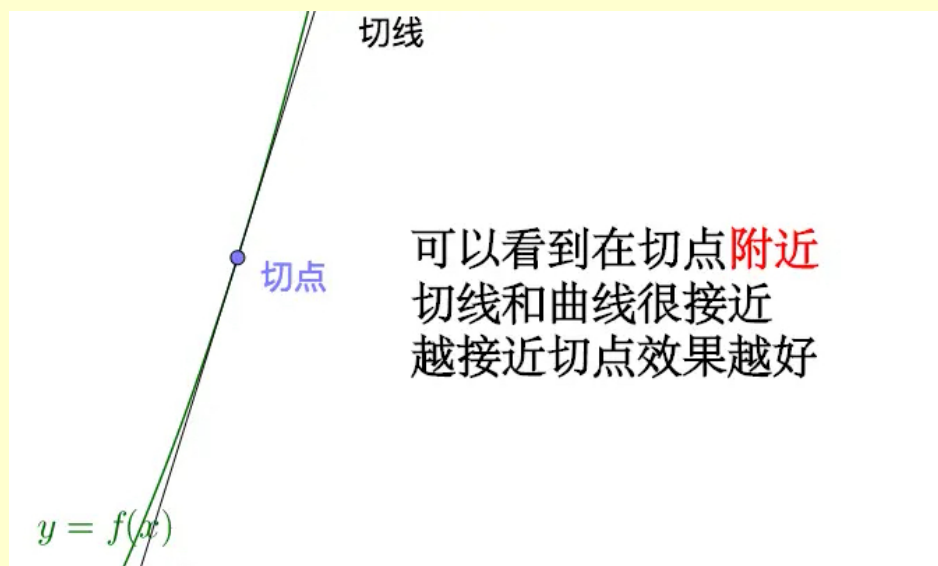




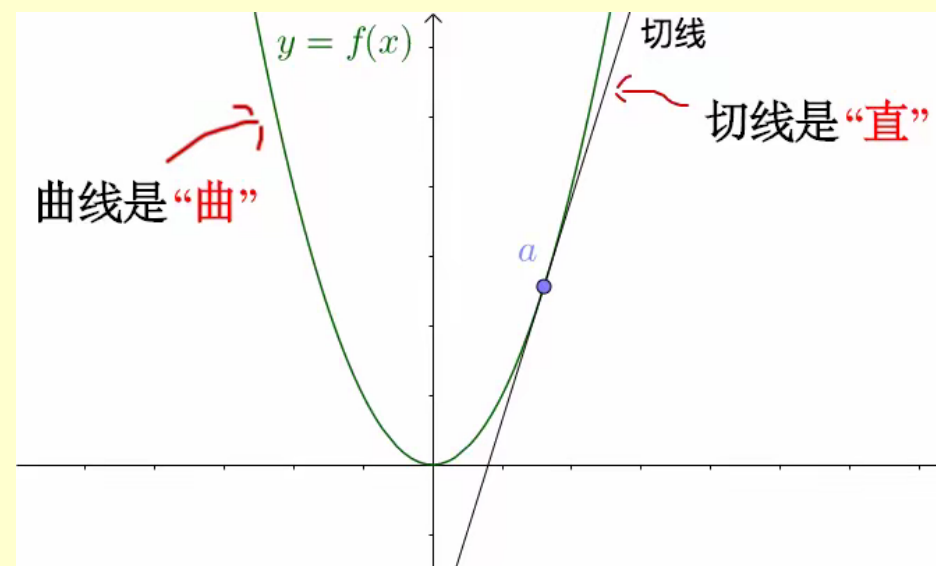
由导数定义知  $k = f'(x_0)$ , 故曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (5.1.4)$$

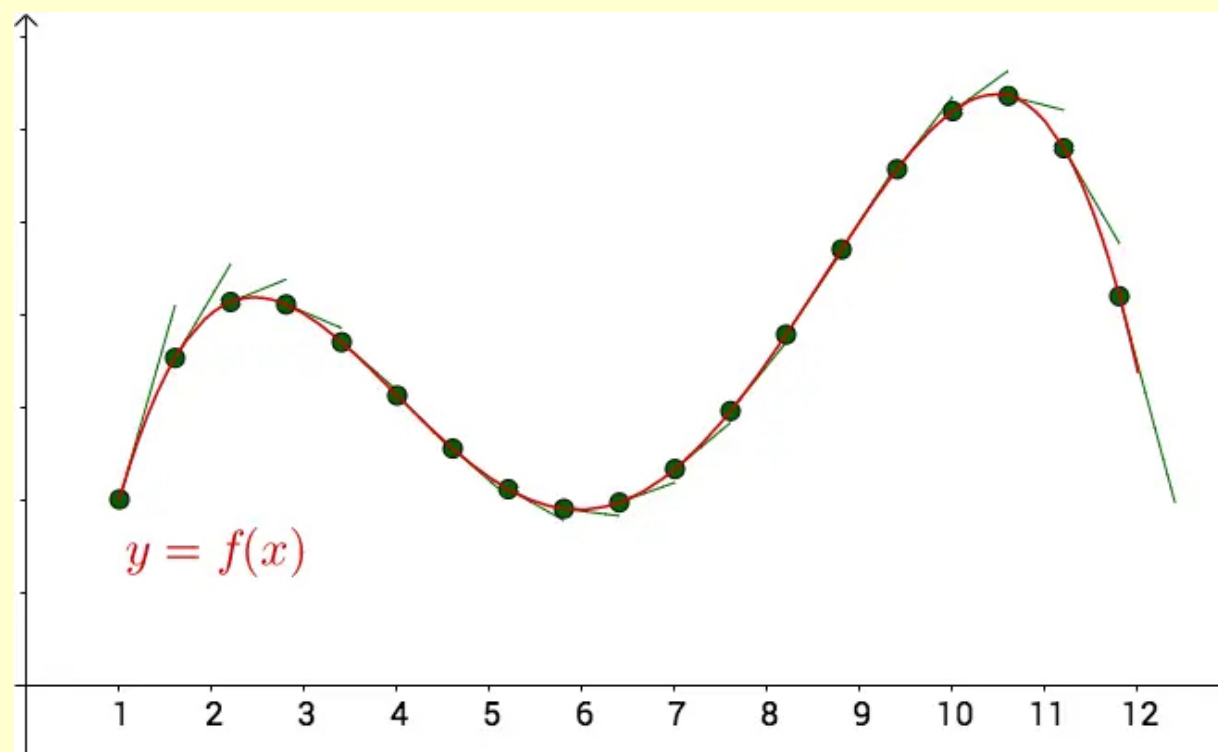
这意味着函数  $f$  在点  $x_0$  的导数  $f'(x_0)$  是曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切线斜率. 若  $\alpha$  表示该切线与  $x$  轴正向的夹角, 则  $f'(x_0) = \tan \alpha$ , 从而根据  $f'(x_0)$  的正负即可判断切线与  $x$  轴正向的夹角及关系.



(a)



(b)



(c)

例子 5.1.8. 求曲线  $y = x^3$  在点  $P(x_0, y_0)$  的切线方程与法线方程.

例子 5.1.8. 求曲线  $y = x^3$  在点  $P(x_0, y_0)$  的切线方程与法线方程.

解答

由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2.$$

所以根据(5.1.4)式, 曲线  $y = x^3$  在点  $P$  的切线方程为

$$y - y_0 = 3x_0^2(x - x_0).$$

由解析几何知道, 若切线斜率为  $k$ , 则法线斜率为  $-\frac{1}{k}$ . 从而过点  $P$  的法线

方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0) .$$

因此曲线  $y = x^3$  过点  $P(x_0 \neq 0)$  的法线方程为

$$y - x_0^3 = -\frac{1}{3x_0^2} (x - x_0) .$$

若  $x_0 = 0$ , 则法线方程为  $x = 0$ .

定义 5.1.4 (极大 (小) 值). 若函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  上对一切  $x \in U(x_0)$  有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))$$

则称函数  $f$  在点  $x_0$  取得极大 (小) 值, 称点  $x_0$  为极大 (小) 值点. 极大值、极小值统称为极值, 极大值点、极小值点统称为极值点.

定义 5.1.4 (极大 (小) 值). 若函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  上对一切  $x \in U(x_0)$  有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))$$

则称函数  $f$  在点  $x_0$  取得极大 (小) 值, 称点  $x_0$  为极大 (小) 值点. 极大值、极小值统称为极值, 极大值点、极小值点统称为极值点.

注 5.1.4. (1) 极值点不一定是最值点, 极值只是局部范围内的最值; (2) 最值点不一定是极值点; (3) 极大值不一定大于极小值.

例子 5.1.9. 证明: 若  $f'_+(x_0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 对任意  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  有  $f(x_0) < f(x)$ .



例子 5.1.9. 证明: 若  $f'_+(x_0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 对任意  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  有  $f(x_0) < f(x)$ .

证明

因为

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

所以由保号性可知, 存在正数  $\delta$ , 对一切  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

从而不难推得, 当  $0 < x - x_0 < \delta$  时, 有  $f(x_0) < f(x)$ . □

注 5.1.5. 用类似的方法还可讨论  $f'_+(x_0) < 0, f'_-(x_0) > 0, f'_-(x_0) < 0$  时的情况, 可知若  $f'(x_0)$  存在且不为零, 则  $x_0$  不是  $f(x)$  的极值点.

定理 5.1.3 (费马定理). 设函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域上有定义, 且在点  $x_0$  可导. 若点  $x_0$  为  $f$  的极值点, 则必有  $f'(x_0) = 0$ .

**定理 5.1.3 (费马定理).** 设函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域上有定义, 且在点  $x_0$  可导. 若点  $x_0$  为  $f$  的极值点, 则必有  $f'(x_0) = 0$ .

## 证明

若  $f'(x_0) \neq 0$ , 不妨设  $f'(x_0) > 0$ , 则

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

由局部保号性,  $\exists \delta_1 > 0$ , 对  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ , 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ 即有 } f(x) > f(x_0). \quad (5.1.5)$$

同理, 由  $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ , 得  $\exists \delta_2 > 0$ , 对  $\forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$ ,

有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ 即有 } f(x) < f(x_0). \quad (5.1.6)$$

结合(5.1.5)与(5.1.6)得  $x_0$  不可能是  $f(x)$  的极值点, 与已知矛盾, 从而得  $f'(x_0) = 0$ . □

费马定理的几何意义: 若函数  $f(x)$  在极值点  $x = x_0$  可导, 则在该点的切线平行于  $x$  轴.

有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ 即有 } f(x) < f(x_0). \quad (5.1.6)$$

结合(5.1.5)与(5.1.6)得  $x_0$  不可能是  $f(x)$  的极值点, 与已知矛盾, 从而得  $f'(x_0) = 0$ . □

费马定理的几何意义: 若函数  $f(x)$  在极值点  $x = x_0$  可导, 则在该点的切线平行于  $x$  轴.

注 5.1.6. (1) 满足  $f'(x) = 0$  的点称为稳定点 (也称为驻点); (2) 极值点不一定是稳定点 (例:  $f(x) = |x|, x_0 = 0$ ); (3) 稳定点不一定是极值点 (例:  $f(x) = x^3, x_0 = 0$ ).

## 5.2 求导法则

---

5.2.1	导数的四则运算 . . . . .	41
5.2.2	反函数的导数 . . . . .	53
5.2.3	复合函数的导数 . . . . .	58
5.2.4	基本求导法则与公式 . . . . .	71

---

## 5.2.1 导数的四则运算

**定理 5.2.1** (导数的四则运算). 若函数  $u(x)$  和  $v(x)$  在点  $x_0$  可导, 则  $f(x) = u(x) \pm v(x)$ ,  $f(x) = u(x)v(x)$ ,  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  ( $v(x_0) \neq 0$ ) 在  $x_0$  点也可导, 且

$$(1) [u(x) \pm v(x)]'|_{x=x_0} = u'(x_0) \pm v'(x_0);$$

$$(2) [u(x)v(x)]'|_{x=x_0} = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0);$$

$$(3) \left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right] \bigg|_{x=x_0} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$



## 证明

(1) 根据定义

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x)] - [u(x_0) \pm v(x_0)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \\ &= u'(x_0) \pm v'(x_0). \end{aligned}$$

(2) 根据定义

$$\begin{aligned} & f'(x_0) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) v(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) v(x_0 + \Delta x) + u(x_0) v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) v(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} v(x_0 + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x_0) \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \\ &= u'(x_0) v(x_0) + u(x_0) v'(x_0). \end{aligned}$$

(3) 根据定义

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0)u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x)}{v(x_0)v(x_0 + \Delta x)\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x_0)(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) - u(x_0)(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0))}{v(x_0)v(x_0 + \Delta x)\Delta x} \right] \\ &= \frac{v(x_0)u'(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \end{aligned}$$

或者参见书上的做法：

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{v(x)} \right]' \bigg|_{x=x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{v(x_0) - v(x)}{v(x)v(x_0)}}{x - x_0} \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{v(x)v(x_0)} = \frac{-v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' \Big|_{x=x_0} = u'(x_0) \frac{1}{v(x_0)} + u(x_0) \left( -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2} \right) \\ &= \frac{u'(x_0) v(x_0) - u(x_0) v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}. \end{aligned}$$



故

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' \Big|_{x=x_0} = u'(x_0) \frac{1}{v(x_0)} + u(x_0) \left( -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2} \right) \\ &= \frac{u'(x_0) v(x_0) - u(x_0) v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}. \end{aligned}$$



注 5.2.1. 利用数学归纳法可将定理5.2.1(2) 推广到任意有限个函数乘积的情形，  
如  $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ .

注 5.2.2. 注意到:

(1) 设  $f = \varphi + \psi$ , 若  $f$  在点  $x_0$  可导, 则  $\varphi, \psi$  在点  $x_0$  可导.

解此命题是错误的. 例如, 设  $\varphi(x) = D(x)$ ,  $\psi(x) = -D(x)$ , 其中  $D(x)$  是 Dirichlet 函数. 则  $f = \varphi + \psi \equiv 0$  处处可导, 但  $\varphi, \psi$  处处不可导.

(2) 设  $f = \varphi + \psi$ , 若  $\varphi$  在点  $x_0$  可导,  $\psi$  在点  $x_0$  不可导, 则  $f$  在点  $x_0$  一定不可导.

证此命题是正确的. 采用反证法, 假设  $f$  在点  $x_0$  可导. 由于  $\varphi$  在点  $x_0$  可导, 则  $\psi = f - \varphi$  在点  $x_0$  可导, 这与  $\psi$  在点  $x_0$  不可导矛盾.

(3) 设  $f = \varphi \cdot \psi$ , 若  $f$  在点  $x_0$  可导, 则  $\varphi, \psi$  在点  $x_0$  可导.

解此命题是错误的. 例如, 设  $\varphi(x) = \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ . 则  $f = \varphi \cdot \psi \equiv 1$  处处可导, 但  $\varphi, \psi$  处处不可导.

(4) 设  $f = \varphi \cdot \psi$ , 若  $\varphi$  在点  $x_0$  可导,  $\psi$  在点  $x_0$  不可导, 则  $f$  在点  $x_0$  一定不可导.

证此命题是错误的. 若  $\varphi(x_0) \neq 0$ , 则  $f$  在点  $x_0$  一定不可导. 采用反证法, 假设  $f$  在点  $x_0$  可导. 由于  $\varphi$  在点  $x_0$  可导且  $\varphi(x_0) \neq 0$ , 则  $\psi = \frac{f}{\varphi}$  在点  $x_0$  可导, 这与  $\psi$  在点  $x_0$  不可导矛盾.

若  $\varphi(x_0) = 0$ , 则  $f$  在点  $x_0$  不一定不可导. 例如, 若令  $\varphi \equiv 0$ , 则  $f = \varphi \cdot \psi \equiv 0$  处处可导.

**推论 5.2.1.** 若函数  $v(x)$  在点  $x_0$  可导且  $c$  为常数, 则  $(cv(x))'_{x=x_0} = cv'(x_0)$ .



推论 5.2.1. 若函数  $v(x)$  在点  $x_0$  可导且  $c$  为常数, 则  $(cv(x))'_{x=x_0} = cv'(x_0)$ .

推论 5.2.2. 若函数  $v(x)$  在点  $x_0$  可导且  $v(x_0) \neq 0$ , 则函数  $f(x) = \frac{1}{v(x)}$  在点  $x_0$

也可导, 且  $f'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$ .

例子 5.2.1.(i) 设  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 9x + \pi$ , 求  $f'(x)$ .

(ii) 设  $y = \cos x \ln x$ , 求  $y'|_{x=\pi}$ .

例子 5.2.1(i) 设  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 9x + \pi$ , 求  $f'(x)$ .

(ii) 设  $y = \cos x \ln x$ , 求  $y'|_{x=\pi}$ .

解答

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' + 5(x^2)' - 9(x)' + (\pi)' \\ &= 3x^2 + 10x - 9. \end{aligned}$$

(ii)

$$y' = (\cos x)' \ln x + \cos x (\ln x)' = -\sin x \ln x + \frac{1}{x} \cos x.$$

所以  $y'|_{x=\pi} = -\frac{1}{\pi}$ .

例子 5.2.2.(i) 证明:  $(\tan x)' = \sec^2 x$ ,  $(\cot x)' = -\csc^2 x$ .

(ii) 证明:  $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ , 其中  $n$  为正整数.

(iii) 证明:  $(\sec x)' = \sec x \tan x$ ,  $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ .

例子 5.2.2.(i) 证明:  $(\tan x)' = \sec^2 x$ ,  $(\cot x)' = -\csc^2 x$ .

(ii) 证明:  $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ , 其中  $n$  为正整数.

(iii) 证明:  $(\sec x)' = \sec x \tan x$ ,  $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ .

证明

(i)

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\cot x)' &= \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.
 \end{aligned}$$

(ii)

$$(x^{-n})' = \left( \frac{1}{x^n} \right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

(iii)

$$(\sec x)' = \left( \frac{1}{\cos x} \right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

$$(\csc x)' = \left( \frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x.$$



例子 5.2.3. 设  $f$  为可导函数, 证明: 若  $x = 1$  时有

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = \frac{d}{dx}f^2(x),$$

则必有  $f'(1) = 0$  或  $f(1) = 1$ .

例子 5.2.3. 设  $f$  为可导函数, 证明: 若  $x = 1$  时有

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = \frac{d}{dx}f^2(x),$$

则必有  $f'(1) = 0$  或  $f(1) = 1$ .

证明

因为

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = 2xf'(x^2), \quad \frac{d}{dx}f^2(x) = 2f(x)f'(x),$$

所以当  $x = 1$  时有  $\frac{d}{dx}f(x^2)|_{x=1} = 2f'(1)$ ,  $\frac{d}{dx}f^2(x)|_{x=1} = 2f(1)f'(1)$ , 由题设, 有  $2f'(1) = 2f(1)f'(1)$ , 于是  $f'(1)(1 - f(1)) = 0$ , 从而  $f'(1) = 0$  或  $f(1) = 1$ .  $\square$



## 5.2.2 反函数的导数

定理 5.2.2. 设  $y = f(x)$  为  $x = \varphi(y)$  的反函数, 若  $\varphi(y)$  在点  $y_0$  的某邻域上连续, 严格单调且  $\varphi'(y_0) \neq 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0 (x_0 = \varphi(y_0))$  可导, 且  $f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$ .

**证明** 设  $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$ ,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . 由于  $\varphi$  在点  $y_0$  的某邻域上连续且严格单调, 故  $f = \varphi^{-1}$  在点  $x_0$  的某邻域上连续且严格单调, 故当且仅当  $\Delta y = 0$  时有  $\Delta x = 0$ , 且当  $\Delta y \rightarrow 0$  时有  $\Delta x \rightarrow 0$ . 由  $\varphi'(y_0) \neq 0$ , 可得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$



**证明** 设  $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$ ,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . 由于  $\varphi$  在点  $y_0$  的某邻域上连续且严格单调, 故  $f = \varphi^{-1}$  在点  $x_0$  的某邻域上连续且严格单调, 故当且仅当  $\Delta y = 0$  时有  $\Delta x = 0$ , 且当  $\Delta y \rightarrow 0$  时有  $\Delta x \rightarrow 0$ . 由  $\varphi'(y_0) \neq 0$ , 可得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

□

**注 5.2.3.** 导数  $\varphi'(x_0) \neq 0$  的条件不能去掉. 例如  $\varphi(x) = x^3$  是从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的可逆函数,  $\varphi$  处处可导, 但其反函数  $f(y) = y^{1/3}$  在  $y = 0$  处不可导.

例子 5.2.4. 证明:

(i)  $(a^x)' = a^x \ln a$ , 其中  $a > 0, a \neq 1$ , 特别地,  $(e^x)' = e^x$ .

(ii)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

(iii)  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

例子 5.2.4. 证明:

- (i)  $(a^x)' = a^x \ln a$ , 其中  $a > 0, a \neq 1$ , 特别地,  $(e^x)' = e^x$ .
- (ii)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- (iii)  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

证明

(i) 由于  $y = a^x, x \in \mathbb{R}$  为对数函数  $x = \log_a y, y \in (0, +\infty)$  的反函数, 故

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

(ii) 由于  $y = \arcsin x, x \in (-1, 1)$  是  $x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  的反函数, 故

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1).$$

$$\begin{aligned} (\arccos x)' &= \frac{1}{-\sin(\arccos x)} \Leftrightarrow \cos(\arccos x) = x \Leftrightarrow -\sin(\arccos x)(\arccos x)' = 1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

(iii) 由于  $y = \arctan x, x \in \mathbb{R}$  是  $x = \tan y, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  的反函数, 因此

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{arccot} x)' &= \frac{1}{-\csc^2(\operatorname{arccot} x)} \Leftrightarrow \cot(\operatorname{arccot} x) = x \Leftrightarrow -\csc^2(\operatorname{arccot} x)(\operatorname{arccot} x)' = 1 \\
 &= -\frac{1}{1 + \cot^2(\operatorname{arccot} x)} \\
 &= -\frac{1}{1 + x^2}, x \in (-\infty, +\infty)
 \end{aligned}$$



## 5.2.3 复合函数的导数

定理 5.2.3. 设  $u = \varphi(x)$  在点  $x_0$  可导,  $y = f(u)$  在点  $u_0 = \varphi(x_0)$  可导, 则复合函数  $f \circ \varphi$  在点  $x_0$  可导, 且  $(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(u_0) \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \varphi'(x_0)$ .

引理 5.2.1.  $f(x)$  在点  $x_0$  可导的充要条件是: 在  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  上, 存在一个在点  $x_0$  连续的函数  $H(x)$ , 使得

$$f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0),$$

从而  $f'(x_0) = H(x_0)$ .



## 证明

( $\Rightarrow$ ) 若  $f(x)$  在  $x_0$  可导, 令  $H(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \in U^\circ(x_0) \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$ , 则因

$$\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = H(x_0)$$

有  $H(x)$  在点  $x_0$  连续, 且满足在  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  上有  $f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0)$ , 因此若  $f(x)$  在点  $x_0$  可导, 这样的  $H(x)$  是存在的.

( $\Leftarrow$ ) 设存在  $H(x), x \in U(x_0)$ , 其在点  $x_0$  连续, 且当  $x \in U(x_0)$  时有  $f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0)$ , 因存在极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = H(x_0),$$

所以  $f(x)$  点  $x_0$  可导, 且  $f'(x_0) = H(x_0)$ . □

### 证明 证明定理5.2.3

法二：由  $f(u)$  在点  $u_0$  可导，由引理5.2.1必要性部分，存在一个在点  $u_0$  连续的函数  $F(u)$ ，使得  $f'(u_0) = F(u_0)$ ，且  $f(u) - f(u_0) = F(u)(u - u_0)$ ， $u \in U(u_0)$ 。由  $u = \varphi(x)$  在点  $x_0$  可导，同理知存在一个在点  $x_0$  连续的函数  $\Phi(x)$ ，使得  $\varphi'(x_0) = \Phi(x_0)$ ，且  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \Phi(x)(x - x_0)$ ， $x \in U(x_0)$ 。故

$$f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = F(\varphi(x))\Phi(x)(x - x_0), x \in U(x_0).$$

由于  $\varphi, \Phi$  在点  $x_0$  连续且  $F$  在点  $u_0 = \varphi(x_0)$  连续，故  $H(x) = F(\varphi(x))\Phi(x)$  在点  $x_0$  连续。由引理5.2.1充分性部分证得  $f \circ \varphi$  在点  $x_0$  可导，且  $(f \circ \varphi)'(x_0) = H(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$ . □

注 5.2.4. 复合函数的求导公式也称为链式法则, 函数  $y = f(u), u = \varphi(x)$  的复合函数在点  $x$  的求导公式一般也写作

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

对于由多个函数复合而得到的复合函数, 反复应用上式即可. 例如三个函数构成的复合函数的导数为

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

注 5.2.4. 复合函数的求导公式也称为链式法则, 函数  $y = f(u), u = \varphi(x)$  的复合函数在点  $x$  的求导公式一般也写作

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

对于由多个函数复合而得到的复合函数, 反复应用上式即可. 例如三个函数构成的复合函数的导数为

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

注 5.2.5.  $f'(\varphi(x)) = f'(u)|_{u=\varphi(x)}$  与  $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$  的含义不可混淆.

例子 5.2.5.(i) 设  $y = \sin x^2$ , 求  $y'$ .

(ii) 设  $y = \ln |x|$ , 求  $y'$ .

(iii) 设  $\alpha$  为实数, 求幂函数  $y = x^\alpha$  ( $x > 0$ ) 的导数. 求  $a^x$  ( $a > 0$ ) 的导数.

(iv) 设  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , 求  $f'(0), f'(1)$ .

(v) 求下列函数的导函数: (1)  $f(x) = \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right)$ ; (2)  $f(x) = \tan^2 \frac{1}{x}$ ; (3)  
 $y = \arctan(e^{-x})$ .

例子 5.2.5.(i) 设  $y = \sin x^2$ , 求  $y'$ .

(ii) 设  $y = \ln |x|$ , 求  $y'$ .

(iii) 设  $\alpha$  为实数, 求幂函数  $y = x^\alpha$  ( $x > 0$ ) 的导数. 求  $a^x$  ( $a > 0$ ) 的导数.

(iv) 设  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , 求  $f'(0), f'(1)$ .

(v) 求下列函数的导函数: (1)  $f(x) = \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right)$ ; (2)  $f(x) = \tan^2 \frac{1}{x}$ ; (3)  
 $y = \arctan(e^{-x})$ .

## 解答

(i) 将  $\sin x^2$  看作  $y = \sin u$  与  $u = x^2$  的复合函数, 故

$$(\sin x^2)' = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

必须指出:  $(\sin x^2)' \neq \cos x^2$ .

(ii) 我们知道, 当  $x \neq 0$  时,  $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$ . 由复合函数的求导得

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{1}{|x|} \operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}.$$

(iii) 因为  $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$  可看作  $y = e^u$  与  $u = \alpha \ln x$  的复合函数, 故

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{de^{x \ln a}}{dx} = \frac{de^{x \ln a}}{dx \ln a} \cdot \frac{dx \ln a}{dx} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

(iv) 由于

$$f'(x) = \left( \sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

因此  $f'(0) = 0, f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .



(v)(1)

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

(v)(2)

$$\begin{aligned}\left(\tan^2 \frac{1}{x}\right)' &= 2 \tan \frac{1}{x} \left(\tan \frac{1}{x}\right)' = 2 \tan \frac{1}{x} \sec^2 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= -\frac{2}{x^2} \tan \frac{1}{x} \sec^2 \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

$$(v)(3) \quad (\arctan(e^{-x}))' = \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -\frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

**对数求导法：** (1) 幂指函数  $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$ ，然后使用隐函数求导法则. (2)  $y = f(x)$  是多项式乘积时，函数两端求对数，使用隐函数求导法则.

例子 5.2.6. 设  $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$  ( $x > 4$ ), 求  $y'$ .

例子 5.2.6. 设  $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$  ( $x > 4$ ), 求  $y'$ .

解答

先对函数式取对数, 得

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2 \ln(x+5) + \frac{1}{3} \ln(x-4) - 5 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+4).\end{aligned}$$

再对上式两边分别求导数, 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)}.$$

整理后得到

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)} \right].$$

例子 5.2.7. 设  $y = u(x)^{v(x)}$ , 其中  $u(x) > 0$ , 且  $u(x), v(x)$  均可导, 求  $y'$ .

例子 5.2.7. 设  $y = u(x)^{v(x)}$ , 其中  $u(x) > 0$ , 且  $u(x), v(x)$  均可导, 求  $y'$ .

解答

对函数式取对数, 有

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

对上式两侧分别求导数, 有

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)},$$

即

$$y' = y \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

代入有  $y' = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + u(x)^{v(x)-1} u'(x) v(x)$ .

或

$$\begin{aligned} y' &= \left( u(x)^{v(x)} \right)' = \left( e^{v(x) \ln u(x)} \right)' = e^{v(x) \ln u(x)} (v(x) \ln u(x))' \\ &= u(x)^{v(x)} \left( v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) \\ &= u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + u(x)^{v(x)-1} u'(x) v(x). \end{aligned}$$



## 5.2.4 基本求导法则与公式

### 基本求导法则

(1)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ .

(2)  $(uv)' = u'v + uv'$ ,  $(cu)' = cu'$ , 其中  $c$  为常数.

(3)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ,  $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$  ( $v \neq 0$ ).

(4) 反函数导数  $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$ .

(5) 复合函数导数  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

(6) 广义幂法则  $(f^g)' = (e^{g \ln f})' = f^g \left( g' \ln f + \frac{g}{f} f' \right)$ .

# 基本初等函数导数公式

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$C$	$0$	$x^a$	$ax^{a-1} (a \neq 0)$
$e^x$	$e^x$	$a^x$	$a^x \ln a (a > 0, a \neq 1)$
$\ln  x $	$\frac{1}{x}$	$\log_a  x $	$\frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$	$\coth x$	$1 - \coth^2 x$

## 对数运算基本法则

### (1) 对数运算的性质

$$\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N; \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_{a^n} M^m = \frac{m}{n} \log_a M; \quad a^{\log_a M} = M.$$

以上运算需要的条件是  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ,  $M > 0$ ,  $N > 0$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ .

$$(2) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, b > 0, b \neq 1).$$

$$(3) \text{换底公式 } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \text{ 需要满足的条件: } a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, c > 0 \text{ 且 } c \neq 1, b > 0.$$

## 5.3 参变量函数的导数

---

---

平面曲线  $C$  一般的表达形式是参变量 (参量) 方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (5.3.1)$$

表示. 设  $x = \varphi(t)$  的反函数为  $t = \varphi^{-1}(x)$ , 并设它满足反函数求导的条件, 于是把  $y$  看做复合函数

$$y = \psi(t), t = \varphi^{-1}(x).$$

并利用复合函数和反函数的求导法则, 就有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \psi'(t) (\varphi^{-1}(x))' = \psi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

若  $\varphi, \psi$  在  $[\alpha, \beta]$  上都存在连续的导函数, 且  $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$ , 这时称  $C$  为光滑曲线. 其特点是在曲线  $C$  上不仅每一点都有切线, 且切线与  $x$  轴正向的夹角  $\alpha(t)$  是  $t$  的连续函数.

例子 5.3.1. 试求由上半椭圆的参量方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < \pi$$

所确定的函数  $y = y(x)$  的导数.

例子 5.3.1. 试求由上半椭圆的参量方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < \pi$$

所确定的函数  $y = y(x)$  的导数.

解答

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} = -\frac{b}{a} \cot t.$$



例子 5.3.2. 设  $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$  求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi}$ .

例子 5.3.2. 设  $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$  求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi}$ .

解答

$$\frac{dx}{dt} = a(t - \sin t)' = a(1 - \cos t), \frac{dy}{dt} = a(1 - \cos t)' = a \sin t, \text{ 故}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$\text{故 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \frac{\pi}{2}} = 1, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi} = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = 0.$$

## 5.4 高阶导数

---

---

## 5.5 微分

---

5.5.1	微分的概念 . . . . .	81
5.5.2	微分的运算法则 . . . . .	82
5.5.3	高阶微分 . . . . .	83
5.5.4	微分在近似计算中的应用 . . . . .	84

---

## 5.5.1 微分的概念

## 5.5.2 微分的运算法则

## 5.5.3 高阶微分

## 5.5.4 微分在近似计算中的应用