Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

Cálculo

Limite e continuidade

Prof. Me. Júnior César Bonafim

junior.bonafim@fatec.sp.gov.br

2º semestre de 2024

Apresentaremos agora os conceito de limite e continuidade de uma função real de uma variável real.

$\frac{df}{dx}$ 1

Apresentaremos agora os conceito de limite e continuidade de uma função real de uma variável real.

Tais conceitos são importante para a correta definição de derivada e integral que veremos mais a frente.

Apresentaremos agora os conceito de limite e continuidade de uma função real de uma variável real.

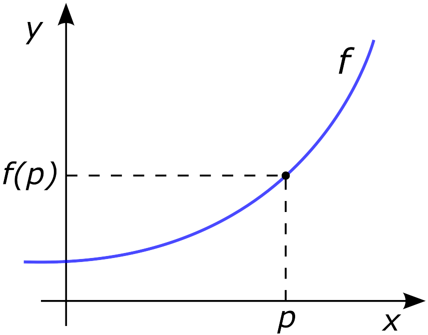
Tais conceitos são importante para a correta definição de derivada e integral que veremos mais a frente.

Comecemos pela definição intuitiva de continuidade.

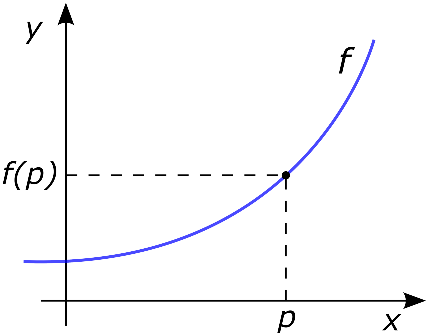
Definição 1 (Definição intuitiva de continuidade)

Intuitivamente, uma função f é contínua em $p \in D_f$, se o gráfico de f não apresenta "salto" em p.

Interpretação gráfica da continuidade

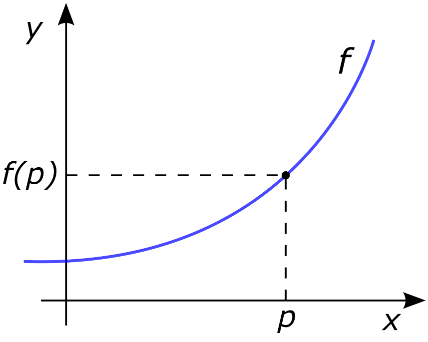


Interpretação gráfica da continuidade

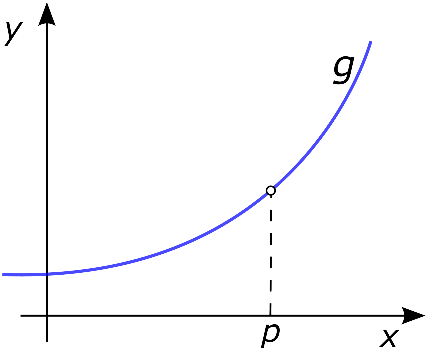


f é contínua em p

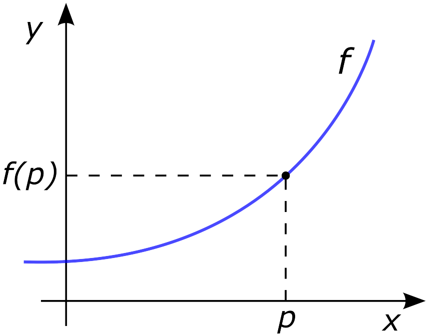
Interpretação gráfica da continuidade



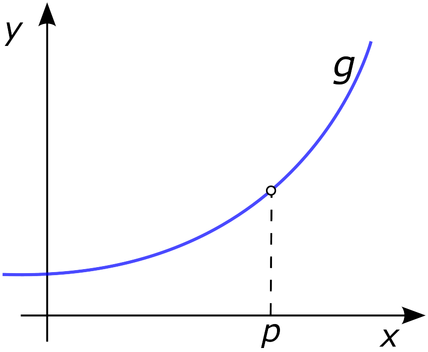
f é contínua em p



Interpretação gráfica da continuidade

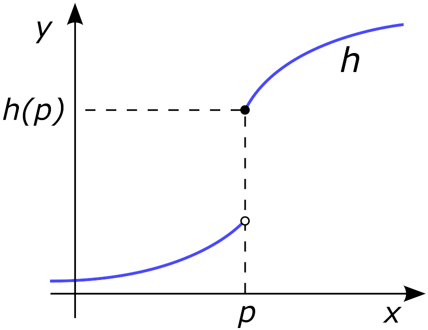


f é contínua em p

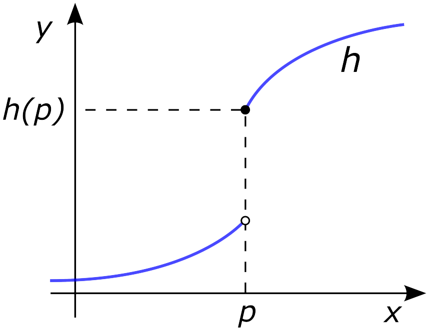


g não é contínua em p

Interpretação gráfica da continuidade

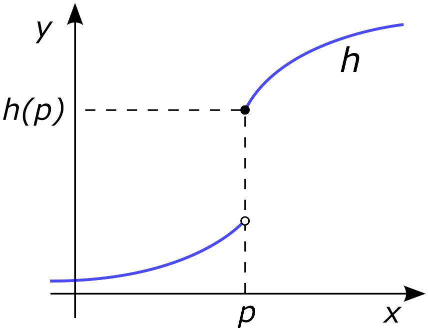


Interpretação gráfica da continuidade

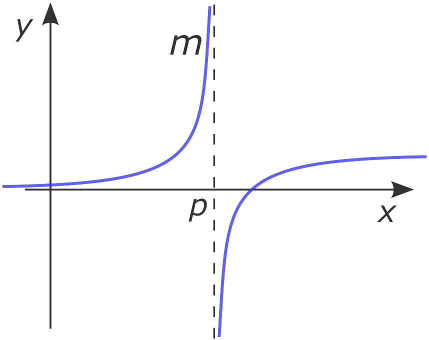


h não é contínua em p

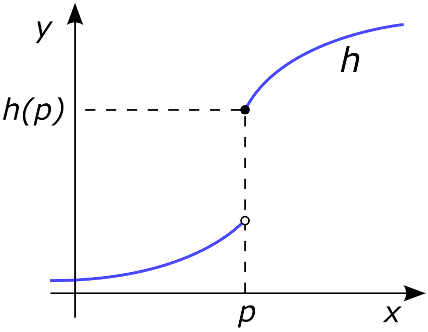
Interpretação gráfica da continuidade



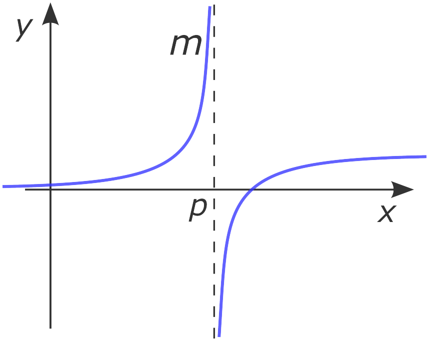
h não é contínua em p



Interpretação gráfica da continuidade



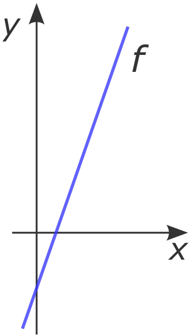
h não é contínua em p



m não é contínua em p

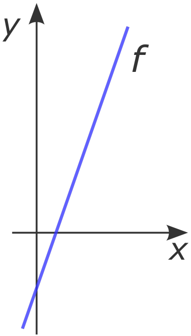
Exemplo 1. Considere as funções as seguir:

a) $f(x) = 3x - 1$



Exemplo 1. Considere as funções as seguir:

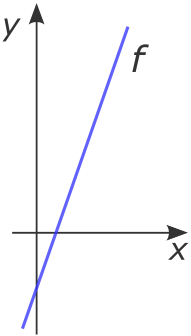
a) $f(x) = 3x - 1$



f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$

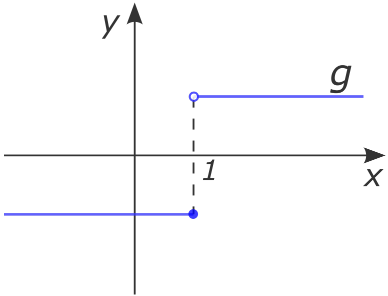
Exemplo 1. Considere as funções as seguir:

a) $f(x) = 3x - 1$



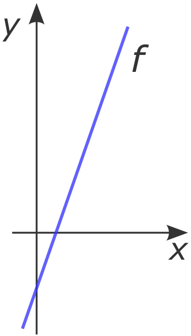
f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{se } x \leq 1 \\ 1\,, & \text{se } x > 1 \end{cases}$



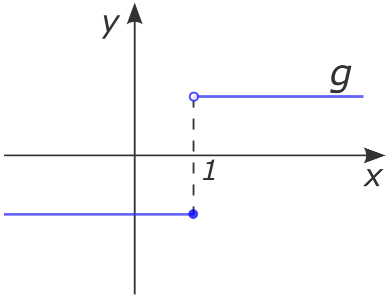
Exemplo 1. Considere as funções as seguir:

a) $f(x) = 3x - 1$



f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \begin{cases} -1\ , & \text{se } x \leq 1 \\ 1\ , & \text{se } x > 1 \end{cases}$



g não é contínua em $p = 1$

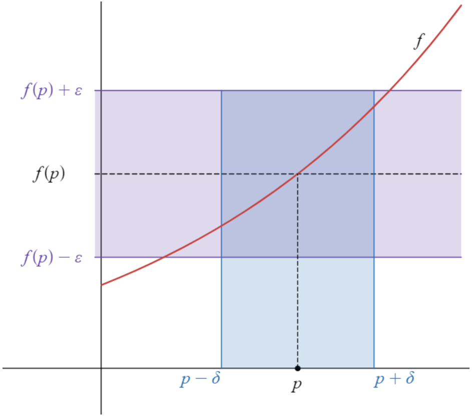
Vejamos a definição formal de continuidade.

Definição 2 (Continuidade)

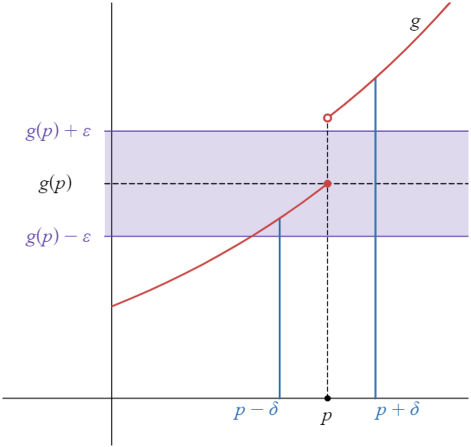
Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. A função f é contínua em p se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que

$$|x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

Ou seja, para que f seja contínua em p, dado $\varepsilon > 0$, deve ser possível encontrar $\delta > 0$, de forma que se x fica entre $p - \delta$ e $p + \delta$, $f(x)$ fica entre $f(p) - \varepsilon$ e $f(p) + \varepsilon$.



f é contínua em p



g não é contínua em p

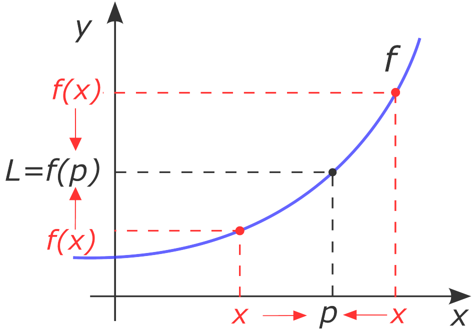
Vejamos agora a definição de limite de uma função.

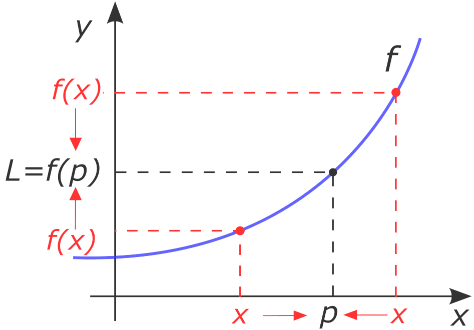
Definição 3 (Definição intuitiva de limite)

Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a p é um número L, que em símbolos se escreve

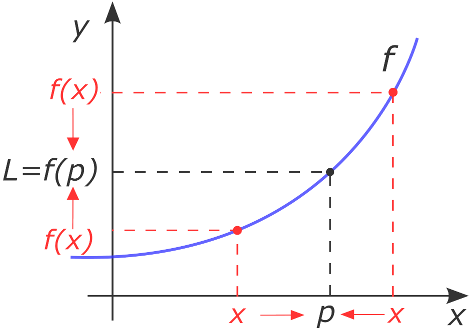
$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

significa dizer que quando x se aproxima de p, $f(x)$ se aproxima de L.

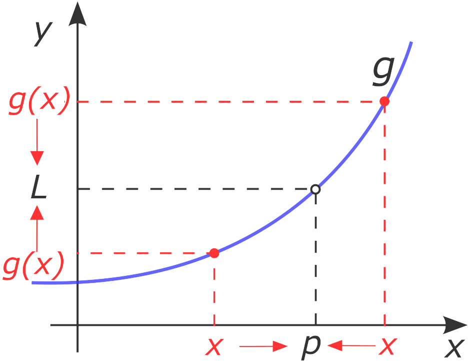

y
f
f(x)
L=f(p)
f(x)
x
p
x
x

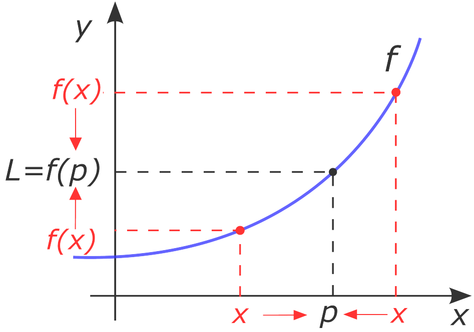


$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p)$$

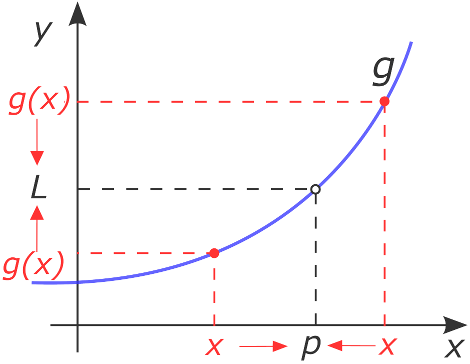


$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p)$$

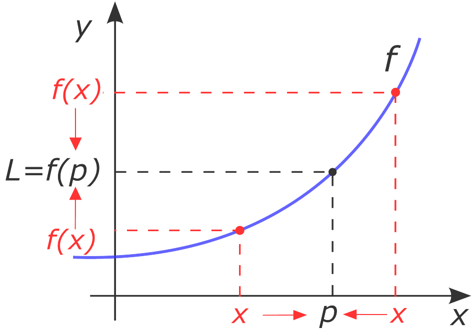




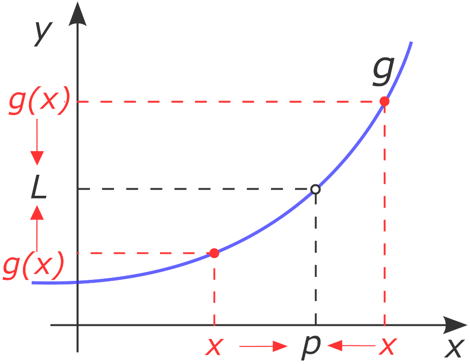
$$\lim_{x\to p} f(x) = L = f(p)$$



$$\lim_{x\to p} g(x) = L$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p)$$



$$\lim_{x \to p} g(x) = L$$

Interpretação geométrica do limite

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1} (x+1)$

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1} (x + 1)$

x	$x+1$
0	
0,5	
0,9	
0,99	
0,999	
$\downarrow$	
1	

x	$x+1$
2	
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	
0,9	
0,99	
0,999	
$\downarrow$	
1	

x	$x+1$
2	
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1} (x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	
0,99	
0,999	
$\downarrow$	
1	

x	$x+1$
2	
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	
0,999	
$\downarrow$	
1	

x	$x+1$
2	
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	
$\downarrow$	
1	

x	$x+1$
2	
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1} (x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	
1	

x	$x+1$
2	
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1} (x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	3
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1} (x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	3
1,5	2,5
1,1	
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x\to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim\limits_{x \to 1} (x + 1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
$\downarrow$	
1	

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x \to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim_{x\to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

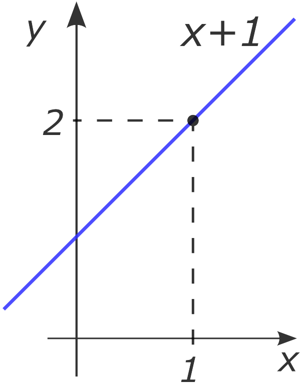
$$\therefore \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Exemplo 2. Calcule intuitivamente o limite $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)$

x	$x+1$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$x+1$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

$$\therefore \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$



O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	
$\pm 0,5$	
$\pm 0,1$	
$\pm 0,01$	
$\pm 0,001$	
$\pm 0,00001$	
$\pm 0,00000001$	

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	
$\pm 0,1$	
$\pm 0,01$	
$\pm 0,001$	
$\pm 0,00001$	
$\pm 0,00000001$	

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	0,165525060596
$\pm 0,1$	
$\pm 0,01$	
$\pm 0,001$	
$\pm 0,00001$	
$\pm 0,00000001$	

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	0,165525060596
$\pm 0,1$	0,166620396073
$\pm 0,01$	
$\pm 0,001$	
$\pm 0,00001$	
$\pm 0,00000001$	

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	0,165525060596
$\pm 0,1$	0,166620396073
$\pm 0,01$	0,166666203705
$\pm 0,001$	
$\pm 0,00001$	
$\pm 0,00000001$	

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	0,165525060596
$\pm 0,1$	0,166620396073
$\pm 0,01$	0,166666203705
$\pm 0,001$	0,166666661805
$\pm 0,00001$	
$\pm 0,00000001$	

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	0,165525060596
$\pm 0,1$	0,166620396073
$\pm 0,01$	0,166666203705
$\pm 0,001$	0,166666661805
$\pm 0,00001$	0,166666680457
$\pm 0,00000001$	

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	0,165525060596
$\pm 0,1$	0,166620396073
$\pm 0,01$	0,166666203705
$\pm 0,001$	0,166666661805
$\pm 0,00001$	0,166666680457
$\pm 0,00000001$	0

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	0,165525060596
$\pm 0,1$	0,166620396073
$\pm 0,01$	0,166666203705
$\pm 0,001$	0,166666661805
$\pm 0,00001$	0,166666680457
$\pm 0,00000001$	0

O último valor da tabela decorre de erro de cálculo pela impossibilidade de calculadoras lidarem com razões de valores muito próximos de zero em algumas situações.

O método de cálculo de limite por tabela não é seguro e pode nos levar a falsos resultados. Observe o limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

x	$\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$
± 1	0,162277660168
$\pm 0,5$	0,165525060596
$\pm 0,1$	0,166620396073
$\pm 0,01$	0,166666203705
$\pm 0,001$	0,166666661805
$\pm 0,00001$	0,166666680457
$\pm 0,0000001$	0

O último valor da tabela decorre de erro de cálculo pela impossibilidade de calculadoras lidarem com razões de valores muito próximos de zero em algumas situações. Mostraremos mais à frente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{1}{6}$$

Vejamos a definição formal de limite.

Vejamos a definição formal de limite.

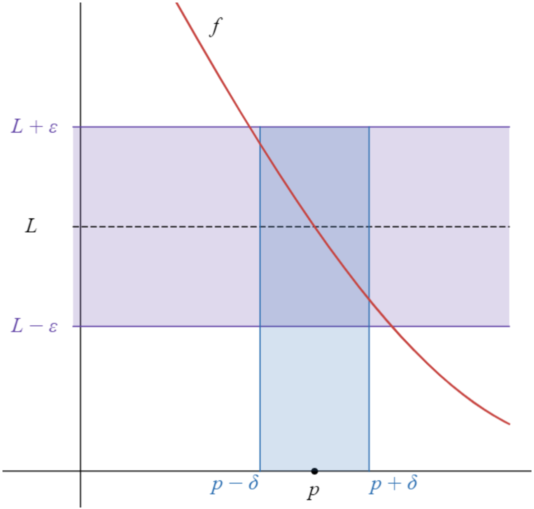
Definição 4 (Limite)

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número p, exceto possivelmente o próprio p. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a p é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Quando x fica entre $p-\delta$ e $p+\delta$ com $x \neq p$, $f(x)$ fica entre $L-\varepsilon$ e $L+\varepsilon$

Exemplo 3. Prove que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Exemplo 3. Prove que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Exemplo 3. Prove que $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x-3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x-5)-7| < \varepsilon$$

Observe que

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = |4(x-3)| = 4|x-3|$$

Exemplo 3. Prove que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Observe que

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$$

Assim

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

Exemplo 3. Prove que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Observe que

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$$

Assim

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

Ou seja

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Isso nos sugere que dado $\varepsilon > 0$, devemos escolher $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Isso nos sugere que dado $\varepsilon > 0$, devemos escolher $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$.

De fato. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Isso nos sugere que dado $\varepsilon > 0$, devemos escolher $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$.

De fato. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < |x-3| < \delta$, então

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = |4(x-3)| = 4|x-3| < 4\delta = 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Assim

$$\text{se} \quad 0 < |x-3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x-5)-7| < \varepsilon$$

Isso nos sugere que dado $\varepsilon > 0$, devemos escolher $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$.

De fato. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < |x-3| < \delta$, então

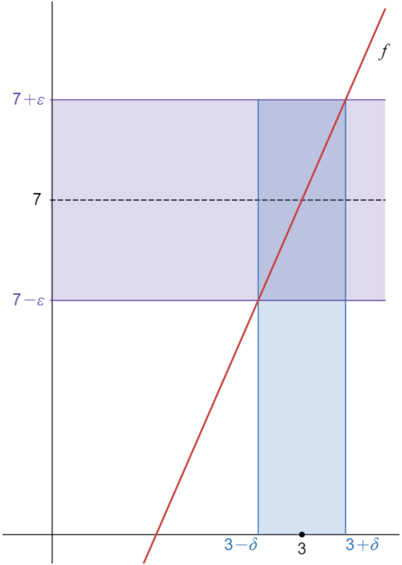
$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = |4(x-3)| = 4|x-3| < 4\delta = 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

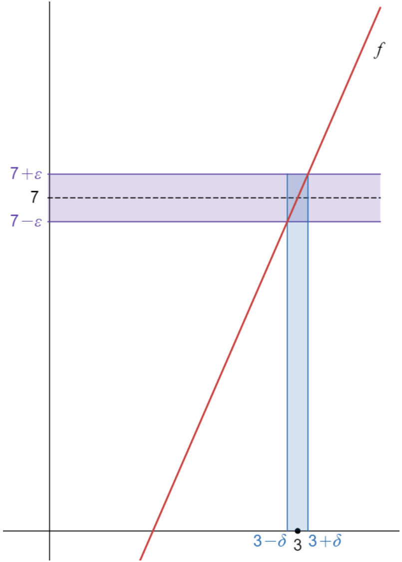
Assim

$$\text{se} \quad 0 < |x-3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x-5)-7| < \varepsilon$$

Portanto

$$\lim_{x\to 3}(4x-5) = 7$$


f
$7+\varepsilon$
7
$7-\varepsilon$
$3-\delta$
3
$3+\delta$


f
$7+\varepsilon$
7
$7-\varepsilon$
$3-\delta$
3
$3+\delta$

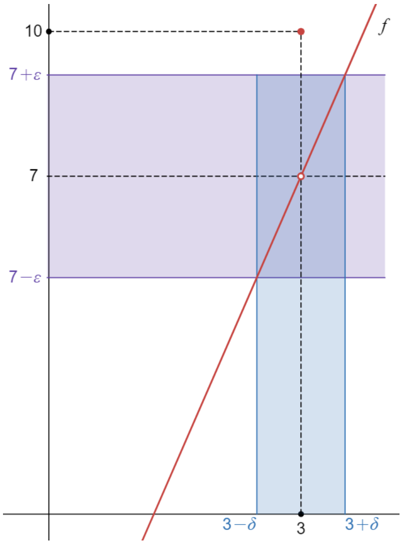
Observe que o mesmo resultado é obtido se considerarmos a função

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 5\ , & \text{se } x \neq 3 \\ 10\ , & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Temos

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7$$

pois na definição do limite x se aproxima de 3 mas não pode ser igual a 3.



Exercício 1. Prove que $\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$.

Exemplo 4. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Exemplo 4. Calcule o limite $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Observe que: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

Exemplo 4. Calcule o limite $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Observe que: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

Assim

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$$

desde que $x \neq 1$. Logo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

Exemplo 4. Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Observe que: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Assim

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$$

desde que $x \neq 1$. Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x+1) \end{aligned}$$

Exemplo 4. Calcule o limite $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Observe que: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Assim

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

desde que $x \neq 1$. Logo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1)$$

$$\overset{\text{Exerc 1}}{=} \quad 2$$

Exemplo 4. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

Observe que: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Assim

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

desde que $x \neq 1$. Logo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} (x+1)$$

$$\overset{\text{Exerc 1}}{=} \quad 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Exemplo 4. Calcule o limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

Observe que: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Assim

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

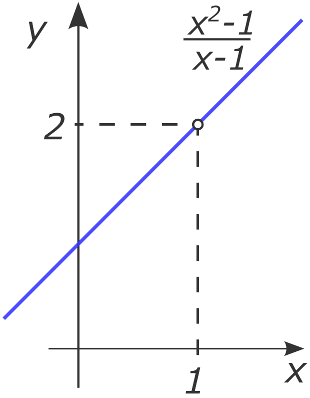
desde que $x \neq 1$. Logo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1)$$

$$\overset{\text{Exerc 1}}{=} 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$$



Veremos agora dois teoremas que nos ajudarão a calcular alguns limites.

Veremos agora dois teoremas que nos ajudarão a calcular alguns limites.

Teorema 1

Sejam f *uma função e* $p \in D_f$

$$f \text{ é contínua em } p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Utilizaremos o sentido da equivalência do teorema acima que garante que

$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ quando f for contínua em p.

Teorema 2 (Propriedades do limite)

Considere f *e* g *funções tais que* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L_1$ *e* $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L_2$

a) $\lim\limits_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to p} f(x) \pm \lim\limits_{x \to p} g(x) = L_1 \pm L_2$

b) $\lim\limits_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to p} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to p} g(x) = L_1 \cdot L_2$

c) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to p} f(x)}{\lim\limits_{x \to p} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *desde que* $L_2 \neq 0$

Exemplo 5. Calcule os limites a seguir.

a) $$\lim_{x \to 0} (8x - 4) = 8 \cdot 0 - 4$$
$$= -4$$

pois $f(x) = 8x - 4$ é contínua em $p = 0$.

b) $$\lim_{x \to 1} (3^x - x) = 3^1 - 1$$
$$= 3 - 1$$
$$= 2$$

pois $f(x) = 3^x - x$ é contínua em $p = 1$.

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+9-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0^2+9}+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Exercício 2. Calcule os limites a seguir.

a) $\lim_{x\to 1}(2x+4)$

b) $\lim_{x\to 0}(3^x - x)$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4}{x^2-1}$

d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-1}$

e) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

f) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$

g) $\lim_{x\to 8}\dfrac{x^2-16x+64}{x-8}$

h) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^3+x}{2x}$

i) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Vejamos agora o conceito de limite lateral de uma função.

Definição 5 (Definição intuitiva de limites laterais)

Seja f uma função. O limite

$$\lim_{x \to p^+} f(x)$$

é chamado **limite lateral à direita** *da função f em p. Neste caso x se aproxima de p por valores maiores que p.*

Analogamente se define o **limite lateral à esquerda**

$$\lim_{x \to p^-} f(x)$$

em que x se aproxima de p por valores menores que p.

Definição 6 (Definição formal de limite lateral à esquerda)

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ *existe um número* $\delta > 0$ *tal que*

$$p - \delta < x < p \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

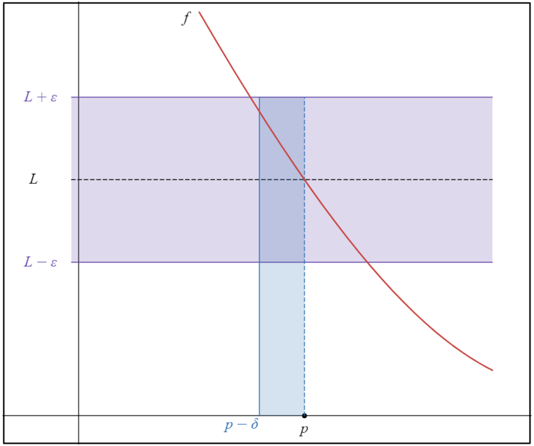
Definição 7 (Definição formal de limite lateral à direita)

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L$$

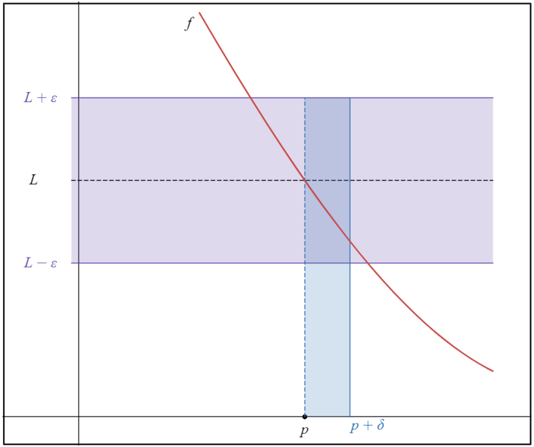
se para todo $\varepsilon > 0$ *existe um número* $\delta > 0$ *tal que*

$$p < x < p + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Exemplo 6

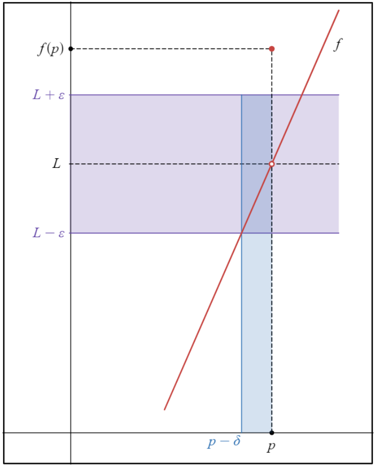


Limite lateral à esquerda

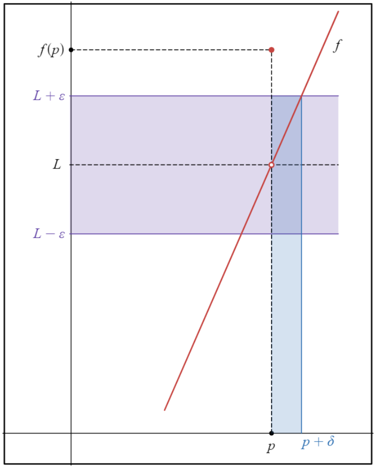


Limite lateral à direita

Exemplo 7

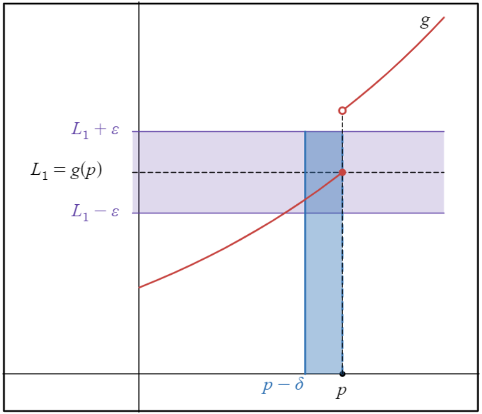


Limite lateral à esquerda

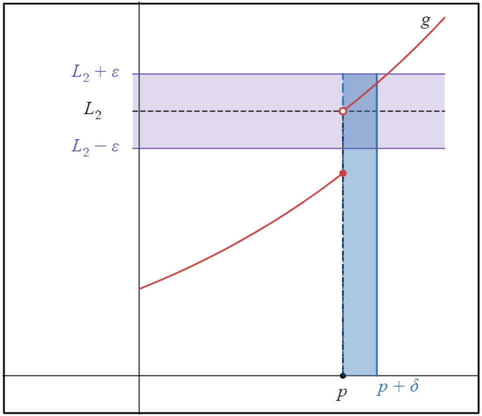


Limite lateral à direita

Exemplo 8



Limite lateral à esquerda



Limite lateral à direita

Teorema 3

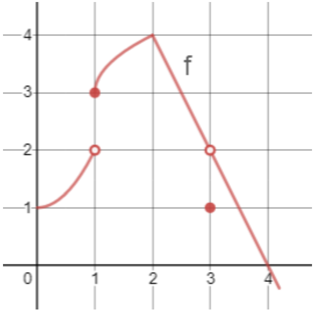
Seja f uma função

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to p^-} f(x) = L \\ \text{e} \\ \lim\limits_{x\to p^+} f(x) = L \end{cases}$$

O teorema acima nos diz então que a existência do limite de f em p depende da existência dos seus limites laterais e que os valores dos limites laterais sejam iguais. Assim, nos Exemplos 6 e 7 acima, o limite de f em p existe. O que não ocorre no Exemplo 8.

Interpretação geométrica dos limites laterais

Exercício 3. Considere o gráfico da função f abaixo. Responda o que se pede.



a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

f) $\lim_{x \to 2} f(x)$

g) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

h) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

i) $\lim_{x \to 3} f(x)$

j) $f(3)$

Exercício 4. Considere a função $f(x) = |x|$. Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$