
数学分析 A

指导教师： 李嘉 副教授

授课教师： 谭兵 副教授

主页： <https://bingtan.me>

西南大学数学与统计学院

2024 年 11 月 18 日

目录

第五章 导数和微分

5.1	导数的概念	4
5.1.1	导数的定义	6
5.1.2	导函数	24
5.1.3	导数的几何意义	30
5.2	求导法则	40
5.2.1	导数的四则运算	41

5.2.2	反函数的导数	53
5.2.3	复合函数的导数	58
5.2.4	基本求导法则与公式	78
5.3	参变量函数的导数	81
5.4	高阶导数	89
5.5	微分	90
5.5.1	微分的概念	91
5.5.2	微分的运算法则	92
5.5.3	高阶微分	93
5.5.4	微分在近似计算中的应用	94

第五章 导数和微分

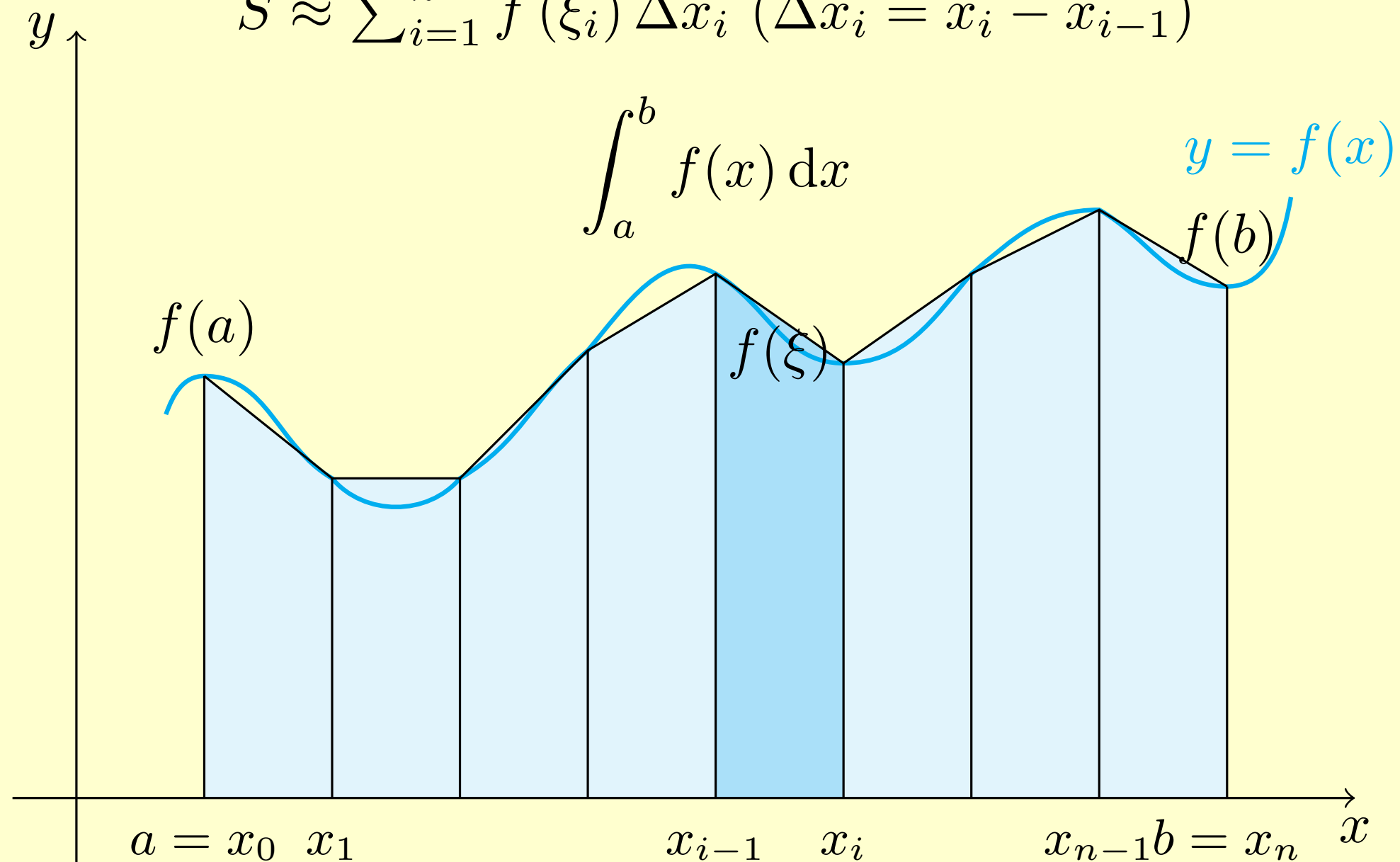
5.1	导数的概念	4
5.2	求导法则	40
5.3	参变量函数的导数	81
5.4	高阶导数	89
5.5	微分	90

5.1 导数的概念

5.1.1	导数的定义	6
5.1.2	导函数	24
5.1.3	导数的几何意义	30

微积分的基本思想：以直代曲

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$



5.1.1 导数的定义

导数的概念引入：

(1) 瞬时速度

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

5.1.1 导数的定义

导数的概念引入：

(1) 瞬时速度

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

(2) 切线的斜率

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

定义 5.1.1 (导数). 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.1.1)$$

存在, 则称函数 f 在点 x_0 可导, 并称该极限为函数 f 在点 x_0 的导数, 记作 $f'(x_0)$, 有时还写作 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ 或 $\left. \frac{d}{dx} f \right|_{x=x_0}$.

注 5.1.1. (1) 令 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 则 (5.1.1) 式可改写为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (5.1.2)$$

有时(5.1.2)也写成

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

注 5.1.1. (1) 令 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 则 (5.1.1) 式可改写为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (5.1.2)$$

有时(5.1.2)也写成

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

故导数是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限, 该增量比称为函数关于自变量的平均变化率, 也称差商, 而导数 $f'(x_0)$ 则为 f 在 x_0 处关于 x 的变化率.

(2) 既然导数是用极限定义的, 我们当然也可以用 $\varepsilon - \delta$ 语言来描述它: 如果 $\exists A \in \mathbb{R}$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$, 有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon,$$

则 f 在 x_0 处可导, 导数为 A .

(3) 若(5.1.1)或(5.1.2)式极限不存在, 则称 f 在点 x_0 不可导.

例子 5.1.1. 求函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 的导数, 并求曲线在点 $(1, 1)$ 的切线方程.

例子 5.1.1. 求函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 的导数, 并求曲线在点 $(1, 1)$ 的切线方程.

解答

由定义求得

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2. \end{aligned}$$

由此知道抛物线 $y = x^2$ 在点 $(1, 1)$ 的切线斜率为 $k = f'(1) = 2$, 所以切线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{即} \quad y = 2x - 1.$$

例子 5.1.2. 证明函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x_0 = 0$ 不可导.

例子 5.1.2. 证明函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x_0 = 0$ 不可导.

证明

因为

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时极限不存在, 所以 f 在点 $x = 0$ 不可导. □

例子 5.1.3. 显然常量函数 $f(x) = C$ 在任何一点 x 的导数都等于零, 即

$$f'(x) = 0.$$

定义 5.1.2 (有限增量公式). 设 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 即有 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, 则 $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ 为当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的无穷小量, 故 $\varepsilon \cdot \Delta x = o(\Delta x)$, 即

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x).$$

称上式为 $f(x)$ 在点 x_0 的有限增量公式. 注意, 当 $\Delta x = 0$ 时该公式仍成立.

由有限增量公式即可推得下面的定理(5.1.1).

定理 5.1.1. 若函数 f 在点 x_0 可导, 则 f 在点 x_0 连续.

除了由有限增量公式推得定理5.1.1, 此处再给出三种证明方法.

由有限增量公式即可推得下面的定理(5.1.1).

定理 5.1.1. 若函数 f 在点 x_0 可导, 则 f 在点 x_0 连续.

除了由有限增量公式推得定理5.1.1, 此处再给出三种证明方法.

证明

法一: 需证 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$. 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \right) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

法二：将函数增量 Δy 改写为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ ，且 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为一有界量， Δx 为一无穷小量，故 $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ 为 $\Delta x \rightarrow 0$ 时一无穷小量，即 $x \rightarrow x_0$ 时有 $f(x) \rightarrow f(x_0)$ ，即 f 在点 x_0 连续.

法三：利用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明. 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ 存在，由局部有界性知，存在 $M > 0, \eta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < M.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \min \left\{ \eta, \frac{\varepsilon}{M} \right\}$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

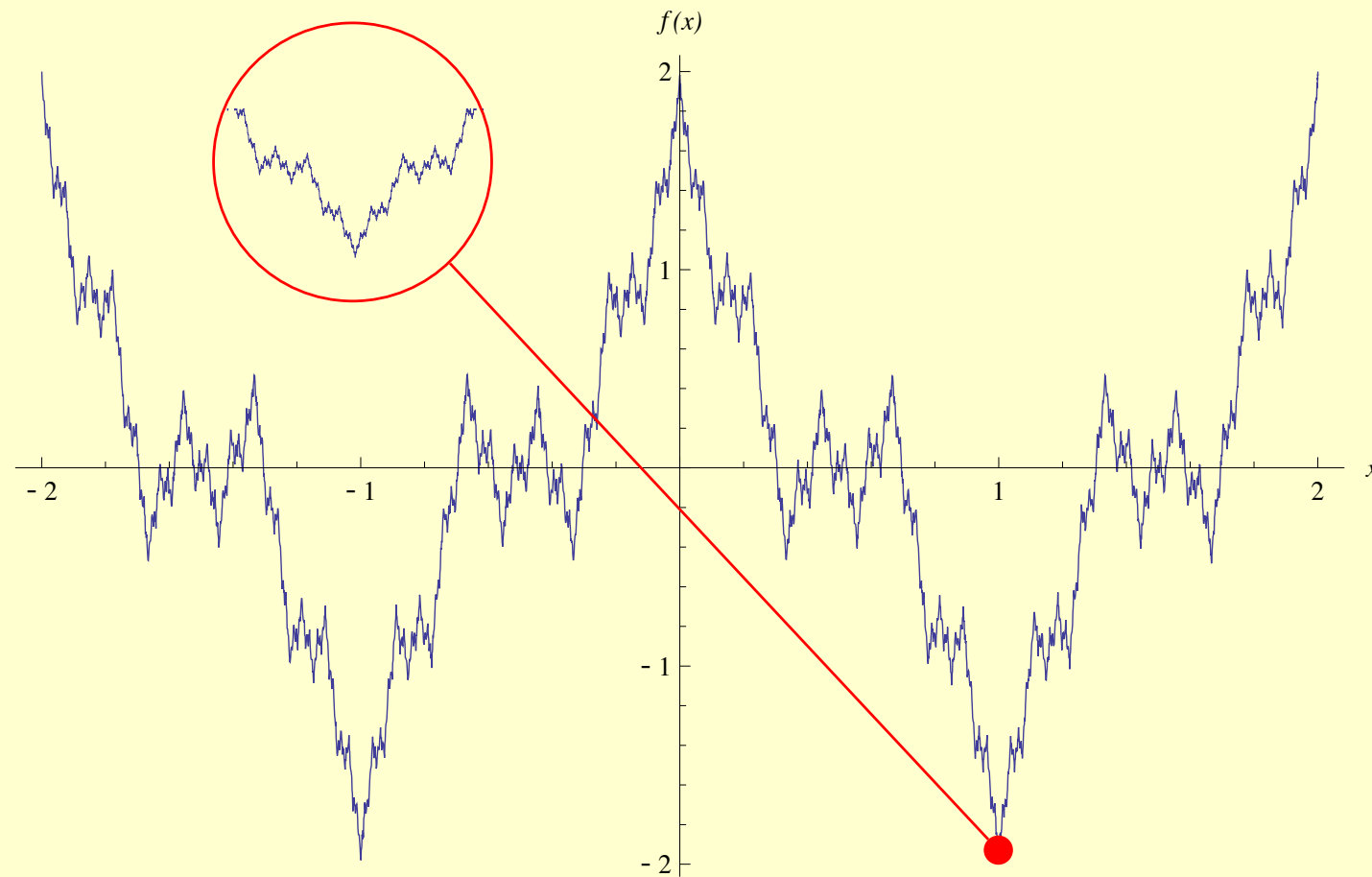
$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot |x - x_0| < M |x - x_0| \leq \varepsilon.$$

故 f 在点 x_0 连续. □

注 5.1.2. 应当指出, 可导仅是函数在该点连续的充分条件, 而不是必要条件, 可记作可导必连续, 连续不一定可导 (例如 $y = |x|$ 在 0 处连续但不可导, 参见例子5.1.2). 若在某点不连续则在该点不可导.



Weierstrass 函数是一种在区间上处处连续但处处不可导的典型函数： $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, 其中 $0 < a < 1$, b 是正奇数且满足 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.



例子 5.1.4. 证明函数 $f(x) = x^2 D(x)$ 仅在点 $x_0 = 0$ 可导, 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

例子 5.1.4. 证明函数 $f(x) = x^2 D(x)$ 仅在点 $x_0 = 0$ 可导, 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

证明

当 $x_0 \neq 0$ 时, 由归结原则可得 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 不连续, 所以由定理5.1.1, $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 不可导.

当 $x_0 = 0$ 时, 由于 $D(x)$ 为有界函数, 因此得到

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x D(x) = 0.$$

故函数 $f(x) = x^2 D(x)$ 仅在点 $x_0 = 0$ 可导, 且 $f'(0) = 0$. □

定义 5.1.3 (右导数和左导数). 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上有定义, 若右极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (0 < \Delta x < \delta)$$

存在, 则称该极限值为 f 在点 x_0 的右导数, 记作 $f'_+(x_0)$.

类似地, 定义左导数为

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

右导数和左导数统称为单侧导数.

定理 5.1.2. 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域上有定义, 则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 都存在且 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

例子 5.1.5. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的左、右导数与导数.

例子 5.1.5. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的左、右导数与导数.

解答

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}, & \Delta x > 0 \\ 1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

因此

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} 1 = 1.$$

因为 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 所以 f 在点 $x = 0$ 不可导.

例子 5.1.6. 对函数 $f(x) = |\ln |x||, x \neq 0$, 求 $f'_+(1)$ 和 $f'_-(1)$.

例子 5.1.6. 对函数 $f(x) = |\ln |x||$, $x \neq 0$, 求 $f'_+(1)$ 和 $f'_-(1)$.

解答

根据 $f(1) = |\ln 1| = 0$, 得到

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|\ln x|}{x - 1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(1 + \Delta x)|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left| \ln \left[(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} \right] \right| = \ln e = 1. \end{aligned}$$

类似地得到 $f'_-(1) = -1$.

注 5.1.3. 注意到:

- (1) 函数 f 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ 存在.
- (2) 函数 f 在 x_0 处可导 \nRightarrow 其绝对值 $|f|$ 在 x_0 处可导. 比如函数 $f(x) = x$.
- (3) 可以定义函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 甚至一般区间 I 上的可导性. 对内部点 $x_0 \in I$, $f'(x_0)$ 是通常意义下的导数, 对端点 $x_0 \in I$, $f'(x_0)$ 定义为左导数或右导数.

5.1.2 导函数

若函数在区间 I 上每一点都可导（对区间端点考虑其单侧导数），则称 f 为区间 I 上的可导函数. 此时对任意的 $x \in I$ ，都有 f 的一个导数 $f'(x)$ （或单侧导数）与之对应，故定义了一个定义域为 I 的函数，称为 f 在 I 上的导函数，简称为导数，记作 f', y' 或 $\frac{dy}{dx}$ ，即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in I.$$

$f'(x_0)$ 有时还写作 $y'|_{x=x_0}$ 或 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$.

例子 5.1.7. 证明

(i) $(x^n)' = nx^{n-1}$, n 为正整数;

(ii) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;

(iii) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$), 特别 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

(iv) $(a^x)' = a^x \ln a$, 特别 $(e^x)' = e^x$.

(v) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 其中 $a \in \mathbb{R}, x > 0$.

例子 5.1.7. 证明

- (i) $(x^n)' = nx^{n-1}$, n 为正整数;
- (ii) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;
- (iii) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$), 特别 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
- (iv) $(a^x)' = a^x \ln a$, 特别 $(e^x)' = e^x$.
- (v) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$.

证明

(i) 对于 $y = x^n$, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \Delta x + \cdots + C_n^n \Delta x^{n-1},$$

因此

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \Delta x + \cdots + C_n^n \Delta x^{n-1}) = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

(ii) 法一: 下面证第一个等式, 类似地可证第二个等式. 由于

$$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

以及 $\cos x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 因此得到

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

(ii) 法二:

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) = -\sin x\end{aligned}$$

(iii) 由于

$$\frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

所以

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \quad (5.1.3)$$

若 $a = e$ ，且以 e 为底的自然对数常写作 $\ln x$ ，则由 $\ln e = 1$ 及(5.1.3)式有 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

(iv)

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

即 $(a^x)' = a^x \ln a$. 特别地, $(e^x)' = e^x$.

(v)

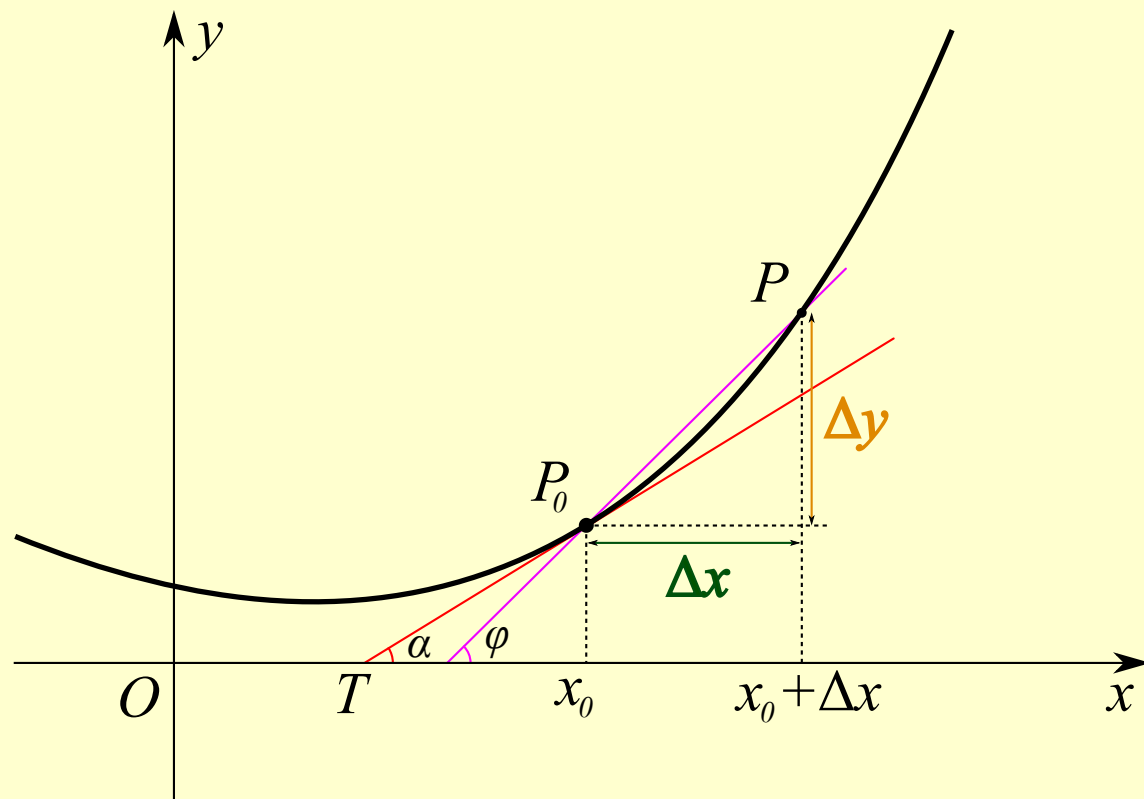
$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}.$$



5.1.3 导数的几何意义

若 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的切线斜率为 k ，即割线斜率在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限，即

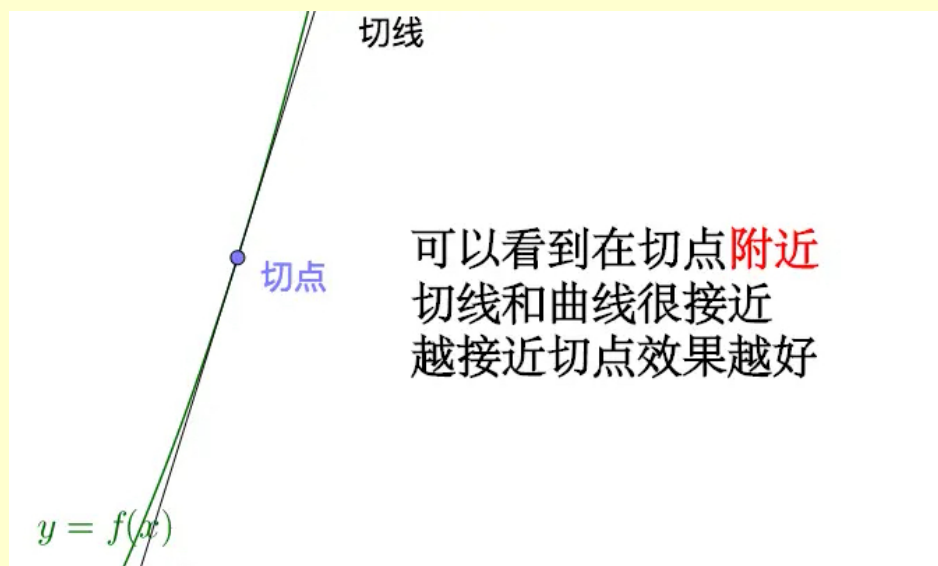
$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



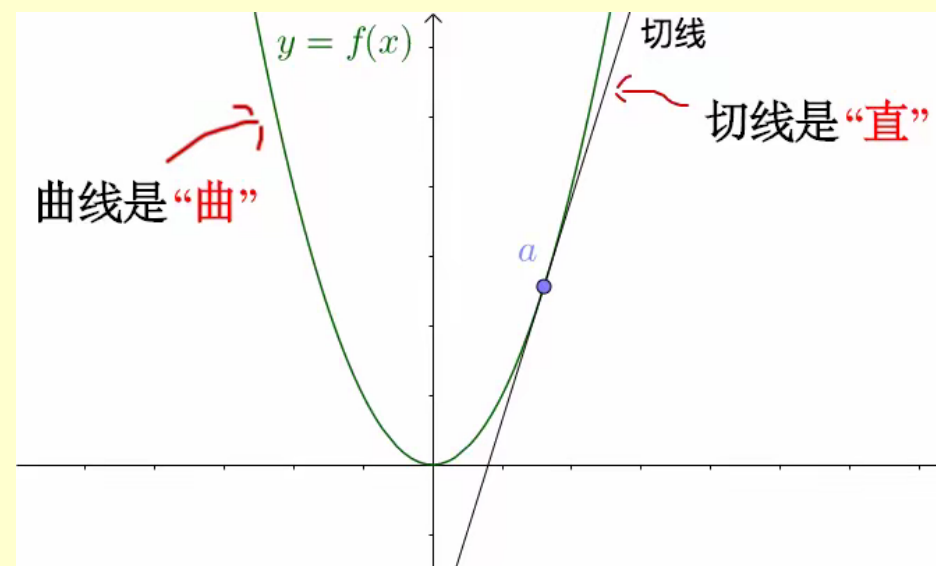
由导数定义知 $k = f'(x_0)$, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (5.1.4)$$

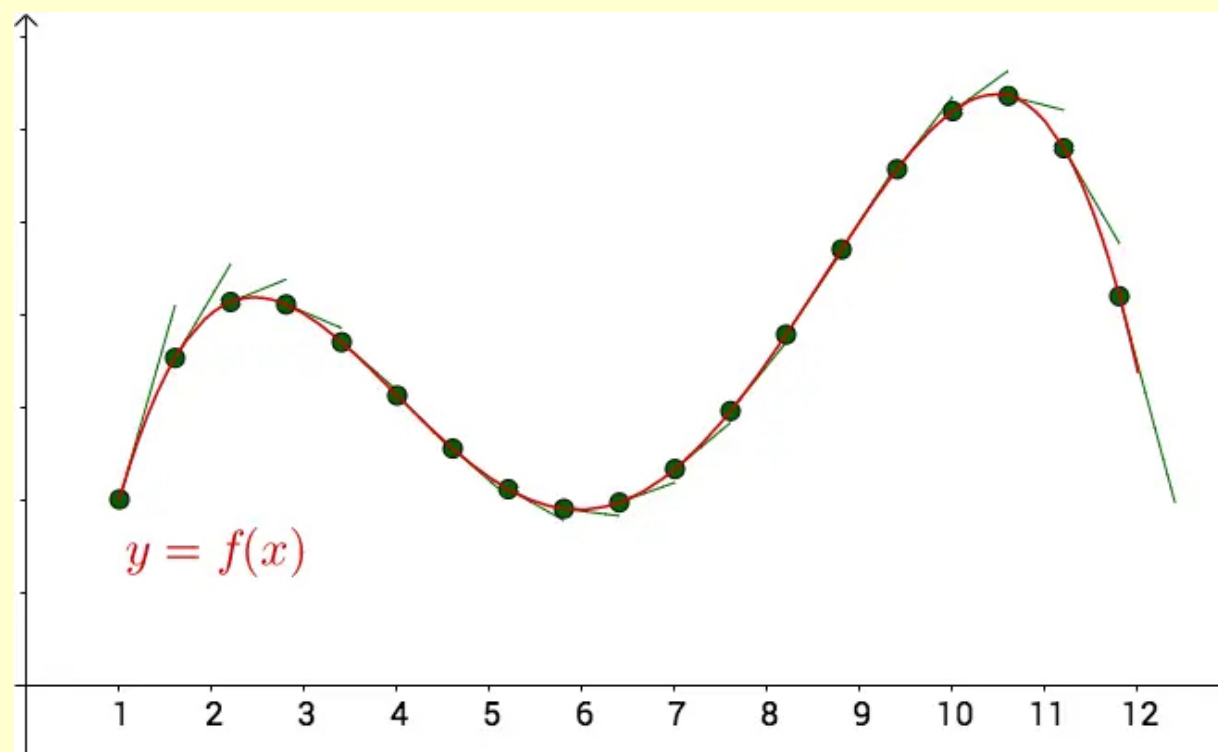
这意味着函数 f 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线斜率. 若 α 表示该切线与 x 轴正向的夹角, 则 $f'(x_0) = \tan \alpha$, 从而根据 $f'(x_0)$ 的正负即可判断切线与 x 轴正向的夹角及关系.



(a)



(b)



(c)

例子 5.1.8. 求曲线 $y = x^3$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程与法线方程.

例子 5.1.8. 求曲线 $y = x^3$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程与法线方程.

解答

由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2.$$

所以根据(5.1.4)式, 曲线 $y = x^3$ 在点 P 的切线方程为

$$y - y_0 = 3x_0^2(x - x_0).$$

由解析几何知道, 若切线斜率为 k , 则法线斜率为 $-\frac{1}{k}$. 从而过点 P 的法线

方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0) .$$

因此曲线 $y = x^3$ 过点 $P(x_0 \neq 0)$ 的法线方程为

$$y - x_0^3 = -\frac{1}{3x_0^2} (x - x_0) .$$

若 $x_0 = 0$, 则法线方程为 $x = 0$.

定义 5.1.4 (极大 (小) 值). 若函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x \in U(x_0)$ 有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))$$

则称函数 f 在点 x_0 取得极大 (小) 值, 称点 x_0 为极大 (小) 值点. 极大值、极小值统称为极值, 极大值点、极小值点统称为极值点.

定义 5.1.4 (极大 (小) 值). 若函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x \in U(x_0)$ 有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))$$

则称函数 f 在点 x_0 取得极大 (小) 值, 称点 x_0 为极大 (小) 值点. 极大值、极小值统称为极值, 极大值点、极小值点统称为极值点.

注 5.1.4. (1) 极值点不一定是最值点, 极值只是局部范围内的最值; (2) 最值点不一定是极值点; (3) 极大值不一定大于极小值.

例子 5.1.9. 证明: 若 $f'_+(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有 $f(x_0) < f(x)$.

例子 5.1.9. 证明: 若 $f'_+(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有 $f(x_0) < f(x)$.

证明

因为

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

所以由保号性可知, 存在正数 δ , 对一切 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

从而不难推得, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $f(x_0) < f(x)$. □

注 5.1.5. 用类似的方法还可讨论 $f'_+(x_0) < 0, f'_-(x_0) > 0, f'_-(x_0) < 0$ 时的情况, 可知若 $f'(x_0)$ 存在且不为零, 则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

定理 5.1.3 (费马定理). 设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义, 且在点 x_0 可导. 若点 x_0 为 f 的极值点, 则必有 $f'(x_0) = 0$.

定理 5.1.3 (费马定理). 设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义, 且在点 x_0 可导. 若点 x_0 为 f 的极值点, 则必有 $f'(x_0) = 0$.

证明

若 $f'(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f'(x_0) > 0$, 则

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

由局部保号性, $\exists \delta_1 > 0$, 对 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ 即有 } f(x) > f(x_0). \quad (5.1.5)$$

同理, 由 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 得 $\exists \delta_2 > 0$, 对 $\forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$,

有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ 即有 } f(x) < f(x_0). \quad (5.1.6)$$

结合(5.1.5)与(5.1.6)得 x_0 不可能是 $f(x)$ 的极值点, 与已知矛盾, 从而得 $f'(x_0) = 0$. □

费马定理的几何意义: 若函数 $f(x)$ 在极值点 $x = x_0$ 可导, 则在该点的切线平行于 x 轴.

有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \text{ 即有 } f(x) < f(x_0). \quad (5.1.6)$$

结合(5.1.5)与(5.1.6)得 x_0 不可能是 $f(x)$ 的极值点, 与已知矛盾, 从而得 $f'(x_0) = 0$. □

费马定理的几何意义: 若函数 $f(x)$ 在极值点 $x = x_0$ 可导, 则在该点的切线平行于 x 轴.

注 5.1.6. (1) 满足 $f'(x) = 0$ 的点称为稳定点 (也称为驻点); (2) 极值点不一定是稳定点 (例: $f(x) = |x|, x_0 = 0$); (3) 稳定点不一定是极值点 (例: $f(x) = x^3, x_0 = 0$).

5.2 求导法则

5.2.1	导数的四则运算	41
5.2.2	反函数的导数	53
5.2.3	复合函数的导数	58
5.2.4	基本求导法则与公式	78

5.2.1 导数的四则运算

定理 5.2.1 (导数的四则运算). 若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x_0 可导, 则 $f(x) = u(x) \pm v(x)$, $f(x) = u(x)v(x)$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ($v(x_0) \neq 0$) 在 x_0 点也可导, 且

$$(1) [u(x) \pm v(x)]'|_{x=x_0} = u'(x_0) \pm v'(x_0);$$

$$(2) [u(x)v(x)]'|_{x=x_0} = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0);$$

$$(3) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right] \bigg|_{x=x_0} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

证明

(1) 根据定义

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x)] - [u(x_0) \pm v(x_0)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \\ &= u'(x_0) \pm v'(x_0). \end{aligned}$$

(2) 根据定义

$$\begin{aligned} & f'(x_0) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) v(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) v(x_0 + \Delta x) + u(x_0) v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) v(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} v(x_0 + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x_0) \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \\ &= u'(x_0) v(x_0) + u(x_0) v'(x_0). \end{aligned}$$

(3) 根据定义

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0)u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x)}{v(x_0)v(x_0 + \Delta x)\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{v(x_0)(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) - u(x_0)(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0))}{v(x_0)v(x_0 + \Delta x)\Delta x} \right] \\ &= \frac{v(x_0)u'(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \end{aligned}$$

或者参见书上的做法：

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{v(x)} \right]' \bigg|_{x=x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{v(x_0) - v(x)}{v(x)v(x_0)}}{x - x_0} \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{v(x)v(x_0)} = \frac{-v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' \Big|_{x=x_0} = u'(x_0) \frac{1}{v(x_0)} + u(x_0) \left(-\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2} \right) \\ &= \frac{u'(x_0) v(x_0) - u(x_0) v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}. \end{aligned}$$



故

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' \Big|_{x=x_0} = u'(x_0) \frac{1}{v(x_0)} + u(x_0) \left(-\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2} \right) \\ &= \frac{u'(x_0) v(x_0) - u(x_0) v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}. \end{aligned}$$



注 5.2.1. 利用数学归纳法可将定理5.2.1(2) 推广到任意有限个函数乘积的情形，
如 $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

注 5.2.2. 注意到:

(1) 设 $f = \varphi + \psi$, 若 f 在点 x_0 可导, 则 φ, ψ 在点 x_0 可导.

解此命题是错误的. 例如, 设 $\varphi(x) = D(x)$, $\psi(x) = -D(x)$, 其中 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数. 则 $f = \varphi + \psi \equiv 0$ 处处可导, 但 φ, ψ 处处不可导.

(2) 设 $f = \varphi + \psi$, 若 φ 在点 x_0 可导, ψ 在点 x_0 不可导, 则 f 在点 x_0 一定不可导.

证此命题是正确的. 采用反证法, 假设 f 在点 x_0 可导. 由于 φ 在点 x_0 可导, 则 $\psi = f - \varphi$ 在点 x_0 可导, 这与 ψ 在点 x_0 不可导矛盾.

(3) 设 $f = \varphi \cdot \psi$, 若 f 在点 x_0 可导, 则 φ, ψ 在点 x_0 可导.

解此命题是错误的. 例如, 设 $\varphi(x) = \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$. 则 $f = \varphi \cdot \psi \equiv 1$ 处处可导, 但 φ, ψ 处处不可导.

(4) 设 $f = \varphi \cdot \psi$, 若 φ 在点 x_0 可导, ψ 在点 x_0 不可导, 则 f 在点 x_0 一定不可导.

证此命题是错误的. 若 $\varphi(x_0) \neq 0$, 则 f 在点 x_0 一定不可导. 采用反证法, 假设 f 在点 x_0 可导. 由于 φ 在点 x_0 可导且 $\varphi(x_0) \neq 0$, 则 $\psi = \frac{f}{\varphi}$ 在点 x_0 可导, 这与 ψ 在点 x_0 不可导矛盾.

若 $\varphi(x_0) = 0$, 则 f 在点 x_0 不一定不可导. 例如, 若令 $\varphi \equiv 0$, 则 $f = \varphi \cdot \psi \equiv 0$ 处处可导.

推论 5.2.1. 若函数 $v(x)$ 在点 x_0 可导且 c 为常数, 则 $(cv(x))'_{x=x_0} = cv'(x_0)$.

推论 5.2.1. 若函数 $v(x)$ 在点 x_0 可导且 c 为常数, 则 $(cv(x))'_{x=x_0} = cv'(x_0)$.

推论 5.2.2. 若函数 $v(x)$ 在点 x_0 可导且 $v(x_0) \neq 0$, 则函数 $f(x) = \frac{1}{v(x)}$ 在点 x_0

也可导, 且 $f'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$.

例子 5.2.1.(i) 设 $f(x) = x^3 + 5x^2 - 9x + \pi$, 求 $f'(x)$.

(ii) 设 $y = \cos x \ln x$, 求 $y'|_{x=\pi}$.

例子 5.2.1(i) 设 $f(x) = x^3 + 5x^2 - 9x + \pi$, 求 $f'(x)$.

(ii) 设 $y = \cos x \ln x$, 求 $y'|_{x=\pi}$.

解答

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' + 5(x^2)' - 9(x)' + (\pi)' \\ &= 3x^2 + 10x - 9. \end{aligned}$$

(ii)

$$y' = (\cos x)' \ln x + \cos x (\ln x)' = -\sin x \ln x + \frac{1}{x} \cos x.$$

$$\text{所以 } y'|_{x=\pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

例子 5.2.2.(i) 证明: $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

(ii) 证明: $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, 其中 n 为正整数.

(iii) 证明: $(\sec x)' = \sec x \tan x$, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

例子 5.2.2.(i) 证明: $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

(ii) 证明: $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, 其中 n 为正整数.

(iii) 证明: $(\sec x)' = \sec x \tan x$, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

证明

(i)

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.
 \end{aligned}$$

(ii)

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n} \right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

(iii)

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x.$$



例子 5.2.3. 设 f 为可导函数, 证明: 若 $x = 1$ 时有

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = \frac{d}{dx}f^2(x),$$

则必有 $f'(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

例子 5.2.3. 设 f 为可导函数, 证明: 若 $x = 1$ 时有

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = \frac{d}{dx}f^2(x),$$

则必有 $f'(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

证明

因为

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = 2xf'(x^2), \quad \frac{d}{dx}f^2(x) = 2f(x)f'(x),$$

所以当 $x = 1$ 时有 $\frac{d}{dx}f(x^2)|_{x=1} = 2f'(1)$, $\frac{d}{dx}f^2(x)|_{x=1} = 2f(1)f'(1)$, 由题设, 有 $2f'(1) = 2f(1)f'(1)$, 于是 $f'(1)(1 - f(1)) = 0$, 从而 $f'(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$. \square

5.2.2 反函数的导数

定理 5.2.2. 设 $y = f(x)$ 为 $x = \varphi(y)$ 的反函数, 若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续, 严格单调且 $\varphi'(y_0) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x_0 (x_0 = \varphi(y_0))$ 可导, 且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

证明 设 $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 由于 φ 在点 y_0 的某邻域上连续且严格单调, 故 $f = \varphi^{-1}$ 在点 x_0 的某邻域上连续且严格单调, 故当且仅当 $\Delta y = 0$ 时有 $\Delta x = 0$, 且当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时有 $\Delta x \rightarrow 0$. 由 $\varphi'(y_0) \neq 0$, 可得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

□

证明 设 $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 由于 φ 在点 y_0 的某邻域上连续且严格单调, 故 $f = \varphi^{-1}$ 在点 x_0 的某邻域上连续且严格单调, 故当且仅当 $\Delta y = 0$ 时有 $\Delta x = 0$, 且当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时有 $\Delta x \rightarrow 0$. 由 $\varphi'(y_0) \neq 0$, 可得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

□

注 5.2.3. 导数 $\varphi'(x_0) \neq 0$ 的条件不能去掉. 例如 $\varphi(x) = x^3$ 是从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的可逆函数, φ 处处可导, 但其反函数 $f(y) = y^{1/3}$ 在 $y = 0$ 处不可导.

例子 5.2.4. 证明:

(i) $(a^x)' = a^x \ln a$, 其中 $a > 0, a \neq 1$, 特别地, $(e^x)' = e^x$.

(ii) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(iii) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

例子 5.2.4. 证明:

- (i) $(a^x)' = a^x \ln a$, 其中 $a > 0, a \neq 1$, 特别地, $(e^x)' = e^x$.
- (ii) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- (iii) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

证明

(i) 由于 $y = a^x, x \in \mathbb{R}$ 为对数函数 $x = \log_a y, y \in (0, +\infty)$ 的反函数, 故

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

(ii) 由于 $y = \arcsin x, x \in (-1, 1)$ 是 $x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的反函数, 故

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1).$$

$$\begin{aligned} (\arccos x)' &= \frac{1}{-\sin(\arccos x)} \Leftrightarrow \cos(\arccos x) = x \Leftrightarrow -\sin(\arccos x)(\arccos x)' = 1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

(iii) 由于 $y = \arctan x, x \in \mathbb{R}$ 是 $x = \tan y, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的反函数, 因此

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{arccot} x)' &= \frac{1}{-\csc^2(\operatorname{arccot} x)} \Leftrightarrow \cot(\operatorname{arccot} x) = x \Leftrightarrow -\csc^2(\operatorname{arccot} x)(\operatorname{arccot} x)' = 1 \\
 &= -\frac{1}{1 + \cot^2(\operatorname{arccot} x)} \\
 &= -\frac{1}{1 + x^2}, x \in (-\infty, +\infty)
 \end{aligned}$$



5.2.3 复合函数的导数

定理 5.2.3. 设 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 可导, $y = f(u)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 可导, 则复合函数 $f \circ \varphi$ 在点 x_0 可导, 且 $(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(u_0) \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \varphi'(x_0)$.

错误证明：设 $\Delta y = f(u) - f(u_0)$, $\Delta u = u - u_0$, $\Delta x = x - x_0$, 根据 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处可导, 可得 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta u \rightarrow 0$. 故

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

错误证明：设 $\Delta y = f(u) - f(u_0)$, $\Delta u = u - u_0$, $\Delta x = x - x_0$, 根据 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处可导, 可得 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta u \rightarrow 0$. 故

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

证明(5.2.1)错误的地方在于当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ 不一定存在. 因为当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta u \rightarrow 0$ (但这里可能存在 $\Delta u = 0$).

错误证明：设 $\Delta y = f(u) - f(u_0)$, $\Delta u = u - u_0$, $\Delta x = x - x_0$, 根据 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处可导, 可得 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta u \rightarrow 0$. 故

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

证明(5.2.1)错误的地方在于当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ 不一定存在. 因为当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta u \rightarrow 0$ (但这里可能存在 $\Delta u = 0$).

例如 $\varphi(x) = \sin x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \rightarrow 0$ (存在 $\sin x = 0$ 的情形).

证明 定理5.2.3

法一：定义函数 h 为
$$h(u) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}, & \text{若 } u \neq u_0, \\ f'(u), & \text{若 } u = u_0. \end{cases}$$

因为 $\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} = f'(u_0) = h(u_0)$ ，所以函数 h 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 是连续的，又 $\frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = h(\varphi(x)) \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$ 。因为 h 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 是连续的且 φ 在 x_0 是连续的，故 $h(\varphi(x))$ 在 $x = x_0$ 也是连续的。在上式的左右两边取极限，得

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = h(\varphi(x_0)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

□

为了解决式(5.2.1)中存在的证明问题，我们需要如下的引理5.2.1. 下面的是书上的证明，整体思路是一样的.

引理 5.2.1. $f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是：在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上，存在一个在点 x_0 连续的函数 $H(x)$ ，使得

$$f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0),$$

从而 $f'(x_0) = H(x_0)$.

证明

(\Rightarrow) 若 $f(x)$ 在 x_0 可导, 令 $H(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \in U^\circ(x_0) \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$, 则因

$$\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = H(x_0)$$

有 $H(x)$ 在点 x_0 连续, 且满足在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上有 $f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0)$, 因此若 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 这样的 $H(x)$ 是存在的.

(\Leftarrow) 设存在 $H(x), x \in U(x_0)$, 其在点 x_0 连续, 且当 $x \in U(x_0)$ 时有 $f(x) - f(x_0) = H(x)(x - x_0)$, 因存在极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = H(x_0),$$

所以 $f(x)$ 点 x_0 可导, 且 $f'(x_0) = H(x_0)$. □

证明 证明定理5.2.3

法二：由 $f(u)$ 在点 u_0 可导，由引理5.2.1必要性部分，存在一个在点 u_0 连续的函数 $F(u)$ ，使得 $f'(u_0) = F(u_0)$ ，且 $f(u) - f(u_0) = F(u)(u - u_0)$ ， $u \in U(u_0)$ 。由 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 可导，同理知存在一个在点 x_0 连续的函数 $\Phi(x)$ ，使得 $\varphi'(x_0) = \Phi(x_0)$ ，且 $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \Phi(x)(x - x_0)$ ， $x \in U(x_0)$ 。故

$$f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = F(\varphi(x))\Phi(x)(x - x_0), x \in U(x_0).$$

由于 φ, Φ 在点 x_0 连续且 F 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 连续，故 $H(x) = F(\varphi(x))\Phi(x)$ 在点 x_0 连续。由引理5.2.1充分性部分证得 $f \circ \varphi$ 在点 x_0 可导，且 $(f \circ \varphi)'(x_0) = H(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$. □

证明 证明定理5.2.3

法三 (利用有限增量公式): 根据定义, 有

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

其中 $\Delta y = f(\varphi(x_0 + \Delta x)) - f(\varphi(x_0))$, $\Delta x = x - x_0$. 根据有限增量公式可得 $\Delta y = f'(u_0) \Delta u + o(\Delta u)$, 这里 $\Delta u = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$. 因为 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 连续, 所以当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 有 $\Delta u \rightarrow 0$ (需要特别注意的是 Δu 可以等于 0). 从而

$$\begin{aligned} \Delta y &= f'(u_0) \Delta u + o(\Delta u) \\ &= f'(\varphi(x_0)) [\varphi'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)] + o(\varphi'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)). \end{aligned}$$

因为当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $o(\Delta x)/\Delta x \rightarrow 0$ 且 $o(o(\Delta x))/\Delta x \rightarrow 0$, 故

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(\varphi(x_0))(\varphi'(x_0) + o(1)) + o(1)] = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

法四 (陈纪修版本): 令 $\alpha = \begin{cases} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u}, & \Delta u \neq 0, \\ 0, & \Delta u = 0. \end{cases}$, 则 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0$ 且

有 $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha\Delta u$. 当 $\Delta x \rightarrow 0$, 根据 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处的连续性得 $\Delta u \rightarrow 0$ (注意这里有 $\Delta u \neq 0$ 和 $\Delta u = 0$), 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$. 因此

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(u_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

□

注 5.2.4.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(u_0) \Delta u + o(\Delta u)}{\Delta x} = f'(u_0) u'(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= f'(u_0) u'(x_0) + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} \cdot u'(x_0) = f'(u_0) u'(x_0).\end{aligned}$$

故 $(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \varphi'(x_0)$.

这个证明是错误的. 错误的原因在于当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 有 $\Delta u \rightarrow 0$ (需要特别注意的是 Δu 可以等于 0), 即 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} = 0$ 只考虑了 $\Delta u \rightarrow 0$ 且 $\Delta u \neq 0$ 的情形, 没有考虑 $\Delta u = 0$ 的情形.

注 5.2.5. 复合函数的求导公式也称为链式法则, 函数 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 的复合函数在点 x 的求导公式一般也写作

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

对于由多个函数复合而得到的复合函数, 反复应用上式即可. 例如三个函数构成的复合函数的导数为

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

注 5.2.5. 复合函数的求导公式也称为链式法则, 函数 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 的复合函数在点 x 的求导公式一般也写作

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

对于由多个函数复合而得到的复合函数, 反复应用上式即可. 例如三个函数构成的复合函数的导数为

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

注 5.2.6. $f'(\varphi(x)) = f'(u)|_{u=\varphi(x)}$ 与 $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的含义不可混淆.

例子 5.2.5.(i) 设 $y = \sin x^2$, 求 y' .

(ii) 设 $y = \ln |x|$, 求 y' .

(iii) 设 α 为实数, 求幂函数 $y = x^\alpha$ ($x > 0$) 的导数. 求 a^x ($a > 0$) 的导数.

(iv) 设 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, 求 $f'(0), f'(1)$.

(v) 求下列函数的导函数: (1) $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$; (2) $f(x) = \tan^2 \frac{1}{x}$; (3)
 $y = \arctan(e^{-x})$.

例子 5.2.5.(i) 设 $y = \sin x^2$, 求 y' .

(ii) 设 $y = \ln |x|$, 求 y' .

(iii) 设 α 为实数, 求幂函数 $y = x^\alpha$ ($x > 0$) 的导数. 求 a^x ($a > 0$) 的导数.

(iv) 设 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, 求 $f'(0), f'(1)$.

(v) 求下列函数的导函数: (1) $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$; (2) $f(x) = \tan^2 \frac{1}{x}$; (3)
 $y = \arctan(e^{-x})$.

解答

(i) 将 $\sin x^2$ 看作 $y = \sin u$ 与 $u = x^2$ 的复合函数, 故

$$(\sin x^2)' = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

必须指出: $(\sin x^2)' \neq \cos x^2$.

(ii) 我们知道, 当 $x \neq 0$ 时, $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$. 由复合函数的求导得

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{1}{|x|} \operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}.$$

(iii) 因为 $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 可看作 $y = e^u$ 与 $u = \alpha \ln x$ 的复合函数, 故

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{de^{x \ln a}}{dx} = \frac{de^{x \ln a}}{dx \ln a} \cdot \frac{dx \ln a}{dx} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

(iv) 由于

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

因此 $f'(0) = 0, f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(v)(1)

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

(v)(2)

$$\begin{aligned}\left(\tan^2\frac{1}{x}\right)' &= 2\tan\frac{1}{x} \left(\tan\frac{1}{x}\right)' = 2\tan\frac{1}{x} \sec^2\frac{1}{x} \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= -\frac{2}{x^2} \tan\frac{1}{x} \sec^2\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

$$(v)(3) \quad (\arctan(e^{-x}))' = \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -\frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

对数求导法： (1) 幂指函数 $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$ ，然后使用隐函数求导法则. (2) $y = f(x)$ 是多项式乘积时，函数两端求对数，使用隐函数求导法则.

例子 5.2.6. 设 $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$ ($x > 4$), 求 y' .

例子 5.2.6. 设 $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$ ($x > 4$), 求 y' .

解答

先对函数式取对数, 得

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2 \ln(x+5) + \frac{1}{3} \ln(x-4) - 5 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+4).\end{aligned}$$

再对上式两边分别求导数, 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)}.$$

整理后得到

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)} \right].$$

例子 5.2.7. 设 $y = u(x)^{v(x)}$, 其中 $u(x) > 0$, 且 $u(x), v(x)$ 均可导, 求 y' .

例子 5.2.7. 设 $y = u(x)^{v(x)}$, 其中 $u(x) > 0$, 且 $u(x), v(x)$ 均可导, 求 y' .

解答

对函数式取对数, 有

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

对上式两侧分别求导数, 有

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)},$$

即

$$y' = y \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

代入有 $y' = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + u(x)^{v(x)-1} u'(x) v(x).$

或

$$\begin{aligned}y' &= \left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x) \ln u(x)}\right)' = e^{v(x) \ln u(x)}(v(x) \ln u(x))' \\&= u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}\right) \\&= u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + u(x)^{v(x)-1} u'(x) v(x).\end{aligned}$$

例子 5.2.8. 求以下函数的导数: (1) $y = (1 + \cos x)^{\frac{1}{x}}$; (2) $y = (x^{x^x})', x > 0$.

例子 5.2.8. 求以下函数的导数: (1) $y = (1 + \cos x)^{\frac{1}{x}}$; (2) $y = (x^{x^x})', x > 0$.

解答

(1) 两端取对数, 得 $\ln y = \frac{\ln(1 + \cos x)}{x}$, 故

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x^2} \ln(1 + \cos x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{-\sin x}{1 + \cos x} \\ y' &= -y \left[\frac{\ln(1 + \cos x)}{x^2} + \frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} \right].\end{aligned}$$

(2) 两边取对数得 $\ln y = x^x \ln x$, 再取对数得 $\ln \ln y = x \ln x + \ln \ln x$. 两边求导得到 $\frac{1}{\ln y} \frac{y'}{y} = \ln x + 1 + \frac{1}{x \ln x}$. 所以 $y' = x^x x^{x^x} \left[\ln x + (\ln x)^2 + \frac{1}{x} \right]$.

5.2.4 基本求导法则与公式

基本求导法则

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'$, $(cu)' = cu'$, 其中 c 为常数.

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} (v \neq 0)$.

(4) 反函数导数 $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$.

(5) 复合函数导数 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

(6) 广义幂法则 $(f^g)' = (e^{g \ln f})' = f^g \left(g' \ln f + \frac{g}{f} f' \right)$.

基本初等函数导数公式

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	x^a	$ax^{a-1} (a \neq 0)$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a (a > 0, a \neq 1)$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$	$\operatorname{coth} x$	$1 - \operatorname{coth}^2 x$

对数运算基本法则

(1) 对数运算的性质

$$\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N; \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_{a^n} M^m = \frac{m}{n} \log_a M; \quad a^{\log_a M} = M.$$

以上运算需要的条件是 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, $m, n \in \mathbb{R}$.

$$(2) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, b > 0, b \neq 1).$$

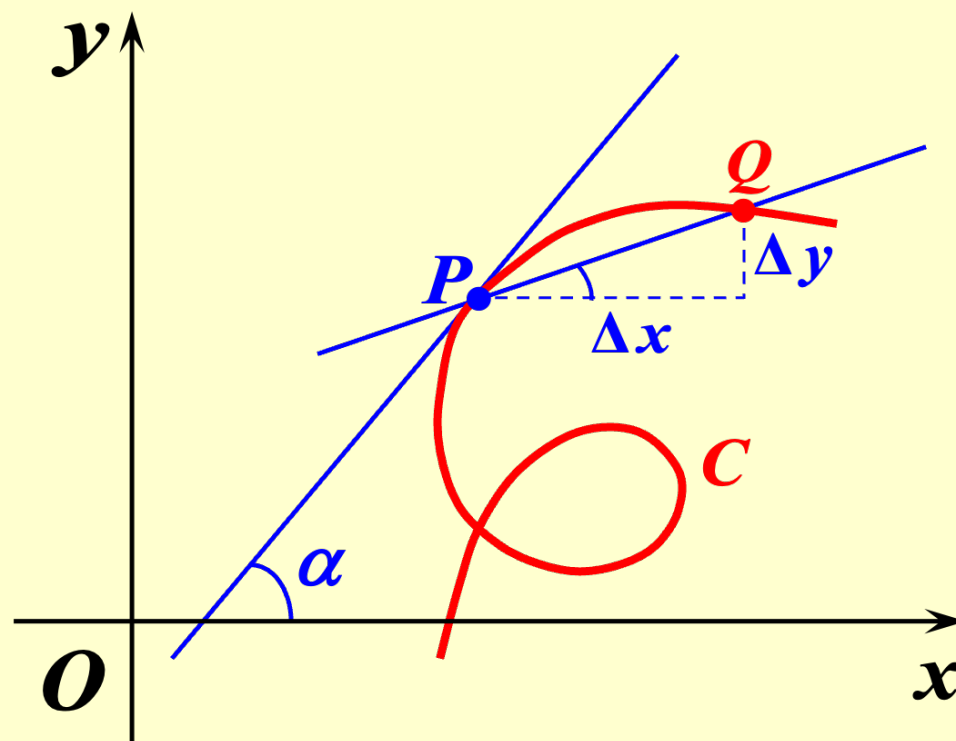
$$(3) \text{换底公式 } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \text{ 需要满足的条件: } a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, c > 0 \text{ 且 } c \neq 1, b > 0.$$

5.3 参变量函数的导数

平面曲线 C 一般的表达形式是参变量 (参量) 方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (5.3.1)$$

表示.



设 $t = t_0$ 对应曲线 C 上的点 P . 如果在点 P 有切线, 那么切线的斜率可由割线的斜率取极限而得, 为此设 φ, ψ 在点 t_0 可导, 且 $x'(t_0) \neq 0$. 若 $t_0 + \Delta t$ 对应 C 上的点 Q , 割线 PQ 的斜率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)}{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)},$$

于是曲线 C 在点 P 的切线斜率是

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

其中 α 为切线与 x 轴正向的夹角. 若 $\varphi'(t_0) = 0$, 但 $\psi'(t_0) \neq 0$, 同样可得

$$\cot \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

若 φ, ψ 在 $[\alpha, \beta]$ 上都存在连续的导函数, 且 $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$, 这时称 C 为光滑曲线. 其特点是在曲线 C 上不仅每一点都有切线, 且切线与 x 轴正向的夹角 $\alpha(t)$ 是 t 的连续函数.

若 $x = \varphi(t)$ 具有反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 那么它与 $y = \psi(t)$ 构成一个复合函数

$$y = \psi \circ \varphi^{-1}(x).$$

这时只要函数 φ, ψ 可导, $\varphi'(t) \neq 0$ (因而当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 也有 $\Delta t \rightarrow 0$ 和 $\Delta y \rightarrow 0$), 就可由复合函数和反函数的求导法则得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (5.3.2)$$

例子 5.3.1. 试求由上半椭圆的参量方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < \pi$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数.

例子 5.3.1. 试求由上半椭圆的参量方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < \pi$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数.

解答

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} = -\frac{b}{a} \cot t.$$

若曲线 C 由极坐标 $r = r(\theta)$ 表示, 则可转化为以极角 θ 为参量的参量方程:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = r(\theta) \cos \theta, \\ y = r \sin \theta = r(\theta) \sin \theta. \end{cases}$$

这时在相应的条件下可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(r(\theta) \sin \theta)'}{(r(\theta) \cos \theta)'} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta} = \frac{r'(\theta) \tan \theta + r(\theta)}{r'(\theta) - r(\theta) \tan \theta}. \quad (5.3.3)$$

过点 M 的射线 OH 与切线 MT 的夹角 φ 的正切则是

$$\tan \varphi = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta}. \quad (5.3.4)$$

将(5.3.3)式代入(5.3.4)式则得向径与切线夹角的正切

$$\tan \varphi = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}. \quad (5.3.5)$$

例子 5.3.2. 证明：对数螺线 $r = e^{\frac{\theta}{2}}$ 上所有点的切线与向径的夹角 φ 为常量.

例子 5.3.2. 证明：对数螺线 $r = e^{\frac{\theta}{2}}$ 上所有点的切线与向径的夹角 φ 为常量.

证明

由(5.3.5)式得，对每一 θ 值都有

$$\tan \varphi = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{2}e^{\frac{\theta}{2}}} = 2,$$

即在对数螺线上任一点的切线与向径的夹角等于 $\arctan 2$. □

5.4 高阶导数

5.5 微分

5.5.1	微分的概念	91
5.5.2	微分的运算法则	92
5.5.3	高阶微分	93
5.5.4	微分在近似计算中的应用	94

5.5.1 微分的概念

5.5.2 微分的运算法则

5.5.3 高阶微分

5.5.4 微分在近似计算中的应用