线性代数

第 1 章 行列式

谭 兵 副教授
西南大学数学与统计学院
`https://bingtan.me/`

2025 年 3 月 7 日

目录

第 1 章　行列式

这一章介绍 n 阶行列式的定义，讨论行列式的性质及计算. 最后，介绍行列式在求解一类特殊的线性方程组的克拉默法则.

行列式的来源

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题.

17 世纪末由日本数学家关孝和及德国数学家莱布尼茨引入.

为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则：给定线性方程组

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么线性方程组(1)有解，并且解是惟一的：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式的出现原因可以这样理解：完美地表达了一部分线性方程组的解的规律. 从这个角度讲，行列式是人为创造的一个符号，它形式简洁地，浓缩地记载了一些规律性的内容.

☛ 什么是行列式? 如何计算? 将是课程第 1 章的内容.

本章内容

这一章关注：行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题：

1. 为什么要讨论行列式?
2. 行列式有哪些性质?
3. n 阶行列式的计算，有哪些常见方法?

1.1　2(3) 阶行列式

本节讨论二 (三) 元一次方程组的解与 2(3) 阶行列式.

消元法求解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } x_2} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

定义 2 阶行列式 设有四个数 a_{ij} 排成 2 行 2 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ ，表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表所确定的**二阶行列式**，并记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

主对角线两个元素 a_{11} 和 a_{22} 的乘积，减去副对角线两个元素 a_{12} 和 a_{21} 的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

二元一次线性方程组的解

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

[1]

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

[2]

例 求下列二阶行列式的值. (1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$； (3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2$； (4) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$.

行列式解方程组

例 1.1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$$

且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$$

[1]把行列式 D 的第 1 列用常数项 b_1, b_2 替换得 D_1；第 2 列用常数项 b_1, b_2 替换的 D_2.
[2]$D \neq 0$.

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

三元一次方程组的解

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

利用消元法，可求得它的解为（设分母不为零）:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\end{cases}$$

三阶行列式的定义 对九个数 a_{ij} 排成 3 行 3 列的数表，**三阶行列式**定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{array}{l}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\end{array}$$

计算法则——“**对角线法则**”.

三阶行列式的特点:

- 共有 **六项** ，每项都是由位于不同行不同列的三个元素乘积构成
- **三正项三负项** ，平行于主对角线的连线的元素的乘积为正，平行于副对角线的连线的元素的乘积为负.

三阶行列式示意图

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\boxed{a_{12}}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&\boxed{a_{23}}\\ \boxed{a_{31}}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{array}{l}+a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\end{array}\quad\begin{vmatrix}a_{11}&\boxed{a_{12}}&a_{13}\\ \boxed{a_{21}}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&\boxed{a_{33}}\end{vmatrix}=\begin{array}{l}+a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\end{array}$$

三阶行列式的图形计算（沙路法）

$$\begin{array}{ccccc}+&+&+-&-&-\\ \left[\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}\right.&&\left.\right]&\begin{matrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\\ a_{31}&a_{32}\end{matrix}\end{array}$$

$$\begin{aligned}&=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})\\ &\quad-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})\end{aligned}$$

注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times 4 \\ &\quad -(-4)\times 2\times(-3)-1\times 1\times 4-2\times(-2)\times(-2) \\ &= -14. \end{aligned}$$

例 求下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix}=520$;

(2) $\begin{vmatrix} 我 & 0 & 生 \\ 0 & 有 & 0 \\ 你 & 0 & 幸 \end{vmatrix}=$ 我有幸一生有你.

例 设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$，则 $x=$?

解: 方程左端的三阶行列式

$$D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6.$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

三元一次线性方程组的解

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

[3]

$$D\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

n 元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

- 想法: 把二元和三元方程组的结果推广到 n 元一次方程组;
- 途径: 定义 n 阶行列式;
- 由 3 阶行列式可预见，n 阶行列式的计算将很复杂，因此需讨论其性质，从而简化计算方法;
- 这一章的内容就是定义 n 阶行列式，讨论其性质和计算方法，最终建立线性方程组的**克拉默 (Cramer) 法则**.

[3]把行列式 D 的第 i 列用常数项 b_1,b_2,b_3 替换得 D_i，$i=1,2,3$.

1.2 全排列

为了定义 n 阶行列式，需要用到自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列及其逆序数的概念.

行列式各项的符号

行列式的每一项都是每行每列各取一个元素共 n 个元素相乘所得.

二阶行列式为: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

三阶行列式为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项?

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半.
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半.
- ⋆ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项.
- ⋆ 猜测四阶行列式取正号和负号的各有 12 项.

取正号或负号的关键在于下标的排列.

全排列 **定义 1.1** 称由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列.
- 自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个.
- 只有自然排列 $123 \cdots (n-1)n$ 遵守从小到大的顺序，其余排列都存在某种 "逆序".

逆序数 **定义 1.2** 在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，若一个较大的数 i_k 排在一个较小的数 i_l 前面，则称 i_k, i_l 构成该排列的一个逆序；称逆序总数为该排列的逆序数，记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

1. $\tau(32514) = 5$；$\tau(453162) = 9$；
2. $\tau(123 \cdots (n-1)n) = 0$；
3. $\tau\big(n(n-1) \cdots 321\big) = \frac{n(n-1)}{2}$.

奇偶排列 **定义 1.3** 若一个排列的逆序数为奇 (偶) 数, 则称该排列为奇 (偶) 排列.

1. 因为 $\tau(2143) = 2$，所以 2143 是偶排列.
2. 因为 $\tau(32514) = 5$，所以 32514 是奇排列.

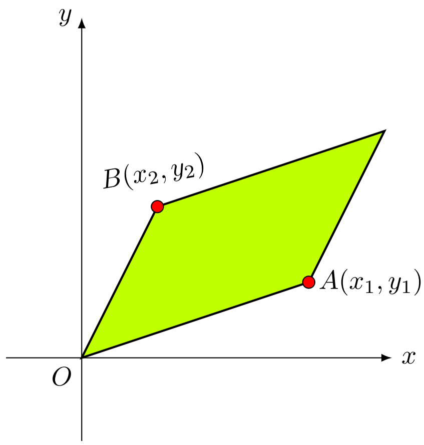
对换 **定义 1.4** 交换一个排列中两个数的位置，称为对该排列作一次对换.

- 交换排列 32514 中 5 与 4 的位置，得到排列 32415，记为 $32514 \to 32415$；
- 排列 32514 是奇排列，而排列 32415 是偶排列.

定理 1.1 对排列作一次对换改变排列的奇偶性. [4]

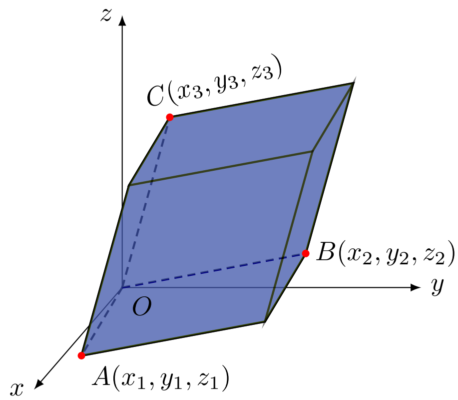
二阶行列式的几何意义

[4] 由此定理可以证明在 $n!$ 个 n 级排列中，有 $n!/2$ 个奇排列，有 $n!/2$ 个偶排列.



二阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值等于平行四边形的面积.

三阶行列式的几何意义



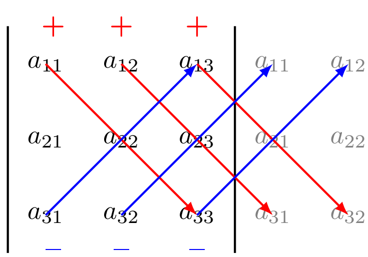
三阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 的绝对值等于平行六面体的体积.

1.3 n 阶行列式

利用 n 级排列的奇偶性，结合 2(3) 阶行列式，给出 n 阶行列式的定义.

回顾：2(3) 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

2 阶与 3 阶行列式计算规律分析

1. 3 阶行列式恰好有 3! 项.
2. 每一项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$;
3. 下标第一位 (行标) 构成自然排列 123;
4. 下标第二位 (列标)j_1, j_2, j_3 的排列为 123, 231, 312, 321, 132, 213. 这 6 个排列的逆序数分别为 0, 2, 2, 3, 1, 1. 列标排列为偶排列的项符号为正，列标排列为奇排列的项符号为负.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

n **阶行列式的定义** **定义 1.5** 定义n 阶行列式(determinant)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为代数和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和. [5]

记号及定义的含义

- 通常用 D，$|(a_{ij})_{n\times n}|$，$\det(a_{ij})$ 等表示行列式.
- 规定 1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.
- 由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

  1. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和.
  2. 每一项是 n 个元素的乘积，这 n 个元素来自于行列式的不同行与不同列.
  3. 行标按自然顺序排列时，符号由这 n 个元素的列标排列的逆序数决定.

例 1.2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由定义，行列式是 4! 项的代数和，每项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$.

[5]称 a_{ij} 为行列式第 i 行第 j 列的元素，$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为主对角线上元素，a_{1n}，$a_{2,n-1}$，$\cdots$，a_{n1} 为副对角线上元素.

因为只有 a_{13}，a_{24}，a_{32}，a_{41} 不为零，所以只有当 $j_1=3$，$j_2=4$，$j_3=2$，$j_4=1$ 时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 才不为零. 故

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(3421)} 1\times 2\times 3\times 4 = (-1)^5 24 = -24.$$

例 在四阶行列式展开式中，确定下列各项的符号：

(1) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}(-)$；　　(2) $a_{33}a_{24}a_{12}a_{41}(+)$.

例 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 5x^2 & 1 & 1 & x \\ 2x & 3x & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & x & 7 \end{vmatrix}$，求 $f(x)$ 的最高次项.

解

$$(-1)^{\tau(1243)} 5x^2\cdot 3x\cdot 6\cdot x = -90x^4.$$

几种特殊的行列式

例 1.3 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

证明　因为形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}$ 中不为零的项只有

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn},$$

且这一项的符号为正，所以结论成立.

上三角行列式

例 1.4 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

副对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

行列式列标按自然顺序排列的定义

- 在 n 阶行列式的定义中，每一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列；
- 因为数的乘法满足交换律，所以交换每一项中 n 个元素的顺序，可以使**列标**按自然顺序排列.

定理 1.2 对于 n 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

小　结

- 计算二阶和三阶行列式的神器：**对角线法则**.
- 对角线法则**只**适用于二阶和三阶行列式，高阶行列式的计算需要新的方法.
- 排列和对换 $\Longrightarrow$ 高阶行列式的定义.
- n 阶行列式的定义：

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

不同行不同列元素的乘积，t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，并借助逆序数添加正负号.

- **适用于含零较多的行列式**，如上/下三角行列式.
- Q: 对一般的高阶行列式，怎么破?

1.4　行列式的性质

一般的 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，当 n 较大时，用定义来计算的计算量很大. 比如 $n = 10$，那么就会得到 $10! = 3628800$ 个项做加减法. 因此，有必要简化行列式的计算. 为此，先研究行列式的性质.

1.4.1　行列式的基本性质

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

副对角线：从右上角到左下角的对角线

单位行列式：主对角线上元素为 1，其他元素为 0

- 二阶的：$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;

- 三阶的：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

性质 (规范性)**.** 单位行列式的值为 1.

转置行列式

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D^{T} 为 D 的**转置行列式**. [6]

例如，设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -40$，

则它的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -40$.

转置行列式的性质

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等. [7]

证明 令 $b_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n$. 于是

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k_1k_2\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)} b_{1k_1} b_{2k_2} \cdots b_{nk_n}$$

$$= \sum_{k_1k_2\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)} a_{k_11} a_{k_22} \cdots a_{k_nn}$$

由定理 1.2，有 $D^{\mathrm{T}} = D$.

交换行列式的两行/列 (行列式的反称性)

性质 1.2 交换行列式的两行 (列)，行列式反号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

习惯上用 r (row) 表示行，c (column) 表示列.

[6] 把 D 的行列互换便得到 D^{T}.

[7] 由此性质，行列式关于行的性质，关于列皆成立.

证明性质 1.2 记上式左边行列式为 D，右边行列式为 D'. 由行列式定义，有

$$\begin{aligned}
D' &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\
&= -\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\
&= -D
\end{aligned}$$

推论 1.1 若行列式有两行元素对应相同，则行列式为零.

某行/列元素的公因子 (行列式的数乘性)

性质 1.3 行列式某行 (列) 元素的公因子可以提到行列式符号以外:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 记左边的行列式为 D'，右边的行列式为 D. 有

$$\begin{aligned}
D' =& \sum_{k_1\cdots k_i\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_n)} a_{1k_1}\cdots ca_{ik_i}\cdots a_{nk_n} \\
=& c\sum_{k_1\cdots k_i\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_n)} a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{ni_n} = cD.
\end{aligned}$$

推论 1.2 若行列式某行 (列) 的元素全为零，则行列式为零:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

8

推论 1.3 若行列式有两行 (列) 元素对应成比列，则行列式为零:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

[8]性质 1.3 的直接推论.

9 **性质 1.4(行列式的可加性)**

若行列式的某一行 (列) 中的元素都是两数之和，则此行列式可以按此行 (列) 拆分为两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明性质 1.4 简记 $\tau=\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)$. 由行列式的定义，有

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

强调：行列式不能作这种形式上的加法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是对上述性质的错误理解.

用途：将行列式裂开为两个行列式. 这是计算行列式的一个常用方法. 例如

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix}.$$

某行元素的倍数对应加到另一行

[9]结合性质 1.3 和推论 1.1.

性质 1.5 将行列式某行 (列) 元素的倍数对应加到另一行 (列)，行列式不变:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+cr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & a_{j2}+ca_{i2} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明性质 1.5 记左端的行列式为 D，右端的行列式为 D'. 由性质 1.4 和推论 1.3，有

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

行列式基本性质总结

规范性 单位行列式的值为 1.

转置性 行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T$.

反称性 交换两行 (列) 后，值变号.

数乘性 某行 (列) 乘 k 倍，值变 k 倍.

可加性 两式仅一行 (列) 不同可相加.

倍加不变性 某行 (列) 加上另一行 (列) 的 k 倍，值不变.

其中出镜率最高的三条性质：反称性 $(r_i \leftrightarrow r_j)$、数乘性 $(r_i \times k)$ 和倍加不变性 $(r_i + kr_j)$，可统称为**初等性质**.

怎么用：利用性质，化一般行列式为上或下三角行列式

行列式的三种变换

行列式有如下三种初等运算:

1. $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行和第 j 行交换
2. $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
3. $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

1. $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示第 i 列和第 j 列交换
2. $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
3. $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

上面的写法中，我们约定：把要改变的行（列），写在表达式的开头．比如，$r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

1. $r_1 + r_2$ ： 把 r_2 加到 r_1，被改变的将是 r_1.
2. $r_2 + r_1$ ： 把 r_1 加到 r_2，被改变的将是 r_2.

在利用行列式的性质时，下面两种说法是一样的：

1. 行列式第 i 行乘以 $\frac{1}{k}$ 倍 …… $r_i \times \frac{1}{k}$；
2. 行列式第 i 行除以 k 倍 …… $r_i \div k$.

在利用行列式的性质时，下面两种说法是一样的：

1. 第 i 行加上第 j 行的 $-k$ 倍 …… $r_i + (-k)r_j$；
2. 第 i 行减去第 j 行的 k 倍 …… $r_i - kr_j$.

注意此时第 i 行元素改变，而第 j 行元素保持不变.

符号说明

例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \div 3} -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

上三角行列式 主对角线下面都为零的行列式称为上三角行列式. 上三角行列式的值和相应的对角行列式的值相同：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角行列式 主对角线上面都为零的行列式称为下三角行列式. 下三角行列式的值和相应的对角行列式的值相同：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式和下三角行列式合称三角行列式.

行列式的重点是计算，应当在理解行列式的概念、熟练掌握行列式性质的基础上，正确地计算低阶行列式，会用恒等变形化行列式为上 (下) 三角形行列式，从而直接求其值.

例 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$.

1.4.2 四阶行列式的计算

四阶行列式的计算方法一

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & * & * & * \\ \boldsymbol{*} & * & * & * \\ \boldsymbol{*} & * & * & * \\ \boldsymbol{*} & * & * & * \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - kr_1} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & * & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{*} & * & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{*} & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i - kr_2} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ \mathbf{0} & b & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{*} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ \mathbf{0} & b & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & c & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & d \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

利用行列式的基本性质来计算行列式必须掌握!!

利用性质计算行列式

例 1.5 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解 由行列式的性质，有

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_1 + r_i} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48.$$

例 1.6 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解 记上述行列式为 D. 由行列式的性质，有

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 5r_1]{r_2 - r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 8r_2]{r_3 + 4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

(续)

$$D=\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&-2&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}-10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&-2&3\\0&0&4&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+2r_3}-10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=40.$$

例　计算 $D=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\1&2&3&4\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$

解：$D\xlongequal[\substack{r_4-r_1\\r_2\div 2}]{\substack{r_2-r_1\\r_3-3r_1}}2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&-1&-4&-6\\0&2&-1&-7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3+r_2}2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&-5\\0&0&-3&-9\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_4-r_3}2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&-5\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=24.$$

例　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}.$$

解：

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\4&1&2&4\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&-7&2&-4\\0&-15&2&-20\\0&1&1&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&-15&2&-20\\0&-7&2&-4\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&17&85\\0&0&9&45\end{vmatrix}=0.$$

注意，如果 $a_{11}\neq 1$，一般通过互换行（列）使 a_{11} 为 1，再进行计算.

$$\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\4&1&2&4\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$$

从这个例子可以看到，计算一般的数字行列式可以非常机械：

1. 把 a_{11} 调整为 1，用 r_i+kr_1 把 a_{11} 下方的数字变为 0.

2. 把 a_{22} 调整为 1，用 $r_i + kr_2$ 把 a_{22} 下方的数字变为 0.

3. 如此反复，总可以把行列式变为上三角行列式，得到计算结果.

更多的时候，需要我们观察各行（列）数字间的关系或规律，灵活运用行列式变换，使计算简便.

例 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -62.$

例 证明 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

解 左边 $= 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c_1 & -a_1 & -b_1 \\ c_2 & -a_2 & -b_2 \\ c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$
$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$ 右边.

1.4.3 n 阶行列式的计算

例 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$

解 将各列加入第 1 列，得：$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} =$
$[x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix} = [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}.$

例 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

小结：上式可简记为

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{2}$$

同样也有

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

结论(2)容易推广为：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ * & \boldsymbol{A}_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{A}_k \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_k|\,.$$

这在形式上与下三角行列式的结果是一致的．对上三角行列式的情形有类似结论．

例

$$\left|\begin{array}{cc:c:ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

1.5 行列式按行 (列) 展开

行列式按行 (列) 展开法则是计算行列式的一个工具．本节讨论这一法则．

计算行列式的另一个重要方式：高阶 $\Longrightarrow$ 低阶

复习与提高

复习． 将行列式化为三角行列式，并计算其值：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40.$$

1.5.1 行列式的展开式

三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.
\end{aligned}
$$

其中规定 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

代数余子式 **定义 1.6** 去掉行列式 $|(a_{ij})_{n\times n}|$ 中元素 a_{ij} 所在的行和列，余下的元素 (相对位置不变) 构成的 $n-1$ 阶行列式:

$$
M_{ij} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}, \ 1 \le i, j \le n
$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式** (minor determinant, minor); 称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式** (adjunct 或 cofactor).

如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的余子式为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的代数余子式为 $A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$.

(代数) 余子式和元素的位置有关，和元素的大小正负无关.

行列式按行 (列) 展开法则

定理 1.3 行列式等于它的任一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积之和:

$$
D = |(a_{ij})_{n\times n}| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \ 1 \le i \le n \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \ 1 \le j \le n \end{cases}
$$

证明 分三步证明定理.

(1) 设

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
0 & \cdots & 0 & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

由定义，有

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{nn} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1})} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} \\
&= a_{nn} M_{nn} \\
&= a_{nn} (-1)^{n+n} M_{nn} \\
&= a_{nn} A_{nn}
\end{aligned}
$$

(2) 设

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

将第 i 行依次与第 $i+1, i+2, \cdots, n$ 行交换，第 j 列依次与第 $j+1, j+2, \cdots, n$ 列交换，再由第 (1) 步的结论，有

$$
\begin{aligned}
D =& (-1)^{(n-i)+(n-j)} \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij}
\end{vmatrix} \\
=& a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \\
=& a_{ij} A_{ij}
\end{aligned}
$$

(3) 一般地，由性质 1.4 和第 (2) 步的结论，有

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
=&a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}
\end{aligned}
$$

由于 $D=D^{\mathrm{T}}$，因此也成立

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\ 1\le j\le n$$

例　计算行列式 $A=\begin{vmatrix} 12 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -6 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{vmatrix} 12 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -6 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 12 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -6 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 12 & 5 & 6 \\ -2 & -3 & -6 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\det(A)=&\,12\times(-3\times 3-(-6)\times(-7))-5\times(-2\times 3-(-6)\times 5)\\
&+6\times((-2)\times(-7)-(-3)\times 5)\\
=&-558.
\end{aligned}
$$

例　将行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开计算它的值.

例　将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 分别按第 3 行和第 3 列展开并计算它的值.

应用定理 1.3 来计算行列式时不一定能简化计算，因为把一个 n 阶行列式的计算换成 n 个 $(n-1)$ 阶行列式的计算并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多的 0 时，应用上述公式才有意义.

但这个公式在理论上是重要的.

例　对上面的行列式，我们也可以利用行列式的性质，先作简化再展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2.$$

例 计算 $D_4=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解:

$$D_4=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\begin{vmatrix}1&0&5\\6&1&0\\4&3&5\end{vmatrix} - 0 + 0 - 4\begin{vmatrix}7&1&0\\2&6&1\\8&4&3\end{vmatrix}\\
&= 2\left[\begin{vmatrix}1&0\\3&5\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}6&1\\4&3\end{vmatrix}\right] - 4\left[7\begin{vmatrix}6&1\\4&3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2&1\\8&3\end{vmatrix}\right]\\
&= 2[5+5(18-4)] - 4[7(18-4)-(6-8)] = -250.
\end{aligned}
$$

一点思考 行列式的定义反映以下特点：行列式展开式中，每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的 n 个元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.

特点：任一元素都不能与其同一行或同一列的元素相乘.

为什么？比如，a_{11} 只能与 M_{11} 相乘，但是 M_{11} 中是不会出现与 a_{11} 在同一行或同一列的元素的.

由此我们也就容易明白，展开式恰恰就是由所有“位于不同行和不同列的 n 个元素”的乘积组成. 而由排列组合的知识，这种所有可能的组合共有 $n!$ 项.

行列式的计算

例 计算下三角行列式 $D_n = \begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，其中未写出者是零.

解:

$$
\begin{aligned}
D_n &= a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&&&\\a_{32}&a_{33}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&&&\\a_{43}&a_{44}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\\
&= \cdots = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.
\end{aligned}
$$

例 计算反下三角行列式 $D_n = \begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&a_{2n}\\&\iddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$.

解 将 D_n 按第一行展开，可得

$$D_n = (-1)^{1+n}a_{1n}D_{n-1} = (-1)^{n-1}a_{1n}D_{n-1}.$$

反复使用这个结论可得：

$$
\begin{aligned}
D_n &= (-1)^{n-1}a_{1n}D_{n-1} = (-1)^{n-1}a_{1n}(-1)^{n-2}a_{2,n-1}D_{n-2}\\
&= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}.
\end{aligned}
$$

例 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

解：将第一行乘以 (-1) 依次加到其余各行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

再将各列都加到第一列上，得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

在上述解法中出现了"爪形"行列式．它的解法是固定的．

例 计算行列式（假定 $a_i \neq 0$）：

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

解：分别将第 $i\,(i=2,\cdots,n+1)$ 列乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 列，得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \Big(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\Big).$$

例　求 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

四阶行列式的计算方法二

$$\begin{vmatrix} * & * & \boldsymbol{*} & * \\ * & * & \boldsymbol{a} & * \\ * & * & \boldsymbol{*} & * \\ * & * & \boldsymbol{*} & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & \mathbf{0} & * \\ \boldsymbol{*} & \boldsymbol{*} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{*} \\ * & * & \mathbf{0} & * \\ * & * & \mathbf{0} & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}}\begin{vmatrix} * & * & * \\ \boldsymbol{*} & \boldsymbol{*} & \boldsymbol{b} \\ * & * & * \end{vmatrix}\xrightarrow{\text{运算}}\begin{vmatrix} * & * & \boldsymbol{*} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ * & * & \boldsymbol{*} \end{vmatrix}\xrightarrow{\text{展开}}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

例 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解 $D \overset{c_1-2c_3}{\underset{c_4+c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160.$

高阶行列式的计算方法

利用行列式性质，高阶行列式有两种计算方法：

1. 三角法：从左到右，逐步变成上三角行列式
2. 降阶法：从高到低，展开以降低行列式阶数

我们推荐使用降阶法，因为它更加灵活方便.

计算方法 1：利用行列变换，将行列式变为三角形，再将对角元连乘.

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \end{vmatrix} = \frac{33}{2}.$

计算方法 2：将某一行（列）尽可能多的元素变成零，再按该行（列）展开.

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 & -3 \\ -4 & 7 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & -8 & -10 & -5 \end{vmatrix}$.

解 $D \overset{\text{列变换}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 & -3 \\ 4 & -5 & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 4 & -5 & -18 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 0 & 39 & 6 \\ 0 & -26 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & 6 \\ -26 & -8 \end{vmatrix} = -156.$

计算方法 3：加边法.

例 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$.

解 若 $n=1$，则 $D_1 = x_1 - m$. 以下只需考虑 $n \geqslant 2$. 若 $m=0$，则 $D_n = 0$，以下只需考虑 $m \neq 0$ 的情况：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{m} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

因此，当 $m \neq 0$ 时，

$$D_n = (-m)^n \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{m}\right).$$

例 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

解：方法一. 行列变换，化为上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{r_2 + r_1, r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-19) = 57.$$

方法二. 逐步降阶:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_3} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 57.$$

例 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}r_3} (-1)^{3+4} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-4r_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & 0 & -25 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 10.$$

1.5.2 行列式展开式的使用

由展开式得到行列式

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D$$

$$\Longrightarrow uA_{21} + vA_{22} + wA_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

一行 (列) 元素与某一行 (列) 元素的代数余子式乘积之和

推论 1.4 行列式某一行 (列) 的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于零:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq n$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\ i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq n$$

证明推论 1.4 只证明第一个等式，第二个等式可类似地证明. 考虑行列式

$$D = \begin{array}{|cccc|l} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & j \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array}$$

显然 $D = 0$.

另一方面，将 D 按第 j 行展开:

$$D = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

于是 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j$.

性质 1.6 一行 (列) 的元素与某一行元素的代数余子式乘积之为:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

[10]

例如

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24} = 0$$

事实上，下述行列式按第 2 行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24}$$

而该行列式有两行相同，其值为零.

行列式展开式的使用：一种典型例题

例 设有四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

计算 (1) $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$, (2) $M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41}$.

解: (1) 将原行列式中的第一行元素均用 1 替换，所得行列式第一行元素的代数余子式与原行列式第一行对应元素的代数余子式相同.

从而 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

[10] $D = |(a_{ij})_{n\times n}|$，结合定理 1.3 和推论 1.4 可此性质.

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-2&2&0&2\\1&-1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-5\\-2&2&2\\1&-1&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix}1&2&-5\\-2&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=4.$$

(2) 由于 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$，类似 (1)

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\0&-1&0&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-2r_3}(-1)\begin{vmatrix}-1&0&-5\\-1&0&-5\\1&1&3\end{vmatrix}=0.$$

范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

例 1.7 设 n 为大于 1 的整数，证明

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

证明例 1.7 对范德蒙德行列式 D_n 的阶 n 用数学归纳法.

(1) 若 $n=2$，则

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\a_1&a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$$

结论成立.

(2) 假设结论对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，即

$$D_{n-1}=\prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j)$$

由行列式的性质，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-2}&a_2^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{r_i-a_nr_{i-1}}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\a_1-a_n&a_2-a_n&\cdots&a_{n-1}-a_n&0\\a_1^2-a_1a_n&a_2^2-a_2a_n&\cdots&a_{n-1}^2-a_{n-1}a_n&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_1^{n-2}-a_1^{n-3}a_n&a_2^{n-2}-a_2^{n-3}a_n&\cdots&a_{n-1}^{n-2}-a_{n-1}^{n-3}a_n&0\\a_1^{n-1}-a_1^{n-2}a_n&a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_n&\cdots&a_{n-1}^{n-1}-a_{n-1}^{n-2}a_n&0\end{vmatrix}$$

将 D_n 按第 n 列展开，得到

$$
\begin{aligned}
D_n &= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1^2-a_1a_n & a_2^2-a_2a_n & \cdots & a_{n-1}^2-a_{n-1}a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}-a_1^{n-2}a_n & a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_{n-1}^{n-2}a_n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})D_{n-1}
\end{aligned}
$$

故:

$$D_n = (a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})D_{n-1}$$

及归纳假设:

$$D_{n-1} = \prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j)$$

所以

$$
\begin{aligned}
D_n &= (a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j) \\
&= \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)
\end{aligned}
$$

故结论对于 n 阶范德蒙德行列式也成立.

根据数学归纳法，结论对于任意阶范德蒙德行列式成立.

小结

- 行列式按行 (列) 展开法则：位置很重要.
- 作用： n 阶行列式 $\Longrightarrow n$ 个 $n-1$ 阶行列式，实现了从高阶转变为低阶. (但是计算量仍然较大).
- **初等性质 + 行列式按行 (列) 展开法则**，ta 不香么.
- **范德蒙德行列式**，结构和结论都必须要记住.

1.6 克拉默法则

本节利用行列式，证明线性方程组的克拉默法则.

克拉默 (Cramer) 法则 **定理 1.4** 若线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组有唯一的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

[11] **克拉默法则的证明** (1) 先证明 $x_1=\frac{D_1}{D}$, $x_2=\frac{D_2}{D}$, $\cdots$, $x_n=\frac{D_n}{D}$ 为方程组的解. 将其代入方程组的第 i 个方程的左端，有

$$\begin{aligned}
&a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}\\
=&\frac{1}{D}(a_{i1}D_1+a_{i2}D_2+\cdots+a_{in}D_n)\\
=&\frac{1}{D}\big(a_{i1}(b_1A_{11}+\cdots+b_iA_{i1}+\cdots+b_nA_{n1})+\cdots\\
&+a_{in}(b_1A_{1n}+\cdots+b_iA_{in}+\cdots+b_nA_{nn})\big)\\
=&\frac{1}{D}\big(b_1(a_{i1}A_{11}+\cdots+a_{in}A_{1n})+\cdots+b_i(a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in})\\
&+\cdots+b_n(a_{i1}A_{n1}+\cdots+a_{in}A_{nn})\big)\\
=&\frac{1}{D}(b_1\cdot 0+\cdots+b_i\cdot D+\cdots+b_n\cdot 0)=b_i,\ i=1,2,\cdots,n
\end{aligned}$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

是方程组的解.

(2) 再证明解的唯一性. 需要证明: 若

$$x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$$

为方程组的解，则

$$c_1=\frac{D_1}{D},\ c_2=\frac{D_2}{D}\cdots,c_n=\frac{D_n}{D}$$

[11]直接应用克拉默法则时，注意线性方程组需满足如下两个条件:
(1) 方程组中方程的个数与未知量个数相等;
(2) 系数行列式不等于零.

(a) 将 $x_i=c_i, i=1,\cdots,n$ 代入方程组，得如下 n 个等式:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}c_1+\cdots+a_{1i}c_i+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ a_{21}c_1+\cdots+a_{2i}c_i+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}c_1+\cdots+a_{ni}c_i+\cdots+a_{nn}c_n=b_n \end{array}\right.$$

(b) 对于 $j=1,2,\cdots,n$，在第 j 个式子两边同乘以 A_{ji}，再将第 1 到第 n 个等式相加，得

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1i}+a_{21}A_{2i}+\cdots+a_{n1}A_{ni})c_1+\cdots \\ +&(a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni})c_i+\cdots \\ +&(a_{1n}A_{1i}+a_{2n}A_{2i}+\cdots+a_{nn}A_{ni})c_n=b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots+b_nA_{ni} \end{aligned}$$

因为

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\left\{\begin{array}{ll} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{array}\right.$$

所以得到 $c_iD=D_i$.

(c) 又 $D\neq 0$，故

$$c_i=\frac{D_i}{D},\ i=1,2\cdots n$$

克拉默法则的局限

直接应用克拉默法则时，注意线性方程组需满足如下两个条件:

1. 方程组中方程的个数与未知量个数相等.
2. 系数行列式不等于零.

克拉默法则从理论上完美地解决了一少部分线性方程组的求解问题，但因其中行列式计算量太大，实际求解并不用此方法．高斯消元法仍然是行之有效的简单解法．

例 1.8 求解线性方程组

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1+x_2-5x_3+x_4&=8 \\ x_1-3x_2\qquad-6x_4&=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4&=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4&=0 \end{aligned}\right.$$

解 方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1-2r_2]{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+2c_2]{c_3+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}=27$$

由克拉默法则，方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27,\ D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = -4,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = -1,\ x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$$

例　$1 = 4, 2 = 8, 3 = 24, 4 = ?$

分析：视为数列问题：

$$4, \quad 8, \quad 24, \quad ?$$

或者：求过点 $(1,4),(2,8),(3,24)$ 的曲线方程.

解：设曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1,4),(2,8),(3,24)$．得

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 8 \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 24 \end{cases}$$

由高斯消元法得

$$\lambda_0 = 12, \quad \lambda_1 = -14, \quad \lambda_2 = 6.$$

故 $y = 12 - 14x + 6x^2$，得 $y(4) = 52$.

思考：数列前 3 项依次为 4, 8, 24，第 4 项能否取别的值？甚至是任意数值?!

事实上，令第 4 项的值为任意常数 c，设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4),(2,8),(3,24),(4,c)$．得线性方程组：

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8 \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24 \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c \end{cases}$$

它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$$

是范德蒙行列式，且每个 a_i 都不相同，故 $D \neq 0$．由克拉默法则，方程组必有唯一解.

数列问题：

$$4, \quad 8, \quad 24, \quad ?$$

答案可以是任意的数！

☛ 一般地，过 $n+1$ 个 x 坐标不同的点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{n+1},y_{n+1})$，可以唯一地确定一个 n 次曲线方程

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n$$

但是，满足这 $n+1$ 个已知点的多项式有无穷多个！