FATEC – Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

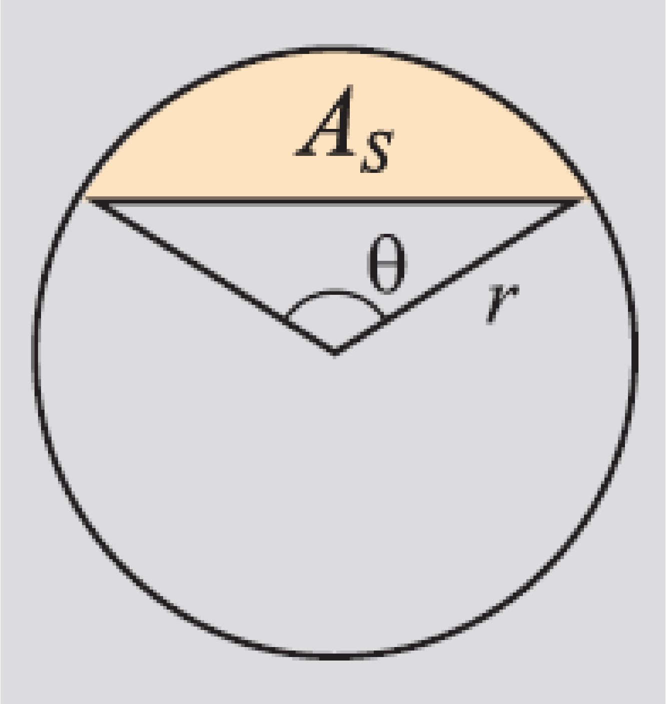
Análise e Desenvolvimento de Sistemas

Cálculo

Método de Newton

Prof. Me. Júnior César Bonafim (junior.bonafim@fatec.sp.gov.br)

Seja a área A_s do segmento de um círculo de raio r e ângulo θ como na figura a seguir.



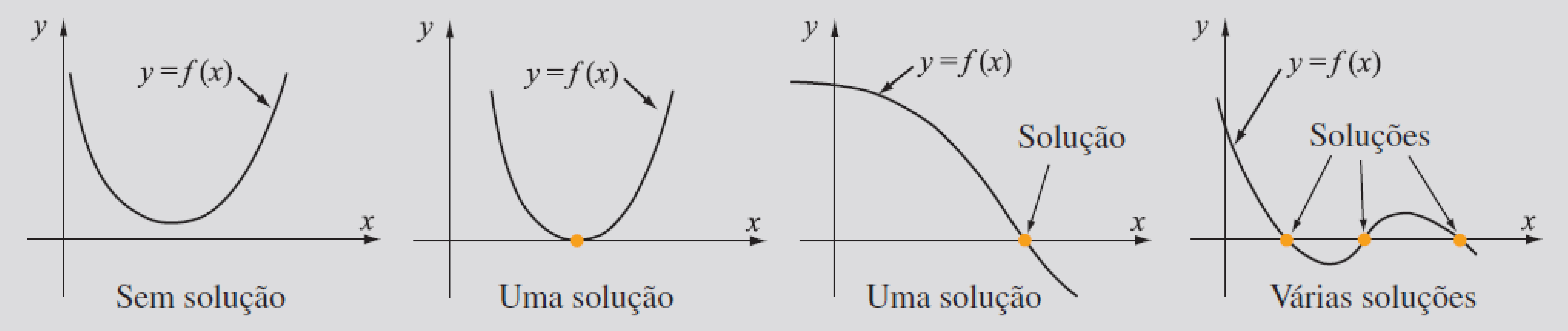
A área é dada por

$$A_s = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad (1)$$

Suponhamos que a área A_s e o raio r sejam conhecidos e queiramos determinar o ângulo que fornece tal área. Devemos resolver a equação (1) em θ, o que não é possível analiticamente como fazemos em uma equação de ou segundo grau, por exemplo.

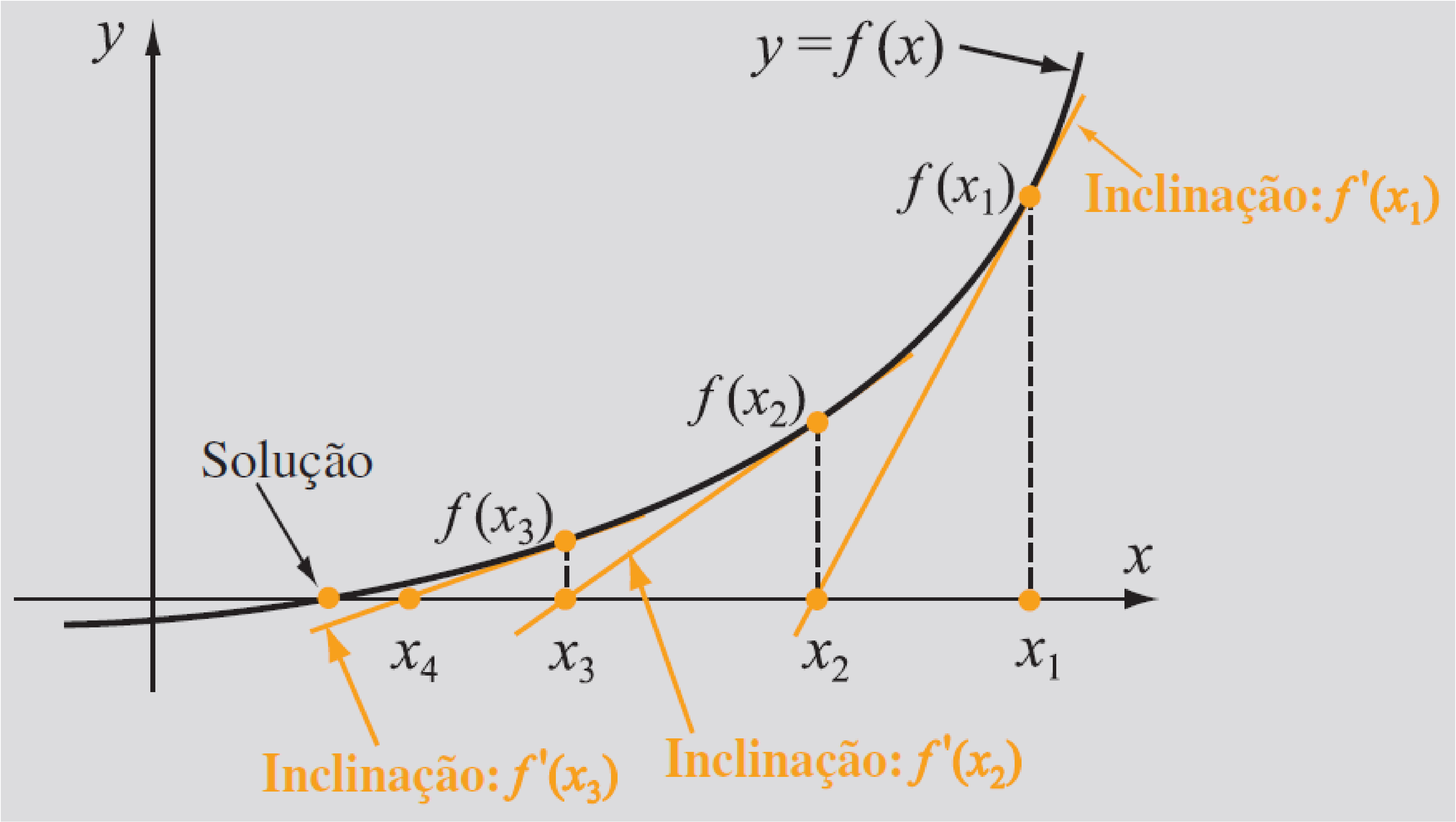
Trataremos agora do Método de Newton para o cálculo aproximado de raízes de funções reais, ou seja, queremos determinar solução para

$$f(x) = 0$$



O método consiste de um processo iterativo que produz uma sequência de valores $x_0, x_1, x_2, \ldots$ que converge para a raiz exata ξ de f desde que x_0 sejam tomado suficientemente próximo de ξ.

O método pode ser interpretado geometricamente como a seguir.


y
$y = f(x)$
$f(x_1)$
Inclinação: $f'(x_1)$
$f(x_2)$
Solução
$f(x_3)$
x
x_4
x_3
x_2
x_1
Inclinação: $f'(x_3)$
Inclinação: $f'(x_2)$

Dado um ponto $(x_k, f(x_k))$, traçamos a reta tangente $T_k(x)$ ao gráfico de f por este ponto, cuja equação é

$$T_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

O ponto onde a tangente intercepta o eixo x é dado por $T_k(x) = 0$. Assim

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

$$f'(x_k)(x - x_k) = -f(x_k)$$

$$x - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

O que nos dá

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Fazendo $x = x_{k+1}$ temos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Que fornece o cálculo a ser executado em cada iteração do método a fim de produzir a sequência de pontos que converge para a raiz procurada.

Critério de parada

Utilizaremos o erro relativo entre a aproximação mais recente e a anterior, definida por

$$\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}}\right|$$

Assim, dada uma precisão ε definida inicialmente, prosseguimos com o método até que

$$\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}}\right| < \varepsilon$$

Exemplo. Determine uma aproximação para a raiz positiva de

$$4\cos x \ - e^x = 0$$

com $\varepsilon = 10^{-2}$ e aproximação inicial $x_0 = 2$.

Temos

$$f(x) = 4\cos x \ - e^x$$

Assim

$$f'(x) = -4\operatorname{sen} x - e^x$$

1ª iteração

$$x_1 = x_0 - \frac{f\,(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 2 - \frac{f\,(2)}{f'(2)}$$

$$x_1 = 2 - \frac{4\cos 2 - e^2}{-4\sin 2 - e^2} = 2 - \frac{-9.054}{-11.026} = 1.179$$

$$\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| = \left|\frac{1.179 - 2}{1.179}\right| = 0.696 > \varepsilon$$

2ª iteração

$$x_2 = x_1 - \frac{f\ (x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 1.179 - \frac{f\ (1.179)}{f'(1.179)}$$

$$x_2 = 1.179 - \frac{4 \cos 1.179 - e^{1.179}}{-4 \sin 1.179 - e^{1.179}} = 1.179 - \frac{-1.724}{-6.948} = 0.931$$

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{0.931 - 1.179}{0.931}\right| \approx 0.266 > \varepsilon$$

3ª iteração

$$x_3 = x_2 - \frac{f\,(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_3 = 0.931 - \frac{f\,(0.931)}{f'(0.931)}$$

$$x_3 = 0.931 - \frac{4\cos 0.931 - e^{0.931}}{-4\sin 0.931 - e^{0.931}} = 0.931 - \frac{-0.149}{-5.746} = 0.905$$

$$\left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| = \left|\frac{0.905 - 0.931}{0.905}\right| \approx 0.029 > \varepsilon$$

4ª iteração

$$x_4 = x_3 - \frac{f\,(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$x_4 = 0.905 - \frac{f\,(0.905)}{f'(0.905)}$$

$$x_4 = 0.905 - \frac{4\cos 0.905 - e^{0.905}}{-4\sin 0.905 - e^{0.905}} = 0.905 - \frac{-0.001}{-5.618} = 0.905$$

$$\left|\frac{x_4 - x_3}{x_4}\right| = \left|\frac{0.905 - 0.905}{0.905}\right| = 0 < \varepsilon$$

Portanto a solução é $\bar{x} = 0.905$

Observações:

1. A convergência é garantida desde que x_0 seja suficientemente próximo da raiz exata.

2. Deve-se tomar cuidado ao se escolher x_0 próximo a uma raiz da derivada de f. O método pode não convergir neste caso.

Exercícios

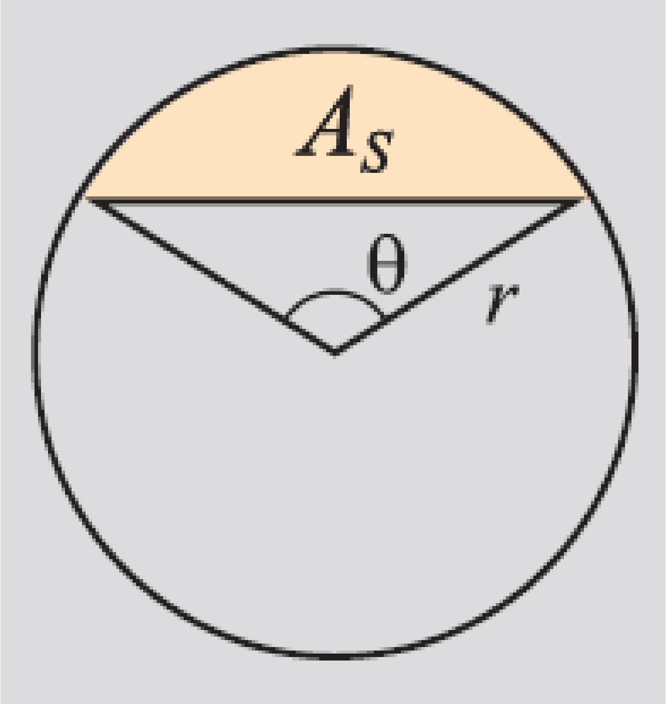
1. Implemente na linguagem de sua escolha o método de Newton e utilizando seu algoritmo resolva cada um dos problemas a seguir:

2. Determine raiz de $f(x) = x^3 + x - 3$ com $\varepsilon = 10^{-2}$. Resp: $\bar{x} = 1.213$

3. Resolva a equação $\operatorname{sen} x - 2x = -4$ com $\varepsilon = 10^{-2}$. Resp: $\bar{x} = 2.354$

4. A pressão máxima P, em kg/mm^2 que um cabo metálico suporta é dada por $P(d) = 25d^2 + \ln d$ em que d é o diâmetro do cabo em mm. Determine o valor do diâmetro necessário para que um cabo suporte pressão de $1.5 \times 10^{-4}\ kg/mm^2$. Utilize $\varepsilon = 10^{-4}$. Resp: $0.23921\ mm$

5. Seja a área A_s do segmento de um círculo de raio r e ângulo θ como na figura a seguir.



A área é dada por

$$A_s = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

Determine o ângulo θ para que a área do segmento seja $5m^2$ em uma circunferência de raio $2m$. Tome $x_0 = 2$.