Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

Cálculo

Derivada

Calculando derivadas

Prof. Me. Júnior César Bonafim

junior.bonafim@fatec.sp.gov.br

2º semestre de 2024

Conteúdo

Vejamos agora algumas regras para calcular derivadas de funções elementares.

Derivadas de funções elementares

a) $f(x) = x^a \Longrightarrow f'(x) = ax^{a-1}$

Vejamos agora algumas regras para calcular derivadas de funções elementares.

Derivadas de funções elementares

a) $f(x) = x^a \Longrightarrow f'(x) = ax^{a-1}$

b) $f(x) = C \Longrightarrow f'(x) = 0$

Vejamos agora algumas regras para calcular derivadas de funções elementares.

Derivadas de funções elementares

a) $f(x) = x^a \Longrightarrow f'(x) = ax^{a-1}$

b) $f(x) = C \Longrightarrow f'(x) = 0$

c) $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$

Vejamos agora algumas regras para calcular derivadas de funções elementares.

Derivadas de funções elementares

a) $f(x) = x^a \implies f'(x) = ax^{a-1}$

b) $f(x) = C \implies f'(x) = 0$

c) $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \ln a$

d) $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$

$\frac{df}{dx}$ 2

Vejamos agora algumas regras para calcular derivadas de funções elementares.

Derivadas de funções elementares

a) $f(x) = x^a \implies f'(x) = ax^{a-1}$

b) $f(x) = C \implies f'(x) = 0$

c) $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \ln a$

d) $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$

e) $f(x) = \ln x \implies f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Vejamos agora algumas regras para calcular derivadas de funções elementares.

Derivadas de funções elementares

a) $f(x) = x^a \implies f'(x) = ax^{a-1}$

b) $f(x) = C \implies f'(x) = 0$

c) $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \ln a$

d) $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$

e) $f(x) = \ln x \implies f'(x) = \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x \implies f'(x) = \cos x$

Vejamos agora algumas regras para calcular derivadas de funções elementares.

Derivadas de funções elementares

a) $f(x) = x^a \Longrightarrow f'(x) = ax^{a-1}$

b) $f(x) = C \Longrightarrow f'(x) = 0$

c) $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$

d) $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$

e) $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$

g) $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

Vejamos agora algumas regras para calcular derivadas de funções elementares.

Derivadas de funções elementares

a) $f(x) = x^a \Longrightarrow f'(x) = ax^{a-1}$

b) $f(x) = C \Longrightarrow f'(x) = 0$

c) $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$

d) $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$

e) $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$

g) $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

h) $f(x) = \operatorname{tg} x \Longrightarrow f'(x) = \sec^2 x$

Propriedades

Sejam f, g funções e k uma constante:

a) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

a derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas

b) $[kf(x)]' = kf'(x)$

a derivada de uma função multiplicada por uma constante é a constante multiplicada pela derivada da função

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$

$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1}$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1}$$
$$= -4x^{-5}$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1}$$
$$= -4x^{-5}$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1}$$
$$= -4x^{-5}$$

c) $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1}$$
$$= -4x^{-5}$$

c) $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1}$$
$$= -4x^{-5}$$

c) $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1}$$
$$= -4x^{-5}$$

c) $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1}$$
$$= -4x^{-5}$$

c) $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d) $f(x) = 5^x$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 6x - 5$$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 6x - 5$$

f) $f(x) = -4x^5 + 2x^2 - 3x + 7$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 6x - 5$$

f) $f(x) = -4x^5 + 2x^2 - 3x + 7$

$$f'(x) = -20x^4 + 4x - 3$$

d) $f(x) = 5^x$

$f'(x) = 5^x \ln 5$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$f'(x) = 6x - 5$

f) $f(x) = -4x^5 + 2x^2 - 3x + 7$

$f'(x) = -20x^4 + 4x - 3$

g) $f(x) = 4 \ln x + 3e^x$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 6x - 5$$

f) $f(x) = -4x^5 + 2x^2 - 3x + 7$

$$f'(x) = -20x^4 + 4x - 3$$

g) $f(x) = 4\ln x + 3e^x$

$$f'(x) = 4\frac{1}{x} + 3e^x$$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 6x - 5$$

f) $f(x) = -4x^5 + 2x^2 - 3x + 7$

$$f'(x) = -20x^4 + 4x - 3$$

g) $f(x) = 4\ln x + 3e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\frac{1}{x} + 3e^x \\ &= \frac{4}{x} + 3e^x \end{aligned}$$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 6x - 5$$

f) $f(x) = -4x^5 + 2x^2 - 3x + 7$

$$f'(x) = -20x^4 + 4x - 3$$

g) $f(x) = 4\ln x + 3e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\frac{1}{x} + 3e^x \\ &= \frac{4}{x} + 3e^x \end{aligned}$$

h) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x + \cos x$

d) $f(x) = 5^x$

$$f'(x) = 5^x \ln 5$$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 6x - 5$$

f) $f(x) = -4x^5 + 2x^2 - 3x + 7$

$$f'(x) = -20x^4 + 4x - 3$$

g) $f(x) = 4 \ln x + 3e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\frac{1}{x} + 3e^x \\ &= \frac{4}{x} + 3e^x \end{aligned}$$

h) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos x$

$$f'(x) = 2 \cos x - \operatorname{sen} x$$

Exercício. Calcule as derivadas das funções abaixo.

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = 12$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 6$

d) $f(x) = x^5 - 8x^4 - 10x$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$

g) $f(x) = 4\sqrt[4]{x^3} + 1$

h) $f(x) = 3e^x + 4^x$

i) $f(x) = 5\ln x + e^x$

j) $f(x) = 3\,\text{sen}\,x + \cos x$

Vejamos como calcular a derivada do produto de funções

Vejamos como calcular a derivada do produto de funções

Regra do Produto

Sejam f e g funções:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = 4xe^x$

c) $f(x) = 10x \ln x$

d) $f(x) = (2x - 1) \operatorname{tg} x$

Vejamos como calcular a derivada do quociente de funções

Vejamos como calcular a derivada do quociente de funções

Regra do Quociente

Sejam f e g funções:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x}$

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{5x}$

d) $f(x) = \dfrac{4x}{\operatorname{sen} x}$

Exercício. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = 4x^2 e^x$

c) $f(x) = x^5 \ln x$

d) $f(x) = (2x-1)5^x$

e) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+5}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x-2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+12}$

h) $f(x) = \dfrac{e^x}{4x}$

i) $f(x) = \dfrac{3x}{\cos x}$

Vejamos como calcular a derivada de uma composição de funções

Vejamos como calcular a derivada de uma composição de funções

Regra da Cadeia

Sejam f e g funções

$$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Exemplo. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = (3x+4)^5$

b) $f(x) = 5(x^3-1)^4$

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

e) $f(x) = \ln(7x-3)$

f) $f(x) = \sqrt{4x-1}$

Exercício. Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = (3x-4)^3$

b) $f(x) = 4(x^2+3x-1)^2$

c) $f(x) = \cos^3 x$

d) $f(x) = \cos x^3$

e) $f(x) = \ln(5x^3-2x)$

f) $f(x) = e^{2x-3}$

g) $f(x) = e^{-x}$

h) $f(x) = \cos(x^3+x-4)$

i) $f(x) = \sqrt{3x-1}$

Seja f uma função e A o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se *função derivada*, ou simplesmente *derivada* de f. Diremos ainda, que f' é a *derivada de primeira ordem* de f, que também pode ser denotada por $f^{(1)}$.

Seja f uma função e A o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se *função derivada*, ou simplesmente *derivada* de f. Diremos ainda, que f' é a *derivada de primeira ordem* de f, que também pode ser denotada por $f^{(1)}$.

A derivada de f' denomina-se *derivada de segunda ordem* de f e é indicada por f'' ou por $f^{(2)}$. Analogamente se definem as derivadas de ordem superiores a 2 de f.

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f''(x) = 6x - 4$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f''(x) = 6x - 4$

$f'''(x) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \cos x$$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

Exemplo. Calcule as derivadas até quarta ordem para as funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f''(x) = 6x - 4$

$f'''(x) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$

Frequentemente utilizamos a notação $y = f(x)$, $s = f(t)$ etc. para indicar uma função. Em $y = f(x)$, por exemplo, y é chamada variável dependente e x é a variável independente.

Frequentemente utilizamos a notação $y = f(x)$, $s = f(t)$ etc. para indicar uma função. Em $y = f(x)$, por exemplo, y é chamada variável dependente e x é a variável independente.

Se uma função é dada com $y = f(x)$, a notação $\frac{dy}{dx}$ (leia: derivada de y em relação a x), devida a Leibniz, é utilizada para indicar a derivada de f em x. Assim

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Frequentemente utilizamos a notação $y = f(x)$, $s = f(t)$ etc. para indicar uma função. Em $y = f(x)$, por exemplo, y é chamada variável dependente e x é a variável independente.

Se uma função é dada com $y = f(x)$, a notação $\frac{dy}{dx}$ (leia: derivada de y em relação a x), devida a Leibniz, é utilizada para indicar a derivada de f em x. Assim

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Uma derivada de ordem n para $y = f(x)$ se escreve na notação de Leibniz como $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Exemplo. Dada a função $y = x^2 - 3x + 1$, temos

Exemplo. Dada a função $y = x^2 - 3x + 1$, temos

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

Exemplo. Dada a função $y = x^2 - 3x + 1$, temos

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

Exemplo. Dada a função $y = x^2 - 3x + 1$, temos

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$