线性代数

谭 兵 副教授
西南大学数学与统计学院
https://bingtan.me/

2025 年 3 月 13 日

目录

第 1 章　行列式

这一章介绍 n 阶行列式的定义，讨论行列式的性质及计算. 最后，介绍行列式在求解一类特殊的线性方程组的克拉默法则.

行列式的来源

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题.

17 世纪末由日本数学家关孝和及德国数学家莱布尼茨引入.

为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则：给定线性方程组

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

如果系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么线性方程组(1)有解，并且解是惟一的：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所成的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式的出现原因可以这样理解：完美地表达了一部分线性方程组的解的规律．从这个角度讲，行列式是人为创造的一个符号，它形式简洁地，浓缩地记载了一些规律性的内容．

☛ 什么是行列式？如何计算？将是课程第 1 章的内容．

本章内容

这一章关注：行列式的性质与计算．学习中要注意以下问题：

1. 为什么要讨论行列式?
2. 行列式有哪些性质?
3. n 阶行列式的计算，有哪些常见方法?

1.1　2(3) 阶行列式

本节讨论二 (三) 元一次方程组的解与 2(3) 阶行列式.

消元法求解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } x_2} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

定义 2 阶行列式 设有四个数 a_{ij} 排成 2 行 2 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ ，表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表所确定的**二阶行列式**，并记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

主对角线两个元素 a_{11} 和 a_{22} 的乘积，减去副对角线两个元素 a_{12} 和 a_{21} 的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

二元一次线性方程组的解

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

[1]

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

[2]

例 求下列二阶行列式的值. (1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$； (3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2$； (4) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1.$

行列式解方程组

例 1.1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + \ \ x_2 = 1 \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$$

且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$$

---

[1]把行列式 D 的第 1 列用常数项 b_1, b_2 替换得 D_1；第 2 列用常数项 b_1, b_2 替换的 D_2.

[2]$D \neq 0$.

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

三元一次方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

利用消元法，可求得它的解为（设分母不为零）：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases}$$

三阶行列式的定义 对九个数 a_{ij} 排成 3 行 3 列的数表，**三阶行列式**定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

计算法则——“**对角线法则**”.

三阶行列式的特点：

- 共有 **六项**，每项都是由位于不同行不同列的三个元素乘积构成
- **三正项三负项**，平行于主对角线的连线的元素的乘积为正，平行于副对角线的连线的元素的乘积为负.

三阶行列式示意图

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}}\\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} +a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{array} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13}\\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} +a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

三阶行列式的图形计算（沙路法）

$$\begin{array}{ccccc} + & + & +- & - & -\\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})\\ &\quad -(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}) \end{aligned}$$

注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 \\ &\quad - (-4) \times 2 \times (-3) - 1 \times 1 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) \\ &= -14. \end{aligned}$$

例 求下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix} = 520$；

(2) $\begin{vmatrix} \text{我} & 0 & \text{生} \\ 0 & \text{有} & 0 \\ \text{你} & 0 & \text{幸} \end{vmatrix} = \text{我有幸一生有你}$.

例 设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ ______

解: 方程左端的三阶行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 9x - 2x^2 = x^2 - 5x + 6.$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$，解得 $x = 2$ 或 $x = 3$.

在本节学了范德蒙德行列式之后，此题可快速计算行列式：$D = (x-2)(x-3)$.

三元一次线性方程组的解

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

[3]

$$D \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

n 元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 想法: 把二元和三元方程组的结果推广到 n 元一次方程组；
- 途径: 定义 n 阶行列式；
- 由 3 阶行列式可预见，n 阶行列式的计算将很复杂，因此需讨论其性质，从而简化计算方法；
- 这一章的内容就是定义 n 阶行列式，讨论其性质和计算方法，最终建立线性方程组的**克拉默 (Cramer) 法则**.

[3]把行列式 D 的第 i 列用常数项 b_1, b_2, b_3 替换得 D_i，$i = 1, 2, 3$.

1.2 全排列

为了定义 n 阶行列式，需要用到自然数 $1,2,\cdots,n$ 的全排列及其逆序数的概念.

行列式各项的符号

行列式的每一项都是每行每列各取一个元素共 n 个元素相乘所得.

二阶行列式为: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

三阶行列式为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项?

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半.
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半.
- ⋆ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项.
- ⋆ 猜测四阶行列式取正号和负号的各有 12 项.

取正号或负号的关键在于下标的排列.

全排列 **定义 1.1** 称由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个全排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

- 1243 是一个 4 级排列，32514 是一个 5 级排列.
- 自然数 $1,2,\cdots,n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个.
- 只有自然排列 $123\cdots(n-1)n$ 遵守从小到大的顺序，其余排列都存在某种“逆序”.

逆序数 **定义 1.2** 在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若一个较大的数 i_k 排在一个较小的数 i_l 前面，则称 i_k, i_l 构成该排列的一个逆序；称逆序总数为该排列的逆序数，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

- $\tau(32514) = 5$;
- $\tau(453162) = 9$;
- $\tau(123\cdots(n-1)n) = 0$;
- $\tau\big(n(n-1)\cdots 321\big) = \frac{n(n-1)}{2}$.

奇偶排列 **定义 1.3** 若一个排列的逆序数为奇 (偶) 数, 则称该排列为奇 (偶) 排列.

- 因为 $\tau(2143) = 2$，所以 2143 是偶排列.
- 因为 $\tau(32514) = 5$，所以 32514 是奇排列.

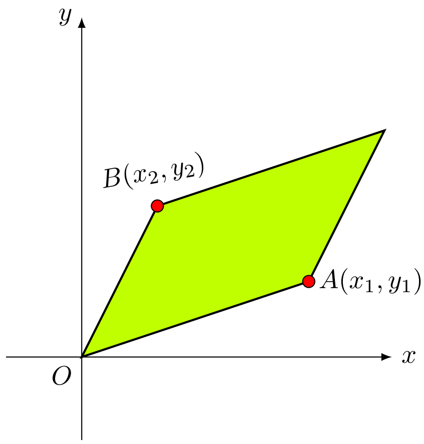
对换 **定义 1.4** 交换一个排列中两个数的位置，称为对该排列作一次对换.

- 交换排列 32514 中 5 与 4 的位置，得到排列 32415，记为 $32514 \to 32415$;
- 排列 32514 是奇排列，而排列 32415 是偶排列.

定理 1.1 对排列作一次对换改变排列的奇偶性. [4]

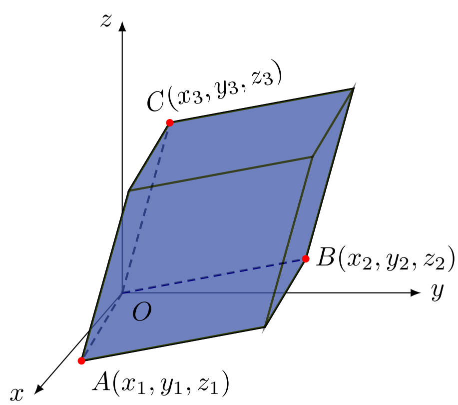
[4] 由此定理可以证明在 $n!$ 个 n 级排列中，有 $n!/2$ 个奇排列，有 $n!/2$ 个偶排列.

二阶行列式的几何意义



二阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值等于平行四边形的面积.

三阶行列式的几何意义



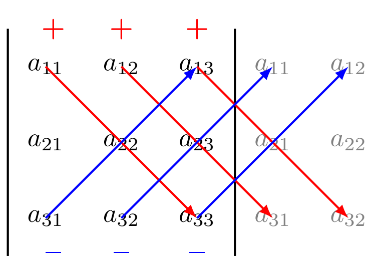
三阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 的绝对值等于平行六面体的体积.

1.3 n 阶行列式

利用 n 级排列的奇偶性，结合 2(3) 阶行列式，给出 n 阶行列式的定义.

回顾：2(3) 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



$$=(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

3 阶行列式的事实

1. 3 阶行列式恰好有 3! 项.
2. 每一项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$.
3. 下标第一位 (行标) 构成自然排列 123.
4. 下标第二位 (列标)j_1,j_2,j_3 的排列为 123, 231, 312, 321, 132, 213. 这 6 个排列的逆序数分别为 0, 2, 2, 3, 1, 1. 列标排列为偶排列的项符号为正，列标排列为奇排列的项符号为负.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

n 阶行列式的定义 **定义 1.5** 定义**n 阶行列式**(determinant)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为代数和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和. [5]

记号及定义的含义

- 通常用 D，$|(a_{ij})_{n\times n}|$，$\det(a_{ij})$ 等表示行列式.
- 规定 1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.
- 由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

  1. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和.
  2. 每一项是 n 个元素的乘积，这 n 个元素来自于行列式的不同行与不同列.
  3. 行标按自然顺序排列时，符号由这 n 个元素的列标排列的逆序数决定.

例 1.2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

[5]称 a_{ij} 为行列式第 i 行第 j 列的元素，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为主对角线上元素，a_{1n}，$a_{2,n-1}$，$\cdots$，a_{n1} 为副对角线上元素.

解 由定义，行列式是 4! 项的代数和，每项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$.

因为只有 a_{13}，a_{24}，a_{32}，a_{41} 不为零，所以只有当 $j_1=3$，$j_2=4$，$j_3=2$，$j_4=1$ 时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 才不为零. 故

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(3421)} 1\times 2\times 3\times 4 = (-1)^5 24 = -24.$$

例 在四阶行列式展开式中，确定下列各项的符号：

(1) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}(-)$；　　(2) $a_{33}a_{24}a_{12}a_{41}(+)$.

例 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 5x^2 & 1 & 1 & x \\ 2x & 3x & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & x & 7 \end{vmatrix}$，求 $f(x)$ 的最高次项.

解

$$(-1)^{\tau(1243)} 5x^2\cdot 3x\cdot 6\cdot x = -90x^4.$$

几种特殊的行列式

例 1.3 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

证明 因为形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}$ 中不为零的项只有

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn},$$

且这一项的符号为正，所以结论成立.

例 1.4 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

行列式列标按自然顺序排列的定义

- 在 n 阶行列式的定义中，每一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列；
- 因为数的乘法满足交换律，所以交换每一项中 n 个元素的顺序，可以使**列标**按自然顺序排列.

定理 1.2 对于 n 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

小　结

- 计算二阶和三阶行列式的神器：对角线法则.
- 对角线法则**只**适用于二阶和三阶行列式，高阶行列式的计算需要新的方法.
- 排列和对换 $\Longrightarrow$ 高阶行列式的定义.
- n 阶行列式的定义：

  $$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

  不同行不同列元素的乘积，t 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，并借助逆序数添加正负号.
- 适用于含零较多的行列式，如上/下三角行列式.
- Q: 对一般的高阶行列式，怎么破?

1.4 行列式的性质

一般的 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，当 n 较大时，用定义来计算的计算量很大. 比如 $n = 10$，那么就会得到 $10! = 3628800$ 个项做加减法. 因此，有必要简化行列式的计算. 为此，先研究行列式的性质.

1.4.1 行列式的基本性质

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

副对角线：从右上角到左下角的对角线

单位行列式：主对角线上元素为 1，其他元素为 0

- 二阶的：$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$；
- 三阶的：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

性质 (规范性)**.** 单位行列式的值为 1.

转置行列式

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D^{T} 为 D 的**转置行列式**. [6]

例如，设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}=-40$，

则它的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-40$.

转置行列式的性质

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等. [7]

证明 令 $b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}b_{1k_1}b_{2k_2}\cdots b_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn} \end{aligned}$$

由定理 1.2，有 $D^{\mathrm{T}}=D$.

交换行列式的两行/列 (行列式的反称性)

性质 1.2 交换行列式的两行 (列)，行列式反号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i\leftrightarrow r_j} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

习惯上用 r (row) 表示行，c (column) 表示列.

证明性质 1.2 记上式左边行列式为 D，右边行列式为 D'. 由行列式定义，有

$$D'=\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$

[6]把 D 的行列互换便得到 D^{T}.
[7]由此性质，行列式关于行的性质，关于列皆成立.

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\
&= -D
\end{aligned}
$$

推论 1.1 若行列式有两行元素对应相同，则行列式为零.

某行/列元素的公因子 (行列式的数乘性)

性质 1.3 行列式某行 (列) 元素的公因子可以提到行列式符号以外:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}
$$

证明 记左边的行列式为 D'，右边的行列式为 D. 有

$$
\begin{aligned}
D' = &\sum_{k_1\cdots k_i\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots ca_{ik_i}\cdots a_{nk_n}\\
=&c\sum_{k_1\cdots k_i\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{ni_n} = cD.
\end{aligned}
$$

推论 1.2 若行列式某行 (列) 的元素全为零，则行列式为零:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = 0
$$

[8]

推论 1.3 若行列式有两行 (列) 元素对应成比列，则行列式为零:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = 0
$$

[9] **性质 1.4(行列式的可加性)**

[8]性质 1.3 的直接推论.

[9]结合性质 1.3 和推论 1.1.

若行列式的某一行 (列) 中的元素都是两数之和，则此行列式可以按此行 (列) 拆分为两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明性质 1.4 简记 $\tau=\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)$. 由行列式的定义，有

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

强调：行列式不能作这种形式上的加法：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是对上述性质的错误理解.

用途：将行列式裂开为两个行列式．这是计算行列式的一个常用方法．例如

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix}.$$

某行元素的倍数对应加到另一行

性质 1.5 将行列式某行 (列) 元素的倍数对应加到另一行 (列)，行列式不变:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+cr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & a_{j2}+ca_{i2} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明性质 1.5 记左端的行列式为 D，右端的行列式为 D'. 由性质 1.4 和推论 1.3，有

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + 0 = D$$

行列式基本性质总结

规范性 单位行列式的值为 1.

转置性 行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T$.

反称性 交换两行 (列) 后，值变号.

数乘性 某行 (列) 乘 k 倍，值变 k 倍.

可加性 两式仅一行 (列) 不同可相加.

倍加不变性 某行 (列) 加上另一行 (列) 的 k 倍，值不变.

其中出镜率最高的三条性质：反称性 $(r_i \leftrightarrow r_j)$、数乘性 $(r_i \times k)$ 和倍加不变性 $(r_i + kr_j)$，可统称为**初等性质**.

怎么用：利用性质，化一般行列式为上或下三角行列式

行列式的三种变换

行列式有如下三种初等运算:

1. $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行和第 j 行交换
2. $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍
3. $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

1. $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示第 i 列和第 j 列交换
2. $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍
3. $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

上面的写法中，我们约定：把要改变的行（列），写在表达式的开头．比如，$r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

1. r_1+r_2 ： 把 r_2 加到 r_1，被改变的将是 r_1.

2. r_2+r_1 ： 把 r_1 加到 r_2，被改变的将是 r_2.

在利用行列式的性质时，下面两种说法是一样的：

1. 行列式第 i 行乘以 $\dfrac{1}{k}$ 倍 .... $r_i\times\dfrac{1}{k}$;

2. 行列式第 i 行除以 k 倍 .... $r_i\div k$.

在利用行列式的性质时，下面两种说法是一样的：

1. 第 i 行加上第 j 行的 $-k$ 倍 .... $r_i+(-k)r_j$;

2. 第 i 行减去第 j 行的 k 倍 .... r_i-kr_j.

注意此时第 i 行元素改变，而第 j 行元素保持不变.

符号说明

例如：

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}2&1&3\\5&4&6\\3&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\div 3}-3\begin{vmatrix}2&1&3\\5&4&6\\1&1&1\end{vmatrix}$$

上三角行列式 主对角线下面都为零的行列式称为上三角行列式. 上三角行列式的值和相应的对角行列式的值相同：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&&&&\\&a_{22}&&*&\\&&a_{33}&&\\&0&&\ddots&\\&&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角行列式 主对角线上面都为零的行列式称为下三角行列式. 下三角行列式的值和相应的对角行列式的值相同：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&&&&\\&a_{22}&&0&\\&&a_{33}&&\\&*&&\ddots&\\&&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式和下三角行列式合称三角行列式.

行列式的重点是计算，应当在理解行列式的概念、熟练掌握行列式性质的基础上，正确地计算低阶行列式，会用恒等变形化行列式为上 (下) 三角形行列式，从而直接求其值.

例　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&9&7&-2\\0&-1&3&6\\0&0&1&4\\0&0&0&2\end{vmatrix}=-6.$

1.4.2 四阶行列式的计算

四阶行列式的计算方法一

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & * & * & * \\ \boldsymbol{*} & * & * & * \\ \boldsymbol{*} & * & * & * \\ \boldsymbol{*} & * & * & * \end{vmatrix} \xlongequal{r_i-kr_1} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & * & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{*} & * & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{*} & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i-kr_2} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ \mathbf{0} & b & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{*} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ \mathbf{0} & b & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & c & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & d \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

利用行列式的基本性质来计算行列式必须掌握!!

利用性质计算行列式

例 1.5 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解 由行列式的性质，有

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48.$$

例 1.6 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解 记上述行列式为 D. 由行列式的性质，有

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

(续)

$$D=\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&-2&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}-10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&-2&3\\0&0&4&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+2r_3}-10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=40.$$

例　计算 $D=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\1&2&3&4\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$

解：$D\xlongequal[\substack{r_4-r_1\\r_2\div 2}]{\substack{r_2-r_1\\r_3-3r_1}}2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&-1&-4&-6\\0&2&-1&-7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3+r_2}2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&-5\\0&0&-3&-9\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_4-r_3}2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&-5\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=24.$$

例　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}.$$

解:

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\4&1&2&4\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&-7&2&-4\\0&-15&2&-20\\0&1&1&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&-15&2&-20\\0&-7&2&-4\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&17&85\\0&0&9&45\end{vmatrix}=0.$$

注意，如果 $a_{11}\neq 1$，一般通过互换行（列）使 a_{11} 为 1，再进行计算.

$$\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\4&1&2&4\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$$

从这个例子可以看到，计算一般的数字行列式可以非常机械:

1. 把 a_{11} 调整为 1，用 r_i+kr_1 把 a_{11} 下方的数字变为 0.

2. 把 a_{22} 调整为 1，用 r_i+kr_2 把 a_{22} 下方的数字变为 0.

3. 如此反复，总可以把行列式变为上三角行列式，得到计算结果.

更多的时候，需要我们观察各行（列）数字间的关系或规律，灵活运用行列式变换，使计算简便.

例 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-12.$

例 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-62.$

例 证明 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

解 左边 $=2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} c_1 & -a_1 & -b_1 \\ c_2 & -a_2 & -b_2 \\ c_3 & -a_3 & -b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$
$=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$ 右边.

1.4.3 n 阶行列式的计算

例 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$

解 将各列加入第 1 列，得：$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}=$
$[x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}.$

例 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

小结：上式可简记为

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{2}$$

同样也有

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

结论(2)容易推广为:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ * & \boldsymbol{A}_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{A}_k \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_k|\,.$$

这在形式上与下三角行列式的结果是一致的．对上三角行列式的情形有类似结论．

注意，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -|\boldsymbol{A}_{nn}|\cdot|\boldsymbol{B}_{mm}|\,.$$

事实上，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\,|\boldsymbol{A}_{nn}|\cdot|\boldsymbol{B}_{mm}|\,,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{nm} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\,|\boldsymbol{A}_{nn}|\cdot|\boldsymbol{B}_{mm}|\,.$$

例 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

解

$$D=(-1)^{2\times3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-5)=-60.$$

例

$$\left|\begin{array}{cc:c:ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-24.$$

1.5 行列式按行 (列) 展开

行列式按行 (列) 展开法则是计算行列式的一个工具．本节讨论这一法则．

计算行列式的另一个重要方式：高阶 $\Longrightarrow$ 低阶

复习与提高

复习. 将行列式化为三角行列式，并计算其值：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40.$$

1.5.1 行列式的展开式

三阶行列式的展开式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

其中规定 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

代数余子式 **定义 1.6** 去掉行列式 $|(a_{ij})_{n\times n}|$ 中元素 a_{ij} 所在的行和列，余下的元素 (相对位置不变) 构成的 $n-1$ 阶行列式:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ 1 \le i,j \le n$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式** (minor determinant, minor); 称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式** (adjunct 或 cofactor).

如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的余子式为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的代数余子式为 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$.

(代数) 余子式和元素的位置有关，和元素的大小正负无关.

三阶行列式等于第一行元素与其对应代数余子式的乘积之和.

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
=&(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad +(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
=&a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.
\end{aligned}
$$

按照这个规律，我们可以类似地定义 4 阶行列式为

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
=&(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

注意，上式体现出的规则有两条:

1. 与元素 a_{1j} 相乘的行列式，是将原行列式中的 a_{1j} 所在的行，列去掉而成的行列式，也就是其对应的余子式 M_{1j}.
2. 展开式中，元素 a_{1j} 所在项的符号为 $(-1)^{1+j}$.

按照这个规则，我们可以递归定义出 5 阶，6 阶等更高阶的行列式.

从而，得到一个递归形式的行列式定义.

n 阶行列式的定义

由 $n\times n$ 个数排成的 n 阶行列式

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

表示这样一个数:

1. $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$;
2. $n\geqslant 2$ 时，
$$D=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}.$$

其中 $M_{1j}\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是从 D 中划掉第 1 行，第 j 列后余下的 $(n-1)^2$ 个数（其相对顺序不变）所组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{1j} 的余子式.

将

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

称为元素 a_{1j} 的代数余子式，则有

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

行列式按行（列）展开法则

定理 1.3 行列式等于它的任一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积之和:

$$D=|(a_{ij})_{n\times n}|=\left\{\begin{array}{l}a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\ 1\le i\le n\\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\ 1\le j\le n\end{array}\right.$$

证明 分三步证明定理.

(1) 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}$$

由定义，有

$$\begin{aligned}D&=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn}\\ &=a_{nn}\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}\\ &=a_{nn}M_{nn}\\ &=a_{nn}(-1)^{n+n}M_{nn}\\ &=a_{nn}A_{nn}\end{aligned}$$

(2) 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

将第 i 行依次与第 $i+1,i+2,\cdots,n$ 行交换，第 j 列依次与第 $j+1,j+2,\cdots,n$ 列交换，再由第 (1) 步的

结论，有

$$
\begin{aligned}
D =&(-1)^{(n-i)+(n-j)}\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j}\\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij}
\end{vmatrix}\\
=&a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}\\
=&a_{ij}A_{ij}
\end{aligned}
$$

(3) 一般地，由性质 1.4 和第 (2) 步的结论，有

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & & \vdots\\
a_{i1} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & & \vdots\\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
D =& \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & a_{i2} & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}\\
=&a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}
\end{aligned}
$$

由于 $D=D^{\mathrm{T}}$，因此也成立

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\ 1\le j\le n$$

例　计算行列式 $A=\begin{vmatrix} 12 & 5 & 6\\ -2 & -3 & -6\\ 5 & -7 & 3\end{vmatrix}$ 的值.

解

$$
\begin{vmatrix} 12 & 5 & 6\\ -2 & \boxed{-3} & \boxed{-6}\\ 5 & \boxed{-7} & \boxed{3}\end{vmatrix}\qquad
\begin{vmatrix} 12 & 5 & 6\\ \boxed{-2} & -3 & \boxed{-6}\\ \boxed{5} & -7 & \boxed{3}\end{vmatrix}\qquad
\begin{vmatrix} 12 & 5 & 6\\ \boxed{-2} & \boxed{-3} & -6\\ \boxed{5} & \boxed{-7} & 3\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= 12 \times (-3 \times 3 - (-6) \times (-7)) - 5 \times (-2 \times 3 - (-6) \times 5) \\
&\quad + 6 \times ((-2) \times (-7) - (-3) \times 5) \\
&= -558.
\end{aligned}
$$

例　将行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 按第 2 行展开计算它的值.

例　将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 分别按第 3 行和第 3 列展开并计算它的值.

应用定理 1.3 来计算行列式时不一定能简化计算，因为把一个 n 阶行列式的计算换成 n 个 $(n-1)$ 阶行列式的计算并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多的 0 时，应用上述公式才有意义.

但这个公式在理论上是重要的.

例　对上面的行列式，我们也可以利用行列式的性质，先作简化再展开：

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2.
$$

例 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解：

$$
\begin{aligned}
D_4 &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\
&= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 4 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right] - 4 \left[7 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \right] \\
&= 2[5 + 5(18 - 4)] - 4[7(18 - 4) - (6 - 8)] = -250.
\end{aligned}
$$

一点思考 行列式的定义反映以下特点：行列式展开式中，每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的 n 个元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.

特点：任一元素都不能与其同一行或同一列的元素相乘.

为什么？比如，a_{11} 只能与 M_{11} 相乘，但是 M_{11} 中是不会出现与 a_{11} 在同一行或同一列的元素的.

由此我们也就容易明白，展开式恰恰就是由所有"位于不同行和不同列的 n 个元素"的乘积组成．而由排列组合的知识，这种所有可能的组合共有 $n!$ 项.

行列式的计算

例　计算下三角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其中未写出者是零.

解:

$$D_n = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \cdots = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

例　计算反下三角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解　将 D_n 按第一行展开，可得

$$D_n = (-1)^{1+n} a_{1n} D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_{1n} D_{n-1}.$$

反复使用这个结论可得:

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_{1n} D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_{1n} (-1)^{n-2} a_{2,n-1} D_{n-2} \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} a_{1n} a_{2,n-1} \ldots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \ldots a_{n1}. \end{aligned}$$

例 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: 将第一行乘以 (-1) 依次加到其余各行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

再将各列都加到第一列上，得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ &= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

解 升阶法.

$$D_n = \left|\begin{array}{c:cccc} 1 & a & a & \cdots & a \\ \hdashline 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{array}\right|_{(n+1)}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

若 $x = a$，则 $D_n = 0$.

若 $x \neq a$，则将 $\frac{1}{x-a} c_j$ 加到 $c_1, j = 2, 3, \cdots, n+1$：

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 + n\frac{a}{x-a} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)} \\ &= \left(1 + \frac{na}{x-a}\right)(x-a)^n \\ &= [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

在上述解法中出现了“爪形”行列式. 它的解法是固定的.

例 计算行列式（假定 $a_i \neq 0$）：

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

解：分别将第 $i\,(i = 2, \cdots, n+1)$ 列乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 列，得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \Big(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big).$$

例　求 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=(x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

四阶行列式的计算方法二

$$\begin{vmatrix} * & * & \boldsymbol{*} & * \\ * & * & \boldsymbol{a} & * \\ * & * & \boldsymbol{*} & * \\ * & * & \boldsymbol{*} & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & \mathbf{0} & * \\ \boldsymbol{*} & \boldsymbol{*} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{*} \\ * & * & \mathbf{0} & * \\ * & * & \mathbf{0} & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ \boldsymbol{*} & \boldsymbol{*} & \boldsymbol{b} \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & \boldsymbol{*} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b} \\ * & * & \boldsymbol{*} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

例 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解 $D \xlongequal[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$

例　计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=160.$

高阶行列式的计算方法

利用行列式性质，高阶行列式有两种计算方法：

1. 三角法：从左到右，逐步变成上三角行列式
2. 降阶法：从高到低，展开以降低行列式阶数

我们推荐使用降阶法，因为它更加灵活方便.

计算方法 1：利用行列变换，将行列式变为三角形，再将对角元连乘.

例　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}.$

解 $D=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\-1&-1&2&1\\2&5&2&4\\1&2&3&2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&0&1&4\\0&3&4&-2\\0&1&4&-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&3&4&-2\\0&0&1&4\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&-8&1\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&1&4\\0&0&-8&1\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&-1&3\\0&1&4&-1\\0&0&1&4\\0&0&0&33\end{vmatrix}=\frac{33}{2}.$

计算方法 2：将某一行（列）尽可能多的元素变成零，再按该行（列）展开.

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}5&2&-6&-3\\-4&7&-2&4\\-2&3&4&1\\7&-8&-10&-5\end{vmatrix}.$

解 $D\xlongequal{\text{列变换}}\begin{vmatrix}-1&11&6&-3\\4&-5&-18&4\\0&0&0&1\\-3&7&10&-5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&11&6\\4&-5&-18\\-3&7&10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&11&6\\0&39&6\\0&-26&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}39&6\\-26&-8\end{vmatrix}=-156.$

计算方法 3：加边法/升阶法.

例 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&\cdots&x_n\\x_1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}.$

解 若 $n=1$，则 $D_1=x_1-m$. 以下只需考虑 $n\geqslant 2$. 若 $m=0$，则 $D_n=0$，以下只需考虑 $m\neq 0$ 的情况：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\0&x_1-m&x_2&\cdots&x_n\\0&x_1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\-1&-m&0&\cdots&0\\-1&0&-m&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&-m\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m}&x_1&x_2&\cdots&x_n\\0&-m&0&\cdots&0\\0&0&-m&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-m\end{vmatrix}$$

因此，当 $m\neq 0$ 时，

$$D_n=(-m)^n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m}\right).$$

例 计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&4&2\end{vmatrix}.$

解：方法一．行列变换，化为上三角形行列式．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 1\cdot(-3)\cdot(-19) = 57.$$

方法二．逐步降阶：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_3} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 57.$$

例 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}r_3} (-1)^{3+4}\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-4r_2} -5\begin{vmatrix} -7 & 0 & -25 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_2} -5\begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 10.$$

1.5.2 行列式展开式的使用

由展开式得到行列式

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D$$

$$\Longrightarrow uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

一行 (列) 元素与某一行 (列) 元素的代数余子式乘积之和

推论 1.4 行列式某一行 (列) 的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于零:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j,\ 1\leq i,j\leq n$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j,\ 1\leq i,j\leq n$$

证明推论 1.4 只证明第一个等式，第二个等式可类似地证明. 考虑行列式

$$D=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

显然 $D=0$.

另一方面，将 D 按第 j 行展开:

$$D=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

于是 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$.

性质 1.6 一行 (列) 的元素与某一行元素的代数余子式乘积之为:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

[10]

例如

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}=0$$

事实上，下述行列式按第 2 行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}$$

[10] $D=|(a_{ij})_{n\times n}|$，结合定理 1.3 和推论 1.4 可此性质.

而该行列式有两行相同，其值为零.

行列式展开式的使用：一种典型例题

例　设有四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

计算 (1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$,　(2) $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解: (1) 将原行列式中的第一行元素均用 1 替换，所得行列式第一行元素的代数余子式与原行列式第一行对应元素的代数余子式相同.

从而 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=4.$$

(2) 由于 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$，类似 (1)

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{r_1-2r_3}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

例　设

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

D 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}，求

$$A_{11}+3A_{12}-2A_{13}+2A_{14}$$

解　$A_{11}+3A_{12}-2A_{13}+2A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=24.$

范德蒙德 (Vandermonde) 行列式

例 1.7 设 n 为大于 1 的整数，证明

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

证明例 1.7 对范德蒙德行列式 D_n 的阶 n 用数学归纳法.

(1) 若 $n=2$，则

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$$

结论成立.

(2) 假设结论对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，即

$$D_{n-1}=\prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j)$$

由行列式的性质，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{r_i-a_nr_{i-1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0\\ a_1^2-a_1a_n & a_2^2-a_2a_n & \cdots & a_{n-1}^2-a_{n-1}a_n & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_1^{n-2}-a_1^{n-3}a_n & a_2^{n-2}-a_2^{n-3}a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2}-a_{n-1}^{n-3}a_n & 0\\ a_1^{n-1}-a_1^{n-2}a_n & a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_{n-1}^{n-2}a_n & 0\end{vmatrix}$$

将 D_n 按第 n 列展开，得到

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n\\ a_1^2-a_1a_n & a_2^2-a_2a_n & \cdots & a_{n-1}^2-a_{n-1}a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1}-a_1^{n-2}a_n & a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_{n-1}^{n-2}a_n\end{vmatrix}\\ &=(-1)^{n+1}(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}\\ &=(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})D_{n-1}\end{aligned}$$

故:

$$D_n=(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})D_{n-1}$$

及归纳假设:

$$D_{n-1}=\prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j)$$

所以

$$\begin{aligned}D_n&=(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\prod_{1\le j<i\le n-1}(a_i-a_j)\\&=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\end{aligned}$$

故结论对于 n 阶范德蒙德行列式也成立.

根据数学归纳法，结论对于任意阶范德蒙德行列式成立.

第 (2) 步也可以如下处理，原理是一样的.

降阶处理：从第 n 行开始，后行依次减去前行的 a_1 倍，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ 0 & a_2\left(a_2-a_1\right) & \cdots & a_n\left(a_n-a_1\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_2^{n-2}\left(a_2-a_1\right) & \cdots & a_n^{n-2}\left(a_n-a_1\right)\end{vmatrix}$$

按第一列展开，并提出每列的公因子 a_j-a_1，有

$$\begin{aligned}D_n&=\left(a_2-a_1\right)\left(a_3-a_1\right)\cdots\left(a_n-a_1\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}\\&=\left(a_2-a_1\right)\left(a_3-a_1\right)\cdots\left(a_n-a_1\right)\prod_{n\ge i>j\ge 2}\left(a_i-a_j\right)\\&=\prod_{n\ge i>j\ge 1}\left(a_i-a_j\right)\end{aligned}$$

3 阶范德蒙德行列式$V_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\end{vmatrix}=\left(a_3-a_2\right)\left(a_3-a_1\right)\left(a_2-a_1\right)$

4 阶范德蒙德行列式$V_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3\end{vmatrix}=\left(a_4-a_3\right)\left(a_4-a_2\right)\left(a_4-a_1\right)\left(a_3-a_2\right)\left(a_3-a_1\right)\left(a_2-a_1\right)$

例　若 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & x\\ 1 & 4 & x^2\end{vmatrix}=1-x$，则 $x=$______

解　这是一个范德蒙德行列式，其值等于 $V_3=(x-1)(x-2)(2-1)$，由题意有 $(x-1)(x-2)=1-x$，解得 $x=1$.

小结

- 行列式按行 (列) 展开法则：位置很重要.
- 作用：n 阶行列式 $\Longrightarrow n$ 个 $n-1$ 阶行列式，实现了从高阶转变为低阶. (但是计算量仍然较大).
- **初等性质 + 行列式按行 (列) 展开法则**，ta 不香么.
- **范德蒙德行列式**，结构和结论都必须要记住.

一些注记

三阶行列式不建议使用"沙路法"

$$\begin{aligned}\left|\begin{array}{rrr}2 & -5 & 0\\ 1 & 3 & -3\\ 4 & -1 & 6\end{array}\right| &= 2\cdot 3\cdot 6+(-5)\cdot(-3)\cdot 4+1\cdot(-1)\cdot 0\\ &\quad -0\cdot 3\cdot 4-(-3)\cdot(-1)\cdot 2-(-5)\cdot 1\cdot 6\\ &= 36+60+0-0-6-(-30)=120.\end{aligned}$$

或者，由定义得

$$D_3=2\cdot\left|\begin{array}{rr}3 & -3\\ -1 & 6\end{array}\right|-(-5)\cdot\left|\begin{array}{rr}1 & -3\\ 4 & 6\end{array}\right|=120.$$

建议：三阶行列式按定义计算.

利用行列式的按行（列）展开性质也可以证明数乘性、可加性：

$$\begin{aligned}\left|\begin{array}{cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right| &= ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}\\ &= k\left(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\right)\\ &= k\left|\begin{array}{cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= \left(b_1+c_1\right)A_{i1}+\left(b_2+c_2\right)A_{i2}+\cdots+\left(b_n+c_n\right)A_{in}\\ &= \left(b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}\right)+\left(c_1A_{i1}+c_2A_{i2}+\cdots+c_nA_{in}\right)\\ &= \left|\begin{array}{cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right|+\left|\begin{array}{cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right|.\end{aligned}$$

1.6 克拉默法则

本节利用行列式，证明线性方程组的克拉默法则.

克拉默 (Cramer) 法则 **定理 1.4** 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组有唯一的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[11] **克拉默法则的证明** (1) 先证明 $x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$ 为方程组的解. 将其代入方程组的第 i 个方程的左端，有

$$\begin{aligned} & a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D} \\ =&\frac{1}{D}(a_{i1}D_1+a_{i2}D_2+\cdots+a_{in}D_n) \\ =&\frac{1}{D}\big(a_{i1}(b_1A_{11}+\cdots+b_iA_{i1}+\cdots+b_nA_{n1})+\cdots \\ &+a_{in}(b_1A_{1n}+\cdots+b_iA_{in}+\cdots+b_nA_{nn})\big) \\ =&\frac{1}{D}\big(b_1(a_{i1}A_{11}+\cdots+a_{in}A_{1n})+\cdots+b_i(a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}) \\ &+\cdots+b_n(a_{i1}A_{n1}+\cdots+a_{in}A_{nn})\big) \\ =&\frac{1}{D}(b_1\cdot 0+\cdots+b_i\cdot D+\cdots+b_n\cdot 0)=b_i,\ i=1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

是方程组的解.

(2) 再证明解的唯一性. 需要证明: 若

$$x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$$

[11]直接应用克拉默法则时，注意线性方程组需满足如下两个条件:
(1) 方程组中方程的个数与未知量个数相等;
(2) 系数行列式不等于零.

为方程组的解，则

$$c_1=\frac{D_1}{D},\ c_2=\frac{D_2}{D}\cdots,c_n=\frac{D_n}{D}$$

(a) 将 $x_i=c_i,i=1,\cdots,n$ 代入方程组，得如下 n 个等式：

$$\begin{cases} a_{11}c_1+\cdots+a_{1i}c_i+\cdots+a_{1n}c_n=b_1\\ a_{21}c_1+\cdots+a_{2i}c_i+\cdots+a_{2n}c_n=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}c_1+\cdots+a_{ni}c_i+\cdots+a_{nn}c_n=b_n \end{cases}$$

(b) 对于 $j=1,2,\cdots,n$，在第 j 个式子两边同乘以 A_{ji}，再将第 1 到第 n 个等式相加，得

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1i}+a_{21}A_{2i}+\cdots+a_{n1}A_{ni})c_1+\cdots\\ +&(a_{1i}\,A_{1i}+a_{2i}\,A_{2i}+\cdots+a_{ni}\,A_{ni})c_i+\cdots\\ +&(a_{1n}A_{1i}+a_{2n}A_{2i}+\cdots+a_{nn}A_{ni})c_n=b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots+b_nA_{ni} \end{aligned}$$

因为

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j\\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

所以得到 $c_iD=D_i$.

(c) 又 $D\neq 0$，故

$$c_i=\frac{D_i}{D},\ i=1,2\cdots n$$

克拉默法则的局限

直接应用克拉默法则时，注意线性方程组需满足如下两个条件:

1. 方程组中方程的个数与未知量个数相等.
2. 系数行列式不等于零.

克拉默法则从理论上完美地解决了一少部分线性方程组的求解问题，但因其中行列式计算量太大，实际求解并不用此方法. 高斯消元法仍然是行之有效的简单解法.

例　求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+2x_2-x_3=0\\ 3x_1+5x_2+x_3=3 \end{cases}$

解　该方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 1&2&-1\\ 3&5&1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 0&1&-2\\ 0&2&-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 0&1&-2\\ 0&0&2 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

根据克拉默法则它有唯一解. 对该方程组，有

$$D_1=\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 0&2&-1\\ 3&5&1 \end{vmatrix}=-2,\ D_2=\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 1&0&-1\\ 3&3&1 \end{vmatrix}=2,\ D_3=\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 1&2&0\\ 3&5&3 \end{vmatrix}=2.$$

所以，该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

例 1.8 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1-2r_2]{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+2c_2]{c_3+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27$$

由克拉默法则，方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27,\ D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = -4,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = -1,\ x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$$

例　$1 = 4, 2 = 8, 3 = 24, 4 =?$

分析：视为数列问题：

$$4, \quad 8, \quad 24, \quad ?$$

或者：求过点 $(1,4),(2,8),(3,24)$ 的曲线方程.

解：设曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1,4),(2,8),(3,24)$. 得

$$\begin{cases} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = 4 \\ \lambda_0 & + & 2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & = 8 \\ \lambda_0 & + & 3\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & = 24 \end{cases}$$

由高斯消元法得

$$\lambda_0 = 12, \quad \lambda_1 = -14, \quad \lambda_2 = 6.$$

故 $y = 12 - 14x + 6x^2$，得 $y(4) = 52$.

思考：数列前 3 项依次为 4，8，24，第 4 项能否取别的值？甚至是任意数值?!

事实上，令第 4 项的值为任意常数 c，设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4),(2,8),(3,24),(4,c)$．得线性方程组：

$$\begin{cases} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = 4 \\ \lambda_0 & + & 2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = 8 \\ \lambda_0 & + & 3\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 27\lambda_3 & = 24 \\ \lambda_0 & + & 4\lambda_1 & + & 16\lambda_2 & + & 64\lambda_3 & = c \end{cases}$$

它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$$

是范德蒙行列式，且每个 a_i 都不相同，故 $D \neq 0$．由克拉默法则，方程组必有唯一解.

数列问题：

$$4, \quad 8, \quad 24, \quad ?$$

答案可以是任意的数！

☛ 一般地，过 $n+1$ 个 x 坐标不同的点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_{n+1}, y_{n+1})$，可以唯一地确定一个 n 次曲线方程

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n$$

但是，满足这 $n+1$ 个已知点的多项式有无穷多个！

第 2 章　矩阵

矩阵是一重要的数学工具，线性代数的许多问题都可以用矩阵这来表示和讨论．这一章将主要讨论矩阵的代数运算，可逆矩阵，矩阵的初等变换和矩阵的秩.

学完本章之后要具备的最基本能力

- 矩阵乘法不满足的三条规律.
- 伴随矩阵的定义与公式.
- 求逆矩阵.

2.1　矩阵的基本概念

本节引入矩阵的概念及定义矩阵的代数运算.

矩阵的概念

	销地 1	销地 2	销地 3	销地 4	销地 5
产地 1	0	3	4	7	5
产地 2	8	2	3	0	2
产地 3	5	4	0	6	6

如果我们用 a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4,5)$ 表示从第 i 个产地运往第 j 个销地的运量 (如 $a_{12}=3$，$a_{24}=0$，$a_{35}=6$), 这样就能把调运方案表简写成一个 3 行 5 列的数表

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A,B,C,D}$ 四名学生的考试成绩可用下表显示:

	数学	物理	英语	语文
学生 A	98	90	87	72
学生 B	89	90	86	98
学生 C	97	84	75	87
学生 D	85	88	85	88

如果不考虑其中的学生和课程的区别，仅考虑成绩，那么上表就可以归结为下面的矩形数表：

$$\begin{pmatrix} 98 & 90 & 87 & 72 \\ 89 & 90 & 86 & 98 \\ 97 & 84 & 75 & 87 \\ 85 & 88 & 85 & 88 \end{pmatrix}$$

其中数表两边的括号指明表中数字及其所处位置共同形成一个整体.

3 种商品在 4 个不同商店的销售量统计可用下表显示：

	商品甲	商品乙	商品丙
商店 A	102	190	892
商店 B	200	310	198
商店 C	970	804	787
商店 D	80	85	128

如果不考虑其中商品和商店的差别，仅考虑数字，那么上表可以归结为如下矩形数表

$$\begin{pmatrix} 102 & 190 & 892 \\ 200 & 310 & 198 \\ 970 & 804 & 787 \\ 80 & 85 & 128 \end{pmatrix}.$$

对一个含有 n 个未知元 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

如果略去其中的联系符“+”、“=”，以及未知元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，仅考虑对应的系数和等式右端的常数项，按顺序可以排成下面一个矩形数表:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

从高斯消元法开始

- 本节通过高斯消元法，说明矩阵概念出现的必要性.
- 高斯消元法虽然简单，但是整个线性代数可以认为是由此发端的. 后续的很多话题，无不渗透着高斯消元法的影子.
- 《线性代数》——一个线性方程组引发的故事.

例　用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8, & (r_1) \\ -3x - y + 2z = -11, & (r_2) \\ -2x + y + 2z = -3. & (r_3) \end{cases}$$

高斯消元法的原理是:

1. 要将 r_1 以下的等式中的 x 消除，然后再将 r_2 以下的等式中的 y 消除. 使整个方程组变成一个阶梯形的格式.
2. 再将已得出的答案一个个地回代到已被简化的等式中的未知数中，即得其余的答案.

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3 \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	$r_2+\frac{1}{2}r_3 \to r_2$ $r_1-r_3 \to r_1$

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ \frac{1}{2}y=\frac{3}{2}, \\ -z=1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	$r_1-r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$
$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	

实际参与运算的只有系数和常数，把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列里，方程的运算与变换，体现为矩形阵列中，各行元素的相应运算.

线性方程组的主要信息可以紧凑地记录在一个矩形阵列里，称之为矩阵．矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

称为方程组的系数矩阵，矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

称为方程组的增广矩阵（augmented matrix）.

增广矩阵由系数矩阵加上方程组右端常数列组成.

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ \frac{1}{2}y=\frac{3}{2}, \\ -z=1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	$r_1-r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$
$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$		

MATLAB

求线性方程组的解

问题：求出线性方程组的全部解

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+y-\ \ z=\ \ 8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3 \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1\to r_2$ $r_3+r_1\to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+\ \ y-\ \ z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+\ \ z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2\to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+\ \ y-\ \ z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	$r_2+\frac{1}{2}r_3\to r_2$ $r_1-r_3\to r_1$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

- 未知数个数 $=$ 方程个数 $\Longrightarrow$ 已解决
- 未知数个数 $\neq$ 方程个数 $\Longrightarrow$ 待解决

例如：确定下列线性方程组的全部解

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 28 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 35 \end{cases}$$

求线性方程组的解

抽出方程组两边各个常数，得到两个矩形阵列：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 28 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 35 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & -6 \\ 4 & -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 19 \\ 28 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

方程组的全部解完全由这两个矩形阵列所决定.

齐次线性方程组与数表

“齐次”线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[12]

“非齐次”线性方程组与系数及常数表

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

[13]

研究线性方程组实质上只需考虑这类数表. 关于这类数表的讨论就是矩阵理论.

矩阵的定义

定义 2.1 称数域 $\boldsymbol{P}$ 中的 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为数域 $\boldsymbol{P}$ 上的 $m \times n$ 型矩阵，简称矩阵 (Matrix). 称 a_{ij} 为矩阵的第 i 行 j 列的元素，其中 $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

- 大写字母 A，B，C 及 (a_{ij}) 等表示矩阵，为了明确行数和列数，也可写成 $A_{m\times n}$，$(a_{ij})_{m\times n}$；
- 数域 $\boldsymbol{P}$ 上的全体 $m \times n$ 型矩阵的集合记为 $\boldsymbol{P}^{m\times n}$；
- 在这一章，除了特别声明，说到数时均指某个数域 $\boldsymbol{P}$ 中的数，矩阵均指数域 $\boldsymbol{P}$ 上的矩阵；
- 只有 1 行 1 列的矩阵 $(a)_{1\times 1}$ 视为数 a.

回顾我们在绪论中所引用的《九章算术》中的方程组

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

不考虑常数项，仅使用系数可以排列成矩阵 A；既使用系数也使用常数项可以排列成矩阵 $\overline{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

矩阵 A 叫方程组 (I) 的**系数矩阵**，矩阵 $\overline{A}$ 叫方程组 (I) 的**增广矩阵**.

用消元法解线性方程组，实际上是对方程组反复施行以下 3 种变换:

[12]线性方程组的未知数可以用任何字母来表示，因此，此系数表完全决定了上述线性方程组.

[13]此数表完全决定了上述线性方程组.

1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上;
2. 互换两个方程的位置;
3. 用一个非零数乘以某一个方程.

这 3 类变换称为线性方程组的初等变换. 经过初等变换, 把原方程组变成阶梯型方程组, 然后用回代方法(从最后一个方程开始, 逐次往上解) 去求得方程组的解.

☛ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

1. 把矩阵的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行, 记作 $r_i + \mu r_j$;
2. 互换矩阵的 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;
3. 用任意非零数 α 乘以矩阵的第 i 行, 记作 $r_i \times \alpha$.

矩阵初等变换的具体讨论, 在本章第 4 节展开.

有关矩阵的几个概念

同型矩阵 如果矩阵 A 与 B 都是 $m \times n$ 型矩阵, 则称 A 与 B 为同型矩阵.

矩阵相等 若 A 与 B 为同型矩阵, 且对应元素相同, 则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

方阵 称行数和列数都等于 n 的矩阵 $A_{n\times n}$ 为 n 阶方阵, 简记为 A_n.

区分矩阵和行列式

注意不要将 n 阶矩阵和 n 阶行列式的概念混淆:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

- 行列式的本质是一个数; 矩阵是一个数表, 是一个由数字构成的矩形阵列. 它本身并不包含任何运算.
- 行列式的行数与列数必相等; 矩阵的行数与列数不一定相等.
- 行列式的符号与矩阵的符号也不一样.

☛ 约定: 矩阵符号只能是 ( ), 或 [ ].

2.1.1 特殊矩阵

几种特殊矩阵

1. 单位矩阵
2. 数量矩阵
3. 对角矩阵
4. 三角矩阵
5. 对称矩阵
6. 行 (列) 矩阵

n 阶单位矩阵 (identity matrix) 主对角线上的元素都为 1, 其余元素是 0 的 n 阶方阵

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

[14]

在矩阵的乘法中，单位矩阵扮演着和实数乘法中的 1 类似的角色，即有

命题. 对于单位矩阵和 $m\times n$ 矩阵 A，有如下性质：

$$E_mA=A,\quad AE_n=A.$$

另外，对于 n 阶矩阵 A，我们规定 $A^0=E_n$.

不同型的零矩阵是不相等的，注意它们可能都简记为 O. 不同型的单位矩阵 E 也是不相等的.

数量矩阵 对角线位置元素都是 k 而其他位置都是 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，记为 kE_n. 即

$$kE_n=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

命题. 对于数量矩阵和 $m\times n$ 矩阵 A，我们有如下性质：

$$(kI_m)A=A(kI_n)=kA.$$

事实. 两个数量矩阵的和、差及乘积仍然是数量矩阵.

对角矩阵 除了对角线，其他位置都是 0 的 n 阶矩阵称为对角矩阵. 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} & \\ & & a_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

可将上述矩阵简记为 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

容易得知，两个对角矩阵的和、差以及乘积仍然是对角矩阵 (diagonal matrix)．例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵 对角线下边的各个元素都是 0 的 n 阶矩阵称为上三角矩阵，即形如下面的方阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge $*$} & \\ & & a_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[14]简记为 E. 也可记为 I_n（有时简记为 I）

下三角矩阵 对角线上边的各个元素都是 0 的 n 阶矩阵称为下三角矩阵，即形如下面的方阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} & \\ & & a_{33} & & \\ & \text{\huge $*$} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

分别为一个上三角形矩阵和下三角形矩阵.

容易得知，两个上（下）三角矩阵的和、差以及乘积仍然是上（下）三角矩阵. 例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge $*$} & \\ & & a_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\ & b_{22} & & \text{\huge $*$} & \\ & & b_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \text{\huge $*$} & \\ & & a_{33}b_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵 对于 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，如果对于任何 i, j 都有 $a_{ij} = a_{ji}$，我们就称它为对称矩阵. 例如，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵.

定义 对一个 $m \times n$ 的矩阵 A，将它的行和列的位置交换，即将第 i 行第 j 列的元素放在第 j 行第 i 列，得到新的 $n \times m$ 矩阵，称为矩阵 A 的转置，记为 A^{T}.

因此，如果 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$A^{\mathrm{T}} = (b_{ij})_{n\times m}$，则有 $b_{ij} = a_{ji}$.

容易看出，矩阵 A 是对称的，等价于它满足 $A^{\mathrm{T}} = A$.

事实. *1. 设 A 和 B 为对称矩阵，则 $A \pm B$ 也是对称矩阵.*

2. 设 A 为对称矩阵，则 kA 也是对称矩阵.

3. 设 A 为任何方阵，则 $A + A^{\mathrm{T}}$ 必是对称矩阵.

4. 设 A 为任何矩阵，则 AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 都是对称矩阵.

注记. 如果 A，B 都是对称矩阵，AB 未必是对称矩阵.

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵，但是 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 就不是对称矩阵.

定理. *如果 A，B 都是对称矩阵，而且两者是可交换的，即 $AB = BA$，则 AB 仍然是对称矩阵.*

行矩阵与列矩阵

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2.1.2 矩阵的运算

矩阵的线性运算：加法 类比相同维数向量的加减法运算，我们可以给出同型矩阵的加减法运算．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵的线性运算：数乘 类比向量的数乘，我们可以给出矩阵的数乘运算．设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，那么 $2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

我们称 kI 为**数量矩阵**，其中 $k \neq 0$．

可以反向使用矩阵的数乘，也就是可以把矩阵所有元素的公因子提出来．

矩阵的乘法：行矩阵乘以列矩阵 类比向量的数量积（内积或点乘积），我们定义行矩阵与列矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

只有在行矩阵 A 的列数和列矩阵 B 的行数相等时，AB 才能运算，所以 AB 不能写成 BA．

矩阵的乘法：两行的矩阵乘以列矩阵 如果 A 有两行 α_1 和 α_2，B 是列矩阵，那么 AB 就可以用 α_1 和 α_2 分别与 B 做乘积来定义，即：

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

那么，$AB =$?

$$AB = \begin{pmatrix} 5+6+3 \\ 20+15+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

矩阵的代数运算 (定义 2.2)

加法 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵，则定义矩阵 A 与 B 的加法为 $A+B=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$$

数量乘法 (数乘) 设 μ 为数域 $\boldsymbol{P}$ 中的数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为数域 $\boldsymbol{P}$ 上的矩阵，则定义矩阵的数量乘法（简称数乘）为 $\mu A=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\mu a_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$$

乘法 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，即矩阵 A 的列数与 B 的行数相等，则定义矩阵 A 与 B 的乘法为 $AB=(c_{ij})_{m\times p}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj},\ i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,p$$

矩阵的加法

$$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix};$$

负矩阵/减法 规定: $-A=(-1)A$ 规定: $A-B=A+(-B)$

矩阵的减法

$$A-B=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意，只有这两个矩阵是同种类型的，即它们的行数和列数相等，才能作加减法，此时得到的结果仍为同类型的矩阵.

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 $A+B$ 和 $A-B$.

矩阵的加法

性质. 矩阵的加法满足如下性质：

1. $A+B=B+A$;
2. $A+O=O+A=A$;
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

虽然矩阵也有所谓的"加法"，"乘法"，但是这和我们熟知的实数加法，乘法是完全不同的．运算的对象不同，运算的内容不同，当然，运算的规律也不同．这是两个不同的讨论范围里的不同运算，相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已，我们不要被这一点"相同"而忘记二者本质的不同．

矩阵的数乘

$$kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

例　$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，求 $2A$.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. 求 $3A+2B-4C$.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$，且 $5A+3X=B$. 求 X.

区分矩阵和行列式 注意，常数 k 和行列式相乘时，等同于用 k 乘以某一行或某一列的每个元素．而 k 和矩阵相乘时，等同于用 k 乘以矩阵的所有元素．例如：

$$k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 2k \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ 或 } k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 3k & 4 \end{vmatrix}\text{等，}\quad k\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 3k & 4k \end{pmatrix}.$$

矩阵的数乘

性质. 设 k，l 为常数，A，B 为同种类型的矩阵．矩阵的数乘有如下性质：

1. $(k+l)A=kA+lA$;
2. $k(lA)=(kl)A=l(kA)$;
3. $k(A+B)=kA+kB$.

矩阵的乘法 对两个矩阵作乘法，不能拿对应元素直接相乘．首先 $A_{m\times r}$ 和 $B_{s\times n}$ 可以相乘，需要满足 $r=s$，即第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数．

定义　对矩阵 $A_{m\times r}=(a_{ij})_{m\times r}$ 和 $B_{r\times n}=(b_{ij})_{r\times n}$，我们定义

$$A_{m\times r}B_{r\times n}=C_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}$.

设 $C=AB$，则 c_{ij} 由 A 的第 i 行和 B 的第 j 列的对应元素相乘，再相加得到．

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \boxed{b_{13}} \\ b_{21} & b_{22} & \boxed{b_{23}} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & \boxed{c_{23}} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix} = C = AB$$

第 2 行第 3 列元素 $\boxed{c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 56 & 41 \end{pmatrix}$$

注记.
- *只有当 A 的列数等于 B 的行数时，AB 才能运算*
- *因此，矩阵乘法的顺序一般不能轻易改变*
- *AB 常常读作"A 左乘 B"，也常常读作"B 右乘 A"*
- *即使 A 和 B 都是方阵，也很可能无法交换乘法顺序（后文举例）*

性质. *矩阵的乘法满足下列性质（假设乘法运算都满足条件）：*

1. *结合律：$(AB)C=A(BC)$;*
2. *分配律：$(A+B)C=AC+BC$;*
3. *分配律：$C(A+B)=CA+CB$;*
4. *数乘结合律：$k(AB)=(kA)B=A(kB)$.*

矩阵加法显然满足交换律，那么矩阵乘法是否满足交换律呢？不！

例 2.1 计算 AB 与 BA，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

[15] **解**

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\times 1+3\times 3+4\times(-5) & 1\times 2+3\times 4+4\times 1 \\ 2\times 1+4\times 3+5\times(-5) & 2\times 2+4\times 4+5\times 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 18 \\ -11 & 25 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\times 1+2\times 2 & 1\times 3+2\times 4 & 1\times 4+2\times 5 \\ 3\times 1+4\times 2 & 3\times 3+4\times 4 & 3\times 4+4\times 5 \\ -5\times 1+1\times 2 & -5\times 3+1\times 4 & -5\times 4+1\times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 11 & 14 \\ 11 & 25 & 32 \\ -3 & -11 & -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[15] 由此观察矩阵的乘法是否满足交换律.

- 例题说明矩阵的乘法没有交换律;
- 若 AB 与 BA 都有意义，且 $AB=BA$，则称 A 与 B 可交换.

可交换矩阵例题

例 求与 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵 B.

解 设 $B=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$，那么 $AB=\begin{pmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2&a_3+b_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}a_1&a_1+a_2&a_3\\b_1&b_1+b_2&b_3\\c_1&c_1+c_2&c_3\end{pmatrix}$. 因为 $AB=BA$，所以 $b_1=0$，$b_2=a_1$，$b_3=0$，$c_1=0$，a_1,a_2,a_3,c_2,c_3 取任意数.

例 2.2 计算 AB，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}$$

解

$$AB=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 $AB=O$.

注记. 以上两个例子说明，对于矩阵乘法，从 $AB=O$ 不能推出 $A=O$ 或 $B=O$.

注记. 从 $AB=AC$ 和 $A\neq O$ 不能推出 $B=C$，即乘法消去律一般不成立!

关于矩阵乘法的三个重要结论

1. 矩阵乘法不满足交换律.即一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.
2. 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时，不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

   若 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq 0$，而 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时，称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子，$\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的左零因子.
3. 矩阵乘法不满足消去律.

   即当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时，不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

以后我们会了解到：当行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，

1. $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$;
2. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

矩阵的运算法则 **性质 2.1** 设 A,B,C 为数域 $\boldsymbol{P}$ 上的矩阵，$\mu,\nu\in\boldsymbol{P}$，则

1. $A+B=B+A$，其中 $A,B\in\boldsymbol{P}^{m\times n}$;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$，其中 $A,B,C\in\boldsymbol{P}^{m\times n}$;
3. $(\mu\nu)A=\mu(\nu A)=\nu(\mu A)$;
4. $\mu(A+B)=\mu A+\mu B$，其中 $A,B\in\boldsymbol{P}^{m\times n}$;
5. $(\mu+\nu)A=\mu A+\nu A$;
6. $(AB)C=A(BC)$，其中 $A\in\boldsymbol{P}^{m\times n}$，$B\in\boldsymbol{P}^{n\times p}$，$C\in\boldsymbol{P}^{p\times q}$;

7. $(A+B)C = AC + BC$，其中 $A, B \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$，$C \in \boldsymbol{P}^{n\times p}$；
8. $C(A+B) = CA + CB$，其中 $C \in \boldsymbol{P}^{l\times m}$，$A, B \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$；
9. $E_m A = A E_n = A$，其中 $A \in \boldsymbol{P}^{m\times n}$.

矩阵的乘方

定义. 对于一个 n 阶矩阵 A，我们定义

$$A^1 = A, \quad A^2 = A\cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A,$$
$$A^4 = A^3 \cdot A, \quad \cdots, \quad A^m = A^{m-1}\cdot A.$$

当矩阵 A 为方阵时，对于正整数 k，定义:

$$A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k}$$

矩阵的幂次

由于矩阵乘法满足分配律、结合律，有

性质. 设 A 为方阵，m、n 为自然数，则有

1. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$；
2. $(A^m)^n = A^{mn}$.

例　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^n 和 B^n.

例　设 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 C^n.

例　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，

1. 计算并验证 $(AB)^2 \neq A^2B^2$，
2. 计算并验证 $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$.

解:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 24 & 27 \end{pmatrix} = A^2B^2$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (A+B)(A-B)$$

矩阵不满足的运算律

1. 存在矩阵 A 和 B，使得 $AB \neq BA$.
2. 存在矩阵 A 和 B，使得 $(AB)^k \neq A^kB^k$.
3. 存在矩阵 A 和 B，使得 $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
4. 存在矩阵 A 和 B，使得 $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

正确计算方式

- $(AB)^3 = (AB)(AB)(AB)$
- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$
- $(A+B)(A-B) = A^2 - BA + AB - B^2$

矩阵多项式 设 m 次多项式

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称矩阵

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

为 A 的一个矩阵多项式.

对角矩阵的乘方

设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix},\ k = 1, 2, \cdots$$

对角矩阵的矩阵多项式

$$\begin{aligned} f(A) =& a_m \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix} + a_{m-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{m-1} & & & \\ & \lambda_2^{m-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{m-1} \end{pmatrix} \\ & + \cdots + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

线性方程组的矩阵表示

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX=B$$

由此可见

- 矩阵乘法的运算规则有助于：简化线性方程组的书写
- 在线性代数中，向量坐标写成 **列矩阵的形式** 常常会更为方便
- 写成行矩阵形式的向量也称 **行向量**
- 写成列矩阵形式的向量也称 **列向量**

矩阵乘法的应用

n 个变量 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 和 m 个变量 $y_1,y_2,\ldots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

叫做从 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\ldots,y_m$ 的**线性变换**，其中，a_{ij} 为常数．如果令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

那么上述线性变换可以用矩阵乘法表示出来，即 $\quad y=Ax.$

矩阵的转置 **定义 2.3** 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，称 $n\times m$ 型矩阵

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 A 的转置 (Transpose).

例 $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

矩阵的转置的性质 **性质 2.2** 设 $\mu\in\boldsymbol{P}$，A 与 B 为数域 $\boldsymbol{P}$ 上矩阵，则

1. $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$，其中 $A,B\in\boldsymbol{P}^{m\times n}$；
2. $(\mu A)^{\mathrm{T}}=\mu A^{\mathrm{T}}$；
3. $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$，其中 $A\in\boldsymbol{P}^{m\times n}$，$B\in\boldsymbol{P}^{n\times p}$；

4. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

16

证明性质 3: $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 设

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{n\times p}$$

(1) 矩阵 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 是同型矩阵.

(2) 证 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的对应元素相等.

(a) 矩阵 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素即为 AB 的第 j 行第 i 列元素:

$$a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$$

(b) 矩阵 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素，即 B^{T} 的第 i 行 (B 的第 i 列) 与 A^{T} 的第 j 列 (A 的第 j 行) 对应元素乘积之和:

$$(b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{ni})\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$$

(c) 可见 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 与 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的对应元素相等.

对称矩阵和反称矩阵

若 $A^T = A$，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A^T = -A$，则称 A 为**反称矩阵**；

例如，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 是对称矩阵，$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 是反称矩阵.

- 对称和反对称矩阵都是方阵.
- 对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 总满足：$a_{ij} = a_{ji}$.
- 反称矩阵 $A = (a_{ij})$ 总满足：$a_{ii} = 0$，$a_{ij} = -a_{ji}$.

对称矩阵和反称矩阵

例 设 A 和 B 是同阶对称矩阵，求证 AB 为对称矩阵的充要条件为 $AB = BA$.

证明 设 AB 是对称矩阵. 那么 $AB = (AB)^T = B^TA^T = BA$，所以 $AB = BA$. 设 $AB = BA$. 那么 $(AB)^T = B^TA^T = BA = AB$，所以 AB 是对称矩阵.

对称矩阵和反称矩阵

例 设 A 和 B 是同阶方阵，A 为反称矩阵，B 为对称矩阵，求证 $AB - BA$ 为对称矩阵.

证明 $(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^TA^T - A^TB^T = -BA + AB = AB - BA$，所以 $AB - BA$ 是对称矩阵.

例 2.3 设 B 为一个列矩阵，且 $B^{\mathrm{T}}B = 1$. 令

$$C = E - 2BB^{\mathrm{T}}$$

---

[16]性质 1 和 3 可推广为:
$(A_1 + A_2 + \cdots + A_s)^{\mathrm{T}} = A_1^{\mathrm{T}} + A_2^{\mathrm{T}} \cdots + A_s^{\mathrm{T}}$
$(A_1A_2\cdots A_s)^{\mathrm{T}} = A_s^{\mathrm{T}} \cdots A_2^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}$

证明 C 为对称矩阵，且 $CC^{\mathrm{T}}=E$.

证明 因为

$$\begin{aligned}C^{\mathrm{T}}&=(E-2BB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}-2(BB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E-2(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\\&=E-2BB^{\mathrm{T}}=C,\end{aligned}$$

所以 C 为对称矩阵，且

$$\begin{aligned}CC^{\mathrm{T}}=&(E-2BB^{\mathrm{T}})(E-2BB^{\mathrm{T}})\\=&E^2-E(2BB^{\mathrm{T}})-2BB^{\mathrm{T}}E+4(BB^{\mathrm{T}})(BB^{\mathrm{T}})\\=&E-2BB^{\mathrm{T}}-2BB^{\mathrm{T}}+4B(B^{\mathrm{T}}B)B^{\mathrm{T}}\\=&E-4BB^{\mathrm{T}}+4BB^{\mathrm{T}}=E+O=E.\end{aligned}$$

方阵的行列式

定义 2.4 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

为方阵. 称行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

为方阵 A 的行列式，记为 $|A|$，$|(a_{ij})_{n\times n}|$ 或 $\det(A)$. 只有方阵才有行列式.

- 当 $|A|=0$ 时，称 A 为奇异矩阵（Singular Matrix）;
- 当 $|A|\neq 0$ 时，称 A 为非奇异矩阵（Nonsingular Matrix）.

例如，如果 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则 $|A|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=-2.$

方阵的行列式的性质

性质. *设 A,B 是 n 阶矩阵，k 为常数，则有*

1. $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$;
2. $|kA|=k^n|A|$;
3. $|AB|=|A|\cdot|B|$;
4. $|AB|=|BA|$.

初学者容易犯的一个错误是：$|kA|=k|A|$.

方阵乘积的行列式与行列式的乘积

定理 2.1 设 A 与 B 为同阶方阵，则

$$|AB|=|A||B|$$

[17]

[17]把上等式写成 $|A||B|=|AB|$，则此式可视为行列式的乘法规则.

证明 设

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\ B=(b_{ij})_{n\times n}$$

构造行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(1) 根据第 1 章命题 1.1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=|A||B|$$

(2) 由行列式性质

$$D\xlongequal[l=1,\cdots,n]{r_l+\sum_{k=1}^{n}a_{lk}r_{n+k}}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn} \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n$$

于是

$$D\xlongequal[l=1,2,\cdots,n]{c_l\leftrightarrow c_{n+l}}(-1)^n\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & & b_{1n} & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & & -1 \end{vmatrix}$$

(3) 再由第 1 章命题 1.1

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2n} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= |AB|$$

把定理 2.1 中等式写成 $|A||B| = |AB|$，则此式可视为行列式的乘法.

例　已知 A 是三阶方阵，B 是四阶方阵，且 $|A| = 3, |B| = 2$，求 $||A|B|$.

解:

$$||A|B| = |3B| = 3^4|B| = 81 \times 2 = 162.$$

例　已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$，求 $\left||A|A^2A^{\mathrm{T}}\right|$.

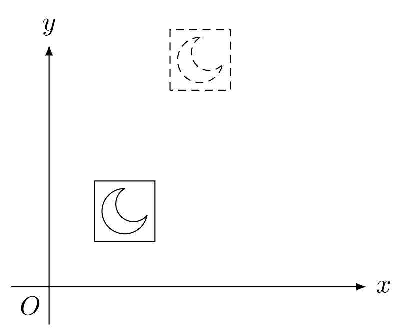
例　已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求 $|4A|$.

2.1.3　矩阵的几何意义

矩阵加法等同于平移变换 将平面上点的坐标 (x, y) 看作矩阵，则图形的平移对应于（对每个点）应用矩阵的加法．例如:

平移:

$$(x, y) + (1, 2) = (x', y')$$



矩阵乘法等同于线性变换 用二阶矩阵乘以坐标矩阵的变换称为线性变换．即有

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (x', y'),$$

或者

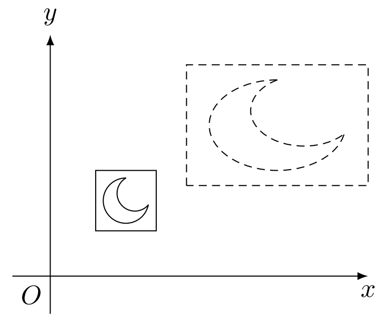
$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}.$$

线性变换将把直线变为直线，但可能会将矩形变成平行四边形.

平面图形的线性变换之一 图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

1. 伸缩（x 和 y 分别缩放）：

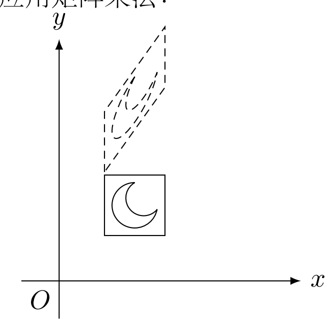
$$(x, y)\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = (x', y')$$



平面图形的线性变换之二 图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

2. 错切（x 不变，y 倾斜）：

$$(x, y)\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x', y')$$

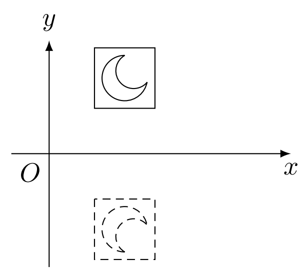


平面图形的线性变换之三 图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

3. 倒影（或称反射）：

$$(x, y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x', y')$$

倒影后逆时针变成顺时针.

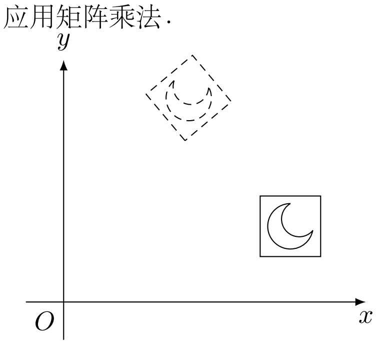


平面图形的线性变换之四 图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

4. 旋转（逆时针转 θ 度）：

$$(x, y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (x', y')$$

旋转后逆时针还是逆时针.



线性变换的复合 线性变换的复合对应于二阶矩阵的乘积.

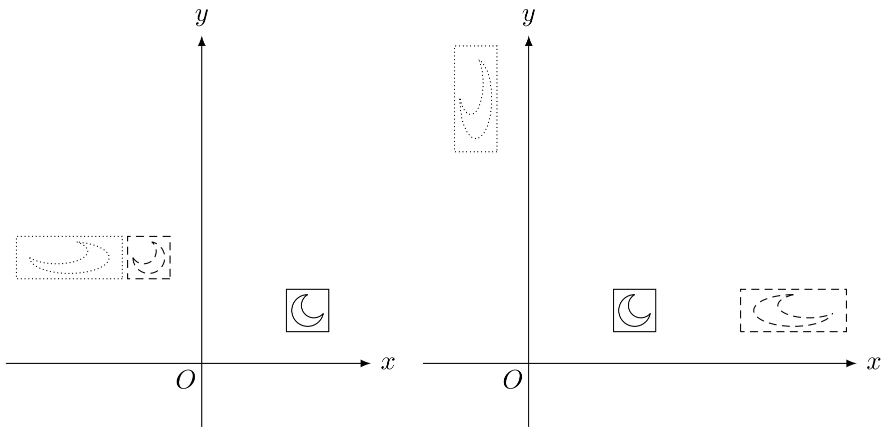
先旋转再伸缩对应于下面的矩阵运算（注意矩阵运算满足结合律）：

$$(x, y)\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\right) = (x', y')$$

而先伸缩再旋转对应于下面的矩阵运算：

$$(x, y)\left(\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = (x', y')$$

在上面两个变换中取 $\theta = 90°$，$k_1 = 2.5$，$k_2 = 1$，得到的图形如下：



矩阵乘法无交换律 我们可以看到：对一个图形，先旋转再伸缩和先伸缩再旋转得到的结果通常是不一样的，这也是矩阵乘法不可交换的实际例子.

矩阵乘法引入的第一个途径：线性变换 矩阵的乘法是阿瑟 · 凯莱（Arthur Cayley，1821 ∼ 1895）于 1858 年根据线性变换乘积的需要提出的.

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2. \end{cases} \tag{6}$$

将(6)带入(5)，可得从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换：

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})\, t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})\, t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})\, t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})\, t_2 \end{cases} \tag{7}$$

我们把线性变换(7)叫做线性变换(5)与(6)的乘积，相应地把(7)所对应的矩阵定义为(5)与(6)所对应矩阵的乘积，即

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

其规律是：

1. 第一个矩阵中取行向量，第二个矩阵中取列向量，将这个两个向量进行“点乘”.（这也导致：第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数.

2. 第一个矩阵中第 i 行向量与第二个矩阵中第 j 列向量的点乘，得到结果矩阵中 (i,j) 位置元素的值.

矩阵乘法引入的另一个途径：线性方程组的表示

Step 1．先定义行矩阵与列矩阵的乘法为两个向量的内积．即对

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n.$$

Step 2．再定义 $m\times n$ 矩阵与 $n\times 1$ 矩阵的乘法．设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$

定义

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量，是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{x}$ 的内积．则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

成立等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

Step 3．再定义 $m\times n$ 矩阵与 $n\times k$ 矩阵的乘法．

设有矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times k}$．矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各列分别记为列矩阵 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k$，即

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k)$$

则乘积 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 定义为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_k)$$

☛ 以后就用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 表示一个普通的线性方程组．而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 本身还是一个矩阵方程．矩阵方程的一般形式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}.$$

矩阵乘法的理解

同样地，矩阵的乘法运算，也是抽象于实际，是因为两个矩阵会按照这一规律，映射到另外一个矩阵．这个乘法只不过是对这个对应法则的一种表述．这种运算既有实际背景（两个线性变换的乘积），又有实际用途（线性方程组的表示等）．

矩阵加法是将对应位置元素相加，那么，矩阵乘法为什么不定义为将对应位置元素相乘？譬如

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 & a_2c_2 & a_3c_3 \\ b_1d_1 & b_2d_2 & b_3d_3 \end{pmatrix}$$

那要看这种运算有没有用处．如果有实际来源或用途，我们当然可以定义这个运算．事实上，已经有人定义了这种运算，称为阿达马乘积（Hadamard product），Hadamard 乘积可以用于图像压缩算法．

还有别的矩阵乘法，例如克罗内克乘积（Kronecker product）．给定任两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，我们可以得到两个矩阵的直积，或称为克罗内克乘积 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$，其定义如下

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $p \times r$ 矩阵时，$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 是 $mp \times nr$ 矩阵．克罗内克乘积可以用于解线性矩阵方程.

在 MATLAB 中，Hadamard 乘积用符号 $.*$ 表示，克罗内克乘积 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 用 $\mathrm{kron}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 表示，普通矩阵乘法用 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$ 表示．

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$， $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

1. 逐元素乘积（Hadamard 积）：
$$A \circ B = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{bmatrix}$$
2. 矩阵乘积：
$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$
3. Kronecker 乘积：
$$\mathrm{kron}(A, B) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 14 & 16 \\ 15 & 18 & 20 & 24 \\ 21 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix}$$

以上这些所谓的乘法和普通的矩阵乘法，都在描述两个矩阵按某种规律对应于新的矩阵，在这一点上，它们的地位和作用是一样的. 只不过教材中所说的矩阵乘法，更加普遍，就把“乘法”这个名字给它优先命名了．它完全可以取一个别的什么名字，不叫矩阵乘法.

向量有数量积，向量积，混合积，并没有特意把哪一个命名为“乘法”. 一定要注意：可以叫“乘法”的运算有非常多种. 千万不要认为：世界上只有一个乘法，并把矩阵乘法看做是这个“唯一乘法”在矩阵中的应用.