线性代数

绪论 课程说明

谭 兵 副教授

西南大学数学与统计学院

2025 年 2 月 27 日

目录

目录

什么是线性 (Linear)

形如 $a\color{red}{x}+b\color{red}{y}=c$ 的方程 (a, b, c 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 x, y 之间呈现为线性关系.

什么是线性 (Linear)

形如 $a{\color{red}x}+b{\color{red}y}=c$ 的方程 (a, b, c 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 x, y 之间呈现为线性关系. 方程 $a{\color{red}x}+b{\color{red}y}=c$ 称为线性方程.

什么是线性 (Linear)

形如 $a\textcolor{red}{x} + b\textcolor{red}{y} = c$ 的方程 (a, b, c 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 x, y 之间呈现为线性关系. 方程 $a\textcolor{red}{x} + b\textcolor{red}{y} = c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 n 个变量的一次方程

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = b$$

称为线性方程,

什么是线性 (Linear)

形如 $ax+by=c$ 的方程 (a, b, c 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 x, y 之间呈现为线性关系. 方程 $ax+by=c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 n 个变量的一次方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量,

什么是线性 (Linear)

形如 $ax + by = c$ 的方程 (a, b, c 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 x, y 之间呈现为线性关系. 方程 $ax + by = c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 n 个变量的一次方程

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量, $k_1, k_2, \cdots, k_n, b$ 是常数.

什么是线性 (Linear)

形如 $ax + by = c$ 的方程 (a, b, c 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 x, y 之间呈现为线性关系. 方程 $ax + by = c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 n 个变量的一次方程

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量, $k_1, k_2, \cdots, k_n, b$ 是常数. 此时变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间呈现为线性关系.

什么是线性 (Linear)

形如 $ax + by = c$ 的方程 (a, b, c 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 x, y 之间呈现为线性关系. 方程 $ax + by = c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 n 个变量的一次方程

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量, $k_1, k_2, \cdots, k_n$, b 是常数. 此时变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间呈现为线性关系.

非线性关系的例子:

$$y = 2x^2 + 3, \quad y = 2\sqrt{x} + 3, \quad y = 2\sin x + 3, \quad xy = 1,$$

上述 x, y 之间为非线性关系.

什么是线性代数

线性代数 (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题.

什么是线性代数

线性代数 (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题. 它的核心内容是研究 (1) 有限维线性空间的结构, (2) 线性空间的线性变换.

什么是线性代数

线性代数 (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题. 它的核心内容是研究 (1) 有限维线性空间的结构, (2) 线性空间的线性变换.

本课程介绍线性代数的基础知识, 核心话题是: 线性方程组的求解.

高斯消元法

一般地, 将含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

该方程组中含有 m 个方程.

高斯消元法

一般地, 将含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

该方程组中含有 m 个方程. 其中 a_{ij} 是系数, b_i 是常数项, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

高斯消元法

一般地, 将含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases} \tag{1}
$$

该方程组中含有 m 个方程. 其中 a_{ij} 是系数, b_i 是常数项, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 系数 a_{ij} 有两个下标, 下标 i, j 分别表示 a_{ij} 在第 i 行、第 j 列.

高斯消元法

一般地, 将含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

该方程组中含有 m 个方程. 其中 a_{ij} 是系数, b_i 是常数项, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 系数 a_{ij} 有两个下标, 下标 i, j 分别表示 a_{ij} 在第 i 行、第 j 列.

高斯消元法是求解线性方程组的经典方法, 简单实用, 永不过时.

例 0.1

求曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

例 0.1

求曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

解: 代入三点, 得到一个关于 λ_0, λ_1, λ_2 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0+\ \ \lambda_1+\ \ \lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases}$$

例 0.1

求曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

解: 代入三点, 得到一个关于 λ_0, λ_1, λ_2 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases}$$

使用高斯消元法. 先化为阶梯形:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ \lambda_1+5\lambda_2=-2. \end{cases}$$

例 0.1

求曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

解: 代入三点, 得到一个关于 λ_0, λ_1, λ_2 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases}$$

使用高斯消元法. 先化为阶梯形:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ \lambda_1+5\lambda_2=-2. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ 2\lambda_2=-3. \end{cases}$$

例 0.1

求曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1),(2,2),(3,0)$.

解: 代入三点, 得到一个关于 λ_0, λ_1, λ_2 的线性方程组:

$$\begin{cases}\lambda_0+\ \lambda_1+\ \lambda_2=1,\\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2,\\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0.\end{cases}$$

使用高斯消元法. 先化为阶梯形:

$$\begin{cases}\lambda_0+\ \lambda_1+\ \lambda_2=1,\\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2,\\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0.\end{cases}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\ \lambda_2=\ 1,\\ \qquad\ \lambda_1+3\lambda_2=\ 1,\\ \qquad\ \lambda_1+5\lambda_2=-2.\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\ \lambda_2=\ 1,\\ \qquad\ \lambda_1+3\lambda_2=\ 1,\\ \qquad\qquad 2\lambda_2=-3.\end{cases}\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\ \lambda_2=\ 1,\\ \qquad\ \lambda_1+3\lambda_2=\ 1,\\ \qquad\qquad \lambda_2=-\frac{3}{2}.\end{cases}$$

再回代:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\ \ \lambda_2= & 1, \\ \qquad\ \ \lambda_1+3\lambda_2= & 1, \\ \qquad\qquad\quad \lambda_2= & -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1 \qquad = & \frac{5}{2}, \\ \qquad\ \ \lambda_1 \qquad = & \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad\quad \lambda_2= & -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

再回代:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \ \ \lambda_2 = \ \ \ 1, \\ \qquad\ \ \lambda_1 + 3\lambda_2 = \ \ \ 1, \\ \qquad\qquad\quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - 3r_3} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 \qquad = \frac{5}{2}, \\ \qquad\ \ \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad\quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{cases} \lambda_0 \qquad\qquad = -3, \\ \qquad \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

再回代:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\ \ \lambda_2= & 1, \\ \qquad\ \ \lambda_1+3\lambda_2= & 1, \\ \qquad\qquad\quad \lambda_2= & -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1 & =\frac{5}{2}, \\ \qquad\ \lambda_1 & =\frac{11}{2}, \\ \qquad\quad \lambda_2 & =-\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{cases} \lambda_0 & =-3, \\ \quad \lambda_1 & =\frac{11}{2}, \\ \qquad \lambda_2 & =-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

即所求曲线方程为 $y=-3+\frac{11}{2}x-\frac{3}{2}x^2$. □

再回代:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\ \ \lambda_2 = \ \ 1, \\ \qquad \lambda_1+3\lambda_2 = \ \ 1, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1 \qquad = \frac{5}{2}, \\ \qquad \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{cases} \lambda_0 \qquad\qquad = -3, \\ \qquad \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

即所求曲线方程为 $y=-3+\frac{11}{2}x-\frac{3}{2}x^2$. □

以上就是**高斯消元法**, 主要是两个步骤: 化为阶梯形, 回代.

围绕线性方程组这个主题, 课程还将讨论以下三个概念: 行列式, 矩阵, 向量.

围绕线性方程组这个主题, 课程还将讨论以下三个概念: 行列式, 矩阵, 向量.

这是求解线性方程组的三个有效工具.

围绕线性方程组这个主题, 课程还将讨论以下三个概念: 行列式, 矩阵, 向量.

这是求解线性方程组的三个有效工具. 下面我们简单说明这三个工具出现的原因.

高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算.

高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数,

高斯消元法 ⟶ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right)$$

高斯消元法 ⟶ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3\div 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3\div 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \div 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

线性方程组等同于矩阵方程

记

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这里 A 记录的是系数, b 记录的是常数.

线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数. 引入矩阵乘法: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 各行的向量与 $\boldsymbol{x}$ 做内积.

线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数. 引入矩阵乘法: $\boldsymbol{Ax}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 各行的向量与 $\boldsymbol{x}$ 做内积. 例如 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{x}$ 做内积, 有

$$(1,2,4)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1+2x_2+4x_3.$$

线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数. 引入矩阵乘法: $\boldsymbol{Ax}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 各行的向量与 $\boldsymbol{x}$ 做内积. 例如 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{x}$ 做内积, 有

$$(1,2,4)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1+2x_2+4x_3.$$

则

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_1+2x_2+4x_3\\x_1+3x_2+9x_3\end{pmatrix}.$$

从而线性方程组可表达为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}.$$

从而线性方程组可表达为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}.$$

而这本质上是一个矩阵方程.

从而线性方程组可表达为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

而这本质上是一个矩阵方程.

如果我们能一般地解决矩阵方程的求解, 事实上就完成了线性方程组的求解.

线性方程组求解等同于向量组的线性表示问题

把前述线性方程组记为

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

线性方程组求解等同于向量组的线性表示问题

把前述线性方程组记为

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则“线性方程组”等同于“向量的线性表示”问题.

线性方程组求解等同于向量组的线性表示问题

把前述线性方程组记为

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则 “线性方程组” 等同于 “向量的线性表示” 问题. 更重要的是, 用向量的观点, 可以几何地解释线性方程组解的结构问题.

线性方程组与几何联系

从几何角度考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

线性方程组与几何联系

从几何角度考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

每一个方程均对应于平面上的一条直线.

线性方程组与几何联系

从几何角度考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

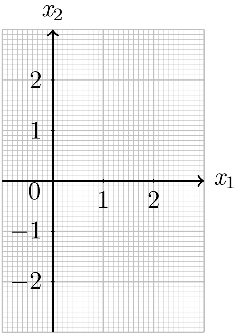
每一个方程均对应于平面上的一条直线. 求解方程组, 相当于求两条直线的交点.

考虑以下三个不同的线性方程组:

$$\text{(i)}\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1-x_2=2. \end{cases} \qquad \text{(ii)}\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1+x_2=1. \end{cases} \qquad \text{(iii)}\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ -x_1-x_2=-2. \end{cases}$$

考虑以下三个不同的线性方程组:

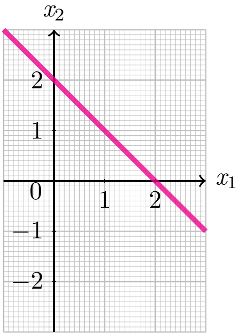
$$(\mathrm{i})\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad (\mathrm{ii})\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad (\mathrm{iii})\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$



(a) 相交: 唯一解

考虑以下三个不同的线性方程组:

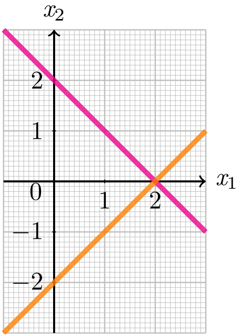
$$(\text{i}) \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad (\text{ii}) \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad (\text{iii}) \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$



(a) 相交: 唯一解

考虑以下三个不同的线性方程组:

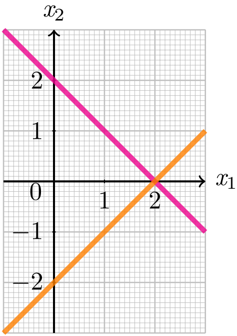
$$\text{(i)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$



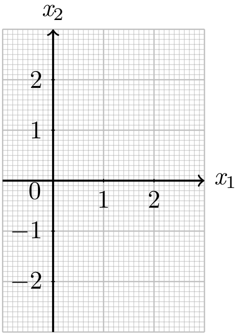
(a) 相交: 唯一解

考虑以下三个不同的线性方程组:

$$(\mathrm{i})\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad (\mathrm{ii})\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad (\mathrm{iii})\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$



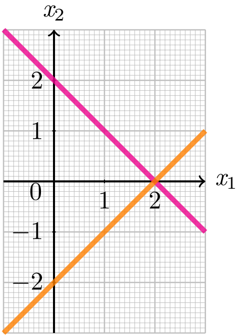
(a) 相交: 唯一解



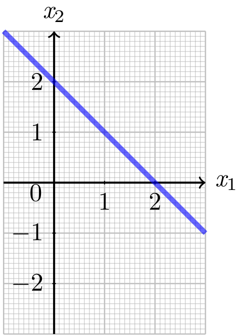
(b) 平行: 无解

考虑以下三个不同的线性方程组:

$$
\text{(i)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}
\qquad
\text{(ii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}
\qquad
\text{(iii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}
$$



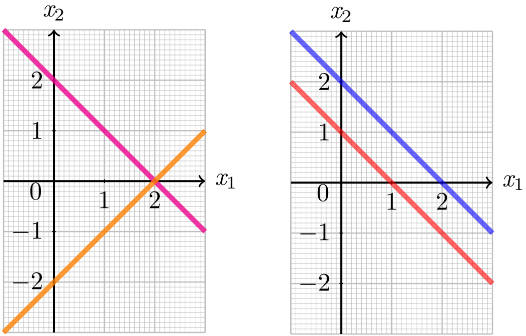
(a) 相交: 唯一解



(b) 平行: 无解

考虑以下三个不同的线性方程组:

$$
\text{(i)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}
\qquad
\text{(ii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}
\qquad
\text{(iii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}
$$

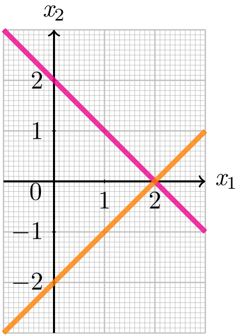


(a) 相交: 唯一解

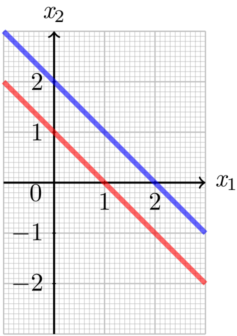
(b) 平行: 无解

考虑以下三个不同的线性方程组:

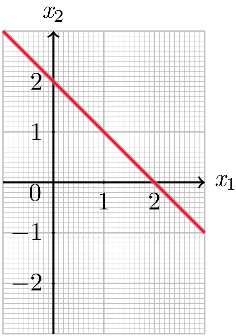
$$\text{(i)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$



(a) 相交: 唯一解



(b) 平行: 无解



(c) 重合: 无穷多解

两条直线之间的关系有三种情况：相交、平行、重合.

两条直线之间的关系有三种情况: 相交、平行、重合. 相应地:

一个线性方程组的解, 有下列三种情况:

(1) 有唯一解;

(2) 无解;

(3) 有无穷多解.

两条直线之间的关系有三种情况: 相交、平行、重合. 相应地:

一个线性方程组的解, 有下列三种情况:

(1) 有唯一解;

(2) 无解;

(3) 有无穷多解.

这个结论将在第 3 章进行一般讨论.

目录

线性代数的地位

- 线性代数是处理矩阵和线性空间的数学分支;

线性代数的地位

- 线性代数是处理矩阵和线性空间的数学分支;
- 自然科学及工程技术的许多领域都用到线性代数的知识;

线性代数的地位

- 线性代数是处理矩阵和线性空间的数学分支;
- 自然科学及工程技术的许多领域都用到线性代数的知识;
- 现代经济及管理科学大量应用线性代数的内容;

线性代数的地位

- 线性代数是处理矩阵和线性空间的数学分支;
- 自然科学及工程技术的许多领域都用到线性代数的知识;
- 现代经济及管理科学大量应用线性代数的内容;
- 线性代数为数值计算理论基础的强有力的数学工具;

线性代数的地位

- 线性代数是处理矩阵和线性空间的数学分支;
- 自然科学及工程技术的许多领域都用到线性代数的知识;
- 现代经济及管理科学大量应用线性代数的内容;
- 线性代数为数值计算理论基础的强有力的数学工具;
- 线性代数是高等院校理工，经济及管理类等专业学生的一门必修课.

线性代数的特点

- 高等数学课程讨论函数的解析性，即连，导数和积分，而线性代数讨论代数对象的线性关，即相，数乘和线性相关性等；

线性代数的特点

- 高等数学课程讨论函数的解析性，即连，导数和积分，而线性代数讨论代数对象的线性关，即相，数乘和线性相关性等；
- 线性代数具有较强的抽象性和逻辑，有助于培养数学思维能力；

线性代数的特点

- 高等数学课程讨论函数的解析性，即连，导数和积分，而线性代数讨论代数对象的线性关，即相，数乘和线性相关性等；
- 线性代数具有较强的抽象性和逻辑，有助于培养数学思维能力；
- 线性代数课程相对独，大部分内容只需以高中数学知识为基础；

目录

本门课程的主要内容

线性代数课程所讨论的核心问题是线性方程组的求解、矩阵可对角化判定和二次型的化简．针对要解决的问题，从知识准备的角度首先介绍行列式、矩阵和向量等基础知识作为课程的基础内容，循着知识发展的轨迹，再逐一介绍线性代数课程三大问题，形成基础知识 + 问题解决 + 应用的结构框架．

知识模块顺序及关系图		
基础篇（矩阵代数）	**问题篇（核心问题）**	**应用**
矩阵	线性方程组求解问题	
行列式	矩阵对角化判定问题	
向量	二次型化标准形问题	

目录

线性代数有什么用？

线性代数学什么？

多元一次方程组的解法、解空间及其变换，包括：

- 矩阵、行列式、多维向量空间

线性代数有什么用？

线性代数学什么？

多元一次方程组的解法、解空间及其变换，包括：

- 矩阵、行列式、多维向量空间
- 特征值和特征向量、二次型及其标准形

线性代数有什么用？

线性代数学什么？

多元一次方程组的解法、解空间及其变换，包括：

- 矩阵、行列式、多维向量空间
- 特征值和特征向量、二次型及其标准形
- 线性空间和线性变换等（选学）

线性代数有什么用？

线性代数学什么？

多元一次方程组的解法、解空间及其变换，包括：

- 矩阵、行列式、多维向量空间
- 特征值和特征向量、二次型及其标准形
- 线性空间和线性变换等（选学）

线性代数有什么用?

线性代数学什么?

多元一次方程组的解法、解空间及其变换，包括:

- 矩阵、行列式、多维向量空间
- 特征值和特征向量、二次型及其标准形
- 线性空间和线性变换等（选学）

线性代数有什么用?

- 经济学，例：1973 年、1975 诺奖

线性代数有什么用？

线性代数学什么？

多元一次方程组的解法、解空间及其变换，包括：

- 矩阵、行列式、多维向量空间
- 特征值和特征向量、二次型及其标准形
- 线性空间和线性变换等（选学）

线性代数有什么用？

- 经济学，例：1973 年、1975 诺奖
- IT 行业，例：谷歌搜索引擎

线性代数有什么用？

线性代数学什么？

多元一次方程组的解法、解空间及其变换，包括：

- 矩阵、行列式、多维向量空间
- 特征值和特征向量、二次型及其标准形
- 线性空间和线性变换等（选学）

线性代数有什么用？

- 经济学，例：1973 年、1975 诺奖
- IT 行业，例：谷歌搜索引擎
- 图形处理

线性代数有什么用？

线性代数学什么？

多元一次方程组的解法、解空间及其变换，包括：

- 矩阵、行列式、多维向量空间
- 特征值和特征向量、二次型及其标准形
- 线性空间和线性变换等（选学）

线性代数有什么用？

- 经济学，例：1973 年、1975 诺奖
- IT 行业，例：谷歌搜索引擎
- 图形处理
- 复杂网络、大数据分析……

列昂惕夫（Wassily Leontief），哈佛大学教授，1949 年用计算机计算出了由美国统计局的 25 万条经济数据所组成的 42 个未知数的 42 个方程的方程组，他打开了研究经济数学模型的新时代的大门。这些模型通常都是线性的，也就是说，它们是用线性方程组来描述的，被称为列昂惕夫“投入-产出”模型。列昂惕夫因此获得了 1973 年的诺贝尔经济学奖。

线性代数的应用

配平化学方程式

例 配平下面的化学方程式

$$\underline{x}\mathrm{C_2H_6} + \underline{y}\mathrm{O_2} \to \underline{z}\mathrm{CO_2} + \underline{w}\mathrm{H_2O}$$

线性代数的应用

配平化学方程式

例 配平下面的化学方程式

$$\underline{x}C_2H_6 + \underline{y}O_2 \to \underline{z}CO_2 + \underline{w}H_2O$$

解 需要解决下面的线性方程组

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ 6x - 2w = 0 \\ 2y - 2z - w = 0. \end{cases}$$

线性代数的应用

配平化学方程式

例 配平下面的化学方程式

$$\underline{x}\mathrm{C_2H_6} + \underline{y}\mathrm{O_2} \to \underline{z}\mathrm{CO_2} + \underline{w}\mathrm{H_2O}$$

解 需要解决下面的线性方程组

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ 6x - 2w = 0 \\ 2y - 2z - w = 0. \end{cases}$$

解得 $x = \frac{1}{3}w$，$y = \frac{7}{6}w$，$z = \frac{2}{3}w$，取 $w = 6$，得其中一个解为 $x = 2, y = 7, z = 4, w = 6$.

为什么要学习线性代数

- 拿学分；
- 考研：必考科目；
- 提高科研能力：机器学习基础；
- 找工作：图像处理，运筹学，线性规划
- 线性代数的应用领域几乎可以涵盖所有的工程技术领域。

目录

课终考核包括《线性代数》第一章到第四章内容，采取闭卷笔试的方式，统一命题，全校统考。

- 总成绩评定
  总评成绩 = 平时成绩 * 30%+ 考试成绩 * 70%
- 平时成绩评定
  1. 平时成绩 = 考勤 * 10%+ 课堂表现 * 10%+ 平时作业 * 10%
  2. 平时成绩评价标准

考核环节	A 90-100	B 80-89	C 70-79	D 60-69	E <60
考勤	按时到课率 100%	全勤但**迟到一次**	全勤但**迟到两次**	**无故缺勤一次**	**无故缺勤两次及以上**
课堂表现	严格遵守课堂纪律，积极主动参与课堂讨论，按要求完成课堂练习且正确率高。	遵守课堂纪律，经常参与课堂讨论，按要求完成课堂练习且正确率较高。	比较遵守课堂纪律，较少参与课堂讨论，按要求完成课堂练习且有一定正确率。	比较遵守课堂纪律，偶尔参与课堂讨论，按要求基本完成课堂练习且基本正确。	不太遵守课堂纪律，不参与课堂讨论，未按要求完成课堂练习或正确率低。
平时作业	1、每次作业都认真完成并按时提交；2、每次作业格式工整，正确率 80% 以上。	1、每次都按时完成作业并提交；2、每次作业格式工整，正确率 60% 以上。	1、除一次作业外都按时完成并提交；2、作业格式基本工整，平均正确率在 60% 以上。	1、两次及以上未按时完成或提交作业；2、作业平均正确率 60% 以下。	1、两次及以上未完成作业或未提交；2、每次作业完成情况不好，平均正确率 50% 以下。

课堂表现

平时成绩满分 300 分，考勤 100 分，课堂表现 100 分，平时成绩 100 分。

- 上课坐在前三排 10 次及以上的同学，课堂表现满分;

课堂表现

平时成绩满分 300 分，考勤 100 分，课堂表现 100 分，平时成绩 100 分。

- 上课坐在前三排 10 次及以上的同学，课堂表现满分;
- 回答问题错误 1 次，课堂表现扣 10 分;

课堂表现

平时成绩满分 300 分，考勤 100 分，课堂表现 100 分，平时成绩 100 分。

- 上课坐在前三排 10 次及以上的同学，课堂表现满分；
- 回答问题错误 1 次，课堂表现扣 10 分；
- 回答问题正确 1 次，课堂表现加 10 分；

课堂表现

平时成绩满分 300 分，考勤 100 分，课堂表现 100 分，平时成绩 100 分。

- 上课坐在前三排 10 次及以上的同学，课堂表现满分;
- 回答问题错误 1 次，课堂表现扣 10 分;
- 回答问题正确 1 次，课堂表现加 10 分;
- 捣乱课堂教学秩序 1 次（比如上课打游戏，睡觉），课堂表现扣 20 分。

目录

如何学

- 了解课程问题，对课程框架有初步了解；

如何学

- 了解课程问题，对课程框架有初步了解;
- 本门课程上课 48 学时，每周一次 3 学时。同学们投入的时间至少应做到 1:1;

如何学

- 了解课程问题，对课程框架有初步了解；
- 本门课程上课 48 学时，每周一次 3 学时。同学们投入的时间至少应做到 1:1；
- 上课认真听讲，积极思考，课后认真完成作业；

如何学

- 了解课程问题，对课程框架有初步了解；
- 本门课程上课 48 学时，每周一次 3 学时。同学们投入的时间至少应做到 1:1；
- 上课认真听讲，积极思考，课后认真完成作业；
- 概念抽象，计算繁杂，联系紧密．一旦理解了，就会感叹，思路精巧至极！

如何学

- 了解课程问题，对课程框架有初步了解；
- 本门课程上课 48 学时，每周一次 3 学时。同学们投入的时间至少应做到 1:1；
- 上课认真听讲，积极思考，课后认真完成作业；
- 概念抽象，计算繁杂，联系紧密．一旦理解了，就会感叹，思路精巧至极！
- 在线性代数中，概念和计算同样重要，为了掌握线性代数概念，必须反复阅读教材．否则会阐述自以为理解了，实际上并不懂的问题．

如何学

- 了解课程问题，对课程框架有初步了解；
- 本门课程上课 48 学时，每周一次 3 学时。同学们投入的时间至少应做到 1:1；
- 上课认真听讲，积极思考，课后认真完成作业；
- 概念抽象，计算繁杂，联系紧密．一旦理解了，就会感叹，思路精巧至极！
- 在线性代数中，概念和计算同样重要，为了掌握线性代数概念，必须反复阅读教材．否则会阐述自以为理解了，实际上并不懂的问题．
- 线性代数是一种语言，必须用学习外语的方法每天学习这种语言 (David ． C ． Lay)．关注代数概念的几何特点，学会不同语言之间的转换．

使用教材

[1] 刘国新、谢成康、刘花编著，线性代数，科学出版社，2013

参考书推荐

- 陈建龙-线性代数第三版 (全国优秀教材建设二等奖)
- 同济大学-线性代数第七版 (全国优秀教材建设二等奖)

视频学习推荐

- 线性代数的本质–3Blue1Brown（博主）https://www.bilibili.com/video/av6731067/?p=4
- 【线性代数的本质】合集-转载于 3Blue1Brown 官方双语---婆婆町（博主）
- 麻省理工学院 - MIT - 线性代数（博主：Python 大本营）
- 《线性代数》教学视频 2.0 版【宋浩老师】