线性代数

第 3 章 线性方程组

谭 兵 副教授
西南大学数学与统计学院
https://bingtan.me/

2025 年 4 月 11 日

目录

第 3 章　线性方程组

对于方程个数等于未知量个数, 但系数行列式为零的线性方程组, 或更一般线性方程组 (方程个数不等于未知量个数), 解的情况还不清楚.

这一章讨论一般的线性方程组. 首先利用矩阵理论得到线性方程组可解性的判别方法. 然后通过 n 元向量的有关理论，讨论线性方程组解的结构.

本章内容基本脉络

$$
\begin{tikzcd}
(\S1)\ Ax=b \arrow[r, Rightarrow] & x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \arrow[r, Rightarrow] & (\S2)\ \text{线性表示} \arrow[d, Rightarrow] \\
 & (\S4)\ \text{向量组的秩} \arrow[r, Rightarrow] & (\S5)\ \text{解的结构} \\
(\S1)\ Ax=0 \arrow[r, Rightarrow] & x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0 \arrow[r, Rightarrow] & (\S3)\ \text{线性相关} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

阅读本章，请注意思考两个重要问题:

1. 什么是极大无关组?
2. 秩的本质是什么?

概略地说，这两个概念要结合几何意义去理解.

极大无关组相当于坐标系. 例如在三维空间取定 10 个非零向量，假设它们都在同一个平面内，那么在这些向量中随便找两个不共线的向量，就可以线性表示余下的所有向量. 这两个向量就是一个极大无关组，它们就像坐标系一样，可以组合出这个平面内的任意向量.

这个极大无关组中所含向量的个数，就是这 10 向量的秩. 其本质是这 10 个三维向量所能构成的子空间的维数. 它们都在一个平面上，最多只能构成一个 2 维子空间.

矩阵的秩，表面上是高斯消元法过程中，最后剩下的非零行的行数. 其本质是：矩阵的行向量（或者列向量）所张成的子空间的维数.

本章还将学习全书最重要的结论：线性方程组解的结构. 另外要非常熟悉以下知识点：

1. $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解的充要条件；有非零解的充要条件.
2. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，有唯一解，有无穷多解的充要条件.

3.1　线性方程组的可解性

本节先讨论一般线性方程组 (方程个数不一定等于未知量个数) 是否有解及解的个数.

3.1.1　高斯消元法

- 对于由多个多元线性方程构成的线性方程组，其消元过程应该程序化、规范化.

- 高斯消元法就是程序化、规范化的消元法.
- 我们首先在线性方程组上体会高斯消元法.
- 然后在线性方程组的增广矩阵上使用高斯消元法，以便更为简洁地解方程组.

高斯消元法举例

例 1　解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

解　第一个目标是消 x_1，首先交换第一个和第三个方程，得到:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

然后，将第一个方程的 -1 倍加入到第二个方程，将第一个方程的 -3 倍加入到第三个方程，得到:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_2 + 8x_3 = -3 \end{cases}$$

第二个目标是消 x_2，将第二个方程的 -5 倍加入到第三个方程，得到:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ -7x_3 = 2 \end{cases}$$

第三个方程乘以 $-\frac{1}{7}$，得到:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_3 = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

最后通过代入法解出方程组的唯一一个解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7} \\ x_2 = -\dfrac{1}{7} \\ x_3 = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

例 2　解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 = & -2 \\ 2x_1 + & 5x_2 + & 9x_3 = & 3 \\ 3x_1 + & 7x_2 + & 14x_3 = & 8 \\ - & x_2 + & x_3 = & 7 \end{cases}$

解　第一个目标是消 x_1，将第一个方程的 -2 倍加入到第二个方程，将第一个方程的 -3 倍加入到第三个方程，得到:

$$\begin{cases} x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 = & -2 \\ - & x_2 + & x_3 = & 7 \\ - & 2x_2 + & 2x_3 = & 14 \\ - & x_2 + & x_3 = & 7 \end{cases}$$

第二个目标是消 x_2，将第二、四个方程乘以 -1，第三个方程乘以 $-\frac{1}{2}$，得到:

$$\begin{cases} x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 = & -2 \\ & x_2 - & x_3 = & 7 \\ & x_2 - & x_3 = & 7 \\ & x_2 - & x_3 = & 7 \end{cases}$$

将第二个方程的 -1 倍加入第三、四个方程，得到:

$$\begin{cases} x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 = & -2 \\ & x_2 - & x_3 = & 7 \\ & & 0 = & 0 \\ & & 0 = & 0 \end{cases}$$

此时，第三、四个方程已经变成恒等式了，是冗余的，可以删去，得到:

$$\begin{cases} x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 = & -2 \\ & x_2 - & x_3 = & 7 \end{cases}$$

此时，方程组已经化为“阶梯形”，可以使用代入法了，将第二个方程变形为 $x_2 = x_3 - 7$，再代入第一个方程，得到：

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 19 \\ x_2 = x_3 - 7 \end{cases}$$

此时，容易发现，x_3 不受约束了，可以取任意值，即**自由未知量**. 如果我们对 x_3 任取一个值 k，那么总可以对应算出 x_1 和 x_2 的解，于是方程有无数个解，可以表示如下形式（其中，k 取任意实数）：

$$\begin{cases} x_1 = & -7k + 19 \\ x_2 = & k - 7 \\ x_3 = & k \end{cases}$$

例 3　解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{cases}$

解　第一个目标是消 x_1，将第一个方程的 -3 倍加入到第二个方程，将第一个方程的 -2 倍加入到第三个方程，得到：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ \qquad 5x_2 - 4x_3 \qquad - 7x_5 = 0 \\ \qquad 5x_2 - 4x_3 \qquad - 7x_5 = 4 \end{cases}$$

第二个目标是消 x_2，将第二个方程的 -1 倍加入第三个方程，得到：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ \qquad 5x_2 - 4x_3 \qquad - 7x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0x_5 = 4 \end{cases}$$

第三个方程是矛盾方程，因此此方程组无解.

- 线性方程组的解有三种可能：1. 有唯一解，2. 有无数个解，但是可以写出通解形式，3. 无解
- 高斯消元法总是把线性方程变为同解的方程组，变换的目标是得到“阶梯形”方程组
- 高斯消元法所使用的变换有如下三种：
  1. 交换两个方程的位置
  2. 用一个非零数乘以一个方程
  3. 把一个方程的某个倍数加到另一个方程上

为了叙述方便，称上述三个变换为**线性方程组的初等变换**.

隐去线性方程组的未知量，可以将一个线性方程组用其增广矩阵表示，在增广矩阵上进行高斯消元法会更加简洁.

3.1.2 线性方程组的相容性

一般线性方程组

n 个未知量 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+\cdots+ & a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+\cdots+ & a_{2n}x_n=b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+\cdots+ & a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

系数矩阵 A 与增广矩阵 $\bar{A}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$

线性方程组的解

方程组的解 若分别用 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \boldsymbol{P}$ 替换线性方程组中 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，方程组中 m 个方程同时成为等式，则称数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个**解**.

- 本章都在给定的数域 $\boldsymbol{P}$ 上考虑线性方程组，即方程组的系数即解都在数域 $\boldsymbol{P}$ 中.
- 问题:
  1. 如何判断线性方程组是否有解;
  2. 如果有解，解的个数;
  3. 如果有无穷多个解，如何来表示这无穷多个解 (即解的结构).

线性方程组的初等变换

定义 3.1 以下三种变换称为线性方程组的初等变换:

1. 交换方程组中方程的次序;
2. 用非零数乘方程组中某个方程;
3. 将某个方程的倍数加到另一个方程.

容易验证线性方程组的初等变换把线性方程组变为与之同解的线性方程组;

- 对方程组进行初等变换等价于对增广矩阵进行初等行变换;

- 对增广矩阵的前 n 列进行交换列的初等列变换等价于交换方程组中未知量的顺序；
- 对增广矩阵进行初等行变换和前 n 列进行交换列的初等列变换，把方程组变为与之同解的方程组.

矩阵的初等变换

- 线性方程组的初等变换可以用增广矩阵的初等变换代替；
- 为了书写方便，我们用 r_i 表示矩阵的第 i 行；
- 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；
- 第 i 行乘以 k 记作 kr_i；
- 第 j 行乘以 k 加入第 i 行记作 $r_i + kr_j$；
- 变换前后的矩阵不用等号连接，用箭头或波浪号连接.

消元法与初等行变换

用消元法求解线性方程组 $\Longleftrightarrow$ 对它的增广矩阵作初等行变换.

1. 对方程组作 ①$\times k \Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_1 \times k$
2. 对方程组作 ②$\times k-$③$\times l \Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_2 \times k$ 再作 $r_2 - l\,r_3$

对增广矩阵作初等行变换，对应方程组的解不变．用初等行变换化简增广矩阵就可得方程组的解．

重做例 1 对如下方程组的增广矩阵做行初等变换以解出该方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

解 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 5r_2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

于是，方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{10}{7} \\ x_2 = -\frac{1}{7} \\ x_3 = -\frac{2}{7} \end{cases}$.

重做例 2 对如下方程组的增广矩阵做行初等变换以解出该方程组:

$$\begin{cases} x_1+\ 3x_2+\ \ 4x_3= -2\\ 2x_1+\ 5x_2+\ \ 9x_3= 3\\ 3x_1+\ 7x_2+\ 14x_3= 8\\ \quad -\ \ x_2+\ \ \ x_3= 7\end{cases}$$

解 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&3&4&-2\\2&5&9&3\\3&7&14&8\\0&-1&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&4&-2\\0&-1&1&7\\0&-2&2&14\\0&-1&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&3&4&-2\\0&1&-1&-7\\0&-2&2&14\\0&-1&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+2r_2}$

$\begin{pmatrix}1&3&4&-2\\0&1&-1&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&7&19\\0&1&-1&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

此时，与矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1\qquad +\ 7x_3= 19\\ \qquad x_2-\ \ x_3= -7\end{cases}$$

令 $x_3=k$ (其中，k 取任意数)，则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1= -7k+19\\ x_2= k-7\\ x_3= k\end{cases}$$

重做例 3 对如下方程组的增广矩阵做行初等变换以解出该方程组:

$$\begin{cases} x_1-\ 2x_2+\ 3x_3-\ \ x_4+\ 2x_5= 2\\ 3x_1-\ \ x_2+\ 5x_3-\ 3x_4-\ \ x_5= 6\\ 2x_1+\ \ x_2+\ 2x_3-\ 2x_4-\ 3x_5= 8\end{cases}$$

解 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2&2\\3&-1&5&-3&-1&6\\2&1&2&-2&-3&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2&2\\0&5&-4&0&-7&0\\0&5&-4&0&-7&4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2&2\\0&5&-4&0&-7&0\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}$,

此时，还原为方程组就会发现，最后一个方程为 $0x_5=4$，是矛盾方程，无解.

矩阵的初等变换：归纳总结

1. 无解: 将增广矩阵化为行阶梯形后，如果存在一行其系数部分全为零而常数非零（矛盾行），那么该方程组无解，如例 3

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\
3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\
2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & c
\end{array}
\end{array}
\xrightarrow{\text{多次行初等变换}}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & c
\end{array}
\end{array}
$$

定理. *方程组无解* $\iff r(A) < r(A \vdots b)$.

将增广矩阵化为行阶梯形后，如果不出现矛盾行，那么原方程组必定有解，或有唯一解，或有无数解.

2. 有唯一解: 将增广矩阵化为行阶梯形后没有出现矛盾行，继续化为简化行阶梯形，如果非零行的个数与未知量个数相等，那么从常数列就能得到方程组的解，如例 1

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc:c}
3 & -1 & 5 & 3 \\
1 & -1 & 2 & 1 \\
1 & -2 & -1 & 2
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x_1 & x_2 & x_3 & c
\end{array}
\end{array}
\xrightarrow{\text{多次行初等变换}}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7}
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x_1 & x_2 & x_3 & c
\end{array}
\end{array}
$$

定理. *方程组有唯一解* $\iff r(A) = r(A \vdots b) = n$.

3. 有无数解: 将增广矩阵化为简化行阶梯形后，如果没有出现前两种情况，那么该方程组有无数解，如例 2

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 3 & 4 & -2 \\
2 & 5 & 9 & 3 \\
3 & 7 & 14 & 8 \\
0 & -1 & 1 & 7
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x_1 & x_2 & x_3 & c
\end{array}
\end{array}
\xrightarrow{\text{多次行初等变换}}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 0 & 7 & 19 \\
0 & 1 & -1 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x_1 & x_2 & x_3 & c
\end{array}
\end{array}
$$

非零行的非零首元对应的未知量为基本未知量，其余未知量为自由未知量. 在例 2 中，x_1 和 x_2 是基本未知量，x_3 是自由未知量. 令所有自由未知量依次取任意常数 k_1，k_2，... 由此解出基本未知量，这样就得到了方程组的通解.

定理. *方程组有无穷个解* $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b) < n$

引理 3.1 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，且 $r(A) = r$. 那么通过矩阵的初等行变换和交换列的初等列变

换，可以把 A 化为

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_{1,r+1}&\cdots&b_{1n}\\0&1&\cdots&0&b_{2,r+1}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&b_{r,r+1}&\cdots&b_{rn}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times n}$$

证明引理 3.1 若 A 的元素全为 0，则 A 就是 $\tilde{B}$ 的形式. 设 $a_{kl}\neq 0$，通过交换行和列的初等变换，可以把 a_{kl} 交换到第 1 行第 1 列的位置.

(1) 用 $1/a_{kl}$ 乘第 1 行，然后把第 1 行的适当倍数加到其余各行，可以得到

$$A\sim B_1=\begin{pmatrix}1&*&\cdots&*\\0&*&\cdots&*\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&*&\cdots&*\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}1&*&\cdots&*\\0&&&\\\vdots&&A_1&\\0&&&\end{pmatrix}_{m\times n}$$

其中 $*$ 表示矩阵的元素，A_1 是 $(m-1)\times(n-1)$ 型矩阵.

(2) 对 A_1 重复上述步骤，可得

$$A\sim B_2=\begin{pmatrix}1&0&*&\cdots&*\\0&1&*&\cdots&*\\0&0&&&\\\vdots&\vdots&&A_2&\\0&0&&&\end{pmatrix}_{m\times n}$$

(3) 重复上述步骤有限步后，便可得到 $A\sim\tilde{B}$.

3.1.3 线性方程组解的判定定理

线性方程组解的判定定理

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\ \bar{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

前面例子说明方程组 $Ax=b$ 的解有三种情形:

$$
\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & * & * & 6 \\ 0 & 2 & * & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & * & * & 6 \\ 0 & 2 & * & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & * & * & 6 \\ 0 & 2 & * & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
r(A) < r(A \vdots b) \qquad r(A) = r(A \vdots b) = n \qquad r(A) = r(A \vdots b) < n
$$

无解　　唯一解　　无穷个解

解的判定定理 **定理 3.1** 线性方程组有解的充分必要条件是 $r(\bar{A}) = r(A)$. 且

1. 若 $r(\bar{A}) = r(A) = n$，则线性方程组有唯一解；
2. 若 $r(\bar{A}) = r(A) < n$，则线性方程组有无限多个解.

证明定理 3.1 充分性. 设 $r(\bar{A}) = r(A)$，并简记为 r.

(1) 对增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变换和交换前 n 列的初等列变换，则可以把 $\bar{A}$ 化为

$$
\bar{A} \sim \bar{B} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

线性方程组 (I) 化为与之同解方程组:

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases}
x_{i_1} \qquad\qquad + b_{1,r+1} x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{1n} x_{i_n} = d_1 \\
\qquad x_{i_2} \qquad + b_{2,r+1} x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{2n} x_{i_n} = d_2 \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad x_{i_r} + b_{r,r+1} x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{rn} x_{i_n} = d_r
\end{cases}
$$

1. 若 $r=n$，则 (II) 就是

$$
\begin{cases}
x_{i_1} = d_1 \\
x_{i_2} = d_2 \\
\quad \vdots \\
x_{i_n} = d_n
\end{cases}
$$

即方程组有唯一解.

2. $r<n$，把 (II) 写成

$$
\begin{cases}
x_{i_1} = d_1 - b_{1,r+1} x_{i_{r+1}} - \cdots - b_{1n} x_{i_n} \\
x_{i_2} = d_2 - b_{2,r+1} x_{i_{r+1}} - \cdots - b_{2n} x_{i_n} \\
\qquad \vdots \\
x_{i_r} = d_r - b_{r,r+1} x_{i_{r+1}} - \cdots - b_{rn} x_{i_n}
\end{cases}
$$

给未知量 $x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}} \cdots, x_{i_n}$ 赋值:

$$\begin{cases} x_{i_{r+1}} = c_{i_{r+1}} \\ x_{i_{r+2}} = c_{i_{r+2}} \\ \qquad \vdots \\ x_{i_n} = c_{i_n} \end{cases}$$

方程组 (II) 有唯一解:

$$\begin{cases} x_{i_1} = c_{i_1} = d_1 - b_{1,r+1}c_{i_{r+1}} - \cdots - b_{1n}c_{i_n} \\ x_{i_2} = c_{i_2} = d_2 - b_{2,r+1}c_{i_{r+1}} - \cdots - b_{2n}c_{i_n} \\ \qquad \vdots \\ x_{i_r} = c_{i_r} = d_r - b_{r,r+1}c_{i_{r+1}} - \cdots - b_{rn}c_{i_n} \end{cases}$$

从而 $(c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_r}, c_{i_{r+1}}, \cdots, c_{i_n})^{\mathrm{T}}$ 便是方程组 (II) 的一个解. 将这 $n-r$ 个未知量 $x_{i_{r+1}}$, $\cdots$, x_{i_n} 视为**自由未知量**. 给自由未知量 $x_{i_{r+1}}, \cdots, x_{i_n}$ 不同的赋值，得到方程组 (II) 不同的解，故方程组有无穷多个解. 必要性. 设方程组 (I) 有解，需证 $r(A) = r(\bar{A})$.

(1) 若 $r(A) < r(\bar{A})$，记 $r(A) = r$. 对增广矩阵 $\bar{A}$ 进行与上述相同初等行变换和交换前 n 列的初等列变换后，$\bar{A}$ 化为

$$\bar{A} \sim \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

且 $d_{r+1} \neq 0$. 方程组 (I) 化为与之同解的线性方程组:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} x_{i_1} \qquad\qquad\qquad + b_{1,r+1}x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{1n}x_{i_n} = d_1 \\ \qquad x_{i_2} \qquad\qquad + b_{2,r+1}x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{2n}x_{i_n} = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_{i_r} + b_{r,r+1}x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{rn}x_{i_n} = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \end{cases}$$

(2) 方程组 (III) 中有一个矛盾的方程 $0 = d_{r+1}$，故方程组 (III) 无解，与方程组 (I) 有解的假设相矛盾.

(3) 于是 $r(A) = r(\bar{A})$.

线性方程组求解方法 用初等行变换求方程组的解的方法如下:

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.

2. 用定理 3.1 判断方程组是否有解，若无解则不继续.

3. 用初等行变换将阶梯形矩阵化为最简形矩阵.

4. 将每行首个非零元素对应的 x_i 留在左边，其他 x_i 移到方程右边，得到一般解.

阶梯形矩阵是指:

1. 每个非零行的首个非零元素下边都是零;
2. 若有全零行，则它们都在非零行的下边.

最简形矩阵是指:

1. 该矩阵为阶梯形矩阵;
2. 每个非零行的首个非零元素为 1，且它所在列的其他元素都为零.

求解线性方程组的例题

例 3.1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

解 对增广矩阵施行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

可见系数矩阵的秩为 2，增广矩阵的秩为 3，故方程组无解.

此例说明方程的个数少于未知量的数目，方程组也可能无解.

例 3.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = -21 \\ 6x_3 + 3x_4 = 13 \end{cases}$$

[1]

解 对增广矩阵施行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -9 & -5 & -21 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1, r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & -26 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5+r_2]{r_3+r_2, r_4-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-3r_2]{-\frac{1}{6}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见增广矩阵与系数矩阵的秩都是 2，故方程组有无穷多个解.

原方程组化为如下与之同解的方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}x_4 = -\dfrac{3}{2} \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = \dfrac{13}{6} \end{cases}$$

选定 x_2 和 x_4 为自由未知量，并赋值 $x_2 = c_1$，$x_4 = c_2$. 由上述方程组得到

$$x_1 = -2c_1 + \frac{1}{2}c_2 - \frac{3}{2}$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}c_2 + \frac{13}{6}$$

于是原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + \dfrac{1}{2}c_2 - \dfrac{3}{2} \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}c_2 + \dfrac{13}{6} \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

其中 $c_1, c_2 \in \boldsymbol{P}$ 为任意常数.

也可以选 x_2, x_3 为自由未知量;

此例说明方程的个数大于未知量的数目，方程组也可能有解.

[1]注意: 此线性方程组的方程个数大于未知量的数目.

例　求解如下方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 14x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

解　$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 14 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1,\ r_4-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-4r_2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　谁是基本未知量？自由未知量？

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & c \end{array} \end{array}$$

可见，x_1 和 x_3 是基本未知量，x_2 是自由未知量，令 $x_2 = k$，其中 k 是任意常数，那么方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -3k - 30 \\ x_2 = k \\ x_3 = 7 \end{cases}$$

例　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 & \text{①} \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 8x_4 = 15 & \text{②} \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - 14x_4 = 32 & \text{③} \\ -3x_1 + 3x_2 + 11x_4 = -20 & \text{④} \end{cases}$$

解：将其增广矩阵用初等行变换化为行阶梯型矩阵：

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 2 & -2 & -1 & -8 & 15 \\ 4 & -4 & 1 & -14 & 32 \\ -3 & 3 & 0 & 11 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4+3r_1]{r_2-2r_1, r_3-4r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

出现矛盾方程 $0=7$，故方程组无解.

矛盾方程总可以化为 $0=1$.

无解的根本原因：确有方程组相互矛盾.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 & ① \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 8x_4 = 15 & ② \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - 14x_4 = 32 & ③ \\ -3x_1 + 3x_2 + 11x_4 = -20 & ④ \end{cases}$$

例如，$(② + ③) \div (-2)$，

$$-3x_1 + 3x_2 + 11x_4 = -\frac{47}{2},$$

这与④矛盾.

例　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + ux_3 = v \end{cases}$$

解　对增广矩阵作初等行变换，得到

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & u & v \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & u-9 & v-3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & u-7 & v+3 \end{array}\right)$$

因此，当 $u=7$，$v=-3$ 时，方程组有无穷多个解.

当 $u \neq 7$ 时，方程组有唯一解.

当 $u=7$，$v \neq -3$ 时，方程组无解.

3.1.4　齐次线性方程组

若线性方程组的常数项均为零，我们称它为齐次线性方程组. 即有

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组可以写成矩阵形式 $Ax=0$.

齐次线性方程组都是有解的，各个未知量都取零（称为零解）就能得到齐次线性方程组的一个解.

齐次线性方程组什么时候有非零解?

齐次方程组必有零解，所以：齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 该方程组有无数解.

推论 3.1 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是 $r(A) < n$.

1. 若齐次线性方程组中方程的个数 m 小于未知量个数 n，则这个齐次线性方程组有非零解；
2. 含 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式等于零.

3.2 向量及向量组

线性方程组在有无穷多个解的情况下，如何表示出这无穷多个解，自然是一个值得讨论的问题.

线性方程组的解是一个数组，因此，研究解之间的关系以及表示解的方法就需要讨论这样的数组. 另外，平面上的向量可以用 2 元数组来表示；空间向量可以用 3 元数组来表示. 向量的关系及运算可以转化为数组的关系及运算.

3.2.1 n 维向量及其线性运算

行向量组和列向量组

定义. 行向量指的是只有一行的矩阵，而列向量指的是只有一列的矩阵. 向量中元素的个数称为向量的维数. 即 n 维行向量是如下形式的矩阵

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

而 n 维列向量是如下形式的矩阵

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$$

定义. 若干个同维数的列向量（或行向量）组成的集合称为向量组.

有关该定义的说明：

1. 向量组的本质是一个集合；
2. 若干个即可以是有限个，也可以是无限个；
3. 有限个向量组成的向量组和矩阵可以建立一一对应的关系.

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$，其中每个 α_i 都是行向量. 这 m 个向量称为矩阵的行向量组.

同样，矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$，其中每个 β_j 都是列向量. 这 n 个向量称为矩阵的列向量组.

因此向量的运算和矩阵的运算性质一样，n 维行向量和 n 维列向量可以相乘，但行向量和行向量不能相乘，列向量和列向量不能相乘.

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$$

一些说明

- 通常用希腊字母 α, β, γ 等表示向量;
- 分量都是 0 的向量称为**零向量**, 记为 θ，有时也记为 $\mathbf{0}$;
- 数域 $\boldsymbol{P}$ 上全体 n 元向量的的集合记为 $\boldsymbol{P}^n$;
- 在这一章中，除了特别说明，说到 n 元向量或向量是指某个数域 $\boldsymbol{P}$ 上的 n 元向量，说到数是指数域 $\boldsymbol{P}$ 中的数.

n 元向量的运算

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
3. $\alpha + \theta = \alpha$;
4. $\alpha + (-\alpha) = \theta$;
5. $1\alpha = \alpha$;
6. $\mu(\alpha + \beta) = \mu\alpha + \mu\beta$;
7. $(\mu + \nu)\alpha = \mu\alpha + \nu\alpha$;

8. $(\mu\nu)\alpha=\mu(\nu\alpha)$.

n **元向量空间** **定义 3.3** 数域 $\boldsymbol{P}$ 上全体 n 元向量的集合 $\boldsymbol{P}^n$，连同 n 元向量的加法与数乘运算，称为 n 元向量空间. 称非空集合 $V\subseteq\boldsymbol{P}^n$ 为向量空间 $\boldsymbol{P}^n$ 的一个子空间，如果 V 关于 n 元向量的加法和数乘封闭，即

1. 若 $\alpha,\beta\in V$，则 $\alpha+\beta\in V$；
2. 若 $\mu\in\boldsymbol{P}$，$\alpha\in V$，则 $\mu\alpha\in V$.

例 3.3 向量空间 $\boldsymbol{P}^n$ 是自身的一个子空间.

例 3.4 只含零向量的集合 $\{\theta\}$ 是 $\boldsymbol{P}^n$ 的一个子空间.

例 3.5 设

$$U=\{(a,b,0)|a,b\in\boldsymbol{R}\}$$

则 U 是 3 元向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个子空间.

3.2.2 向量组的线性表示

线性方程组的向量表示

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ \cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

线性方程组

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\beta$$

向量的线性关系

背景 线性方程组

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\beta$$

由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 决定，于是线性方程组解的情况完全取决这一组向量.

记若干个向量 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 构成的向量组为 $[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s]$ 或 $[\gamma_i]_{i=1}^s$.

定义 3.4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\in\boldsymbol{P}^n$. 若存在 $c_1,c_2,\cdots,c_s\in\boldsymbol{P}$，使得

$$\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s$$

则称 β 可由 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性表出，或 β 是 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 的线性组合.

例 3.6 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

证明: 向量 β 可由向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 线性表出.

证明: 不难验证

$$\beta=5\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$$

所以 β 可由向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 线性表出.

例 (1) $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$, 则 $\beta=3\alpha$. (2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, 则 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$.

初等行变换与列矩阵

命题. 初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系.

解释　如果 α_1, $\cdots$, α_n, β 都是列向量，将它们写在一起组成一个矩阵 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta)$，对矩阵作初等行变换后得到 $(\alpha_1',\cdots,\alpha_n',\beta')$. 则有

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=\beta\Leftrightarrow k_1\alpha_1'+\cdots+k_n\alpha_n'=\beta'$$

对增广矩阵 作初等行变换不改变 方程组的解 $\longleftrightarrow$ 对矩阵 作初等行变换不改变 列向量间的线性关系

向量按分块构成矩阵的记号

$$\delta_1=\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\\\vdots\\c_{n1}\end{pmatrix},\ \delta_2=\begin{pmatrix}c_{12}\\c_{22}\\\vdots\\c_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \delta_k=\begin{pmatrix}c_{1k}\\c_{2k}\\\vdots\\c_{nk}\end{pmatrix}$$

$$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k)=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1k}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&a_{nk}\end{pmatrix}$$

矩阵 $(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k)$ 秩的记号 $r(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k)$ 或 $r(\delta_i)_{i=1}^k$.

向量由向量组线性表出的充分必要条件

定理 3.2 向量 β 可由向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性表出的充分必要条件是

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$$

非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解.

证明定理 3.2: (1) 向量 β 可由向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 线性表出的充分必要条件是方程

$$\text{(I)} \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_s x_s = \beta$$

有解.

(2) 记

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s),\ X = (x_1, x_2, \cdots, x_s)^{\mathrm{T}}$$

则方程 (I) 写成线性方程组 $AX = \beta$.

(3) 由线性方程组解判别定理，方程组 $AX = \beta$ 有解的充分必要条件是 $r(A) = r(A, \beta)$，即

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta)$$

例 3.7 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};\ \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

证明: 向量 β 可由向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 线性表出，并求出一个表示式.

证明: (1) 对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ 进行初等行变换:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1, r_4 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_2, r_4 - r_2]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可见 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 2$. 故向量 β 可由向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 线性表出.

(2) 考虑方程

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$$

由 (1) 的结果，可得与之同解的方程组:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 + 2 \\ x_2 = 2x_3 - 1 \end{cases}$$

令 $x_3 = 1$，得到方程组的一个解 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$，得 $\beta = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

注记. 由上述行最简形矩阵，可得方程 $AX = \beta$ 的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c + 2 \\ 2c - 1 \\ c \end{pmatrix}$$

其中 c 可任意取值，从而得表达式

$$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(-3c+2)\alpha_1+(2c-1)\alpha_2+c\alpha_3$$

例　求证：$\beta=(-1,1,5)^T$ 是向量 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，$\alpha_2=(0,1,4)^T$，$\alpha_3=(2,3,6)^T$ 的线性组合，并将 β 由 α_1，α_2，α_3 线性表示．

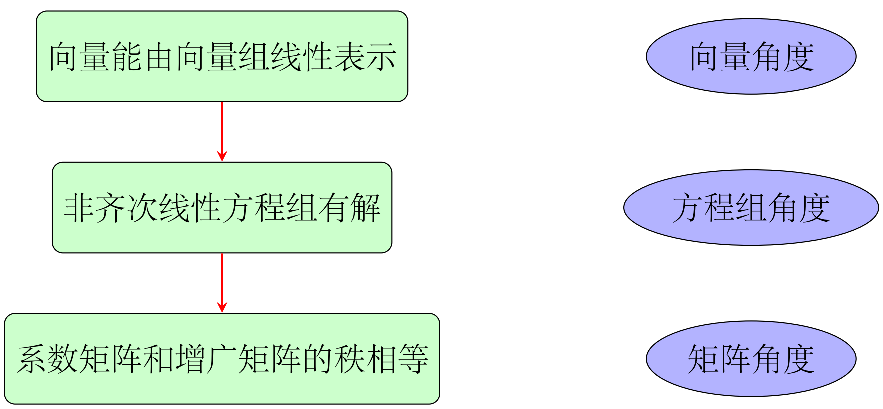
证　设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$．考虑线性方程组 $Ax=\beta$，其增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&3&1\\3&4&6&5\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

可见 $Ax=\beta$ 有唯一解 $x=(1,2,-1)^T$．因此

$$\beta=Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3.$$

向量组，矩阵和方程组存在一一对应的关系



向量组等价　**定义 3.5**　设

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s] \tag{1}$$

与

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t] \tag{2}$$

为 $\boldsymbol{P}^n$ 中向量组.

- 若(1)中每个向量都能由向量组(2)线性表出，则称向量组(1)能由向量组 (2) 线性表出.
- 若向量组(1)与向量组(2)能相互线性表出，则称向量组(1)向量组(2)等价，记为

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$$

向量组的线性表示，具备：

- 自反性. 即向量组自己可以线性表示自己.

- 传递性．设向量组 A 可以被向量组 B 线性表示，向量组 B 又可以被向量组 C 线性表示，则向量组 A 可以被向量组 C 线性表示.

但不具备对称性. 即：向量组 A 可以被向量组 B 线性表示，不一定有向量组 B 可以被向量组 A 线性表示.

例 3.8 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

与向量组

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

证明: 向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 与向量组 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 等价.

证明 (1) 因为

$$\alpha_1=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\ \alpha_2=\beta_1+\beta_2,\ \alpha_3=\beta_1,\ \alpha_4=\beta_1+2\beta_2+3\beta_3$$

所以向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 可由向量组 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 线性表出.

(2) 又

$$\beta_1=\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\ \beta_3=\alpha_1-\alpha_2$$

所以向量组 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 可由向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 线性表出.

(3) 综合 (1) 与 (2), 向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 与向量组 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 等价.

向量组等价的性质

设 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$，$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$，$[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p]$ 为向量组.

1. **自反性**: $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$;
2. **对称性**: 若 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$，则 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]\sim[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$;
3. **传递性**: 若 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$，且 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]\sim[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p]$，则 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p]$.

若把向量组 A 和 B 所构成的矩阵依次记作

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\quad 和\quad B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$$

向量组 B 能由 A 线性表示,即对每一个向量 $\beta_j(j=1,2,\cdots,l)$,都存在一组常数 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj}$,使得

$$\beta_j=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{mj}\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix}$$

从而

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml}\end{pmatrix}$$

称矩阵 $K_{m\times l}=(k_{ij})$ 为这一线性变换的系数矩阵.

注意到 $B=AK$，从而有以下三种等价说法:

$\Longleftrightarrow$ 向量的角度: 向量组 B 能由向量组 A 线性表示.

$\Longleftrightarrow$ 方程的角度: 矩阵方程 $AX=B$ 存在一个解 K.

$\Longleftrightarrow$ 矩阵的角度: $R(A)=R(A,B)$.

向量组等价的判别

定理 3.3 向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 与 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$ 等价的充必条件是

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

$$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

也可以简写为 $R(A)=R(B)=R(A,B)$，其中 A 和 B 是向量组 A 和 B 所构成的矩阵.

证明 必要性. 设

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$$

(1) 于是 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$ 可由 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性表出，特别地，β_1 可由 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性表出. 由定理 3.2, 有

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1)$$

(2) 由于 β_2 可由 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性表出，所以 β_2 也可由$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1]$ 线性表出. 再由定理 3.2, 有

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2)$$

(3) 重复此过程，便可以得到

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

(4) 再根据 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 可由 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$ 线性表出，同样可以证明

$$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r(\beta_1\cdots,\beta_t,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$$

(5) 显然

$$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

所以

$$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

充分性. 设

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

(1) 由矩阵秩的定义，可以得到

$$\begin{aligned} r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) &\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_j) \\ &\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t),\ j=1,2,\cdots,t \end{aligned}$$

所以

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_j),\ j=1,2,\cdots,t$$

(2) 根据定理 3.2, 向量 $\beta_j, j=1,2,\cdots,t$ 可由向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性表出，即向量组 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$ 可由向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性表出.

(3) 再由

$$\begin{aligned} r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) &\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,\alpha_i) \\ &\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t),\ i=1,2,\cdots,s \end{aligned}$$

(4) 仿上可以证明向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 可由 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$ 线性表出.

(5) 综合上述事实，可得

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$$

例 3.9 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix};\ \beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

证明: 向量组 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 与向量组 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 等价.

证明 对矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 进行初等行变换:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_1]{r_2+r_1,r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&-2&-1&-1&-1\\0&6&3&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{3}{2}r_2]{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

容易看出

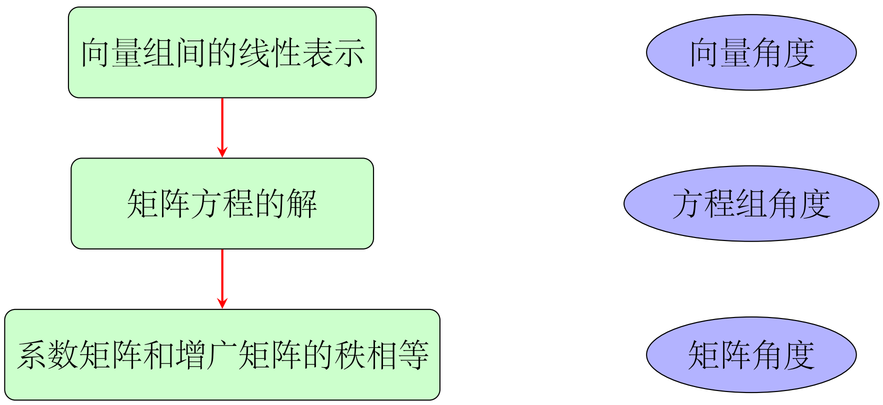
$$r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$$

所以向量组 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 与向量组 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 等价.

例　已知向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，且两个向量组等价.

证 由已知得 $B=AK$，其中 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$K=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，由于 $|K|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，所以 K 可逆，记 $H=K^{-1}$，有 $A=BH$，即 A 能由 B 线性表示，且表示矩阵为 H. 由于两个向量组能相互线性表示，所以两个向量组等价.

向量组，矩阵和方程组存在一一对应的关系



3.3 向量组的线性相关性

上一节讨论了向量组之间的 (线性) 关系，这一节将考虑一个向量组中向量之间的线性关系.

3.3.1 线性相关与线性无关

对于齐次线性方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

它是否有解等价于是否有 $k_1,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0.$$

齐次方程组的非零解 $\Longleftrightarrow$ k_1，$\cdots$，k_n 不全为零.

向量组的线性相关 **定义 3.6** 称 n 元向量空间 $\boldsymbol{P}^n$ 中向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性相关 (linearly dependent)，若存在不全为零的数 c_1，c_2，$\cdots$，$c_s\in\boldsymbol{P}$，使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=\theta$$

否则称向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性无关 (linearly independent).

1. 定义一般要求 $m \geq 2$，但也适用于只有一个向量 α 的情形．

   当 $\alpha = \mathbf{0}$ 时线性相关，当 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 时线性无关；

2. $m = 2$ 时，两个向量线性相关 $\Longleftrightarrow$ α_1, α_2 的分量对应成比例 (几何意义为两向量共线)．

3. $m = 3$ 时，三个向量线性相关的几何意义为三向量共面．

注记. *齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.*

- 若向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 线性相关，则向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 不"独立"，即某个向量可由其余向量线性表示；
- 若向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 线性无关，这 s 个向量没有线性关系.

定理. *向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.*

证明　(必要性) 若向量组 A 线性相关，则有 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$，其中 k_i 不全为 0，不妨设 $k_1 \neq 0$，于是有 $\alpha_1 = \frac{-1}{k_1}(k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m)$，即 α_1 能由 $\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示．

(充分性) 不妨假设存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}$ 使得 $\alpha_m = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$，从而有 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + (-1)\alpha_m = \mathbf{0}$，由于 m 个系数中至少有 $-1 \neq 0$，所以向量组 A 线性相关．

例　含有零向量的向量组一定线性相关．

证：设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$．则存在不全为零的数 $1, 0, 0, \cdots, 0$，使得

$$1\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关．

证明线性无关的方法

证明　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的最基本方法：说明齐次方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

只有零解.

也常常表述为：设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

然后说明上式成立，只能有唯一的选择：$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$．

例 3.10　设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

则有

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \theta$$

所以向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 线性相关.

例 3.11 证明向量组 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 线性无关，其中

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

证明 如果存在数 c_1, c_2, c_3 使得

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = \theta$$

即

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

那么

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. 故向量组 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 线性无关.

3.3.2 向量组线性相关性的重要结论

向量组线性相（无）关性的性质

1. 若 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_{s+l}]$ 线性无关，则 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 线性无关. 即整体无关，则部分无关；如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关.

证：不妨设前 j 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j$ 线性相关，$j \leqslant m$. 则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_j$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_j\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}$$

从而存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_j, 0, \cdots, 0$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_j\boldsymbol{\alpha}_j + 0\boldsymbol{\alpha}_{j+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

得证整个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

其逆否命题是：如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其任一部分向量组都线性无关.

部分相关，则整体相关；整体无关，则部分无关.

向量组线性相（无）关性的性质

2. 若向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{p1}\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{p2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \alpha_s=\begin{pmatrix}a_{1s}\\a_{2s}\\\vdots\\a_{ps}\end{pmatrix}$$

线性无关，则向量组

$$\alpha_1'=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{p1}\\a_{p+1,1}\\\vdots\\a_{p+q,1}\end{pmatrix},\ \alpha_2'=\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{p2}\\a_{p+1,2}\\\vdots\\a_{p+q,2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \alpha_s'=\begin{pmatrix}a_{1s}\\\vdots\\a_{ps}\\a_{p+1,s}\\\vdots\\a_{p+q,s}\end{pmatrix}$$

也线性无关.

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，那么它们各去掉相同的若干个分量，所得的新向量组也是线性相关的.

例 考察下列向量的线性相关性:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\\9\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\\3\end{pmatrix}.$$

解 去掉最后两个分量所得的向量组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

线性无关，故原向量组线性无关.

3. 初等行变换不改变列向量之间的线性相关关系.

解释　如果 α_1，$\cdots$，α_n 都是列向量，将它们写在一起组成一个矩阵 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，对该矩阵作初等行变换后得到 $(\alpha_1',\cdots,\alpha_n')$，则有

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0\Leftrightarrow k_1\alpha_1'+\cdots+k_n\alpha_n'=0$$

向量组线性无关性的判断方法

定理 3.4 向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 线性无关的充分必要条件是

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$$

证明 (1) 考虑方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\theta$$

向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 线性无关的充分必要条件是方程只有零解.

(2) 记

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s),\ X = (x_1, x_2, \cdots, x_s)^{\mathrm{T}}$$

则上述方程就是齐次线性方程组

$$AX = \theta$$

(3) 齐次线性方程组 $AX = \theta$ 只有零解的充要条件是 $r(A) = s$，即

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = s.$$

考虑向量组 $A : \alpha_1, \cdots, \alpha_s$

1. 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 的秩小于向量个数 s.
2. 线性无关 $\Longleftrightarrow R(A) = s$.

注意其中 s 的三种角色：列向量组中包含的向量的个数；方程中未知数的个数；系数矩阵的列数.

推论 3.2 m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时一定线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

例 讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性.

解 n 维单位坐标向量组构成的矩阵为 n 阶单位矩阵

$$E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

由 $|E| = 1 \neq 0$，知 $R(E) = n$，即 $R(E)$ 等于向量组中向量个数，故 n 维单位坐标向量组线性无关.

例 判断 $\alpha_1 = (2, -1, 7)$，$\alpha_2 = (1, 4, 11)$，$\alpha_3 = (3, -6, 3)$ 的线性相关性.

解 令 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T)$，那么

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -6 \\ 7 & 11 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $r(A) = 2 < 3$，于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

线性相关的判定 设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

1. 如果 $m < n$，则它们一定线性相关.
2. 如果 $m = n$，则它们线性相关当且仅当它们组成的矩阵的行列式为零.

对于 $m > n$ 的情形，或要求给出 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的情形，我们可以用初等行变换来判定.

向量组的线性相关性

定理. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 是 $m \times n$ 矩阵. 如下命题等价:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *线性相关 (或线性无关).*

(2) $Ax=0$ 有非零解 *(*或只有零解*).*

(3) $r(A)<n$ *(*或 $r(A)=n$*).*

证明 $(1\Leftrightarrow 2)$ 定义； $(2\Leftrightarrow 3)$ 初等变换.

推论. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 是 n 阶方阵. 如下命题等价:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关.

(2) $Ax=0$ 有非零解.

(3) $\det A=0$.

(4) $r(A)<n$.

例 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，试证向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关，其中 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_3+\alpha_1$.

证法 1：设有 x_1,x_2,x_3，使得 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\mathbf{0}$，即

$$x_1\left(\alpha_1+\alpha_2\right)+x_2\left(\alpha_2+\alpha_3\right)+x_3\left(\alpha_3+\alpha_1\right)=\mathbf{0}$$

亦即 $\left(x_1+x_3\right)\alpha_1+\left(x_1+x_2\right)\alpha_2+\left(x_2+x_3\right)\alpha_3=\mathbf{0}$. 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{array}\right.$$

此方程组的系数矩阵的行列式

$$|G|=\left|\begin{array}{lll} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right|=2\neq 0$$

故只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$，所以向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关.

证法 2：改写已知条件为 $B=AK$，其中

$$B=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right),A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right),K=\left(\begin{array}{lll} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知 $R(A)=3$. 又 $|K|=\left|\begin{array}{lll} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right|=2\neq 0$，故矩阵 K 可逆，从而有 $R(B)=R(A)=3$，即向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关.

定理. 若向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性无关，而 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性表示，且表示唯一.

例 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}$. 问：(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性相关？(2) α_4 是否可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，求其表示.

解 (1) 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&3\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$，可见，$r(A)=3$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．

(2) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．所以 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表示唯一，设

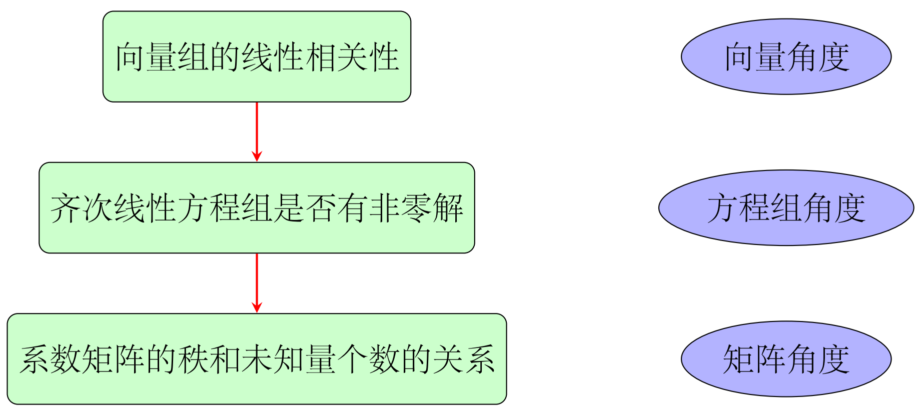
$$\alpha_4=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3.$$

该方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-1&0&3&-5\\1&1&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

可见 $x_1=2$，$x_2=1$，$x_3=-1$．因此 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

向量组，矩阵和方程组存在一一对应的关系



3.4 向量组的极大无关组

矩阵的秩在矩阵理论及其应用中起着重要作用．向量组也有秩的概念．这一节先讨论向量组的极大无关组，进而定义向量组的秩，并研究其与矩阵的秩的关系．

例　分析下列向量的线性关系：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

- 它们是否线性相关?
- 最多有几个向量线性无关?

1. 它们线性相关．例如：$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.
2. 最多有 2 个向量线性无关；任意 3 个必线性相关．

$$\boldsymbol{\alpha}_1'=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_2'=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_3'=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_4'=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

☞向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$：（1）自身线性无关；（2）可以线性表示任何其他向量．称之为"极大无关组"，原向量组的秩为 2．

向量组的极大无关组 (也常常称为最大无关组)

定义 3.7 称向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 的一个部分向量组 $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}]$ 为一个极大无关组，若

1. 向量组 $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}]$ 线性无关；
2. 向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 可由部分向量组 $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}]$ 线性表出 (或等价描述：向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关).

[2]

注记 1. *在所有与 A 等价的向量组中，极大无关组含有的向量个数最少．向量组的极大无关组不是唯一的．*

例 3.12 线性无关的向量组的极大无关组就是自身.

例 3.13 求向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的一个极大无关组.

解 因为矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$，故向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 线性无关.

又

$$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ \alpha_5 = -\alpha_2 + \alpha_3$$

因此 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$ 可由 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 线性表出．故 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是一个极大无关组．可证明 $[\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5]$ 也为极大无关组.

例 求向量组 $\alpha_1 = (2, 4, 2)$，$\alpha_2 = (1, 1, 0)$，$\alpha_3 = (2, 3, 1)$，$\alpha_4 = (0, -2, -2)$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

解 $\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

等价向量组的极大无关组所含向量个数

- 向量组的极大无关组不唯一，那么
  1. 一个向量组的极大无关组所含向量个数是否唯一?

[2]由定义可见，向量组与其极大无关组等价 (相互能线性表示).

2. 进一步，两个等价的向量组的极大无关组所含向量个数是否相同?

引理 3.2 两个等价的向量组的极大无关组所含向量个数相等.

推论 3.3 一向量组的任意两个极大无关组含有相同个数的向量.

证明引理 3.2 (1) 设

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$$

则 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 的一个极大无关组为 $[\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}]$;

$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]$ 的一个极大无关组为 $[\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_q}]$.

(2) 向量组 $[\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}]$ 与 $[\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_q}]$ 都线性无关，且

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\sim[\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}]$$

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]\sim[\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_q}]$$

(3) 由等价的传递性，有 $[\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}]\sim[\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_q}]$.

(4) 由定理 3.3，可得 $r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p})=r(\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_q})$.

(5) 根据定理 3.4，有

$$r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p})=p,\ r(\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_q})=q$$

(6) 故 $p=q$.

3.4.1 向量组的秩

向量组的秩 **定义 3.8** 称向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 的极大无关组所含向量的个数为该向量组的秩 (rank)，记为 $r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$ 或 $r[\alpha_i]_{i=1}^s$. 规定只含零向量的向量组的秩为零.

向量组的秩：若在向量组 A 中选出 r 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，满足

- 向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（若存在的话）都线性相关则称向量组 A_0 是 A 的一个极大无关组.

极大无关组所含向量个数 r 称为向量组 A 的秩，记作 R_A.

回顾矩阵的秩：考虑矩阵 A，

- 若矩阵 A 中存在一个不等于零的 r 阶子式 D.
- 矩阵 A 的任意 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）都等于零.

则称 D 为 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

矩阵的行秩与列秩

一个矩阵可以按行分块，得到行向量组，也可以按列分块，得到列向量组.

称一个矩阵的行向量组的秩为矩阵的行秩，列向量组的秩为矩阵的列秩.

定理 3.5 矩阵的行秩等于列秩，且等于矩阵的秩. [3]

为了证明定理 3.5, 先证明下述引理.

引理 3.3 矩阵的初等行（列）变换不改变矩阵行（列）向量组的秩.

引理 3.3 的证明 只证明矩阵的初等列变换不改变列向量组的秩，类似地可以证明初等行变换的情况.

(1) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的列向量组为 $[\beta_1,\cdots,\beta_k,\cdots,\beta_l,\cdots,\beta_n]$，对矩阵 A 施行一次初等列变换后的矩阵分别为 B_1,B_2,B_3.

(2) 将 B_1,B_2,B_3 按列分块 (其中 $\mu\neq 0$):

$$\begin{aligned}A&=(\beta_1,\cdots,\beta_k,\cdots,\beta_l,\cdots,\beta_n)\\B_1&=(\beta_1,\cdots,\beta_l,\cdots,\beta_k,\cdots,\beta_n)\\B_2&=(\beta_1,\cdots,\mu\beta_k,\cdots,\beta_l,\cdots,\beta_n)\\B_3&=(\beta_1,\cdots,\beta_k+\nu\beta_l,\cdots,\beta_l,\cdots,\beta_n)\end{aligned}$$

(3) 矩阵 B_1 与 A 的列向量组显然相同.

(4) 容易验证矩阵 B_2 和 B_3 与 A 的列向量组等价. 根据等价关系的传递性，对矩阵 A 施行若干次初等列变换后得到的矩阵的列向量组与 A 的列向量组等价. 再由等价的向量组秩相等的事实，便可得结论.

定理 3.5 的证明 只证明矩阵的列秩与秩相等，可以类似证明行秩与秩相等.

(1) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的列向量组为 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$，且 $r(A)=p$.

(2) 对矩阵 A 施行初等列变换，把 A 化为列阶梯形矩阵 G.

(3) 把 G 按列分块，记

$$G=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p,\theta,\cdots,\theta)$$

根据引理 3.3，可得

$$r[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=r[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p,\theta,\cdots,\theta]=r[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p]$$

(4) 另一方面，显然

$$r(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p)=r(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p,\theta,\cdots,\theta)=r(G)=r(A)=p$$

(5) 由定理 3.4，向量组 $[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p]$ 线性无关，于是

$$r[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p]=p$$

(6) 从而 $r[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=p$.

例　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}$，则它的秩 $r(A)=2$.

---

[3]由此，对于向量组 $[\alpha_i]_{i=1}^s$，记号 $r[\alpha_i]_{i=1}^s$ 与 $r(\alpha_i)_{i=1}^s$ 表示的是同一个数，可通用.

它的行向量组为 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(4,5,6)$，$\alpha_3=(7,8,9)$，$\alpha_4=(10,11,12)$. 行向量组的秩同样等于 2.

它的列向量组为 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\4\\7\\10\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}2\\5\\8\\11\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}3\\6\\9\\12\end{pmatrix}$，列向量组的秩同样等于 2.

例　求向量组 $\alpha_1=(2,1,3,-1)$，$\alpha_2=(3,-1,2,0)$，$\alpha_3=(1,3,4,-2)$，$\alpha_4=(4,-3,1,1)$ 的秩和一个极大无关组.

解　显然 α_1,α_2 线性无关，而

$$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&-1&3\\3&2&4\\-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

可见 $r(A)=2<n=3$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，同理可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$；$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$；$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也线性相关，故 α_1,α_2 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，秩为 2.

向量组线性无关 (相关) $\Leftrightarrow$ 向量组的秩等于 (小于) 向量组所含向量的个数

求极大无关组的更简便的方法

如何求向量组的一个极大无关组？由定理 3.5 可知，对应矩阵的最高阶非零子式所在的行（列）就是行（列）向量组的一个极大无关组.

需要注意的是向量组的秩唯一，但是极大无关组不唯一.

例 设向量组 $\alpha_1=(1,3,1,4)$，$\alpha_2=(2,12,-2,12)$，$\alpha_3=(2,-3,8,2)$，求向量组的秩和一个极大无关组，并判断向量组的线性相关性.

解　$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&12&-3\\1&-2&8\\4&12&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&6&-9\\0&-4&6\\0&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

所以 $r(A)=2$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且知 α_1,α_2 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组.

例　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用极大无关组线性表示.

解：对矩阵施行初等行变换变为行阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

由 $R(A)=3$ 知极大无关组含 3 个向量，选择三个非零行的首非零元所在的 $1,2,4$ 三列为一个极大无关组．为把 α_3,α_5（$3,5$ 列）用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ $(1,2,4$ 列）线性表示，把 A 再变成行最简形矩阵

$$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

记该行最简形矩阵为

$$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$$

由于方程 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，即方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4+x_5\alpha_5=0$ 与 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4+x_5\beta_5=0$ 同解，由于

$$\beta_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=-\beta_1-\beta_2,\ \beta_5=4\beta_1+3\beta_2-3\beta_4$$

因此 $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2,\quad \alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4.$

- 本题演示了“给定向量组，如何寻找一个极大无关组”的完整过程---利用初等变换完成．
- 极大无关组的不唯一性，除去选择 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为极大无关组外，也可以选择 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 等．
- 将对线性表示的问题转化为对非齐次方程的解的讨论，其实质也是利用初等变换完成的．

例 求向量组 $\alpha_1=(2,4,2)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(2,3,1)$，$\alpha_4=(3,5,2)$ 的秩和一个极大无关组，判断向量组的线性相关性，并把其余向量用该极大无关组线性表出．

解 令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

所以 $r(A)=2<4$，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，且 α_1,α_2 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组．从简化行阶梯形可知，

$$\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_4=\alpha_1+\alpha_2.$$

例 设向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,3,-1)^{\mathrm{T}}$. 试求向量组的秩及一个极大无关组，并将其余的向量用这个极大无关组线性表示.

解：作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$，由

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\div(-2)]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1-2r_2\\(r_2-r_4)\div 2}]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&1&0&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 构成一个极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

小结

- 向量组，矩阵和方程组存在一一对应的关系.
- 重要定理：矩阵的秩等于它的列（行）向量组的秩.
- 重要例题：如何确定向量组中的极大无关组及相关的线性表示问题，必须要掌握.

向量空间的基与维数 **定义 3.10** 称子空间 $V\subseteq\boldsymbol{P}^n$ 中向量组 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]$ 为 V 的一个基，若

1. $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]$ 线性无关；
2. V 中任一向量都可由 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]$ 线性表出.

这时称 r 为子空间 V 的维数，记作 $\dim V$，并称 V 为 r 维子空间. 规定只含零向量的子空间的维数为 0.

例 3.15 向量空间 $\boldsymbol{P}^n$ 作为自身的子空间，其中向量组

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

就是一个基，称为**自然基**，且它的秩等于 n. 因此，$\boldsymbol{P}^n$ 为 n 维向量空间.

3 元向量空间空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的 2 维子空间

实数域上的 3 元向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的维数为 3.

例 3.16 设

$$U=\{(a,b,0)|a,b\in\boldsymbol{R}\}$$

则 U 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个子空间.

U 的一个基为

$$\alpha_1=(1,0,0),\ \alpha_2=(0,1,0)$$

因此 U 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个 2 维子空间.

3.5 线性方程组解的结构

这一节利用向量讨论线性方程组有无穷多个解时，解的结构，即如何来表示这无穷多个解的问题.

线性方程组 I:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n\ =\ b_1 \\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n\ =\ b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

线性方程组的矩阵表示 II：$AX=\beta$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

若 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是线性方程组 I 的一个解，则向量 $X=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 II 的一个解. 故称线性方程组的每个解为**解向量**.

3.5.1 齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组解的性质 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n\ =0 \\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n\ =0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

[4]

关于齐次线性方程组的解，有如下事实:

1. 如果 ξ 是齐次方程组的解，则 $c\xi$ 也是它的解.
2. 如果 ξ_1 和 ξ_2 都是齐次方程组的解，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是它的解.
3. 如果 ξ_1 和 ξ_2 都是齐次方程组的解，则 $c_1\xi_1+c_2\xi_2$ 也是它的解.

[4]矩阵表示: $AX=\theta$

解空间与基础解系

- 上述性质表明，齐次线性方程组的解关于向量的加法和数乘封闭；
- 从而齐次线性方程组的全体解构成 $\boldsymbol{P}^n$ 的一个子空间，称为解空间；
- 讨论解的结构就是求解空间的一个基.

定义. 称齐次线性方程组的一个解向量组 $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r]$ 为基础解系，若

1. 向量组 $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r]$ 线性无关；
2. 齐次线性方程组的任意一个解可由 $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r]$ 线性表出.

[5]

注意：解集是一种特殊的向量组，而基础解系即为极大无关组.

向量组:	齐次线性方程组:	向量空间:
• 极大无关组	• 基础解系	• 基
• 向量组的秩	• 解集的秩	• 维数

基础解系存在性及算法

定理 3.6 对于齐次线性方程组 $AX=\theta$，若 $r_A < n$，则方程组的基础解系存在，且每个基础解系含 $n-r_A$ 个向量，这里 n 为方程组中未知数的个数.

证明 先证明基础解系的存在性.

(1) 由第一节讨论，对系数矩阵 A 进行初等行变换和交换列的初等列变换，可以把 A 化为

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad (\text{其中} r = r_A)$$

于是 $AX=\theta$ 化为与之同解的线性方程组

$$\begin{cases} x_{i_1} \qquad\qquad\qquad + b_{1,r+1}x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{1n}x_{i_n} = 0 \\ \qquad x_{i_2} \qquad\qquad + b_{2,r+1}x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{2n}x_{i_n} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{i_r} + b_{r,r+1}x_{i_{r+1}} + \cdots + b_{rn}x_{i_n} = 0 \end{cases}$$

[5]由定义，齐次线性方程组的基础解系就是解空间的一个基.

(2) 取 $x_{i_{r+1}},\cdots,x_{i_n}$ 为自由未知量，分别令

$$\begin{pmatrix} x_{i_{r+1}} \\ x_{i_{r+2}} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

得到方程组的 $n-r$ 个解，记为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta_2 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \eta_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{n-r,1} \\ c_{n-r,2} \\ \vdots \\ c_{n-r,r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) 由性质 3.1(2)，这 $n-r$ 个解向量线性无关.

(证明方程组的任意一个解都可由这 $n-r$ 个解向量线性表出)

(4) 设

$$\delta = (c_1,\cdots,c_r,c_{r+1},,c_{r+2}\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$$

为方程组的任意一个解.

(5) 由引理 3.2, 向量

$$\eta = c_{r+1}\eta_1 + c_{r+2}\eta_2 + \cdots + c_n\eta_{n-r} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ c_{r+1} \\ c_{r+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

也是方程组的解.

(6) (证明 $\delta = \eta$)

(a) 对方程组的自由未知量 $x_{i_{r+1}}$，$x_{i_{r+2}}$，$\cdots$，x_{i_n} 赋值后，未知量 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_r}$ 的值是唯一确定的.

(b) 因为方程组的解 δ 与 η 中自由未知量 $x_{i_{r+1}},x_{i_{r+2}},\cdots,x_{i_n}$ 取相同的值 $c_{r+1},c_{r+2},\cdots,c_n$，所以

$$d_i = c_i,\ i=1,2,\cdots,r$$

(7) 故

$$\delta = c_{r+1}\eta_1 + c_{r+2}\eta_2 + \cdots + c_n\eta_{n-r} = \eta$$

即方程组的任意一个解均可由 $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}]$ 线性表出.

(证明方程组的任意每个基础解系都含 $n-r$ 个解向量)

(8) 综合 (3) 与 (7) 的结果，知 $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}]$ 就是方程组的一个基础解系.

(9) 若 $[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s]$ 也是方程组的一个基础解系，那么

$$[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s] \sim [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}]$$

从而

$$r[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s] = r[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}] = n - r$$

通解

若 $[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}]$ 为齐次线性方程组的一个基础解系，则关于任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r} \in \boldsymbol{P}$，向量

$$\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r} \tag{3}$$

都是齐次线性方程组的解. 反之，齐次线性方程组的任意解都可以表成式(3). 所以，称式(3)为齐次线性方程组的通解.

齐次线性方程组 $AX = \theta$ 的基础解系不唯一，故通解形式也不唯一，但任意基础解系中所含向量个数都为 $n - r_A$，即解空间的维数是 $n - r_A$.

3.5.2 齐次线性方程组的基础解系求法

求解齐次线性方程组例题

例 设线性方程组只含有一个方程

$$x + y + z = 0$$

求方程组的解.

解:（1）选取 y, z 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = -y - z \\ y = \quad y \\ z = \qquad\; z \end{cases}$$

则方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

（2）选取 x, z 为自由未知量，则

$$\begin{cases} x = \quad x \\ y = -x - z \\ z = \qquad\; z \end{cases}$$

则方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

（3）选择 x, y 为自由未知量.（略）

上述得到 3 个不同的基础解系:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

例 3.16 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 0 \\ 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

求其基础解系和通解.

解 (1) 对系数矩阵施行初等行变换，化为行最简形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 系数矩阵的秩是 2，小于未知量个数 4. 故方程组有无穷多个解.

(3) 原方程组化为如下与之同解的方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - \dfrac{1}{2}x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + \dfrac{1}{2}x_4 \\ x_3 = \qquad -\dfrac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

(4) 选定 x_2 和 x_4 为自由未知量，并取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(5) 于是

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

便是方程组的一个基础解系.

(6) 方程组的通解为

$$\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2$$

其中 $c_1, c_2 \in \boldsymbol{P}$ 为任意常数.

例 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$ 的基础解系.

解:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div 8]{r_2\div 5} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{4}x_3 + \dfrac{1}{4}x_4 \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

因此基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-4\\ \frac{3}{4}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{4}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.\text{ 或 }\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-16\\ 3\\ 4\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 4\end{pmatrix}.$$

或者，由

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&4&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&-4&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

视 x_2,x_3 为自由未知量，得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-4x_3\\x_4=4x_2-3x_3\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=-4x_3,\\x_2=x_2,\\x_3=x_3,\\x_4=4x_2-3x_3.\end{cases}$$

得一组基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,0,4)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-4,0,1,-3)^{\mathrm{T}}.$$

例 求下列齐次线性方程组的基础解系和通解：

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0\\2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0\\7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$$

解：第一步：对系数矩阵作初等行变换，化为行最简形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\7&-7&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&-14&10&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-7&5&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\div(-7)}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

第二步：对同解方程组移项，得基础解系.

$$\begin{cases}x_1=\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4\\x_2=\frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}\quad \text{令}\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\text{ 及}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

则得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&\frac{5}{7}&1&0\end{pmatrix}^T$, $\quad\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{4}{7}&0&1\end{pmatrix}^T$.

第三步：利用基础解系写出通解：

$$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2,\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$$

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = 0 \end{cases}$.

解 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -4x_3 + 5x_4 \end{cases}$,

分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 所以通解为 $x = k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

例 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$.

解 对系数矩阵 A 作行初等变换 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$,取 $x_3 = 1$ 可得基础解系为 $\xi = (-2,1,1)^T$,于是通解为 $x = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

定理 3.6(齐次线性方程组基础解系的存在性定理) 除去用来解方程外，还可以用来讨论线性相关性.

例 设 $A_{m\times n}B_{n\times l} = \mathbf{O}$，证明 $R(A) + R(B) \le n$.

证明 记 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l)$，则

$$A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}) \Longrightarrow A\beta_i = \mathbf{0}(i = 1, 2, \cdots, l)$$

即矩阵 B 的 l 个列向量 $\beta_i \in S$,其中 S 为是齐次方程 $Ax = 0$ 的解集.从而有 $R(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l) \leqslant R_S$，即 $R(B) \leqslant R_S$. 而根据定理有 $R(A) + R_S = n$，故 $R(A) + R(B) \leqslant n$.

3.5.3 非齐次线性方程组解的性质

非齐次线性方程组及导出组

非齐次线性方程组 $AX=\beta$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+\cdots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+\cdots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+\cdots+ & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

非齐次线性方程组的导出组 $AX=\theta$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+\cdots+ & a_{1n}x_n = & 0 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+\cdots+ & a_{2n}x_n = & 0 \\ & \vdots & & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+\cdots+ & a_{mn}x_n = & 0 \end{cases}$$

非齐次线性方程组的解与其导出组解的关系

1. 若 ξ_1 和 ξ_2 为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解，则 $\xi_1-\xi_2$ 为其导出组 $AX=\theta$ 的解;
2. 若 ξ 为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解，η 为其导出组 $AX=\theta$ 的解，则 $\xi+\eta$ 为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解.

证明 1. 设 ξ_1 和 ξ_2 为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解. 因为

$$A(\xi_1-\xi_2)=A\xi_1-A\xi_2=\beta-\beta=\theta$$

所以 $\xi_1-\xi_2$ 是其导出组 $AX=\theta$ 的解.

2. 设 ξ 为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解，η 为其导出组 $AX=\theta$ 的解. 因为

$$A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=\beta+\theta=\beta$$

所以 $\xi+\eta$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解.

非齐次线性方程组解的结构

定理 3.7 设 ξ_0 为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的一个 (特) 解，其导出组 $AX=\theta$ 的基础解系为 $[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}]$，则非齐次线性方程组的所有解的集合 (解集)$S$ 为

$$S=\{\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}|c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}\in \boldsymbol{P}\}$$

"$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解"= "$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解"+ "$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解".

证明定理 3.7 (1) 设 ξ 为方程组 $AX=\beta$ 的任意一个解. 由性质 3.3, $\xi-\xi_0$ 为 $AX=\theta$ 的解. 于是存在常数 c_1，c_2，$\cdots$，$c_{n-r}\in\boldsymbol{P}$，使得

$$\xi-\xi_0=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$$

从而

$$\xi=\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r} \tag{4}$$

(2) 反之，对于任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}\in\boldsymbol{P}$，由于 ξ_0 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的解，而

$$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$$

是其导出组 $AX=\theta$ 的解，根据性质 3.3, 由式(4) 确定的 ξ 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的解.

通解及特解算法

- 非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的任意一个解 ξ 可表示为
$$\xi=\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$$
其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}\in \boldsymbol{P}$，称为非齐次线性方程组的通解；
- 对增广矩阵施行初等行变换，化为行最简形，得到与之同解的非齐次方程组. 选定自由未知量，给所有自由未知量赋 0 值，就得到一个特解.

非齐次线性方程组例

例 3.17 求下列线性方程组的通解:
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=5\\ 2x_1+4x_2-x_4=-3\\ -x_1-2x_2+3x_3+2x_4=8\\ x_1+2x_2-9x_3-5x_4=-21\\ 6x_3+3x_4=13\end{cases}$$

解 (1) 对增广矩阵施行初等行变换:
$$\begin{pmatrix} 1&2&3&1&5\\ 2&4&0&-1&-3\\ -1&-2&3&2&8\\ 1&2&-9&-5&-21\\ 0&0&6&3&13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1&2&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\ 0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{13}{6}\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$
因增广矩阵与系数矩阵的秩都是 2，故方程组有无穷多个解.

(2) 原方程组化为如下与之同解的方程组:
$$\begin{cases} x_1+2x_2-\dfrac{1}{2}x_4=-\dfrac{3}{2}\\ x_3+\dfrac{1}{2}x_4=\dfrac{13}{6}\end{cases}$$
取 $x_2=0,\ x_4=0$，得到上述方程组的一个特解
$$\xi_0=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 0\\ \frac{13}{6}\\ 0\end{pmatrix}$$

(3) 导出组化为如下与之同解的方程组:
$$\begin{cases} x_1+2x_2-\dfrac{1}{2}x_4=0\\ x_3+\dfrac{1}{2}x_4=0\end{cases}$$

选 x_2,x_4 为自由未知量，得到导出组的基础解系为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

(4) 线性方程组的通解为

$$\xi=\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$$

其中 $c_1,c_2\in\boldsymbol{P}$ 为任意常数.

例 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4=1\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=-0.5\end{cases}$

解:对增广矩阵 B 作初等行变换 $B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-0.5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&0&2&-4&1\\0&0&-1&2&-0.5\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_2\div 2,r_3+r_2]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&0.5\\0&0&1&-2&0.5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

可见 $R(A)=R(B)=2$，故方程组有解，并有 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4+\frac{1}{2}\\x_3=2x_4+\frac{1}{2}\end{cases}$

取 $x_2=x_4=0$，则 $x_1=x_3=\frac{1}{2}$，即得方程组的一个特解

$$\eta^*=\begin{pmatrix}0.5&0&0.5&0\end{pmatrix}^T$$

对应的齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4\\x_3=2x_4\end{cases}$ 中，取

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \text{则有}\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

即得对应齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\end{pmatrix}^T,\xi_2=\begin{pmatrix}1&0&2&1\end{pmatrix}^T$$

于是所求通解为 $x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\eta^*,(c_1,c_2\in\mathbb{R})$.

例 求解方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=1\\x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

解 $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&0\\1&-1&-2&2&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$,得到同解方程组 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}+x_2\\x_3=\frac{1}{2}+x_4\end{cases}$.

显然，原方程组有特解 $\gamma_0=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)^T$，导出组的基础解系为

$$\xi_1=(1,1,0,0)^T,\quad \xi_2=(0,0,1,1)^T.$$

因此，因此方程组的通解为 $x=\gamma_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$.

例　设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？并在有无穷多解时求其通解.

解：由克拉默法则知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时方程组有唯一解. 又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+\lambda&1&1\\3+\lambda&1+\lambda&1\\3+\lambda&1&1+\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3+\lambda&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2.$$

故 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，方程组有唯一解.

当 $\lambda=0$ 时，原方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

第 2 个方程与其他方程矛盾，故方程组无解.

当 $\lambda=-3$ 时，原方程组的增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=x_3-1\\ x_2=x_3-2\\ x_3=x_3\end{cases}$$

故 $\lambda=-3$ 时，方程组有无穷多解，且通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R})$$

☛ 此题考查的是线性方程组解的结构的基本理论，而该理论是本课程的核心，故此例题是极重要的题型！

用克拉默法则即可破题. 但此方法只适用于系数矩阵是方阵的情形.

例 问 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解，无数解，无解？若有解，求解.

解 $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$.

(1) 当 $\lambda = 1$ 时，$A \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$... (2) 当 $\lambda = -2$ 时，$A \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$...

(3) 当 $\lambda \neq 1, -2$ 时，

$$A \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & \frac{-\lambda}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{-\lambda-1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2} \end{array}\right)$，因此，方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\lambda-1}{\lambda+2} \\ x_2 = \frac{1}{\lambda+2} \\ x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{cases}.$$

3.6 本章复习

向量的线性表示

有关向量的线性表示，下面的说法是等价的：向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}$ 有解.

$\Longleftrightarrow r(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = r(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b})$.

上述结论的朴素理解：$r(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) = r(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b})$，意味着往向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 中添加向量 $\boldsymbol{b}$，并没有使得向量组的秩增加，其根本原因在于向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

其几何本质是：设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的秩为 r，则它们构成 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 r 维子空间. 向量 $\boldsymbol{b}$ 属于这个 r 维子空间，等价于 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots$，$\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

进而，$r\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)=r\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s\right)$，也可理解为往向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 中添加向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$，并没有使得向量组的秩增加.

所以，向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是

$$r\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)=r\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s\right).$$

当然，其几何本质仍然是：向量组 B 处在向量组 A 所张成的 r 维子空间内，这里 $r=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)$.

线性相关与线性无关

对于线性相关，下面的说法是等价的：向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关.

1. $\Longleftrightarrow$ 向量组 A 中至少存在一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.
2. $\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$ 有非零解.
3. $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的秩小于向量的个数 m，即 $r\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)<m$.

对于线性无关，下面的说法是等价的：向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m(m\geqslant 2)$ 线性无关.

1. $\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$ 只有零解.
2. $\Longleftrightarrow r\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)=m$.

☛ 从上述说法要得到的理解是：

- 注意向量组，方程组，矩阵问题的相互转换；
- 得到一个朴素的认识：$r\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\right)<m$ 的根本原因在于，向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中有多余的向量，或说存在某向量可以被其他的向量线性表示，当然整个向量组是线性相关的.
- 其几何本质是：向量组线性相关，说明其中至少有一个向量，处在余下向量所张成的子空间内.

矩阵的秩

矩阵的秩，是其行向量（或者列向量）所张成的子空间的维数.

- 初等变换不改变矩阵的秩. 或者用下面的两种方式表述：
  1. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.（但 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$ 不能得 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，除非两者是同型矩阵.）
  2. 若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A})$.
- 矩阵和，差，积的秩.
  1. $r(\boldsymbol{A})-r(\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.
  2. $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$. 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $s\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的判别

这里 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，即未知量的个数是 n，方程的个数是 m. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情形只有 3 种：无解，有唯一解，有无穷多解.

$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$ 是否成立，是判断有解，无解的依据；$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n$ 是否成立，是判断有唯一解，有无穷多解的依据. 即

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\begin{cases}\text{无解}\iff r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\neq r(\boldsymbol{A})\\ \text{有解}\iff r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})\begin{cases}\text{有唯一解}\iff r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n;\\ \text{无穷多解}\iff r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})<n.\end{cases}\end{cases}$$

a．用高斯消元法解释

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. 注意到 $\boldsymbol{B}$ 比 $\boldsymbol{A}$ 只多 1 列，故要么 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+1$，要么 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$.

若 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+1$，则说明高斯消元法完成后，$\boldsymbol{B}$ 的非零行比 $\boldsymbol{A}$ 的非零行多 1 行，多出来的那一行是矛盾方程 $0=1$，导致方程组无解.

$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$ 时，说明高斯消元法最后余下的方程的个数少于未知量的个数 n，故有自由未知量出现，则方程组有无穷多解，并且自由未知量的个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$.

1. 若 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+1$，则说明出现了矛盾方程，导致方程组无解.
2. 若 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$，则没有矛盾方程，方程组有解.
    - 当 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$ 时，说明出现了自由未知量，导致方程组有无穷多解；
    - 而 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$ 时，则没有出现自由未知量，所以方程组有唯一解.

☛ 是否出现矛盾方程是方程组有解与否的关键；是否出现自由未知量又是区分有无穷多解和有唯一解的关键.

b．从向量的角度去解释

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

1. $\iff$ 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.
2. $\iff r(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$.
3. $\iff r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$.

1. $\iff$ 向量 $\boldsymbol{b}$ 属于向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 所张成的子空间.
2. $\iff$ 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 所张成的子空间，与向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}$ 所张成的子空间，是同一个子空间.
3. $\iff r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 解的判别

这里 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，即未知量的个数是 n，方程的个数是 m.

齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是天然有解的，它至少有一个解：零解. 所以对齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，我们关心的不在于它有没有解，而在于它是否有非零解.

下面的结论要非常的清楚：

n 元齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$.

n 元齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n$.

“$n-r$”的含义

对 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，设 $r(\boldsymbol{A})=r$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系包含 $n-r$ 个向量.

r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯型矩阵中非零行的行数，是非自由未知量的个数.（非自由未知量一般取自非零行的第一个非零元所对应的未知量，一个非零行只能确定一个非自由未知量.）

n 是未知量的总数，所以 $n-r$ 是自由未知量的个数. 有多少个自由未知量，基础解系里就对应有多少个向量.

研究极大无关组的意义

极大无关组和原向量组是等价的，是原向量组的简约，更是原向量组的“全权代表”.

极大无关组从理论上弄清了：用消元法解线性方程组时，为什么最后剩余的方程数量是稳定的. 事实上那些剩下的方程就是原方程组的“极大无关组”，和原方程组是等价的，是同解的.

线性相关，线性表示的概念也可以解释用消元法解线性方程组的相关问题：方程组是“线性相关”的，说明有多余的方程；能被其他的方程“线性表示”的方程就是多余的.（“多余”是相对的，方程的去，留不是绝对的，因极大无关组一般不唯一.）

极大无关组也使线性方程组在解的表示上，得到了简洁，完备的表达.

从几何本质上看，极大无关组还充当了坐标系的功能. 极大无关组所包含向量的个数 = 原向量组所张成子空间的维数.

矩阵等价与向量组等价的区别与联系

设有两个 n 维向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 和 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m)$. 则

1. 向量组等价，可得矩阵等价；（注意这里所设的两向量组中向量的个数相同，否则两矩阵的列数不同，会导致矩阵不是同型矩阵，就不能得到矩阵等价.）
2. 矩阵等价，不能得到向量组等价.

例如，设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 但向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 不是等价的.

☛ 两向量组等价的充要条件是

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$

而不是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$. 其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是由向量组 A 和 B 所构成的矩阵.

新添矩阵可逆的等价说法

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，新添下列等价说法：

1. $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵；或 $r(\boldsymbol{A})=n$.（不可逆矩阵又称为降秩矩阵.）
2. $\boldsymbol{A}$ 的标准形是 $\boldsymbol{I}$；或 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{I}$.
3. $\boldsymbol{A}$ 可以表达为若干个初等矩阵的乘积.
4. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.
5. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

注意，第一章的克拉默法则只告诉了我们矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分条件.

要避免的错误

求矩阵秩时，行变换和列变换可以随意进行，行变，列变，两者交叉进行，都可以（因为“初等变换不改变矩阵的秩”）.

而解方程和求逆矩阵时只能进行一种变换：

1. 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 进行初等变换求解方程时，只有行变换，不能有列变换；（因该过程本质上是消元法，当然只能方程与方程之间进行运算，在对应的增广矩阵中就体现为初等行变换.）
2. 用矩阵初等变换 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})\sim(\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^{-1})$ 求逆矩阵时，只有行变换，不能有列变换. 其他的情形类似.