线性代数

第 1 章 行列式

谭 兵 副教授

西南大学数学与统计学院

2025 年 2 月 27 日

目录

这一章介绍 n 阶行列式的定义，讨论行列式的性质及计算. 最后，介绍行列式在求解一类特殊的线性方程组的克拉默法则.

行列式的来源

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题。

17 世纪末由日本数学家关孝和及德国数学家莱布尼茨引入.

为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则:

为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

那么线性方程组 (4) 有解,

为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

那么线性方程组 (4) 有解, 并且解是惟一的:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

行列式的出现原因可以这样理解: 完美地表达了一部分线性方程组的解的规律.

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

行列式的出现原因可以这样理解: 完美地表达了一部分线性方程组的解的规律. 从这个角度讲, 行列式是人为创造的一个符号, 它形式简洁地、浓缩地记载了一些规律性的内容.

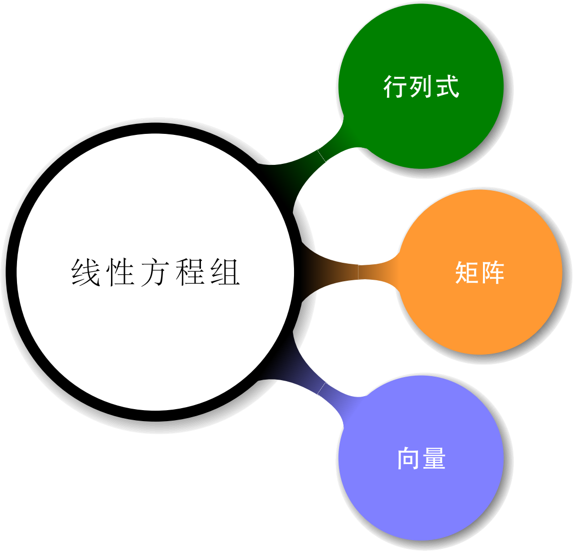
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

行列式的出现原因可以这样理解: 完美地表达了一部分线性方程组的解的规律. 从这个角度讲, 行列式是人为创造的一个符号, 它形式简洁地、浓缩地记载了一些规律性的内容.

☞ 什么是行列式? 如何计算? 将是课程第 1 章的内容.


线性方程组
行列式
矩阵
向量

本章内容

这一章关注: 行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题:

(1) 为什么要讨论行列式?

本章内容

这一章关注: 行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题:

(1) 为什么要讨论行列式?

(2) 行列式有哪些性质?

本章内容

这一章关注: 行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题:

(1) 为什么要讨论行列式?

(2) 行列式有哪些性质?

(3) n 阶行列式的计算, 有哪些常见方法?

目录

本节讨论二 (三) 元一次方程组的解与 2(3) 阶行列式.

消元法求解方程组

二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

若下条件成立

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

$$\Downarrow$$

消元法求解方程组

二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

若下条件成立

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

$$\Downarrow$$

方程组的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

二阶行列式示意图

定义 2 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

主对角线两个元素 a_{11} 和 a_{22} 的乘积，减去副对角线两个元素 a_{12} 和 a_{21} 的乘积.

$$\begin{vmatrix} {\color{red}a_{11}} & {\color{blue}a_{12}} \\ {\color{blue}a_{21}} & {\color{red}a_{22}} \end{vmatrix} = {\color{red}a_{11}a_{22}} - {\color{blue}a_{12}a_{21}}$$

2 阶行列式

2 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2, \ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

把行列式 D 的第 1 列用常数项 b_1, b_2 替换得 D_1; 第 2 列用常数项 b_1, b_2 替换的 D_2.

方程组的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$D \neq 0$.

例 求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}$.

例 求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix};$ (4) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}.$

例 求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix};$ (4) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}.$

例 求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2;$ (4) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}.$

例　求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11;$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2;$　　(4) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1.$

行列式解方程组

例 1.1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$$

且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$$

行列式解方程组

例 1.1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + \ \ x_2 = 1 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$$

且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

3 阶行列式

三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

利用消元法，可求得它的解为（设分母不为零）：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases}$$

三阶行列式的定义

对表示三元方程组的解，定义三阶行列式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

三阶行列式示意图

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

三阶行列式的图形计算 (沙路法)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & + & +\,- & - & - \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det A = & \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) \\ & - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right) \end{aligned}$$

注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

例

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D =& 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 \\ & - 1 \times 1 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) - (-4) \times 2 \times (-3) \\ =& -4 - 6 + 32 - 4 - 8 - 24 \\ =& -14. \end{aligned}$$

例 求下列三阶行列式的值.

$$(1)\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix}; \qquad (2)\begin{vmatrix} 我 & 0 & 生 \\ 0 & 有 & 0 \\ 你 & 0 & 幸 \end{vmatrix}.$$

例 求下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix} = 520;$ (2) $\begin{vmatrix} \text{我} & 0 & \text{生} \\ 0 & \text{有} & 0 \\ \text{你} & 0 & \text{幸} \end{vmatrix}.$

例 求下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix} = 520;$ (2) $\begin{vmatrix} 我 & 0 & 生 \\ 0 & 有 & 0 \\ 你 & 0 & 幸 \end{vmatrix} =$ 我有幸一生有你.

三元一次线性方程组的解

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

把行列式 D 的第 i 列用常数项 b_1, b_2, b_3 替换得 D_i, $i = 1, 2, 3$.

若下述条件成立

$$D \neq 0$$

$$\Downarrow$$

三元一次线性方程组的解

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

把行列式 D 的第 i 列用常数项 b_1, b_2, b_3 替换得 D_i, $i=1,2,3$.

若下述条件成立

$$D \neq 0$$

$$\Downarrow$$

方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

n 元一次方程组 (线性方程组) 与 n 阶行列式

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

n 元一次方程组 (线性方程组) 与 n 阶行列式

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 想法: 把二元和三元方程组的结果推广到 n 元一次方程组;

n 元一次方程组 (线性方程组) 与 n 阶行列式

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 想法: 把二元和三元方程组的结果推广到 n 元一次方程组;
- 途径: 定义 n 阶行列式;

n 元一次方程组 (线性方程组) 与 n 阶行列式

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 想法: 把二元和三元方程组的结果推广到 n 元一次方程组;
- 途径: 定义 n 阶行列式;
- 由 3 阶行列式可预见, n 阶行列式的计算将很复杂, 因此需讨论其性质, 从而简化计算方法;

n 元一次方程组 (线性方程组) 与 n 阶行列式

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 想法: 把二元和三元方程组的结果推广到 n 元一次方程组;
- 途径: 定义 n 阶行列式;
- 由 3 阶行列式可预见, n 阶行列式的计算将很复杂, 因此需讨论其性质, 从而简化计算方法;
- 这一章的内容就是定义 n 阶行列式, 讨论其性质和计算方法, 最终建立线性方程组的**克拉默 (Cramer) 法则**.

目录

为了定义 n 阶行列式，需要用到自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列及其逆序数的概念.

行列式各项的符号

行列式的每一项都是每行每列各取一个元素共 n 个元素相乘所得.

行列式各项的符号

行列式的每一项都是每行每列各取一个元素共 n 个元素相乘所得.

二阶行列式为: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

行列式各项的符号

行列式的每一项都是每行每列各取一个元素共 n 个元素相乘所得.

二阶行列式为: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

三阶行列式为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半

⋆ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半
- ⋆ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项
- ⋆ 猜测四阶行列式取正号和负号的各有 12 项

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半
- ⋆ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项
- ⋆ 猜测四阶行列式取正号和负号的各有 12 项

取正号或负号的关键在于下标的排列.

全排列及其逆序数

定义 1.1 称由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

全排列及其逆序数

定义 1.1 称由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列;

全排列及其逆序数

定义 1.1 称由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列;
- 自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个;

全排列及其逆序数

定义 1.1 称由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列;
- 自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个;
- 只有自然排列 $123\cdots(n-1)n$ 遵守从小到大的顺序，其余排列都存在某种 “逆序”.

全排列及其逆序数

定义 1.1 称由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列;
- 自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个;
- 只有自然排列 $123 \cdots (n-1)n$ 遵守从小到大的顺序，其余排列都存在某种“逆序”.

定义 1.2 在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，若一个较大的数 i_k 排在一个较小的数 i_l 前面，则称 i_k, i_l 构成该排列的一个逆序; 称逆序总数为该排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

全排列及其逆序数

定义 1.1 称由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列;
- 自然数 $1,2,\cdots,n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个;
- 只有自然排列 $123\cdots(n-1)n$ 遵守从小到大的顺序，其余排列都存在某种"逆序".

定义 1.2 在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，若一个较大的数 i_k 排在一个较小的数 i_l 前面，则称 i_k, i_l 构成该排列的一个逆序; 称逆序总数为该排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

1. $\tau(32514)=5$; $\tau(453162)=9$;

全排列及其逆序数

定义 1.1 称由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列;
- 自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个;
- 只有自然排列 $123 \cdots (n-1)n$ 遵守从小到大的顺序，其余排列都存在某种“逆序”.

定义 1.2 在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，若一个较大的数 i_k 排在一个较小的数 i_l 前面，则称 i_k, i_l 构成该排列的一个逆序; 称逆序总数为该排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

1. $\tau(32514) = 5$； $\tau(453162) = 9$;
2. $\tau(123 \cdots (n-1)n) = 0$;

全排列及其逆序数

定义 1.1 称由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个全排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列;
- 自然数 $1,2,\cdots,n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个;
- 只有自然排列 $123\cdots(n-1)n$ 遵守从小到大的顺序，其余排列都存在某种“逆序”.

定义 1.2 在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若一个较大的数 i_k 排在一个较小的数 i_l 前面，则称 i_k,i_l 构成该排列的一个逆序; 称逆序总数为该排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

1. $\tau(32514)=5$; $\tau(453162)=9$;
2. $\tau(123\cdots(n-1)n)=0$;
3. $\tau\big(n(n-1)\cdots 321\big)=\frac{n(n-1)}{2}$.

奇偶排列

定义 1.3 若一个排列的逆序数为奇 (偶) 数, 则称该排列为奇 (偶) 排列.

奇偶排列

定义 1.3 若一个排列的逆序数为奇（偶）数，则称该排列为奇（偶）排列.

1. 因为 $\tau(2143) = 2$，所以 2143 是偶排列;

奇偶排列

定义 1.3 若一个排列的逆序数为奇 (偶) 数, 则称该排列为奇 (偶) 排列.

1. 因为 $\tau(2143) = 2$, 所以 2143 是偶排列;
2. 因为 $\tau(32514) = 5$, 所以 32514 是奇排列.

奇偶排列

定义 1.3 若一个排列的逆序数为奇（偶）数，则称该排列为奇（偶）排列.

1. 因为 $\tau(2143) = 2$，所以 2143 是偶排列;
2. 因为 $\tau(32514) = 5$，所以 32514 是奇排列.

定义 1.4 交换一个排列中两个数的位置，称为对该排列作一次对换.

奇偶排列

定义 1.3 若一个排列的逆序数为奇（偶）数，则称该排列为奇（偶）排列.

1. 因为 $\tau(2143) = 2$，所以 2143 是偶排列;
2. 因为 $\tau(32514) = 5$，所以 32514 是奇排列.

定义 1.4 交换一个排列中两个数的位置，称为对该排列作一次对换.

- 交换排列 32514 中 5 与 4 的位置，得到排列 32415，记为 $32514 \to 32415$;

奇偶排列

定义 1.3 若一个排列的逆序数为奇（偶）数，则称该排列为奇（偶）排列.

1. 因为 $\tau(2143) = 2$，所以 2143 是偶排列;
2. 因为 $\tau(32514) = 5$，所以 32514 是奇排列.

定义 1.4 交换一个排列中两个数的位置，称为对该排列作一次对换.

- 交换排列 32514 中 5 与 4 的位置，得到排列 32415，记为 $32514 \to 32415$;
- 排列 32514 是奇排列，而排列 32415 是偶排列.

奇偶排列

定义 1.3 若一个排列的逆序数为奇（偶）数，则称该排列为奇（偶）排列.

1. 因为 $\tau(2143)=2$，所以 2143 是偶排列;
2. 因为 $\tau(32514)=5$，所以 32514 是奇排列.

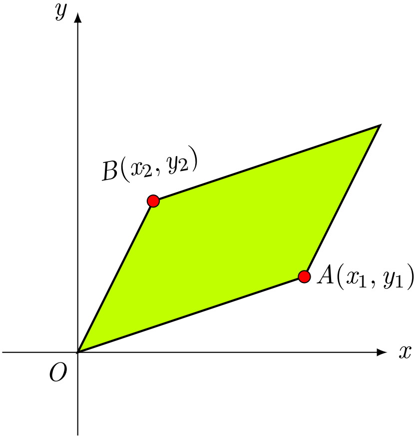
定义 1.4 交换一个排列中两个数的位置，称为对该排列作一次对换.

- 交换排列 32514 中 5 与 4 的位置，得到排列 32415，记为 $32514 \to 32415$;
- 排列 32514 是奇排列，而排列 32415 是偶排列.

定理 1.1 对排列作一次对换改变排列的奇偶性.

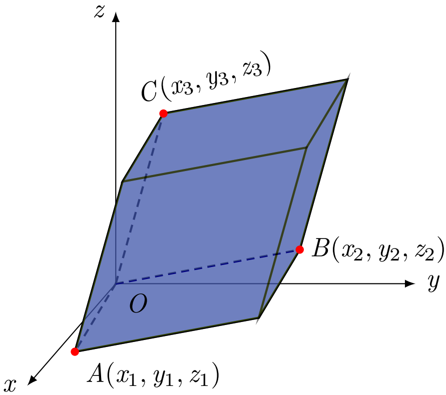
由此定理可以证明在 $n!$ 个 n 级排列中，有 $n!/2$ 个奇排列; 有 $n!/2$ 个偶排列.

二阶行列式的几何意义



二阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值等于平行四边形的面积.

三阶行列式的几何意义



三阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 的绝对值等于平行六面体的体积.

目录

利用 n 级排列的奇偶性，结合 2(3) 阶行列式，给出 n 阶行列式的定义.

回顾：2(3) 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

回顾：2(3) 阶行列式的定义

$$\begin{array}{c} +\qquad +\qquad + \\ \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \\ -\qquad -\qquad - \end{array}$$

$$=\left(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right)$$

$$-\left(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}\right)$$

2 阶与 3 阶行列式计算规律分析

3 阶行列式的事实

1. 3 阶行列式恰好有 $3!$ 项;

2 阶与 3 阶行列式计算规律分析

3 阶行列式的事实

1. 3 阶行列式恰好有 $3!$ 项;
2. 每一项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$;

2 阶与 3 阶行列式计算规律分析

3 阶行列式的事实

1. 3 阶行列式恰好有 $3!$ 项;
2. 每一项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$;
3. 下标第一位 (行标) 构成自然排列 123;

2 阶与 3 阶行列式计算规律分析

3 阶行列式的事实

1. 3 阶行列式恰好有 $3!$ 项;
2. 每一项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$;
3. 下标第一位 (行标) 构成自然排列 123;
4. 下标第二位 (列标)j_1, j_2, j_3 的排列为 123, 231, 312, 321, 132, 213. 这 6 个排列的逆序数分别为 0, 2, 2, 3, 1, 1. 列标排列为偶排列的项符号为正, 列标排列为奇排列的项符号为负.

2 阶与 3 阶行列式计算规律分析

3 阶行列式的事实

1. 3 阶行列式恰好有 3! 项;
2. 每一项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$;
3. 下标第一位 (行标) 构成自然排列 123;
4. 下标第二位 (列标)j_1, j_2, j_3 的排列为 123, 231, 312, 321, 132, 213. 这 6 个排列的逆序数分别为 0, 2, 2, 3, 1, 1. 列标排列为偶排列的项符号为正，列标排列为奇排列的项符号为负.

3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

2 阶与 3 阶行列式计算规律分析

3 阶行列式的事实

1. 3 阶行列式恰好有 3! 项;
2. 每一项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$;
3. 下标第一位 (行标) 构成自然排列 123;
4. 下标第二位 (列标)j_1, j_2, j_3 的排列为 123, 231, 312, 321, 132, 213. 这 6 个排列的逆序数分别为 0, 2, 2, 3, 1, 1. 列标排列为偶排列的项符号为正, 列标排列为奇排列的项符号为负.

3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

n 阶行列式的定义

定义 1.5 定义n **阶行列式**(determinant)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为代数和

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

称 a_{ij} 为行列式第 i 行第 j 列的元素，$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为主对角线上元素，a_{1n}，$a_{2,n-1}$，$\cdots$，a_{n1} 为副对角线上元素.

记号及定义的含义

- 通常用 D, $|(a_{ij})_{n\times n}|$, $\det(a_{ij})$ 等表示行列式;

记号及定义的含义

- 通常用 D, $|(a_{ij})_{n\times n}|$, $\det(a_{ij})$ 等表示行列式;
- 规定 1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.

记号及定义的含义

- 通常用 D，$|(a_{ij})_{n\times n}|$，$\det(a_{ij})$ 等表示行列式;
- 规定 1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.
- 由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

记号及定义的含义

- 通常用 D，$|(a_{ij})_{n\times n}|$，$\det(a_{ij})$ 等表示行列式;
- 规定 1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.
- 由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

1. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

记号及定义的含义

- 通常用 D, $|(a_{ij})_{n\times n}|$, $\det(a_{ij})$ 等表示行列式;
- 规定 1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.
- 由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

1. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;
2. 每一项是 n 个元素的乘积，这 n 个元素来自于行列式的不同行与不同列;

记号及定义的含义

- 通常用 D，$|(a_{ij})_{n\times n}|$，$\det(a_{ij})$ 等表示行列式;
- 规定 1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.
- 由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

1. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;
2. 每一项是 n 个元素的乘积，这 n 个元素来自于行列式的不同行与不同列;
3. 行标按自然顺序排列时，符号由这 n 个元素的列标排列的逆序数决定.

按定义计算行列式

例 1.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由定义，行列式是 4! 项的代数和，每项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$.

按定义计算行列式

例 1.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由定义，行列式是 4! 项的代数和，每项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$.

因为只有 a_{13}，a_{24}，a_{32}，a_{41} 不为零，所以只有当 $j_1 = 3$，$j_2 = 4$，$j_3 = 2$，$j_4 = 1$ 时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 才不为零.

按定义计算行列式

例 1.2 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由定义，行列式是 4! 项的代数和，每项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$.

因为只有 a_{13}，a_{24}，a_{32}，a_{41} 不为零，所以只有当 $j_1 = 3$，$j_2 = 4$，$j_3 = 2$，$j_4 = 1$ 时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 才不为零. 故

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(3421)} 1 \times 2 \times 3 \times 4 = (-1)^5 24 = -24.$$

例 在四阶行列式展开式中，确定下列各项的符号:

(1) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$;　　(2) $a_{33}a_{24}a_{12}a_{41}$.

例 在四阶行列式展开式中，确定下列各项的符号：

(1) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}(-)$;　　　　(2) $a_{33}a_{24}a_{12}a_{41}(+)$.

例 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 5x^2 & 1 & 1 & x \\ 2x & 3x & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & x & 7 \end{vmatrix}$，求 $f(x)$ 的最高次项.

解

$$(-1)^{\tau(1243)}5x^2\cdot 3x\cdot 6\cdot x=-90x^4.$$

主对角行列式

例 1.3 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

证明 因为形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}$ 中不为零的项只有

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn},$$

且这一项的符号为正，所以结论成立.

上三角行列式

例 1.4 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

特殊行列式

副对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}$$

下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1,n-1} a_{nn}$$

行列式列标按自然顺序排列

- 在 n 阶行列式的定义中，每一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列;

行列式列标按自然顺序排列

- 在 n 阶行列式的定义中，每一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列;
- 因为数的乘法满足交换律，所以交换每一项中 n 个元素的顺序，可以使**列标**按自然顺序排列.

行列式列标按自然顺序排列

- 在 n 阶行列式的定义中，每一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列;
- 因为数的乘法满足交换律，所以交换每一项中 n 个元素的顺序，可以使**列标**按自然顺序排列.

行列式列标按自然顺序排列的定义

定理 1.2 对于 n 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$