
数学分析 A

指导教师： 李嘉 副教授

授课教师： 谭兵 副教授

主页： <https://bingtan.me>

西南大学数学与统计学院

2024 年 12 月 9 日

目录

6 微分中值定理及其应用习题课

6.1	拉格朗日定理和函数的单调性习题与答案	3
6.2	柯西中值定理和不定式极限习题与答案	14
6.3	泰勒公式习题与答案	24
6.4	函数的极值与最大 (小) 值习题与答案	27
6.5	函数的凸性与拐点习题与答案	37
6.6	函数图像的讨论习题与答案	44
6.7	第六章总练习题与答案	49

6 微分中值定理及其应用习题课

6.1 拉格朗日定理和函数的单调性习题与答案

例子 6.1. 证明：(1) 方程 $x^3 - 3x + c = 0$ (这里 c 为常数) 在区间 $[0, 1]$ 内不可能有两个不同的实根；(2) 方程 $x^n + px + q = 0$ (n 为正整数, p, q 为实数) 当 n 为偶数时至多有两个实根；当 n 为奇数时至多有三个实根.

例子 6.1. 证明: (1) 方程 $x^3 - 3x + c = 0$ (这里 c 为常数) 在区间 $[0, 1]$ 内不可能有两个不同的实根; (2) 方程 $x^n + px + q = 0$ (n 为正整数, p, q 为实数) 当 n 为偶数时至多有两个实根; 当 n 为奇数时至多有三个实根.

证明

(1) 令 $f(x) = x^3 - 3x + c$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 3$. 由方程 $3x^2 - 3 = 0$ 得 $x = \pm 1$, 抛物线 $y = 3x^2 - 3$ 的开口向上, 于是 $f'(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内恒为负. 用反证法证明原命题. 如果在区间 $[0, 1]$ 内有两个不同的实根 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = 0$. 由罗尔中值定理知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (-1, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$, 但这是不可能的. 所以方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内不可能有两个不同的实根.

(2) 令 $f(x) = x^n + px + q$, 则 $f'(x) = nx^{n-1} + p$. 当 $n \leq 3$ 时, 显然成立, 当 $n \geq 4$ 时, (i) 设 n 为正偶数. 如果方程 $x^n + px + q = 0$ 有三个以上的实根, 则存在实数 x_1, x_2, x_3 , 使得 $x_1 < x_2 < x_3$, 并且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. 根据罗尔中值定理, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, 但这是不可能的. 因为 $f'(x) = 0$ 是奇次方程 $nx^{n-1} + p = 0$, 它在 \mathbb{R} 上有且仅有一个实根 $x = \sqrt[n]{-\frac{p}{n}}$. 故方程 $f(x) = 0$ 当 n 为偶数时至多有两个实根. (ii) 设 n 为正奇数. 如果方程 $x^n + px + q = 0$ 有四个以上不同的实根, 则根据罗尔中值定理, 存在 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 使得 $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, 并且 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$, 但这是不可能的. 因为 $f'(x) = 0$ 是偶次方程 $nx^{n-1} + p = 0$, 它在 \mathbb{R} 上最多只有两个实根. 故方程 $f(x) = 0$ 当 n 为奇数时至多有三个实根. \square

例子 6.2. 证明: (1) 若函数 f 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \geq m$, 则 $f(b) \geq f(a) + m(b - a)$; (2) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| \leq M$, 则 $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$; (3) 对任意实数 x_1, x_2 , 都有 $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

例子 6.2. 证明: (1) 若函数 f 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \geq m$, 则 $f(b) \geq f(a) + m(b - a)$; (2) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| \leq M$, 则 $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$; (3) 对任意实数 x_1, x_2 , 都有 $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

证明

(1) 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 所以在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 又因为 $f'(x) \geq m$, 于是 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq m$, 因此 $f(b) \geq f(a) + m(b - a)$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 所以在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 又因为 $|f'(x)| \leq M$, 于是 $\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq M$. 因此 $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.

(3) 当 $x_1 = x_2$ 时, 结论成立. 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 不妨设 $x_1 < x_2$, 令 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$, $|f'(x)| \leq 1$, 由 (2) 的结论知, $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$.



例子 6.3. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式: (1) $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$, 其中 $0 < a < b$; (2) $\frac{h}{1+h^2} < \arctan h < h$, 其中 $h > 0$.

例子 6.3. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式: (1) $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$, 其中 $0 < a < b$; (2) $\frac{h}{1+h^2} < \arctan h < h$, 其中 $h > 0$.

证明

(1) $\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a$, 令 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$. 因为 $0 < a < b$, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 故至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$, 而 $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$. 于是, $\frac{1}{\xi} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$, 由 $0 < a < \xi < b$ 知 $\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$, 因而 $\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$, 故 $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

(2) $\arctan h = \arctan h - \arctan 0$, 令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. $f(x)$ 在 $[0, h]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 于是存在 $\xi \in (0, h)$, 使得 $\arctan h - \arctan 0 = \frac{h}{1+\xi^2}$. 又因 $\xi \in (0, h)$, 故 $\frac{h}{1+h^2} < \frac{h}{1+\xi^2} < h$, 故 $\frac{h}{1+h^2} < \arctan h < h$. □

例子 6.4. 应用函数的单调性证明下列不等式: (1) $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$; (2) $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$; (3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, x > 0$.

例子 6.4. 应用函数的单调性证明下列不等式: (1) $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$; (2) $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$; (3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, x > 0$.

证明

(1) 令 $f(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$, 则

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内严格递增. 又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 故 $\tan x > x - \frac{x^3}{3}$.

(2) 先证明 $\sin x < x$. 令 $f(x) = x - \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 于是在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, $f(x)$ 严格递增. 又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以 $f(x) = x - \sin x > f(0) = 0$, 即 $x > \sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 再证 $\frac{2x}{\pi} < \sin x$. 令

$g(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则

$$g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - \tan x) \cos x}{x^2}.$$

为了确定 $x - \tan x$ 的符号, 令 $h(x) = x - \tan x$, 则

$$h'(x) = 1 - \sec^2 x = -\tan^2 x < 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

因此 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内严格递减. 又因 $h(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 故 $h(x) < h(0) = 0$, 因此, $g'(x) < 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 于是, $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内严格递减, 又因为 $g(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 连续, 所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g(x) > g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$, 故当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\frac{2x}{\pi} < \sin x$.

$$(3) \text{ 令 } f(x) = x - \frac{x^2}{2(1+x)} - \ln(1+x), x \geq 0;$$

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}, x \geq 0,$$

则 $f(0) = 0, g(0) = 0,$

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2 + 2x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{2(1+x)^2} > 0, x > 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0, x > 0.$$

所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0, g(x) > g(0) = 0$, 由此可得,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, x > 0.$$



例子 6.5. 设 f 为 $[a, b]$ 上二阶可导函数, $f(a) = f(b) = 0$, 并存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) > 0$. 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.

例子 6.5. 设 f 为 $[a, b]$ 上二阶可导函数, $f(a) = f(b) = 0$, 并存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) > 0$. 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.

证明

因 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上满足拉格朗日中值定理, 故存在 $\xi_1 \in (a, c)$, 使 $f'(\xi_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$, 由 $f(c) > 0, f(a) = 0, c - a > 0$ 得 $f'(\xi_1) > 0$. 同理, 存在 $\xi_2 \in (c, b)$, 使 $f'(\xi_2) < 0$. 于是有 $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$, $a < \xi_1 < \xi_2 < b$, 又因为 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上可导, 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} < 0.$$



例子 6.6. 证明：若函数 f, g 在区间 $[a, b]$ 上可导，且 $f'(x) > g'(x)$, $f(a) = g(a)$ ，则在 $(a, b]$ 内有 $f(x) > g(x)$.

例子 6.6. 证明：若函数 f, g 在区间 $[a, b]$ 上可导，且 $f'(x) > g'(x)$, $f(a) = g(a)$ ，则在 $(a, b]$ 内有 $f(x) > g(x)$.

证明

令 $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$ ，则 $F(a) = f(a) - g(a) = 0$, $F'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$. 于是， $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格递增，故当 $x \in (a, b]$ 时， $F(x) > F(a) = 0$ ，即 $f(x) > g(x)$. \square

6.2 柯西中值定理和不定式极限习题与答案

例子 6.7. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上可导. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2) f'(\xi).$$

例子 6.7. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上可导. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2) f'(\xi).$$

证明

令 $F(x) = x^2[f(b) - f(a)] - (b^2 - a^2)f(x)$, 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导可知, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且有 $F(a) = F(b) = a^2f(b) - b^2f(a)$, 故由罗尔中值定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$, 即 $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$. □

例子 6.8. 设函数 f 在点 a 处具有连续的二阶导数. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

例子 6.8. 设函数 f 在点 a 处具有连续的二阶导数. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

证明

两次应用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(a+h) + f''(a-h)}{2} = f''(a). \end{aligned}$$



例子 6.9. 求下列不定式极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{\cos x - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 6}{\sec x + 5};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^{\sin x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x;$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

例子 6.9. 求下列不定式极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{\cos x - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 6}{\sec x + 5};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^{\sin x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x;$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

解答

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(1 - 2 \sin x)'}{(\cos 3x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-2 \cos x}{-3 \sin 3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{-\cos x} = 1.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \sec^2 x}{\sin x} = 2.$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 6}{\sec x + 5} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec x \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} = 1.$$

(6)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \cdot \ln(\tan x)}$, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln(\tan x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x} = 0, \text{ 故所求极限为 } 1.$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}} = \frac{1}{e}.$$

(9)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x^2)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}} = e^0 = 1.$$

(10)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot (-\tan x) = 0. \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x} \cdot \frac{\sin x - x}{x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \frac{\tan x}{x}}{x^2}}$, 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\tan x}{x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\tan x} \cdot \frac{\sec^2 x \cdot x - \tan x}{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sec^2 x - \tan x}{2x^2 \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sec^2 x - \tan x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x + 2x \sec^2 x \tan x - \sec^2 x}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{6x} \cdot \frac{1}{\cos^3 x} = \frac{1}{3}, \quad \text{故所求的极限值为 } e^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

例子 6.10. 设 $f(0) = 0$, f' 在原点的某邻域内连续, 且 $f'(0) \neq 0$. 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$.

例子 6.10. 设 $f(0) = 0$, f' 在原点的某邻域内连续, 且 $f'(0) \neq 0$. 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$.

证明 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{f(x) \ln x}$, 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} \\ &= -\frac{1}{f'(0)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^2(x)}{x} = -\frac{1}{f'(0)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2f(x)f'(x)}{1} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = e^0 = 1$. □

例子 6.11. 证明: $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ 为有界函数.

例子 6.11. 证明: $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ 为有界函数.

证明

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0\end{aligned}$$

注意到 $f(x)$ 为奇函数 (或同理可得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$). 于是, 对于 $\varepsilon_0 = 1$, 存在 $M > 0$, 使得当 $|x| > M$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon_0 = 1$. 在 $[-M, M]$ 上, 由连续函数的有界性定理知, 存在 $S > 0$, 使得当 $x \in [-M, M]$ 时, $|f(x)| < S$. 于是, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, $|f(x)| < \max\{S, 1\}$. 故 $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ 为有界函数. □

6.3 泰勒公式习题与答案

例子 6.12. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right).$$

例子 6.12. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}; (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]; (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right).$$

解答

(1) 因为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, 所以 $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x(1+x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right),$$

所以：原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{o \left(\frac{1}{x^2} \right)}{\frac{1}{x^2}} \right] = \frac{1}{2}.$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right] - x \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) \right]}{x^2 [x + o(x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6.4 函数的极值与最大(小)值习题与答案

例子 6.13. 求下列函数的极值：(1) $f(x) = 2x^3 - x^4$ ；(2) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ；(3) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ ；(4) $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2)$.

例子 6.13. 求下列函数的极值: (1) $f(x) = 2x^3 - x^4$; (2) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; (3) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$; (4) $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

解答

(1) $f'(x) = 6x^2 - 4x^3$, $f''(x) = 12x - 12x^2$, $f'''(x) = 12 - 24x$, 由 $f'(x) = 0$, 即 $6x^2 - 4x^3 = 0$ 得 $f(x)$ 的稳定点为 $x = 0$ 和 $x = \frac{3}{2}$, 因为 $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 12$, 由极值的第三充分条件知, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不取极值. 因为 $f'(\frac{3}{2}) = 0$, $f''(\frac{3}{2}) = -9$, 由极值的第二充分条件知, $f(x)$ 在 $x = \frac{3}{2}$ 处取极大值, 极大值为 $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{16}$.

(2)

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

由 $f'(x) = 0$ 得稳定点为 $x = \pm 1$. 因 $f''(1) = -1 < 0$, 故 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(1) = 1$; 因为 $f''(-1) = 1 > 0$, 故 $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(-1) = -1$.

(3)

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 - 6 \ln x + 2(\ln x)^2}{x^3}.$$

由 $f'(x) = 0$ 得稳定点为 $x = 1$ 和 $x = e^2$. 因 $f''(1) = 2 > 0$, 故 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(1) = 0$; 因 $f''(e^2) = \frac{-2}{e^6} < 0$, 故 $x = e^2$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(e^2) = \frac{4}{e^2}$.

(4)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{2(1+x^2)} = \frac{1-x}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-1-2x+x^2}{(1+x^2)^2}.$$

由 $f'(x) = 0$ 得稳定点为 $x = 1$, 因 $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$, 故 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

例子 6.14. 证明：若函数 f 在点 x_0 处有 $f'_+(x_0) < 0(> 0)$, $f'_-(x_0) > 0(< 0)$, 则 x_0 为 f 的极大(小)值点.

例子 6.14. 证明: 若函数 f 在点 x_0 处有 $f'_+(x_0) < 0(> 0)$, $f'_-(x_0) > 0(< 0)$, 则 x_0 为 f 的极大(小)值点.

证明

假设 $f'_+(x_0) < 0, f'_-(x_0) > 0$. 由 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ 及极限的保号性知, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ 时有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, 于是此时有 $f(x) < f(x_0)$; 由 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ 可知, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$ 时有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 于是此时有 $f(x) < f(x_0)$. 取 $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $x \in U(x_0; \delta)$ 时, $f(x) \leq f(x_0)$, 故 x_0 为 f 的极大值点. 同理可证, 当 $f'_+(x_0) > 0, f'_-(x_0) < 0$ 时, x_0 为 f 的极小值点. \square

例子 6.15. 求下列函数在给定区间上的最大最小值: (1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1, 2]$; (2) $y = 2 \tan x - \tan^2 x, [0, \frac{\pi}{2})$; (3) $y = \sqrt{x} \ln x, (0, +\infty)$.

例子 6.15. 求下列函数在给定区间上的最大最小值: (1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-1, 2]$; (2) $y = 2 \tan x - \tan^2 x, [0, \frac{\pi}{2})$; (3) $y = \sqrt{x} \ln x, (0, +\infty)$.

解答

(1) $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-1)(x-3)$, 由方程 $y' = 0$ 得稳定点 $x = 0, 1, 3$. 由于 $3 \notin [-1, 2]$, 故舍去. $y(-1) = -10, y(0) = 1, y(1) = 2, y(2) = -7$, 比较它们的大小知, 函数在 $x = -1$ 处取最小值 -10, 在 $x = 1$ 处取最大值 2.

(2) 令 $t = \tan x$, 由 $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ 知 $t \in [0, +\infty)$.

$$y = 2 \tan x - \tan^2 x = 2t - t^2 = -(t-1)^2 + 1.$$

于是, 当 $t = 1$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 函数取最大值 1. 又因 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \tan x - \tan^2 x) = -\infty$, 最小值不存在.

(3) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$, 由 $y' = 0$ 得稳定点 $x = e^{-2}$. 当 $0 < x < e^{-2}$ 时, $y' < 0$; 当 $e^{-2} < x < +\infty$ 时, $y' > 0$. 故函数在 e^{-2} 处取最小值, 最小值为 $y(e^{-2}) = -\frac{2}{e}$. 又因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln x = +\infty$, 故最大值不存在.

例子 6.16. 有一个无盖的圆柱形容器，当给定体积为 V 时，要使容器的表面积为最小，问底的半径与容器高的比例应该怎样？

例子 6.16. 有一个无盖的圆柱形容器，当给定体积为 V 时，要使容器的表面积为最小，问底的半径与容器高的比例应该怎样？

解答

设底的半径为 r ，则 $V = \pi r^2 h$ ，容器的高 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ ，容器的表面积

$$S(r) = 2\pi r h + \pi r^2 = \pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

于是 $S'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$ ，由 $S'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 。又因为 $S''(r) = 2\pi + \frac{4V}{r^3}$ ， $S''(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}) = 6\pi > 0$ ，故 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 是 $S(r)$ 的极小值点，此时 $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ ，故 $\frac{r}{h} = 1$ 。即当底的半径与容器的高的比例为 $1:1$ 时，容器的表面积为最小。

例子 6.17. 设 $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ 在 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 处都取得极值, 试求 a 与 b ; 并问这时 f 在 x_1 与 x_2 是取得极大值还是极小值?

例子 6.17. 设 $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ 在 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 处都取得极值, 试求 a 与 b ; 并问这时 f 在 x_1 与 x_2 是取得极大值还是极小值?

解答

$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$, 由 $f'(1) = 0, f'(2) = 0$ 得方程组
$$\begin{cases} a + 2b + 1 = 0 \\ \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \end{cases}, \text{解}$$

得 $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{6}$. $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 2b = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$, 故 $f''(1) = \frac{1}{3} > 0, f''(2) = -\frac{1}{6} < 0$,
于是 f 在 $x_1 = 1$ 取得极小值, 在 $x_2 = 2$ 取得极大值.

例子 6.18. 在抛物线 $y^2 = 2px$ 哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短.

例子 6.18. 在抛物线 $y^2 = 2px$ 哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短.

解答

设 $M_0(x_0, y_0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ 上的一点, 则过该点的切线斜率为 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{1}{\left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=x_0}} = \frac{p}{y_0}$, 故点 M_0 处的法线方程为 $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$. 设法线与抛物线 $y^2 = 2px$ 的另一交点为 (x_1, y_1) , 则由韦达定理可知, 两交点的距离 d 满足

$$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \frac{4(y_0^2 + p^2)^3}{y_0^4}.$$

令 $f(y) = \frac{4(y^2 + p^2)^3}{y^4}$, 则 $f'(y) = \frac{8(p^2 + y^2)^2(y^2 - 2p^2)}{y^5}$, 由 $f'(y) = 0$ 得 $y = \pm\sqrt{2}p$. 故所求点的坐标为 $(p, \pm\sqrt{2}p)$.

6.5 函数的凸性与拐点习题与答案

例子 6.19. 确定下列函数的凸性区间与拐点:

$$(1) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25;$$

$$(2) y = x + \frac{1}{x};$$

$$(3) y = x^2 + \frac{1}{x};$$

$$(4) y = \ln(x^2 + 1);$$

$$(5) y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

例子 6.19. 确定下列函数的凸性区间与拐点:

$$\begin{array}{lll} (1) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25; & (2) y = x + \frac{1}{x}; & (3) y = x^2 + \frac{1}{x}; \\ (4) y = \ln(x^2 + 1); & (5) y = \frac{1}{1 + x^2}. & \end{array}$$

解答

(1) $y' = 6x^2 - 6x - 36, y'' = 12x - 6$. 由 $y'' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$. 当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$. 故 y 的凹区间为 $(-\infty, \frac{1}{2})$, 凸区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, y 的拐点为 $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$.

(2) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y'' < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 故 y 的凹区间为 $(-\infty, 0)$, y 的凸区间为 $(0, +\infty)$. 由于 $y'' = 0$ (即 $\frac{2}{x^3} = 0$) 无实根, 故 y 无拐点.

(3) $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$, $y'' = 2 + \frac{2}{x^3}$. 由 $y'' = 0$ 得 $x = -1$, 于是拐点为 $(-1, 0)$. 由 $y'' < 0$ 得 $-1 < x < 0$. 由 $y'' > 0$ 得 $x < -1$ 或 $x > 0$. 故 y 的凹区间为 $(-1, 0)$, y 的凸区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, +\infty)$.

(4) $y' = \frac{2x}{x^2+1}$, $y'' = \frac{2(x^2+1)-2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, 由 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 1$, 故拐点为 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$. 由 $y'' < 0$ 得 $\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} < 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 1$. 由 $y'' > 0$ 得 $\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} > 0$, 解得 $-1 < x < 1$. 故 y 的凹区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 凸区间为 $(-1, 1)$.

(5) $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $y'' = \frac{-2(1+x^2)^2 + 4x(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$, 由 $y'' = 0$ 得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时, $y'' < 0$; 当 $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 时, $y'' > 0$. 故 y 的凹区间为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, 凸区间为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, 拐点为 $(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$.

例子 6.20. 问 a 和 b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

例子 6.20. 问 a 和 b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

解答

$y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b$. 由 $(1, 3)$ 为该曲线的拐点知, $f''(1) = 0$, $3 = f(1)$, 由此得到方程组

$$\begin{cases} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 = 3 \\ 6a \cdot 1 + 2b = 0 \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$.

例子 6.21. 应用凸函数概念证明如下不等式: (1) 对任意实数 a, b , 有 $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$; (2) 对任何非负实数 a, b , 有 $2 \arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b$.

例子 6.21. 应用凸函数概念证明如下不等式: (1) 对任意实数 a, b , 有 $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$; (2) 对任何非负实数 a, b , 有 $2 \arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b$.

解答

(1) $(e^x)'' = e^x$. 因 $e^x > 0$ 恒成立, 故 e^x 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的凸函数, 令定义中的 $\lambda = \frac{1}{2}$, 则有 $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$.

(2) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\arctan x)'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, 当 $x \geq 0$ 时 $f''(x) \leq 0$, 从而 $\arctan x$ 是 $[0, +\infty)$ 上的凹函数. 故由定义可知, 对任意非负实数 a, b , 有

$$f\left(\frac{1}{2}a + \left(1 - \frac{1}{2}\right)b\right) \geq \frac{1}{2}f(a) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)f(b).$$

即 $\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\arctan a + \arctan b)$.

例子 6.22. 证明：若 f, g 均为区间 I 上凸函数，则 $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 也是 I 上凸函数.

例子 6.22. 证明: 若 f, g 均为区间 I 上凸函数, 则 $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 也是 I 上凸函数.

证明

因为 f, g 均为区间 I 上的凸函数, 所以对任意的 $x_1, x_2 \in I$ 及 $\lambda \in (0, 1)$, 总有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2),$$

由于 $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, 因而 $f(x_1) \leq F(x_1), f(x_2) \leq F(x_2), g(x_1) \leq F(x_1), g(x_2) \leq F(x_2)$, 于是

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2),$$

$$\lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2),$$

综上可得

$$\max \{f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2), g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)\} \leq \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2).$$

即 $F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2)$, 故 $F(x)$ 是 I 上的凸函数. \square

6.6 函数图像的讨论习题与答案

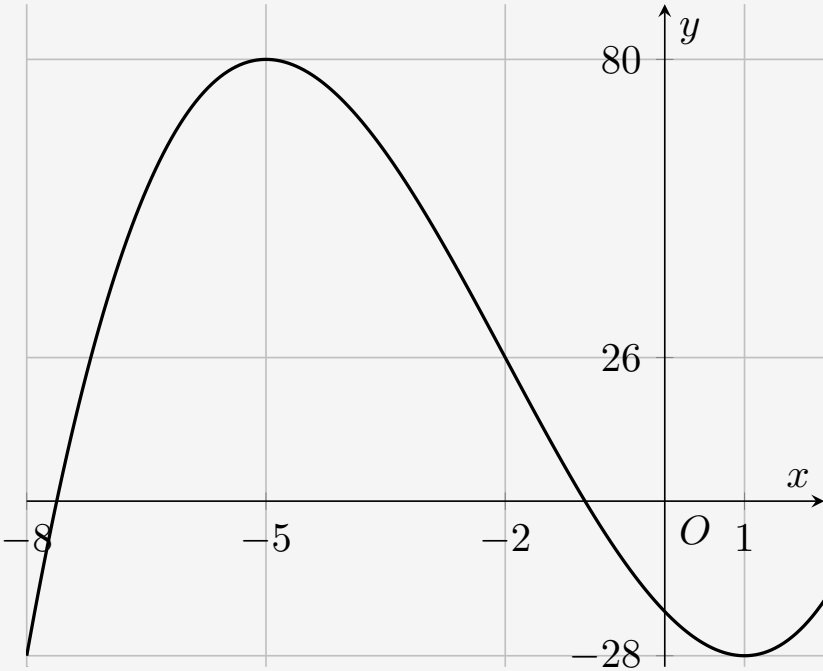
例子 6.23. 按函数作图步骤, 作下列函数图像: (1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$; (6) $y = e^{-x^2}$.

例子 6.23. 按函数作图步骤, 作下列函数图像: (1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$; (6) $y = e^{-x^2}$.

解答

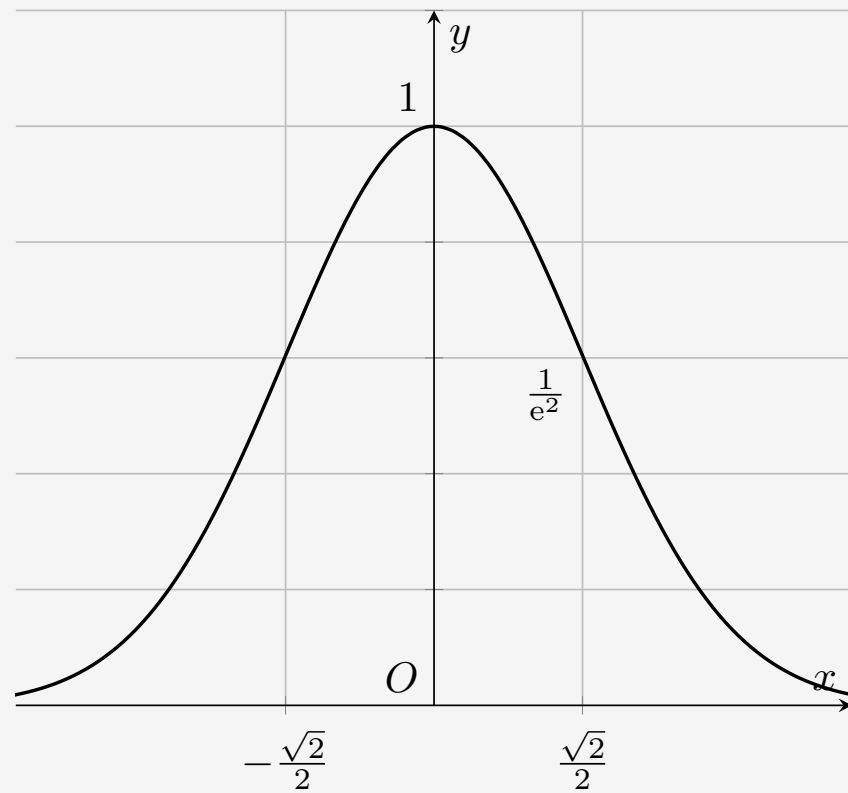
(1) 函数 $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 容易求得曲线与坐标轴交于以下几点: $(-1, 0)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{105}}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{105}}{2}, 0\right)$, $(0, -20)$. $y' = 3x^2 + 12x - 15$, 由 $y' = 0$ 得稳定点 $x = -5, 1$. $y'' = 6x + 12$, 由 $y'' = 0$ 得 $x = -2$.

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	增凹	极大值 $f(-5) = 80$	减凹	拐点 $(-2, 26)$	减凸	极小值 $f(1) = -28$	增凸



(6) $y = e^{-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 是一个偶函数. 曲线在 x 轴上方, 与坐标轴的交点为 $(0, 1)$. $y' = -2xe^{-x^2}$, 由 $y' = 0$ 得 $x = 0$. $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$, 所以曲线有水平渐近线 $y = 0$.

x	0	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
y'	0	-	-	-
y''	-	-	0	+
y	极大值 1	减凹	拐点	减凸



6.7 第六章总练习题与答案

例子 6.24. 证明：若 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 内可导，且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ ，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f'(\xi) = 0$.

例子 6.24. 证明: 若 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

证明

补充定义 $f(x)$ 在 a, b 的值如下: $f(a) = f(b) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上满足罗尔中值定理的条件, 于是存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$. □

例子 6.25. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $a \cdot b > 0$. 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

证明

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}},$$

因而取 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, $G(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a, b]$, 则函数 F 和 G 在 $[a, b]$ 上满足柯西中值定理的条件. 于是存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \left(\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} \right) / \left(-\frac{1}{\xi^2} \right) = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

□

例子 6.26. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $0 \leq f'(x) \leq f(x), f(0) = 0$. 证明: 在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

例子 6.26. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $0 \leq f'(x) \leq f(x), f(0) = 0$. 证明: 在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

证明

令 $g(x) = e^{-x}f(x), x \in [0, +\infty)$, 则 $g(0) = 0, g(x) \geq 0$. 因为 $f'(x) \leq f(x)$, 所以 $g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \leq 0, x \in [0, +\infty)$. 因此, g 为 $[0, +\infty)$ 上的递减函数. 于是, $0 \leq g(x) \leq g(0) = 0, x \in [0, +\infty)$, 故 $g(x) \equiv 0$, 由此得在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$. \square