UFMG/ICEx/DCC	DCC216 – Matemática Discreta

Trabalho Prático

Ciências Exatas & Engenharias	1º Semestre 2020

Observações:

1. Comece a fazer este trabalho imediatamente. Você nunca terá tanto tempo para resolvê-lo quanto agora!
2. **Data de entrega**: até 22 de maio de 2020 **às 23:59 horas**.
3. **Submissão**: submeta o seu trabalho no Moodle. Gere um arquivo zip, descrito abaixo, com o nome `"SeuNomeCompleto".zip` onde o string `"SeuNomeCompleto"` é o seu nome completo sem espaços em branco.

   Exemplo para o aluno Zoroastro Felizardo e Sortudo:

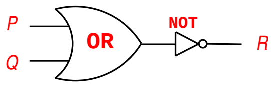
   - Arquivo zip: `ZoroastroFelizardoESortudo.zip` contendo apenas os seguintes arquivos:
     (a) O arquivo `relacao.c`: arquivo fonte na linguagem C, referentes ao problema abaixo.
     (b) O arquivo `doc.pdf`: documentação referente ao problema. Veja abaixo mais informações sobre a documentação.
     (c) O arquivo `leiame.txt`: instruções de execução.
4. **Entrada**: De acordo com as observações abaixo.
5. **Saída**: De acordo com as observações abaixo.
6. **Plataforma computacional**: O seu trabalho deve ser executado em alguma máquina do ambiente computacional do Departamento de Ciência da Computação da UFMG, onde o monitor irá avaliá-lo.
7. **Linguagem**: Você deve escrever o seu programa obrigatoriamente na linguagem de programação C.
8. **Documentação**:
   - Uma documentação "mínima" que explique como você projetou sua solução, ou seja, as ideias para chegar à solução do problema, incluindo a descrição do projeto das estruturas de dados.
   - Uma análise de complexidade de pior caso usando a notação assintótica apropriada tanto para o custo de tempo quanto de espaço.
   - Um arquivo `leiame.txt`, a ser incluído no arquivo zip, como informações sobre o ambiente computacional para executar o seu TP bem como todas as instruções necessárias.
9. **Testes**: O seu programa será avaliado para diferentes valores de entrada.
10. **Correção**: Este trabalho vale 12 pontos. A correção observará a corretude de sua solução e a documentação fornecida.

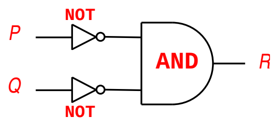
Especificação do Problema: Relações Binárias em Conjuntos

"Objetos" da Matemática e da Ciência da Computação podem estar relacionados de diversas formas. A seguir, são apresentados dois exemplos de relações binárias.

Exemplo 1. Pode-se definir uma relação R onde circuitos lógicos digitais são ditos estarem relacionados entre si se, e somente se, eles possuem a mesma tabela de entrada/saída (tabela da verdade). No exemplo, a seguir, os dois circuitos lógicos possuem a mesma tabela da verdade e, consequentemente, estão relacionados entre si.

P	Q	*Saída*
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

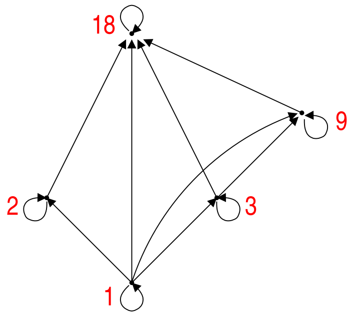




Exemplo 2. Seja um conjunto A formado pelos números inteiros $\{1, 2, 3, 9, 18\}$ e considere a relação D "divide" no conjunto como: para todos os números a e b (não necessariamente distintos) do conjunto A, esses números estão relacionados entre si, se, e somente se, o número a divide o número b. Formalmente, isso pode ser escrito como:

$$\forall a, b \in A, a|b \Leftrightarrow b = a \cdot k, \text{ para algum inteiro } k.$$

A relação D pode ser representada pelo seguinte grafo dirigido:



Esse grafo mostra qual número está relacionado com qual outro pela direção da aresta. Assim, o número 1 está relacionado com todos os outros já que 1 divide todos os números do conjunto A. Por outro lado, o número 3 está relacionado com ele próprio, com 9 e com 18, o que é ilustrado pelas arestas dirigidas que vão de 3 para 3, de 3 para 9 e de 3 para 18, respectivamente. Como nem 9 nem 18 dividem 3, não há arestas nessas direções.

O problema de relação em conjuntos é central em Ciência da Computação e é a base de várias áreas como, por exemplo, projeto de algoritmos, bancos de dados, autômatos e linguagens, mineração de dados (*data mining*) e aprendizado de máquina (*machine learning*).

Relações Binárias

Sejam os conjuntos A e B. Uma relação binária chamada R do conjunto A para o conjunto B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Dado um par ordenado (x, y) no conjunto $A \times B$, x está relacionado com y através da relação R, escrito xRy, se e somente se o par (x, y) pertence à relação R. O termo binário é usado nessa definição para se referir ao fato que uma relação é um subconjunto do produto Cartesiano de dois conjuntos.

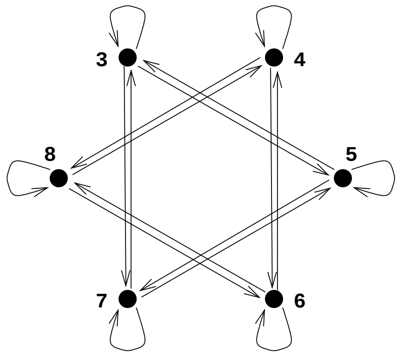
Observe que os conjuntos A e B não precisam ser distintos. Assim, uma relação binária no conjunto A é uma relação do conjunto A para o mesmo conjunto A. Isso quer dizer que os dois conjuntos da relação binária são idênticos. Nesse caso, essa relação pode ser representada por um grafo dirigido onde, ao invés de representar A como dois conjuntos separados de pontos, representa-se A somente uma única vez e desenha-se uma aresta de cada ponto de A para cada ponto relacionado. No restante deste trabalho considere sempre uma relação binária de A para A. A seguir, é apresentado um outro exemplo.

Exemplo 3. Seja $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e seja a relação binária R no conjunto A definida como:

$$\forall\ x, y \in A, (x, y) \in R \Leftrightarrow (x - y) \bmod 2 = 0.$$

Nessa relação R, os números x e y estão relacionados entre si quando ambos deixam o mesmo resto na divisão inteira por 2, i.e., $x \mod 2 = y \mod 2$, cuja expressão pode ser representada por $(x - y) \mod 2 = 0$, ou seja, o resto da divisão inteira de $(x - y)$ por 2 é zero.

O grafo dirigido de R é mostrado na figura a seguir.



Se R é uma relação binária no conjunto A as seguintes propriedades podem ser definidas:

1. R é **reflexiva** $\Leftrightarrow$ para todo x em A, $(x, x) \in R$.
2. R é **irreflexiva** $\Leftrightarrow$ para todo x em A, $(x, x) \notin R$.
3. R é **simétrica** $\Leftrightarrow$ para todo x e y em A, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R$.
4. R é **anti-simétrica** $\Leftrightarrow$ para todo x e y em A, se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ então $x = y$.
5. R é **assimétrica** $\Leftrightarrow$ para todo x e y em A, se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \notin R$.
6. R é **transitiva** $\Leftrightarrow$ para todo x, y e z em A, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$.

Observe que os elementos x, y e z não precisam ser distintos.

Como consequência dessas propriedades, existem dois tipos de relações importantes: equivalência e ordem parcial. Uma relação R é uma relação de equivalência se e somente se R é reflexiva, simétrica e transitiva simultaneamente. Uma relação R é uma relação de ordem parcial se e somente se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva simultaneamente.

Finalmente, pode-se definir informalmente o fecho transitivo (*transitive closure*) de uma relação R como uma nova relação chamada, por exemplo, de R^t que possui os mesmos pares ordenados de R e o menor número de pares ordenados necessários para transformar R em uma relação transitiva.

Implementação do Problema

Neste trabalho você deve implementar um programa na linguagem C que seja capaz de ler um conjunto indeterminado de pares ordenados.

Pede-se:

1. Indicar se cada uma das seis propriedades acima é válida ou não. Se não for, para os casos da irreflexividade, anti-simetria e assimetria, você deve apresentar todos os pares ordenados **presentes** que fazem com que essa propriedade não seja satisfeita, e, para os casos da reflexividade, simetria e transitividade, você deve apresentar todos os pares ordenados **ausentes** que fazem com que essa propriedade não seja satisfeita.

2. Dizer se a relação é de equivalência ou ordem parcial.

3. Apresentar o fecho transitivo da relação.

Entrada dos dados. Considere a entrada dos dados da seguinte forma:

- A primeira linha do arquivo contém a quantidade de elementos do conjunto A e, em seguida na mesma linha, os elementos desse conjunto. Cada elemento desse conjunto será identificado por um número inteiro entre 1 e 50.
- Cada linha seguinte contém um par ordenado (x, y) onde o primeiro número representa o x e o segundo o y. Não considere qualquer tipo de classificação dos pares.

Para a relação mostrada no Exemplo 3 acima uma possível entrada de dados seria a seguinte:

```
6 3 4 5 6 7 8
3 5
5 7
7 3
5 3
7 5
3 7
4 6
6 8
8 4
6 4
8 6
4 8
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8
```

Possível saída. Para a relação do Exemplo 3, uma possível saída seria a seguinte:

```
Propriedades
1. Reflexiva: V
2. Irreflexiva: F
   (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (7,7); (8,8);
3. Simétrica: V
4. Anti-simétrica: F
   (3,5) e (5,3); (3,7) e (7,3); (5,7) e (7,5); (4,6) e (6,4); (4,8) e (8,4); (6,8) e (8,6);
5. Assimétrica: F
6. Transitiva: V

Relação de equivalência: V
Relação de ordem parcial: F

Fecho transitivo da relação = {(3,3), (3,5), (3,7), (4,4), (4,6), (4,8), (5,3), (5,5), (5,7),
(6,4), (6,6), (6,8), (7,3), (7,5), (7,7), (8,4), (8,6), (8,8)}
```

Note que a relação é assimétrica se for irreflexiva e anti-simétrica. Assim, no caso da relação não ser assimétrica não é necessário listar os pares porque já foram listados anteriormente.