线性代数

谭 兵 副教授
西南大学数学与统计学院
https://bingtan.me/

2025 年 3 月 20 日

目录

第 2 章　矩阵

矩阵是一重要的数学工具，线性代数的许多问题都可以用矩阵这来表示和讨论．这一章将主要讨论矩阵的代数运算，可逆矩阵，矩阵的初等变换和矩阵的秩.

学完本章之后要具备的最基本能力

- 矩阵乘法不满足的三条规律.
- 伴随矩阵的定义与公式.
- 求逆矩阵.

2.1　矩阵及其线性运算

本节引入矩阵的概念及定义矩阵的代数运算.

2.1.1　矩阵的概念

	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5
产地 1	0	3	4	7	5
产地 2	8	2	3	0	2
产地 3	5	4	0	6	6

如果我们用 a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4,5)$ 表示从第 i 个产地运往第 j 个销地的运量 (如 $a_{12}=3$，$a_{24}=0$，$a_{35}=6$), 这样就能把调运方案表简写成一个 3 行 5 列的数表

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

从高斯消元法开始

- 本节通过高斯消元法，说明矩阵概念出现的必要性.
- 高斯消元法虽然简单，但是整个线性代数可以认为是由此发端的．后续的很多话题，无不渗透着高斯消元法的影子.
- 《线性代数》——一个线性方程组引发的故事.

例　用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y-z=8, & (r_1) \\ -3x-y+2z=-11, & (r_2) \\ -2x+y+2z=-3. & (r_3) \end{cases}$$

高斯消元法的原理是:

1. 要将 r_1 以下的等式中的 x 消除，然后再将 r_2 以下的等式中的 y 消除．使整个方程组变成一个阶梯形的格式.
2. 再将已得出的答案一个个地回代到已被简化的等式中的未知数中，即得其余的答案.

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3 \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	$r_2+\frac{1}{2}r_3 \to r_2$ $r_1-r_3 \to r_1$

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ \frac{1}{2}y=\frac{3}{2}, \\ -z=1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	$r_1-r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$
$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	

实际参与运算的只有系数和常数，把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列里，方程的运算与变换，体现为矩形阵列中，各行元素的相应运算．

线性方程组的主要信息可以紧凑地记录在一个矩形阵列里，称之为矩阵．矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

称为方程组的系数矩阵，矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

称为方程组的增广矩阵（augmented matrix）.

☛ 增广矩阵由系数矩阵加上方程组右端常数列组成.

<table>
<tr><th>方程组</th><th>行变换</th><th>增广矩阵</th></tr>
<tr><td>$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3 \end{cases}$</td><td>$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$
$r_3+r_1 \to r_3$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$</td><td>$r_3-4r_2 \to r_3$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$</td><td>$r_2+\frac{1}{2}r_3 \to r_2$
$r_1-r_3 \to r_1$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>方程组</th><th>行变换</th><th>增广矩阵</th></tr>
<tr><td>$\begin{cases} 2x+y=7, \\ \frac{1}{2}y=\frac{3}{2}, \\ -z=1. \end{cases}$</td><td>$2r_2 \to r_2$
$-r_3 \to r_3$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} 2x+y=7, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$</td><td>$r_1-r_2 \to r_1$
$\frac{1}{2}r_1 \to r_1$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

求线性方程组的解

问题：求出线性方程组的全部解

- 未知数个数 $=$ 方程个数 $\Longrightarrow$ 已解决
- 未知数个数 $\neq$ 方程个数 $\Longrightarrow$ 待解决

例如：确定下列线性方程组的全部解

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-9x_3+4x_4=19 \\ 2x_1+6x_2+7x_3-6x_4=28 \\ 4x_1-3x_2+5x_3+8x_4=35 \end{cases}$$

求线性方程组的解

抽出方程组两边各个常数，得到两个矩形阵列：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 28 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 35 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & -6 \\ 4 & -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 19 \\ 28 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

方程组的全部解完全由这两个矩形阵列所决定.

齐次线性方程组与数表

“齐次”线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[1]

“非齐次”线性方程组与系数及常数表

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

[2]

[1]线性方程组的未知数可以用任何字母来表示，因此，此系数表完全决定了上述线性方程组.

[2]此数表完全决定了上述线性方程组. 研究线性方程组实质上只需考虑这类数表. 关于这类数表的讨论就是矩阵理论.

矩阵的定义

定义 2.1 称数域 $\boldsymbol{P}$ 中的 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为数域 $\boldsymbol{P}$ 上的 $m \times n$ 型矩阵，简称矩阵 (Matrix). 称 a_{ij} 为矩阵的第 i 行 j 列的元素，其中 $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

- 大写字母 A，B，C 及 (a_{ij}) 等表示矩阵，为了明确行数和列数：$A_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$；
- 数域 $\boldsymbol{P}$ 上的全体 $m \times n$ 型矩阵的集合记为 $\boldsymbol{P}^{m\times n}$；
- 在这一章，除了特别声明，说到数时均指某个数域 $\boldsymbol{P}$ 中的数，矩阵均指数域 $\boldsymbol{P}$ 上的矩阵；
- 只有 1 行 1 列的矩阵 $(a)_{1\times 1}$ 视为数 a.

有关矩阵的几个概念

同型矩阵 如果矩阵 A 与 B 都是 $m \times n$ 型矩阵，则称 A 与 B 为同型矩阵.

矩阵相等 若 A 与 B 为同型矩阵，且对应元素相同，则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

方阵 称行数和列数都等于 n 的矩阵 $A_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，简记为 A_n.

区分矩阵和行列式

注意不要将 n 阶矩阵和 n 阶行列式的概念混淆：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

- 行列式的本质是一个数；矩阵是一个数表，是一个由数字构成的矩形阵列. 它本身并不包含任何运算.
- 行列式的行数与列数必相等；矩阵的行数与列数不一定相等.
- 行列式的符号与矩阵的符号也不一样.

☛ 约定：矩阵符号只能是（　），或［　］.

2.1.2 特殊矩阵

几种特殊矩阵

1. 单位矩阵

2. 数量矩阵
3. 对角矩阵
4. 三角矩阵
5. 对称矩阵
6. 行（列）矩阵

n 阶单位矩阵 (identity matrix) 主对角线上的元素都为 1，其余元素是 0 的 n 阶方阵

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

[3]

在矩阵的乘法中，单位矩阵扮演着和实数乘法中的 1 类似的角色，即有

命题. 对于单位矩阵和 $m \times n$ 矩阵 A，有如下性质：

$$E_m A = A, \quad AE_n = A.$$

另外，对于 n 阶矩阵 A，我们规定 $A^0 = E_n$.

不同型的零矩阵是不相等的，注意它们可能都简记为 O. 不同型的单位矩阵 E 也是不相等的.

数量矩阵 对角线位置元素都是 k 而其他位置都是 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，记为 kE_n. 即

$$kE_n = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

命题. 对于数量矩阵和 $m \times n$ 矩阵 A，我们有如下性质：

$$(kI_m)A = A(kI_n) = kA.$$

事实. 两个数量矩阵的和、差及乘积仍然是数量矩阵.

对角矩阵 除了对角线，其他位置都是 0 的 n 阶矩阵称为对角矩阵(diagonal matrix). 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} & \\ & & a_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[3] 简记为 E. 也可记为 I_n（有时简记为 I）

可将上述矩阵简记为 $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

上三角矩阵 对角线下边的各个元素都是 0 的 n 阶矩阵称为上三角矩阵，即形如下面的方阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & * & \\ & & a_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角矩阵 对角线上边的各个元素都是 0 的 n 阶矩阵称为下三角矩阵，即形如下面的方阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & 0 & \\ & & a_{33} & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

分别为一个上三角形矩阵和下三角形矩阵.

对称矩阵 对于 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，如果对于任何 i, j 都有 $a_{ij} = a_{ji}$，我们就称它为对称矩阵. 例如，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵.

定义 对一个 $m \times n$ 的矩阵 A，将它的行和列的位置交换，即将第 i 行第 j 列的元素放在第 j 行第 i 列，得到新的 $n \times m$ 矩阵，称为矩阵 A 的转置，记为 A^{T}.

因此，如果 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$A^{\mathrm{T}} = (b_{ij})_{n\times m}$，则有 $b_{ij} = a_{ji}$.

容易看出，矩阵 A 是对称的，等价于它满足 $A^{\mathrm{T}} = A$.

行矩阵与列矩阵

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2.1.3 矩阵的运算

矩阵的线性运算：加法 类比相同维数向量的加减法运算，我们可以给出同型矩阵的加减法运算.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&8\\9&10\\11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&10\\12&14\\16&18\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&8\\9&10\\11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-6\\-6&-6\\-6&-6\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}6&6\\6&6\\6&6\end{pmatrix}$$

矩阵的线性运算：数乘 类比向量的数乘，我们可以给出矩阵的数乘运算．设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$，那么 $2A=2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\\10&12\end{pmatrix}$.

可以反向使用矩阵的数乘，也就是可以把矩阵所有元素的公因子提出来.

矩阵的乘法：行矩阵乘以列矩阵 类比向量的数量积（内积或点乘积），我们定义行矩阵与列矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

只有在行矩阵 A 的列数和列矩阵 B 的行数相等时，AB 才能运算，所以 AB 不能写成 BA.

矩阵的乘法：两行的矩阵乘以列矩阵 如果 A 有两行 α_1 和 α_2，B 是列矩阵，那么 AB 就可以用 α_1 和 α_2 分别与 B 做乘积来定义，即：

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n\\a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n\end{pmatrix}.$$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$，那么，$AB=\begin{pmatrix}5+6+3\\20+15+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\41\end{pmatrix}$.

矩阵的代数运算（定义 2.2）

加法 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵，则定义矩阵 A 与 B 的加法为 $A+B=$

$(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$$

数量乘法 (数乘) 设 μ 为数域 $\boldsymbol{P}$ 中的数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为数域 $\boldsymbol{P}$ 上的矩阵，则定义矩阵的数量乘法 (简称数乘) 为 $\mu A=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\mu a_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$$

乘法 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，即矩阵 A 的列数与 B 的行数相等，则定义矩阵 A 与 B 的乘法为 $AB=(c_{ij})_{m\times p}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj},\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,p$$

矩阵的加法

$$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix};$$

负矩阵/减法 规定: $-A=(-1)A$ 规定: $A-B=A+(-B)$

矩阵的减法

$$A-B=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意，只有这两个矩阵是同种类型的，即它们的行数和列数相等，才能作加减法，此时得到的结果仍为同类型的矩阵.

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 $A+B$ 和 $A-B$.

矩阵的加法

性质. 矩阵的加法满足如下性质:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+O=O+A=A$;
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

虽然矩阵也有所谓的"加法","乘法",但是这和我们熟知的实数加法,乘法是完全不同的.运算的对象不同,运算的内容不同,当然,运算的规律也不同.这是两个不同的讨论范围里的不同运算,相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已,我们不要被这一点"相同"而忘记二者本质的不同.

矩阵的数乘

$$kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

例　$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $2A$.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. 求 $3A+2B-4C$.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, 且 $5A+3X=B$. 求 X.

区分矩阵和行列式 注意,常数 k 和行列式相乘时,等同于用 k 乘以某一行或某一列的每个元素.而 k 和矩阵相乘时,等同于用 k 乘以矩阵的所有元素.例如:

$$k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k & 2k \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ 或 } k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k & 2 \\ 3k & 4 \end{vmatrix}\text{等,}\quad k\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 2k \\ 3k & 4k \end{pmatrix}.$$

矩阵的数乘

性质. 设 k, l 为常数, A, B 为同种类型的矩阵. 矩阵的数乘有如下性质:

1. $(k+l)A=kA+lA$;
2. $k(lA)=(kl)A=l(kA)$;
3. $k(A+B)=kA+kB$.

矩阵的乘法 对两个矩阵作乘法,不能拿对应元素直接相乘.首先 $A_{m\times r}$ 和 $B_{s\times n}$ 可以相乘,需要满足 $r=s$,即第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数.

定义　对矩阵 $A_{m\times r}=(a_{ij})_{m\times r}$ 和 $B_{r\times n}=(b_{ij})_{r\times n}$,我们定义

$$A_{m\times r}B_{r\times n}=C_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$.

设 $C = AB$，则 c_{ij} 由 A 的第 i 行和 B 的第 j 列的对应元素相乘，再相加得到.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & \boxed{c_{23}} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix} = C = AB$$

第 2 行第 3 列元素 $\boxed{c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 56 & 41 \end{pmatrix}$$

注记.
- 只有当 A 的列数等于 B 的行数时，AB 才能运算
- 因此，矩阵乘法的顺序一般不能轻易改变
- AB 常常读作"A 左乘 B"，也常常读作"B 右乘 A"
- 即使 A 和 B 都是方阵，也很可能无法交换乘法顺序（后文举例）

容易得知，两个上（下）三角矩阵的和、差以及乘积仍然是上（下）三角矩阵. 例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & * \\ & b_{22} & & \\ & & b_{33} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & * \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & a_{33}b_{33} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

容易得知，两个对角矩阵的和、差以及乘积仍然是对角矩阵．例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

性质. 矩阵的乘法满足下列性质（假设乘法运算都满足条件）：

1. 结合律：$(AB)C = A(BC)$;
2. 右分配律：$(A+B)C = AC+BC$;
3. 左分配律：$C(A+B) = CA+CB$;
4. 数乘结合律：$k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

矩阵加法显然满足交换律，那么矩阵乘法是否满足交换律呢？不！

例 2.1 计算 AB 与 BA，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

[4] **解**

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times1+3\times3+4\times(-5) & 1\times2+3\times4+4\times1 \\ 2\times1+4\times3+5\times(-5) & 2\times2+4\times4+5\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ -11 & 25 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times1+2\times2 & 1\times3+2\times4 & 1\times4+2\times5 \\ 3\times1+4\times2 & 3\times3+4\times4 & 3\times4+4\times5 \\ -5\times1+1\times2 & -5\times3+1\times4 & -5\times4+1\times5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 11 & 14 \\ 11 & 25 & 32 \\ -3 & -11 & -15 \end{pmatrix}$$

[4] 由此观察矩阵的乘法是否满足交换律.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 AB 和 BA.

解　直接计算可得

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+2\cdot(-1) & 2\cdot(-1)+2\cdot 1 \end{pmatrix} = O, \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1+1\cdot 2 & (-1)\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 例题说明矩阵的乘法没有交换律；
- 若 AB 与 BA 都有意义，且 $AB=BA$，则称 A 与 B 可交换.

例　求与 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵 B.

解　设 $B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$,那么 $AB=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} a_1 & a_1+a_2 & a_3 \\ b_1 & b_1+b_2 & b_3 \\ c_1 & c_1+c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.
因为 $AB=BA$，所以 $b_1=0$，$b_2=a_1$，$b_3=0$，$c_1=0$，a_1,a_2,a_3,c_2,c_3 取任意数.

矩阵没有消去率

例 2.2　计算 AB，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

解

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $AB=O$.

注记. 以上两个例子说明，对于矩阵乘法，从 $AB=O$ 不能推出 $A=O$ 或 $B=O$.

注记. 从 $AB=AC$ 和 $A\neq O$ 不能推出 $B=C$，即乘法消去律一般不成立!

关于矩阵乘法的三个重要结论

1. 矩阵乘法不满足交换律. 即一般情况下，$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.
2. 当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.
3. 矩阵乘法不满足消去律.

   即当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ 时，不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

以后我们会了解到：当行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0}$ 时，

1. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$;
2. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

矩阵的运算法则 **性质 2.1** 设 A, B, C 为数域 $\boldsymbol{P}$ 上的矩阵，$\mu, \nu \in \boldsymbol{P}$，则

1. $A + B = B + A$，其中 $A, B \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$，其中 $A, B, C \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$;
3. $(\mu\nu)A = \mu(\nu A) = \nu(\mu A)$;
4. $\mu(A + B) = \mu A + \mu B$，其中 $A, B \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$;
5. $(\mu + \nu)A = \mu A + \nu A$;
6. $(AB)C = A(BC)$，其中 $A \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$，$B \in \boldsymbol{P}^{n\times p}$，$C \in \boldsymbol{P}^{p\times q}$;
7. $(A + B)C = AC + BC$，其中 $A, B \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$，$C \in \boldsymbol{P}^{n\times p}$;
8. $C(A + B) = CA + CB$，其中 $C \in \boldsymbol{P}^{l\times m}$，$A, B \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$;
9. $E_m A = AE_n = A$，其中 $A \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$.

2.1.4 n 阶方阵的幂与多项式

矩阵的乘方

定义. 对于一个 n 阶矩阵 A，我们定义

$$A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A,$$
$$A^4 = A^3 \cdot A, \quad \cdots, \quad A^m = A^{m-1} \cdot A.$$

当矩阵 A 为方阵时，对于正整数 k，定义:

$$A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k}$$

矩阵的幂次

由于矩阵乘法满足分配律、结合律，有

性质. 设 A 为方阵，m、n 为自然数，则有

1. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$;

2. $(A^m)^n = A^{mn}$.

例　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^n，B^n 和 C^n.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{如果}n\text{是偶数} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{如果}n\text{是奇数} \end{cases}, \quad C^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，

1. 计算并验证 $(AB)^2 \neq A^2B^2$，
2. 计算并验证 $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$.

解:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 24 & 27 \end{pmatrix} = A^2B^2$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (A+B)(A-B)$$

矩阵不满足的运算律

1. 存在矩阵 A 和 B，使得 $AB \neq BA$.
2. 存在矩阵 A 和 B，使得 $(AB)^k \neq A^kB^k$.
3. 存在矩阵 A 和 B，使得 $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
4. 存在矩阵 A 和 B，使得 $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

正确计算方式

- $(AB)^3 = (AB)(AB)(AB)$
- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$
- $(A+B)(A-B) = A^2 - BA + AB - B^2$

矩阵多项式　设 m 次多项式

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称矩阵

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

为 A 的一个矩阵多项式.

对角矩阵的矩阵多项式

设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

则

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix},\ k=1,2,\cdots$$

$$\begin{aligned}f(A)&=a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m\end{pmatrix}+a_{m-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{m-1} & & & \\ & \lambda_2^{m-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{m-1}\end{pmatrix}\\&+\cdots+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+a_0\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例　已知 $f(x)=x^3-6x+4$，$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. 求 A^3 及 $f(A)$.

解　直接计算可得

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&1\\0&4&4\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

因此

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&4&1\\0&4&4\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&12&6\\0&8&12\\0&0&8\end{pmatrix}.$$

进而，有

$$\begin{aligned} f(A) &= A^3 - 6A + 4E \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

线性方程组的矩阵表示

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

线性方程组 $AX = B.$

由此可见

- 矩阵乘法的运算规则有助于：简化线性方程组的书写
- 在线性代数中，向量坐标写成 **列矩阵的形式** 常常会更为方便
- 写成行矩阵形式的向量也称 **行向量**
- 写成列矩阵形式的向量也称 **列向量**

矩阵乘法的应用

n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 m 个变量 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

叫做从 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ 的**线性变换**，其中，a_{ij} 为常数．如果令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

那么上述线性变换可以用矩阵乘法表示出来，即 $y = Ax$.

2.1.5 矩阵的转置运算

矩阵的转置 **定义 2.3** 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，称 $n \times m$ 型矩阵

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 的转置 (Transpose).

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

对称矩阵和反称矩阵

若 $A^T = A$，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A^T = -A$，则称 A 为**反称矩阵**；

例如，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 是对称矩阵，$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 是反称矩阵.

- 对称和反对称矩阵都是方阵.
- 对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 总满足：$a_{ij} = a_{ji}$.
- 反称矩阵 $A = (a_{ij})$ 总满足：$a_{ii} = 0$，$a_{ij} = -a_{ji}$.

矩阵的转置的性质 **性质 2.2** 设 $\mu \in \boldsymbol{P}$，A 与 B 为数域 $\boldsymbol{P}$ 上矩阵，则

1. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$，其中 $A, B \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$；
2. $(\mu A)^{\mathrm{T}} = \mu A^{\mathrm{T}}$；
3. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$，其中 $A \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$，$B \in \boldsymbol{P}^{n\times p}$；
4. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

[5]

[5]性质 1 和 3 可推广为:
$(A_1 + A_2 + \cdots + A_s)^{\mathrm{T}} = A_1^{\mathrm{T}} + A_2^{\mathrm{T}} \cdots + A_s^{\mathrm{T}}$
$(A_1 A_2 \cdots A_s)^{\mathrm{T}} = A_s^{\mathrm{T}} \cdots A_2^{\mathrm{T}} A_1^{\mathrm{T}}$

证明性质 3: $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 设

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{n\times p}$$

(1) 矩阵 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 是同型矩阵.

(2) 证 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的对应元素相等.

(a) 矩阵 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素即为 AB 的第 j 行第 i 列元素:

$$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$$

(b) 矩阵 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素，即 B^{T} 的第 i 行 (B 的第 i 列) 与 A^{T} 的第 j 列 (A 的第 j 行) 对应元素乘积之和:

$$(b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{ni})\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$$

(c) 可见 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的对应元素相等.

事实. *1.* 设 A 和 B 为对称矩阵，则 $A \pm B$ 也是对称矩阵.

2. 设 A 为对称矩阵，则 kA 也是对称矩阵.

3. 设 A 为任何方阵，则 $A + A^{\mathrm{T}}$ 必是对称矩阵.

4. 设 A 为任何矩阵，则 AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 都是对称矩阵.

注记. 如果 A，B 都是对称矩阵，AB 未必是对称矩阵.

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵，但是 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 就不是对称矩阵.

定理. 如果 A，B 都是对称矩阵，而且两者是可交换的，即 $AB = BA$，则 AB 仍然是对称矩阵.

证明 设 AB 是对称矩阵. 那么 $AB = (AB)^T = B^TA^T = BA$，所以 $AB = BA$. 设 $AB = BA$. 那么 $(AB)^T = B^TA^T = BA = AB$，所以 AB 是对称矩阵.

例 设 A 和 B 是同阶方阵，A 为反称矩阵，B 为对称矩阵，求证 $AB - BA$ 为对称矩阵.

证明 $(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^TA^T - A^TB^T = -BA + AB = AB - BA$，所以 $AB - BA$ 是对称矩阵.

例 2.3 设 B 为一个列矩阵，且 $B^{\mathrm{T}}B = 1$. 令

$$C = E - 2BB^{\mathrm{T}}$$

证明 C 为对称矩阵，且 $CC^{\mathrm{T}} = E$.

证明 因为

$$C^{\mathrm{T}} = (E - 2BB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} - 2(BB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = E - 2(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$$

$$= E - 2BB^{\mathrm{T}} = C,$$

所以 C 为对称矩阵，且

$$\begin{aligned} CC^{\mathrm{T}} =&(E-2BB^{\mathrm{T}})(E-2BB^{\mathrm{T}}) \\ =&E^2 - E(2BB^{\mathrm{T}}) - 2BB^{\mathrm{T}}E + 4(BB^{\mathrm{T}})(BB^{\mathrm{T}}) \\ =&E - 2BB^{\mathrm{T}} - 2BB^{\mathrm{T}} + 4B(B^{\mathrm{T}}B)B^{\mathrm{T}} \\ =&E - 4BB^{\mathrm{T}} + 4BB^{\mathrm{T}} = E + O = E. \end{aligned}$$

2.1.6 方阵的行列式

定义 2.4 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为方阵. 称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵 A 的行列式，记为 $|A|$，$|(a_{ij})_{n\times n}|$ 或 $\det(A)$. 只有方阵才有行列式.

- 当 $|A| = 0$ 时，称 A 为奇异矩阵（Singular Matrix）;
- 当 $|A| \neq 0$ 时，称 A 为非奇异矩阵（Nonsingular Matrix）.

例如，如果 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$

方阵的行列式的性质

性质. 设 A, B 是 n 阶矩阵，k 为常数，则有

1. $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$;
2. $|kA| = k^n|A|$;
3. $|AB| = |A|\cdot|B|$;
4. $|AB| = |BA|$.

初学者容易犯的一个错误是：$|kA| = k|A|$.

方阵乘积的行列式与行列式的乘积

定理 2.1 设 A 与 B 为同阶方阵，则

$$|AB| = |A||B|$$

6

把定理 2.1 中等式写成 $|A|B| = |AB|$，则此式可视为行列式的乘法.

例　已知 A 是三阶方阵，B 是四阶方阵，且 $|A| = 3, |B| = 2$，求 $||A|B|$.

解:

$$||A|B| = |3B| = 3^4|B| = 81 \times 2 = 162.$$

例　已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$，求 $\left||A|A^2A^{\mathrm{T}}\right|$.　**解**　计算得到 $|A| = 4$，由行列式的性质:

$$\left|A^2\right| = |A|^2, \quad \left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A|, \quad |cA| = c^n|A|.$$

所以: $\left||A|A^2A^{\mathrm{T}}\right| = 4^3|A|^3 = 4096.$

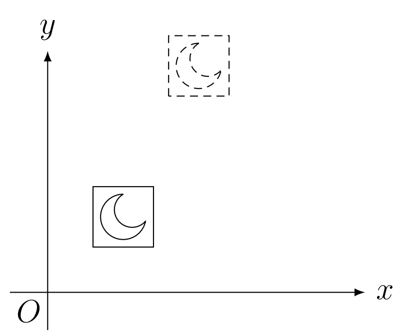
例　已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求 $|4A|$.　**解**　计算得到 $|A| = 63$，由行列式的性质: $|4A| = 4^3|A| = 4032.$

2.1.7　矩阵的几何意义

矩阵加法等同于平移变换 将平面上点的坐标 (x, y) 看作矩阵，则图形的平移对应于（对每个点）应用矩阵的加法. 例如:

平移:

$$(x, y) + (1, 2) = (x', y')$$



矩阵乘法等同于线性变换 用二阶矩阵乘以坐标矩阵的变换称为线性变换. 即有

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (x', y'),$$

或者

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}.$$

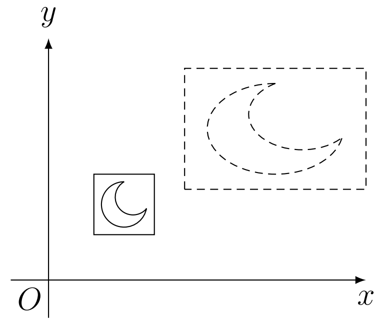
线性变换将把直线变为直线，但可能会将矩形变成平行四边形.

[6]把上等式写成 $|A||B| = |AB|$，则此式可视为行列式的乘法规则.

平面图形的线性变换之一 图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

1. 伸缩（x 和 y 分别缩放）:

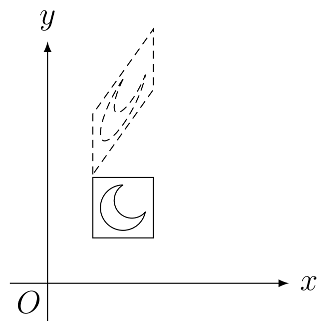
$$(x, y)\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = (x', y')$$



平面图形的线性变换之二 图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

2. 错切（x 不变，y 倾斜）:

$$(x, y)\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y')$$

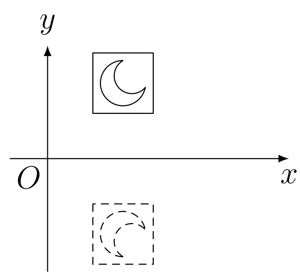


平面图形的线性变换之三 图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

3. 倒影（或称反射）:

$$(x, y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x', y')$$

倒影后逆时针变成顺时针.

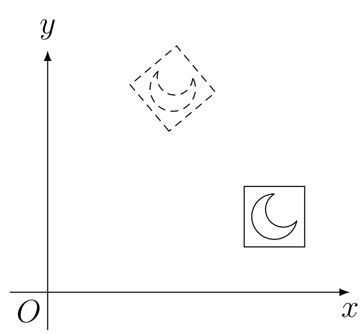


平面图形的线性变换之四 图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

4. 旋转（逆时针转 θ 度）:

$$(x, y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (x', y')$$

旋转后逆时针还是逆时针.



线性变换的复合 线性变换的复合对应于二阶矩阵的乘积.

先旋转再伸缩对应于下面的矩阵运算（注意矩阵运算满足结合律）:

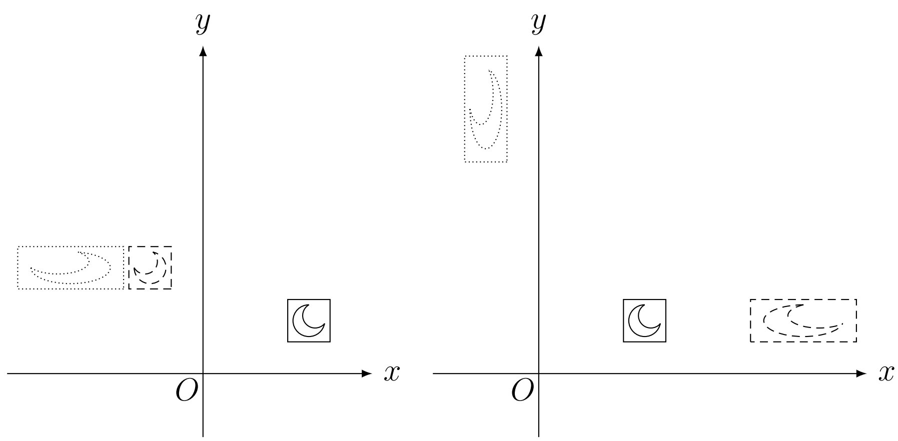
$$(x,y)\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}\right)=(x',y')$$

而先伸缩再旋转对应于下面的矩阵运算:

$$(x,y)\left(\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)=(x',y')$$

矩阵乘法无交换律

在上面两个变换中取 $\theta=90^\circ$，$k_1=2.5$，$k_2=1$，得到的图形如下:



我们可以看到: 对一个图形, 先旋转再伸缩和先伸缩再旋转得到的结果通常是不一样的, 这也是矩阵乘法不可交换的实际例子.

矩阵乘法引入的第一个途径: 线性变换 矩阵的乘法是阿瑟 · 凯莱（Arthur Cayley，1821 ∼ 1895）于 1858 年根据线性变换乘积的需要提出的.

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \quad\vdots\\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

设有两个线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2,\\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2,\\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2.\end{cases}\tag{2}$$

将(2)带入(1)，可得从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换：

$$\left\{\begin{array}{l} y_1=\left(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}\right)t_1+\left(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\right)t_2 \\ y_2=\left(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}\right)t_1+\left(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\right)t_2 \end{array}\right. \tag{3}$$

我们把线性变换(3)叫做线性变换(1)与(2)的乘积，相应地把(3)所对应的矩阵定义为(1)与(2)所对应矩阵的乘积，即

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

其规律是：

1. 第一个矩阵中取行向量，第二个矩阵中取列向量，将这个两个向量进行"点乘".（这也导致：第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数.
2. 第一个矩阵中第 i 行向量与第二个矩阵中第 j 列向量的点乘，得到结果矩阵中 (i,j) 位置元素的值.

矩阵乘法引入的另一个途径：线性方程组的表示

Step 1．先定义行矩阵与列矩阵的乘法为两个向量的内积．即对

$$\boldsymbol{A}=\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right), \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n.$$

Step 2．再定义 $m\times n$ 矩阵与 $n\times 1$ 矩阵的乘法．设线性方程组

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

定义

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量，是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{x}$ 的内积．则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

成立等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Step 3．再定义 $m\times n$ 矩阵与 $n\times k$ 矩阵的乘法．

设有矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times k}$．矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各列分别记为列矩阵 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k$，即

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k)$$

则乘积 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 定义为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_k)$$

☛ 以后就用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 表示一个普通的线性方程组．而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 本身还是一个矩阵方程．矩阵方程的一般形式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}.$$

矩阵乘法的理解

同样地，矩阵的乘法运算，也是抽象于实际，是因为两个矩阵会按照这一规律，映射到另外一个矩阵．这个乘法只不过是对这个对应法则的一种表述．这种运算既有实际背景（两个线性变换的乘积），又有实际用途（线性方程组的表示等）．

矩阵加法是将对应位置元素相加，那么，矩阵乘法为什么不定义为将对应位置元素相乘？譬如

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1c_1 & a_2c_2 & a_3c_3 \\ b_1d_1 & b_2d_2 & b_3d_3 \end{pmatrix}$$

那要看这种运算有没有用处．如果有实际来源或用途，我们当然可以定义这个运算．事实上，已经有人定义了这种运算，称为阿达马乘积（Hadamard product），Hadamard 乘积可以用于图像压缩算法．

还有别的矩阵乘法，例如克罗内克乘积（Kronecker product）．给定任两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，我们可以得到两个矩阵的直积，或称为克罗内克乘积 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$，其定义如下

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $p \times r$ 矩阵时，$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 是 $mp \times nr$ 矩阵．克罗内克乘积可以用于解线性矩阵方程.

在 MATLAB 中，Hadamard 乘积用符号 .∗ 表示，克罗内克乘积 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 用 $\mathrm{kron}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 表示，普通矩阵乘法用 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$ 表示．

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

1. 逐元素乘积（Hadamard 积）：

$$A.*B = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{bmatrix}$$

2. 矩阵乘积：

$$A*B = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

3. Kronecker 乘积：

$$\mathrm{kron}(A, B) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 14 & 16 \\ 15 & 18 & 20 & 24 \\ 21 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix}$$

以上这些所谓的乘法和普通的矩阵乘法，都在描述两个矩阵按某种规律对应于新的矩阵，在这一点上，它们的地位和作用是一样的．只不过教材中所说的矩阵乘法，更加普遍，就把“乘法”这个名字给它优先命名了．它完全可以取一个别的什么名字，不叫矩阵乘法.

向量有数量积，向量积，混合积，并没有特意把哪一个命名为“乘法”．一定要注意：可以叫“乘法”的运算有非常多种．千万不要认为：世界上只有一个乘法，并把矩阵乘法看做是这个“唯一乘法”在矩阵中的应用.

2.2　矩阵的分块及其运算

如果矩阵的行数和列数较大，分块可以简化计算．另外，分块也是研究矩阵的一个行之有效的方法.

2.2.1　矩阵的分块

有时候，我们用几条纵线和横线将矩阵分割为若干个小矩阵，这样就将大矩阵看作小矩阵构成的矩阵，这时我们就得到了**分块矩阵**．

例　若将矩阵 A 分块为 $\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$，则得到四个子矩阵，即

$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$，$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$，$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}$．这样，$A$ 就能表示为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

矩阵分块实例

例 2.4 将 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 分块为 $A = \left(\begin{array}{cc:ccc} 3 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 0 & 9 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 4 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right)$ 记

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, & A_{12} &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, & A_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A_{31} &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}, & A_{32} &= \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则 A 可表为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}$$

多种分块

$$A = \left(\begin{array}{ccc:cc} 3 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 0 & 9 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right), A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

[7]

分块矩阵例子

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ \hdashline 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 行的分隔方式为 $3 = 1 + 2$，
- 列的分隔方式为 $4 = 3 + 1$.

---

[7]其中 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 分别是 A 的分块.
根据不同的需要，可对一个矩阵进行不同的分块.

$$A=\begin{pmatrix}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{pmatrix}$$
$$=\left(\begin{array}{c:c:c:c}1&4&7&10\\2&5&8&11\\3&6&9&12\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}&B_{14}\end{pmatrix}$$

- 行的分隔方式为 $3=3$，
- 列的分隔方式为 $4=1+1+1+1$.

准对角矩阵 设 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 为方阵，称分块矩阵
$$\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$$
为准对角矩阵，其中未写出来的分块是零矩阵.

2.2.2 分块矩阵的运算规则

设 A 与 B 为同型矩阵，且采用相同的方式分块:
$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1t}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{st}\end{pmatrix}$$
则
$$A\pm B=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1t}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{s1}&C_{s2}&\cdots&C_{st}\end{pmatrix},C_{ij}=A_{ij}\pm B_{ij},\ i=1,2,\cdots,s,\ j=1,2,\cdots,t$$

分块矩阵的加减法 对于两个分块矩阵，它们可以分块做加减法的条件是:

1. 两个矩阵的行和列的数目相等;
2. 两个矩阵的行和列的分隔方式相同.

设 A 分块为:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$$

且 $\mu \in \boldsymbol{P}$，则

$$\mu A=\begin{pmatrix} \mu A_{11} & \mu A_{12} & \cdots & \mu A_{1t} \\ \mu A_{21} & \mu A_{22} & \cdots & \mu A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu A_{s1} & \mu A_{s2} & \cdots & \mu A_{st} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法 设矩阵 A 的列数与 B 的行数相等，把 A 与 B 分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tp} \end{pmatrix}$$

且关于 $i=1,2,\cdots,s,\quad k=1,2,\cdots,t,\quad j=1,2,\cdots,p$，分块 A_{ik} 的列数与 B_{kj} 的行数相同，即 $A_{ik}B_{kj}$ 有意义. 那么

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sp} \end{pmatrix}, C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{it}B_{tj}$$

两个分块矩阵可以分块相乘的要求是:

1. 第一个矩阵的列的数目等于第二个矩阵的行的数目;
2. 第一个矩阵的列的分隔方式等于第二个矩阵的行的分隔方式.

分块矩阵的转置 设 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$$

则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^{\mathrm{T}} & A_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{st}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

一些特殊矩阵的性质

性质. 分块对角阵和分块对角阵的乘积还是分块对角阵. 即有

$$
\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_nB_n \end{pmatrix},
$$

其中, A_i 和 B_i 是同阶的方阵, 对任何 $1 \leqslant i \leqslant n$.

性质. 分块上（下）三角阵和分块上（下）三角阵的乘积还是分块上（下）三角阵. 即有

$$
\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & * & \\ & & A_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & * & \\ & & B_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & B_n \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & & \\ & A_2B_2 & & * & \\ & & A_3B_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_nB_n \end{pmatrix},
$$

性质. 分块对角阵的逆矩阵还是分块对角阵. 即

$$
A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}
\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}
$$

其中要求 A_i 是可逆方阵, 对任何 $1 \leqslant i \leqslant n$.

注记. 分块对角阵的行列式等于对角线位置各子块的行列式的乘积, 既有 $|A| = |A_1|\,|A_2| \cdots |A_n|$.

分块矩阵的运算

> 分块矩阵的运算规则: 在运算有意义的前提下, 分块矩阵的运算方式与数字矩阵一致.

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$，计算 AB.

解 令 $A_1=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix}I&O\\A_1&I\end{pmatrix}$. 再将 B 做如下分块

$$B=\left(\begin{array}{cc}1&0\\-1&2\\\hdashline 1&0\\-1&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}.$$

这样，$AB=\begin{pmatrix}I&O\\A_1&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\A_1B_1+B_2\end{pmatrix}$. 而

$$A_1B_1+B_2=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix}$$

于是

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\-2&4\\-1&1\end{pmatrix}.$$

例 设

$$A=\begin{pmatrix}3&1&4&0&0\\5&8&6&0&0\\3&2&1&1&0\\4&3&5&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&3&1\\1&3&5\end{pmatrix}$$

计算 AB.

观察如何分块可以使得计算简便?

解 将 A，B 按下方式分块:

$$A=\left(\begin{array}{ccc;{2pt/2pt}cc}3&1&4&0&0\\5&8&6&0&0\\\hdashline 3&2&1&1&0\\4&3&5&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&O\\A_{21}&E\end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\\hdashline 0&3&1\\1&3&5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}\\B_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O\\B_{21}\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}O+OB_{21}\\A_{21}O+EB_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O\\B_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&3&1\\1&3&5\end{pmatrix}$$

例 2.5 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times l}$.

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\\\vdots\\A_mB\end{pmatrix}$$

$$B=(B_1,B_2,\cdots,B_l)$$

则

$$AB=A(B_1,B_2,\cdots,B_l)=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_l)$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}(B_1,B_2,\cdots,B_l)=\begin{pmatrix}A_1B_1&A_1B_2&\cdots&A_1B_l\\A_2B_1&A_2B_2&\cdots&A_2B_l\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_mB_1&A_mB_2&\cdots&A_mB_l\end{pmatrix}$$

例 2.6 设 A 为实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的矩阵，证明 $A=O$ 的充分必要条件是 $A^{\mathrm{T}}A=O$.

证明 必要性显然成立，只证明充分性. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

(1) 把矩阵 A 按列分块:

$$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

其中

$$A_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},\ j=1,2,\cdots,n$$

(2) 则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_1^{\mathrm{T}}\\A_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\A_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\ A_j^{\mathrm{T}}=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})$$

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}A_1^{\mathrm{T}}\\A_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\A_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(A_1,A_2,\cdots,A_n)=\begin{pmatrix}A_1^{\mathrm{T}}A_1&A_1^{\mathrm{T}}A_2&\cdots&A_1^{\mathrm{T}}A_n\\A_2^{\mathrm{T}}A_1&A_2^{\mathrm{T}}A_2&\cdots&A_2^{\mathrm{T}}A_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_n^{\mathrm{T}}A_1&A_n^{\mathrm{T}}A_2&\cdots&A_n^{\mathrm{T}}A_n\end{pmatrix}$$

(3) 因为

$$A^{\mathrm{T}}A=O$$

所以

$$A_j^{\mathrm{T}}A_j=a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0,\ j=1,2,\cdots,n$$

故

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0,\ j=1,2,\cdots,n$$

即

$$A=O$$

例　若 $AB=O$，那么 B 的每一列都是齐次方程组 $Ax=0$ 的解.

证 对 B 按列分块为 $B=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$，那么

$$O=AB=A(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\ldots,A\beta_n),$$

于是，对每个 i，都有

$$A\beta_i=0,$$

可见 B 的每个列都是 $Ax=0$ 的解.

例　设 $m\times n$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\alpha_n)$，求 AA^T 和 A^TA.

解 $AA^T=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_n\alpha_n^T.$

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\alpha_1^T\alpha_2&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1&\alpha_2^T\alpha_2&\cdots&\alpha_2^T\alpha_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\alpha_n^T\alpha_1&\alpha_n^T\alpha_2&\cdots&\alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}.$$

2.3　可逆矩阵

因为矩阵的运算没有除法，引入矩阵的“逆”，在一定程度上可以代替除法.

思路

矩阵有加法，减法，乘法，矩阵有没有除法呢?

如果类似实数定义矩阵的除法，则

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X}=\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$$

而事实上，以后我们会看到，这两个方程的解一般不相同．$\boldsymbol{A}$ 可逆时，两个方程的解分别是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$$

而矩阵乘法不满足交换律，一般 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

☛ 一句话：矩阵没有除法. 根本原因是因为矩阵乘法不满足交换律. 通过逆矩阵，完成了乘法的逆运算，实现了除法的功能．

我们来回顾一下一元一次方程的详细解答过程：

$$\begin{aligned} ax &= b\\ a^{-1}(ax) &= a^{-1}b\\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b\\ 1x &= a^{-1}b\\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

再来看看现在的二元一次方程组：

$$\begin{cases} 2x+3y=4\\ x+2y=7 \end{cases}$$

我们希望模仿前面的解法．因此设 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$. 此时原来的方程组变成：

$$AX=B$$

假设存在一个矩阵 A^{-1}，那么应该有 $A^{-1}A=I$．则有

$$\begin{aligned} AX &= B\\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B\\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B\\ IX &= A^{-1}B\\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

实际上，我们确实可以找到满足上面条件的 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$，从而得到方程组的解：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-13\\10\end{pmatrix}.$$

注记.

- 在数域 $\boldsymbol{P}$ 上，如果 $a, b \in \boldsymbol{P}$，且
$$ab = 1 \quad (ba = 1)$$
那么 a, b 互为逆元.

- 在 $\boldsymbol{P}^{n\times n}$ 上，关于任意 $A \in \boldsymbol{P}^{n\times n}$，总有
$$AE = EA = A$$
因此，单位矩阵 E 在 $\boldsymbol{P}^{n\times n}$ 中的地位相当于 1 在 $\boldsymbol{P}$ 中的地位.

- 于是，在 $\boldsymbol{P}^{n\times n}$ 中可仿照数域 $\boldsymbol{P}$ 中引入可逆矩阵这一概念.

2.3.1 逆矩阵的定义和性质

可逆矩阵 **定义 2.5** 设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得
$$AB = BA = E$$
则称 A 为可逆矩阵 (invertible matrix) (或非奇异矩阵), B 为 A 的逆矩阵 (inverse).

- 若 B 是 A 的逆矩阵，则 A 也是 B 的逆矩阵；
- 可逆矩阵的逆矩阵是唯一的；

  证明: 若 B 和 C 都是可逆矩阵 A 的逆矩阵，则
$$AB = BA = E,\ AC = CA = E$$
  于是
$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$
- 记可逆矩阵 A 的唯一逆矩阵为 A^{-1}，则
$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

注记 1.
1. 只有方阵才可能有逆矩阵；不是方阵，肯定不可逆.
2. 记号 A^{-1} 是一个特定的记号，不要错写为 $\frac{1}{A}$.
3. 在本课程中 $\frac{1}{A}, \frac{B}{A}$ 是错误的表达，不具备任何含义.

例 对角矩阵的逆矩阵还是对角矩阵，即如果矩阵
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$
则它的逆矩阵为（假设各个 a_i 均不为零）
$$B = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

存在着不可逆的矩阵（因此，我们无法给矩阵定义除法）

例 如下矩阵是不可逆的 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 是不可逆的,因为:任取二阶方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,则 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b \\ d & d \end{pmatrix}$ 不可能是单位矩阵.

可逆矩阵的性质

性质 2.3 设 A 和 B 是同阶可逆矩阵，则 AB 和 A^{T} 均可逆，且

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
2. $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$;
3. $(A^{-1})^{-1} = A$;
4. 若数 $\mu \neq 0$，则 μA 可逆，且 $(\mu A)^{-1} = \dfrac{1}{\mu}A^{-1}$;
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此在对矩阵方程中写矩阵逆的时候需要注意矩阵的位置.

例 假设 A，B 可逆，则有

1. $AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C$,
2. $XA = C \Rightarrow X = CA^{-1}$,
3. $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$,
4. $XAB = C \Rightarrow X = CB^{-1}A^{-1}$,
5. $ABX = C \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}C$.

2.3.2 矩阵可逆的充要条件

矩阵可逆的必要条件

- 数 $a \in \boldsymbol{P}$ 有逆元的充分必要条件是 $a \neq 0$.
- 矩阵是否有类似的性质?

性质 若矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$. [8]

证明 因为 A 可逆，所以存在方阵 B，使得

$$AB = E$$

于是

$$|A||B| = |AB| = |E| = 1$$

[8]后面将证明 $|A| \neq 0$ 也是矩阵 A 可逆的充分必要条件.

故 $|A| \neq 0$.

伴随矩阵 **定义 2.6** 设方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

且 A_{ij} 为行列式 $|A|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式，$i, j = 1, 2, \cdots, n$. 称矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵 (A 的代数余子式矩阵的转置).

在伴随矩阵 A^* 的表达式中，元素 A_{ij} 不是处在第 i 行第 j 列，而是处在第 j 行第 i 列.

例如，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

☛ 伴随矩阵为什么这样定义？是因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ 或 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 会得到一个非常漂亮的结果.

矩阵可逆的充分必要条件 **定理 2.2** 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$. 当 A 可逆时，有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

证明 充分性. 根据行列式展开性质，有

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

因为 $|A| \neq 0$，所以有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = E$$

同理可得

$$\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E$$

由定义 A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

根据前面内容，我们已经证明了必要性.

上例中满足 $AA^* = A^*A = |A|E$ 的伴随矩阵 A^*，有以下结论:

1. A 和 A^* 可交换.
2. 伴随可以理解为陪伴的意思. 从数学的角度看，即 A 具有的性质，A^* 也具有. 比如对称，可逆，正交，正定等.
   - 若 A 不可逆，则 A^* 也不可逆.
   - 若 A 可逆，则 A^* 也可逆.

伴随矩阵的贡献：从理论上给出了求逆矩阵的方法.

这一点和克拉默法则相似：理论意义重大，但实际计算中并不使用.

之前我们谈到：当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ 时，不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时，

1. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$;
2. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

现在给出其证明.

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 在 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{O}$$

即

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}.$$

同理，在 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}.$$

性质. *1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，且*

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}, \quad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

2. $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

3. $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

4. $(\boldsymbol{A}^*)^T = (\boldsymbol{A}^T)^*$.

分析：关于伴随矩阵，要抓住重要公式

$$\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

上述公式并不要求 $\boldsymbol{A}$ 可逆．$\boldsymbol{A}$ 可逆时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}.$$

证 1：已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，在 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ ，得

$$\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$$

已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ ，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，知 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$$

下面证明

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{*}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$$

将公式 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 替换为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{*}\boldsymbol{A}^{-1}=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{I}$$

两边右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{*}=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{A}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

证 2：由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$，取行列式得到：

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^{*}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}|^{n}.$$

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^{*}|=0$，此时命题也成立．

证 3：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$，则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}=k^{n-1}\boldsymbol{A}_{ij},$$

故

$$(k\boldsymbol{A})^{*}=\begin{pmatrix} k^{n-1}\boldsymbol{A}_{11} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{21} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{n1} \\ k^{n-1}\boldsymbol{A}_{12} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k^{n-1}\boldsymbol{A}_{1n} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^{*}.$$

证 4：由伴随矩阵的定义知

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}.$$

用 $\boldsymbol{M}_{ij},\boldsymbol{A}_{ij}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的余子式，代数余子式．注意：划去 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行，第 j 列，意味着在 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 j 行，第 i 列，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置元素的余子式为 $\boldsymbol{M}_{ji}$. 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的代数余子式为 $\boldsymbol{A}_{ji}$．从而伴随矩阵 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^*$ 在 (i,j) 位置的元素为 $\boldsymbol{A}_{ij}$，得证 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

例 求二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的逆矩阵．

解：因为

$$\begin{aligned}A_{11}&=(-1)^{1+1}d=d, & A_{12}&=(-1)^{1+2}c=-c,\\ A_{21}&=(-1)^{2+1}b=-b, & A_{22}&=(-1)^{2+2}a=a.\end{aligned}$$

故

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

所以当 $|A|=ad-bc\neq 0$ 时，有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

请记住这个公式．

例 2.7 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

判断方阵 A 是否可逆，若可逆，求其逆矩阵.

解 (1)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}=2$$

故 A 可逆.

(2) 行列式 $|A|$ 的元素的余子式:

$$\begin{aligned}M_{11}&=2, & M_{12}&=3, & M_{13}&=2\\ M_{21}&=-6, & M_{22}&=-6, & M_{23}&=-2\\ M_{31}&=-4, & M_{32}&=-5, & M_{33}&=-2\end{aligned}$$

行列式 $|A|$ 的元素的代数余子式:

$$\begin{array}{lll} A_{11}=M_{11}=2, & A_{12}=-M_{12}=-3, & A_{13}=M_{13}=2 \\ A_{21}=-M_{21}=6, & A_{22}=M_{22}=-6, & A_{23}=-M_{23}=2 \\ A_{31}=M_{31}=-4, & A_{32}=-M_{32}=5, & A_{33}=M_{33}=-2 \end{array}$$

伴随矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

逆矩阵

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$

解 由于 $\det A=2\neq 0$，所以 A 和 A^* 都可逆，于是我们在 $AA^*=(\det A)I$ 两边同时取逆矩阵，可得:

$$(A^*)^{-1}A^{-1}=\frac{1}{\det A}I.$$

因此，

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

例 已知 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=\frac{1}{27}$. 求行列式 $|(3A)^{-1}-27A^*|$ 的值.

解: 由于 $|A|=\frac{1}{27}\neq 0$，所以 A 可逆. 注意到 $A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{27}A^{-1}$，有

$$\left|(3A)^{-1}-27A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-27|A|A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|.$$

又因为 $|A^{-1}|$ 为 3 阶行列式，所以

$$\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left|A^{-1}\right|=-\frac{8}{27}\frac{1}{|A|}=-8.$$

因此

$$\left|(3A)^{-1}-27A^*\right|=-8.$$

例 设 A, B 均为 n 阶矩阵，且 $|A|=2$, $|B|=3$，试求 $\left|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}\right|$.

解：由题设可知 A, B 均可逆，所以 $A^* = |A|A^{-1}$，$B^* = |B|B^{-1}$. 因此

$$\begin{aligned}\left|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}\right| &= \det\left(|B|A^{-1}B^{-1} - |A|A^{-1}B^{-1}\right) \\ &= \det\left(A^{-1}B^{-1}\right) = \left|A^{-1}\right|\left|B^{-1}\right| \\ &= \frac{1}{|A||B|} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

方阵可逆的另一充分条件及逆矩阵 **推论 2.1** 若 A 与 B 为同阶方阵，且 $AB = E$，则 A 与 B 均可逆，且

$$A^{-1} = B,\ B^{-1} = A$$

证明 由 $AB = E$，可得

$$|A||B| = |AB| = |E| = 1$$

于是 $|A| \neq 0, B| \neq 0$，故 A, B 可逆.

由 $AB = E$，有

$$A^{-1}AB = A^{-1}$$

即 $A^{-1} = B$.

同理可得 $B^{-1} = A$.

例 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，计算 AB 和 BA.

注记. 在这个例子中，AB 为单位阵，但是 BA 不是单位阵. 因此，我们一般不考虑非方阵的逆矩阵.

例 已知 $A^2 + 2A + E = 0$，求证：$A^{-1} = -A - 2E$.

证：由 $A^2 + 2A + E = 0$，可得 $-A^2 - 2A = E$，即有

$$A(-A - 2E) = E$$

所以

$$A^{-1} = -A - 2E.$$

例 已知方阵 A 满足等式

$$2A^2 - 3A + 4I = O,$$

证明 A 可逆，并求出它的逆.

解 将方程改写:

$$A(2A - 3I) = -4I.$$

两侧同乘 $-\frac{1}{4}$:

$$-\frac{1}{4}A(2A - 3I) = I.$$

即

$$A(-\frac{1}{4}(2A - 3I)) = I.$$

这表明 A 可逆，且其逆矩阵为：$A^{-1}=-\frac{1}{4}(2A-3I)$.

例 设 A 是三阶方阵，且 $\det A=\frac{1}{3}$，求 $\det((2A)^{-1}-3A^*)$.

解 先化简

$$(2A)^{-1}-3A^*=\frac{1}{2}A^{-1}-3(\det A)A^{-1}=-\frac{1}{2}A^{-1},$$

再求值：

$$\det((2A)^{-1}-3A^*)=\det\left(-\frac{1}{2}A^{-1}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\det(A^{-1})=-\frac{1}{8}\frac{1}{\det A}=-\frac{3}{8}.$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-2&7\\0&0&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&9&5\\0&1&-7\\0&0&2\end{pmatrix}$. 求 $\det(AB^T)$, $\det(A+B)$, $\det(2A)$, $\det(A^{-1})$, $\det(2A^2B^{-1})$.

解 可以算出 $\det A=6$，$\det B=8$．于是，

- $\det(AB^T)=\det A\det B=48.$
- $\det(A+B)=\begin{vmatrix}5&11&9\\0&-1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=5.$
- $\det(2A)=2^3\det A=48.$
- $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}=\frac{1}{6}.$
- $\det(2A^2B^{-1})=2^3(\det A)^2\frac{1}{\det B}=36.$

准对角矩阵的逆矩阵

例 2.8 设 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 为可逆方阵. 证明准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$$

可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&&&\\&A_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&A_s^{-1}\end{pmatrix}$$

证明

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1A_1^{-1} & & & \\ & A_2A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sA_s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{k_1} & & & \\ & E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{k_s} \end{pmatrix} = E$$

其中 $E_{k_1}, E_{k_2}, \cdots, E_{k_s}$ 分别是与 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 同阶的单位矩阵，从而 A 可逆，且 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

矩阵分块为准对角矩阵求逆矩阵

例 2.9 求 A^{-1}，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

解 把 A 按如下方式分块成准对角矩阵:

$$A = \left(\begin{array}{cc:c:cc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

记

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ A_2 = 1,\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

由于

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2^{-1} = 1,\ A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

例 2.10 设 A 为例 2.7 中的可逆矩阵，矩阵 B 及 C 为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = ABA^{-1}$$

求 C^k，其中 k 是大于 1 的自然数.

解 因为 B 是对角矩阵，容易得出

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

又

$$\begin{aligned} C^k =&(ABA^{-1})(ABA^{-1})(ABA^{-1})\cdots(ABA^{-1})(ABA^{-1}) \\ =&AB(A^{-1}A)B(A^{-1}A)BA^{-1}\cdots AB(A^{-1}A)BA^{-1} \\ =&ABEBEBE\cdots BEBA^{-1} \\ =&ABBB\cdots BBA^{-1} \\ =&AB^kA^{-1} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} C^k =&AB^kA^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} 3\times 2^k - 3 & 3\times 2^k - 6 & -3\times 2^k + 5 \\ 2^k - 3 & 2^k - 6 & -2^k + 5 \\ 3\times 2^k - 6 & 3\times 2^k - 12 & -3\times 2^k + 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

用逆矩阵来证明克拉默法则

证明：改写方程组为矩阵方程 $AX = \beta$，由 $|A| \neq 0$ 得 A 可逆，则 $A^{-1}AX = A^{-1}\beta$，即 $X = A^{-1}\beta$，代入方程 $AX = AA^{-1}\beta = \beta$，即 $X = A^{-1}\beta$ 是方程的解. 又根据逆矩阵的唯一性，知 $X = A^{-1}\beta$ 是方程组的唯一的解向量.

由逆矩阵的计算公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，有 $X=A^{-1}\beta=\frac{1}{|A|}A^*\beta$，即

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+\cdots+b_nA_{n1}\\ b_1A_{12}+\cdots+b_nA_{n2}\\ \vdots\\ b_1A_{1n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

也就是说

$$x_j=\frac{1}{|A|}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj})=\frac{1}{|A|}|A_j|\,(j=1,2,\cdots,n)$$

小结

判断是否存在方阵B使得	简化为	是否存在方阵B使得
$AB=BA=E$	$\Rightarrow$	$AB=E$

公式

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

从理论上给出了求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的方法，但因计算量较大，实际计算中并不使用此方法．下一节将给出一种简单实用的方法：用矩阵的初等变换，求逆矩阵.

因为伴随矩阵的理论重要性，关于伴随矩阵的全部内容要非常清楚.

2.3.3 逆矩阵的应用

逆矩阵的应用

甲方向乙方发送指令，双方做了以下两个约定.

（1）26 个英文字母与数字之间的对应关系如下：

A	B	C	$\cdots$	X	Y	Z
1	2	3	$\cdots$	24	25	26

（2）将指令中从左至右每 3 个字母分成一组，排成一列，将这些列构成矩阵.

若要发出指令 ACTION，根据约定，此信息的编码是 $1,3,20;9,15,14$．可以写成一个矩阵（明文）：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 9\\ 3 & 15\\ 20 & 14 \end{pmatrix}$.

取一个三阶方阵（密钥）: $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$ 进行加密，发送密文:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&9\\3&15\\20&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

收到密文信息 $\boldsymbol{C}$ 后，再通过约定的方式解密.

如何解密? 这是逆矩阵的应用问题，明文 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}$.

2.4 初等变换和初等矩阵

矩阵的初等变换是讨论矩阵的一个有力工具，在矩阵理论中有广泛的应用.

2.4.1 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换

定义 2.7 称矩阵的以下三种变换为矩阵的初等行 (列) 变换:

1. 交换矩阵的两行 (列);
2. 用非零数乘矩阵的某一行 (列);
3. 将某一行 (列) 的倍数加到另一行 (列).

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换.

矩阵等价 **定义 2.8** 若矩阵 A 可通过一系列初等变换化为矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价，记为 $A\sim B$ (有时也记为 $A\cong B$).

- 如果 A 经过有限次行初等变换可以得到矩阵 B，那么就说 A 和 B 是 行等价的，记作 $A\overset{r}{\sim}B$ (或 $A\overset{r}{\cong}B$).
- 如果 A 经过有限次列初等变换可以得到矩阵 B，那么就说 A 和 B 是 列等价的，记作 $A\overset{c}{\sim}B$ (或 $A\overset{c}{\cong}B$).

矩阵等价的性质

1. **自反性**: $A\sim A$;
2. **对称性**: 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$;
3. **传递性**: 若 $A\sim B$，且 $B\sim C$，则 $A\sim C$.

证明 性质 (1) 与 (3) 显然. 性质 (2) 基于如下事实:

对矩阵 A 施行一次初等变换得到 B，那么对矩阵 B 施行一次同一种初等变换又可得到 A. 以初等行变换为例:

(1) 若交换 A 的第 i 行与第 j 行得到 B，那么交换 B 的第 i 行与第 j 行又得到 A;

(2) 若把 A 的第 i 行乘以非零数 μ 得到 B，把 B 的第 i 行乘以 $1/\mu$ 得到 A;

(3) 若把 A 的第 j 行乘以数 ν 加到第 i 行得到 B，那么把 B 的第 j 行乘以数 $-\nu$ 加到第 i 行又得到 A.

等价标准形 (也称为相抵标准形) **定理 2.3** 任一矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 均与形如
$$J=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$
的矩阵等价，称 J 为 A 的等价标准形.

例如 $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

证明 (1) $A=O$ 时显然成立，现设 $A\neq O$. 经行或列的交换，A 可化为左上角元素不为零的矩阵，所以不妨设 $a_{11}\neq 0$.

(2) 进行初等变换:
$$A \xrightarrow[c_i-(a_{11}^{-1}a_{1j})c_1,\ j=2,3,\cdots,n]{r_i-(a_{11}^{-1}a_{i1})r_1,\ i=2,3,\cdots,m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
其中 A_1 是 $(m-1)\times(n-1)$ 型矩阵.

(3) 对 A_1 重复上述步骤可得 A 的等价标准形为 J.

例子. 3×4 矩阵的等价标准形有如下几种
$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

求矩阵的等价标准形的步骤如下:

- 将 a_{11} 变为 1，再将 r_1 和 c_1 的其他元素变为 0
- 将 a_{22} 变为 1，再将 r_2 和 c_2 的其他元素变为 0
- ························

化等价标准形例题

例 2.11 设
$$A=\begin{pmatrix} 1&1&3&1\\1&3&2&5\\2&2&6&7\\2&4&5&6 \end{pmatrix}$$
用初等变换将矩阵 A 化为等价标准形.

解 对矩阵 A 施行初等变换:

$$A \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1,\ r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-c_1]{c_2-c_1,\ c_3-3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-2c_2]{c_3+\frac{1}{2}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}r_3]{\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最后一个矩阵即是 A 的等价标准形.

行阶梯形

应用矩阵的初等变换时，有时只能对矩阵施行初等行变换或初等列变换. 现在考虑对矩阵只施行初等行变换**或**只施行初等列变换时，矩阵的等价形式.

定义 2.9 称矩阵 $F=(d_{ij})_{m\times n}$ 为行阶梯形矩阵，简称行阶梯形，若 F 的第 1 至第 r 行 $(1\le r\le m)$ 不全为零，其余行全为零，且第 1 至第 r 行的首非零元素 $d_{1j_1}, d_{2j_2}, \cdots, d_{rj_r}$ 的列标满足: $j_1<j_2<\cdots<j_r$. [9]

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形 **定义 2.10** 若矩阵 $G=(d_{ij})_{m\times n}$ 为行阶梯形矩阵，且从第 1 至第 r 行的首非零元素全为 1，它所在列的其它元素均为 0，则称 G 为行最简形矩阵，简称行最简形. [10]

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[9]行阶梯形的特征: 可画出一条阶梯线，阶梯线的横向线的下方元素全为 0, 竖线右边元素非 0(台阶竖线的长度只有 1 行，横线的长度无约束.)

[10]行最简形矩阵就是其每一行的第一个非零元素为 1，它所在列的其它元素均为 0 的矩阵.

列阶梯形矩阵和列最简形矩阵可以类似地定义.

例

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0&-1\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

A 和 B 都是行阶梯形矩阵，但 A 也是行最简形矩阵，而 B 不是.

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix},\qquad A_4=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

上列矩阵中，__________ 是行阶梯形，_______ 是行最简形.

行 (列) 初等变换的等价标准形

定理 2.4 对任意一个矩阵施行初等行 (列) 变换，可将其等价地化为行 (列) 阶梯形矩阵，进而可等价地化为行 (列) 最简形矩阵. [11]

1. 由本章引例知，解方程组只需把增广矩阵化为行最简形.
2. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 的行最简形再施以初等列变换，总可以化为标准形 $F=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$.

   特点：左上角是一个单位矩阵，其余元素全为零. 标准形由 m,n,r 三个数完全确定，r 是非零行的行数.
3. 所有与 A 等价的矩阵组成一个集合，标准形 F 是其中结构最简单的矩阵

例 2.12 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&3&2&5\\2&2&6&7\\2&4&5&6\end{pmatrix}$$

将矩阵 A 化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

解 对矩阵 A 施行**初等行变换**，化为行阶梯形矩阵:

$$A\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1,\ r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&2&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{\frac{1}{5}r_3}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

[11] 定理的证明类似于定理 2.3 的证明.

进一步施行初等行变换，将 A 化为行最简形矩阵:

$$A \xrightarrow[r_2-4r_3]{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_2]{\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等行变换演示

https://textbooks.math.gatech.edu/ila/demos/rowred2.html

https://textbooks.math.gatech.edu/ila/demos/rowred1.html

2.4.2 初等矩阵

初等矩阵

为了刻画矩阵经过初等变换后与原来矩阵的关系，下面引入初等矩阵，建立初等变换与初等矩阵的联系，进一步刻画矩阵的初等变换与矩阵的等价.

对单位矩阵施行一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

- 三类初等行变换得到三类初等矩阵；
- 三类初等列变换得到三类初等矩阵.

通过矩阵乘法实现初等变换

实验 1 分别用 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 左乘 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

实验 2 分别用 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 右乘 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

初等矩阵：$P(i,j)$ 将单位矩阵 I 的第 i 行和第 j 行交换，记所得的矩阵为 $P(i,j)$

在矩阵乘法可以进行的前提下，

- $P(i,j)A$ 交换了 A 的第 i, j 行
- $AP(i,j)$ 交换了 A 的第 i, j 列

简言之，左乘行变，右乘列变！

实验 3 分别用 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 左乘 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&6&8&10&12\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\6&8&10&12&14\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}.$$

请自行尝试右乘

初等矩阵：$P(i(c))$

将单位矩阵 I 的第 i 行乘以非零常数 c，记所得的矩阵为 $P(i(c))$

在矩阵乘法可以进行的前提下，

- $P(i(c))A$ 是 A 的第 i 行乘以 c 所得的矩阵
- $AP(i(c))$ 是 A 的第 i 列乘以 c 所得的矩阵

仍然是左乘行变，右乘列变！

实验 4 分别用 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 左乘 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&7&10&13&16\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\5&8&11&14&17\\4&5&6&7&8\end{pmatrix}.$$

请自行尝试右乘

初等矩阵: $P(i(c),j)$ 将单位矩阵 I 的第 i 行的 c 倍加入第 j 行，记所得的矩阵为 $P(i(c),j)$. 当然，$P(i(c),j)$ 也可以认为是 I 的第 j 列的 c 倍加入第 i 列.

在矩阵乘法可以进行的前提下，

- $P(i(c),j)A$ 是 A 的第 i 行的 c 倍加入第 j 行所得的矩阵
- $AP(i(c),j)$ 是 A 的第 j 列的 c 倍加入第 i 列所得的矩阵

> 考虑到 $P(i(c),j)$ 的两种理解方式，上述结果仍然是左乘行变，右乘列变!

初等行变换对应的初等矩阵

$$P(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&\ddots&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\text{第}i\text{行}\\\\\text{第}j\text{行}\\\\\\\end{array}$$

$$P(i(c))=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&c&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\text{第}i\text{行},\ c\neq 0$$

$$P(i(c),j)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&c&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\text{第}i\text{行}\\\\\text{第}j\text{行}\\\\\\\end{array}$$

由初等列变换得到的初等矩阵也为这三类矩阵.

初等矩阵与初等变换 用初等矩阵左乘矩阵 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等行变换

初等矩阵	左乘矩阵对应的初等变换
$E(i,j)$	第 i 行和第 j 行交换
$E(i(k)), k\neq 0$	第 i 行乘以 k 倍
$E(i(k)j), i\neq j$	第 j 行加上第 i 行的 k 倍

用初等矩阵右乘矩阵 A $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应的初等列变换

初等矩阵	右乘矩阵对应的初等变换
$E(i,j)$	第 i 列和第 j 列交换
$E(i(k)), k\neq 0$	第 i 列乘以 k 倍
$E(i(k)j), i\neq j$	第 j 列加上第 i 列的 k 倍

初等矩阵的性质 **性质 2.4** 初等矩阵都为可逆矩阵，其逆矩阵仍为初等矩阵，且

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j),\ P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1})),\ P(i(c),j)^{-1}=P(i(-c),j)$$

[12]

初等变换与初等矩阵的关系 **定理 2.5** 对矩阵施行一次初等行 (列) 变换，等效于对该矩阵左 (右) 乘一个相应的初等矩阵.

证明 以第三种初等行变换为例证明定理. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则

$$P(i(c),j))A=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[12]自己不难证明这些性质.

注记. • 若 $A \overset{r}{\cong} B$，那么存在有限个初等矩阵 $E_1,...,E_k$ 使得 $B = E_k ... E_1 A$；

- 若 $A \overset{c}{\cong} B$，那么存在有限个初等矩阵 $E_1,...,E_k$ 使得 $B = AE_1 ... E_k$；
- 若 $A \cong B$，那么存在有限个行初等矩阵 $P_1,...,P_k$ 和列初等矩阵 $Q_1,...Q_\ell$，使得 $B = P_k ... P_1 AQ_1 ... Q_\ell$.

等价刻画方阵可逆 **定理 2.6** 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $A \sim E$.

证明 充分性. 设 $A \sim E$，于是存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E$$

由方阵的行列式的性质，得

$$|P_s| \cdots |P_2|\ |P_1|\ |A|\ |Q_1|\ |Q_2| \cdots |Q_t| = |E| = 1$$

从而 $|A| \neq 0$，故 A 可逆.

必要性. 设 A 可逆，且 A 的等价标准型为 J. 于是存在初等矩阵 $R_1, R_2, \cdots, R_p$ 和 $S_1, S_2, \cdots, S_q$，使得

$$R_p \cdots R_2 R_1 A S_1 S_2 \cdots S_q = J$$

由于 $R_1, R_2, \cdots, R_p$，$S_1, S_2, \cdots, S_q$ 和 A 均可逆，故 J 可逆. 于是 J 只能是单位矩阵，即 $A \sim E$.

初等矩阵刻画方阵可逆及矩阵等价

定理 2.7 方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可表为若干初等矩阵的乘积.

证明 充分性是显然的，只证明必要性. 由定理 2.6, 存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E$$

故

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1}$$

且 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots, P_s^{-1}$ 和 $Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \cdots, Q_t^{-1}$ 也是初等矩阵.

设 A 和 B 为 $m \times n$ 矩阵，那么

1. $A \overset{r}{\sim} B \Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆阵 P，使得 $PA = B$.
2. $A \overset{c}{\sim} B \Longleftrightarrow$ 存在 n 阶可逆阵 Q，使得 $AQ = B$.

证 $A \overset{r}{\sim} B \Longleftrightarrow A$ 经有限次初等行变换变成 B.

$\Longleftrightarrow$ 存在有限个 m 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使得 $P_1 P_2 \cdots P_l A = B$.

$\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $PA = B$.

推论 2.3 设 A 与 B 为同型矩阵，则 $A \sim B$ 的充分必要条件是存在可逆矩阵 P 和 Q，使得 $PAQ = B$. [13]

小结

[13]由定理 2.5 和定理 2.7 得到.

1. 矩阵的初等变换.
2. 矩阵 A 和矩阵 B 等价：经有限次初等变换互换.
3. 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵的特点.
4. 初等矩阵的作用 1：左行右列.
5. 初等矩阵的作用 2：

$$A \text{ 可逆} \iff \text{存在有限个初等矩阵} P_1, \cdots, P_l\text{，使得} A = P_1 \cdots P_l$$

6. 重要定理：$A \sim B \iff$ 存在可逆矩阵 P, Q，使 $PAQ = B$.
7. 结论：方阵 A 可逆的充要条件是 $A \overset{r}{\sim} E$ (与下一节矩阵的秩有关).

2.4.3 利用初等变换求逆矩阵

求逆矩阵的初等行变换法

当 $|A| \neq 0$ 时

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l$$

$$P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E \tag{4}$$

$$P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} E = A^{-1} \tag{5}$$

(4)式表明 A 经过一系列初等行变换可变成 E，(5)式表明 E 经过同一系列初等行变换则变成 A^{-1}. 利用分块矩阵记法，将两式合并

$$P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} (A, E) = \left(E, A^{-1}\right) \quad \text{或} \quad (A, E) \overset{r}{\sim} \left(E, A^{-1}\right)$$

同时完成了两步：(i) 判断 A 是否可逆；(ii) 计算 A^{-1}.

初等行变换求逆矩阵的方法

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$$

初等列变换求逆矩阵的方法

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \hdashline A^{-1} \end{pmatrix}$$

例 2.13 求 A^{-1}，其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

解 对 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$ 进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3r_3, r_3+2r_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+9r_2]{2r_3}\begin{pmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}3&0&0&18&9&12\\0&-2&0&-8&-4&-6\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}r_1]{-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&A^{-1}\end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}6&3&4\\4&2&3\\9&4&6\end{pmatrix}$$

例 利用行初等变换求 $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}.

解 $(A\quad E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[-2r_3+r_1]{-r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

求出逆矩阵，一定要验证.

用初等行变换求逆矩阵的步骤如下:

$$\text{矩阵}\xrightarrow[\text{变为}]{\text{从左到右}}\text{上三角阵}\xrightarrow[\text{变为}]{\text{从右到左}}\text{对角阵}\to\text{单位阵}$$

矩阵可逆的判定方式

- 曾经 判断是否存在方阵 B，使得 $AB=E$.
- 曾经 矩阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow |A|\neq 0$
- 现在 判断是否有 $A\overset{r}{\sim}E$

逆矩阵的计算方式

- 曾经 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.
- 现在 $\begin{pmatrix}A&E\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}E&A^{-1}\end{pmatrix}$.

现在我们有两种方法计算逆矩阵：初等变换法和伴随矩阵法．前者适合计算，后者适合理论推导和阶数较小的逆矩阵计算．

注记. *用初等行变换求逆矩阵时，必须始终做行变换，其间不能做任何列变换.（绝对不能做行列的交替变换!! 原因之一：初等行变换求逆矩阵，其实就是高斯消元法解矩阵方程.）*

注记. 如果在过程中发现矩阵的某一行或列全为零，则该矩阵不可逆.

例　判断 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$ 是否可逆?

解

$$\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right),$$

因此，A 不可逆.

用初等行变换求解矩阵方程

对于矩阵方程 $AX=B$，如果 A 可逆，那么 $X=A^{-1}B$.

$$A^{-1}(A,B)=\left(E,A^{-1}B\right),\text{即有}(A,B)\overset{r}{\sim}\left(E,A^{-1}B\right)$$

对于矩阵方程 $AX=B$，也可以用初等行变换 $\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}E & A^{-1}B\end{pmatrix}$ 求解出 X.

对于矩阵方程 $AXB=C$，如果 A,B 都可逆，那么 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

对于更复杂的矩阵方程，往往需要根据矩阵的运算性质，先化简再求值.

例　设 $(2I-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，其中 I 是 4 阶的，B,C 如下，求 A.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

解　对 $(2I-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$ 两侧左乘 C，得到 $(2C-B)A^T=I$，可见 $A^T=(2C-B)^{-1}$，下面计算 $(2C-B)^{-1}$.

$$(2C-B,I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

可见，

$$(2C-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

因此，

$$A = (A^T)^T = [(2C - B)^{-1}]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

例　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

解:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 + r_3 \\ r_3 \times (-1)}]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{array}\right).$$

所以

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

以上是解矩阵方程的一个重要方法，也是一个必须掌握的题型.

在解题中有一处细节要注意：不要在解题的开始就写上已知 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆，暂时还是未知的. 严格地讲就不能出现该写法.