Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

Cálculo

Derivada

Introdução e definição

Prof. Me. Júnior César Bonafim

junior.bonafim@fatec.sp.gov.br

2º semestre de 2024

Conteúdo

Sejam f uma função e $p \in D_f$. Limites do tipo

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{1}$$

ocorrem com bastante frequência na geometria, na física em várias outras áreas.

Sejam f uma função e $p \in D_f$. Limites do tipo

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{1}$$

ocorrem com bastante frequência na geometria, na física em várias outras áreas. Vejamos dois exemplos clássicos da ocorrência deste limite que nos ajudarão a compreender a importância de destacar seu estudo e por consequência o estudo de derivada.

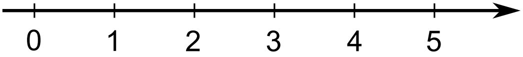
Velocidade instantânea

Suponha que uma partícula se mova sobre uma reta orientada, sobre a qual se escolheu uma origem, de acordo com a equação horária $s = f(t)$, ou seja, $f(t)$ é a posição da partícula sobre a reta no instante t.

Velocidade instantânea

Suponha que uma partícula se mova sobre uma reta orientada, sobre a qual se escolheu uma origem, de acordo com a equação horária $s = f(t)$, ou seja, $f(t)$ é a posição da partícula sobre a reta no instante t.

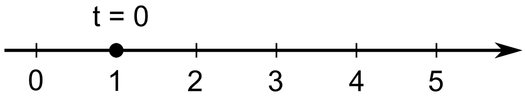
Por exemplo $f(t) = 2t + 1$



Velocidade instantânea

Suponha que uma partícula se mova sobre uma reta orientada, sobre a qual se escolheu uma origem, de acordo com a equação horária $s = f(t)$, ou seja, $f(t)$ é a posição da partícula sobre a reta no instante t.

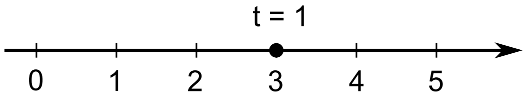
Por exemplo $f(t) = 2t + 1$



Velocidade instantânea

Suponha que uma partícula se mova sobre uma reta orientada, sobre a qual se escolheu uma origem, de acordo com a equação horária $s = f(t)$, ou seja, $f(t)$ é a posição da partícula sobre a reta no instante t.

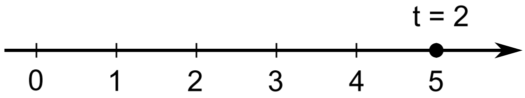
Por exemplo $f(t) = 2t + 1$



Velocidade instantânea

Suponha que uma partícula se mova sobre uma reta orientada, sobre a qual se escolheu uma origem, de acordo com a equação horária $s = f(t)$, ou seja, $f(t)$ é a posição da partícula sobre a reta no instante t.

Por exemplo $f(t) = 2t + 1$



A velocidade média da partícula entre os instantes t_0 e t é dada por

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2}$$

A velocidade média da partícula entre os instantes t_0 e t é dada por

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \tag{2}$$

A velocidade instantânea da partícula no instante t_0 é determinada por

A velocidade média da partícula entre os instantes t_0 e t é dada por

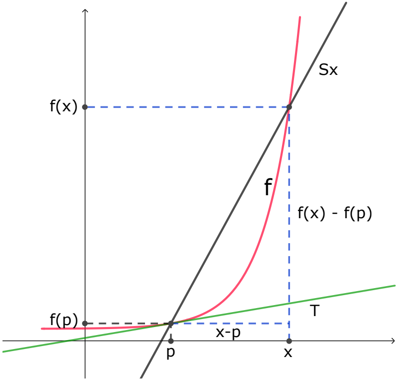
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \tag{2}$$

A velocidade instantânea da partícula no instante t_0 é determinada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \tag{3}$$

Coeficiente angular da reta tangente

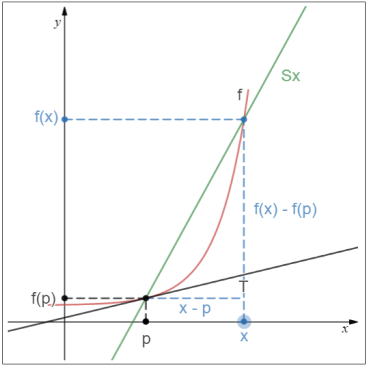
Sejam f uma função e $p \in D_f$. Suponha que se queira determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.



Como determinar o coeficiente angular da reta tangente se conhecemos apenas um ponto por onde a reta passa, o ponto $(p, f(p))$?

Reta tangente

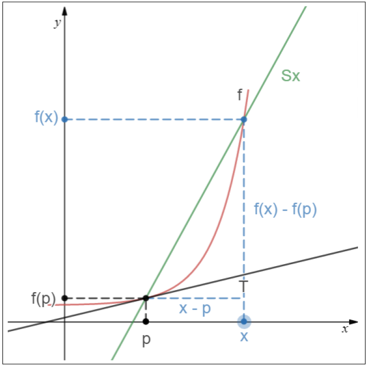
Como determinar o coeficiente angular da reta tangente se conhecemos apenas um ponto por onde a reta passa, o ponto $(p, f(p))$?



Comecemos por analisar o coeficiente angular de uma reta secante S_x ao gráfico de f pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$ para algum $x \in D_f$

Reta tangente

Como determinar o coeficiente angular da reta tangente se conhecemos apenas um ponto por onde a reta passa, o ponto $(p, f(p))$?

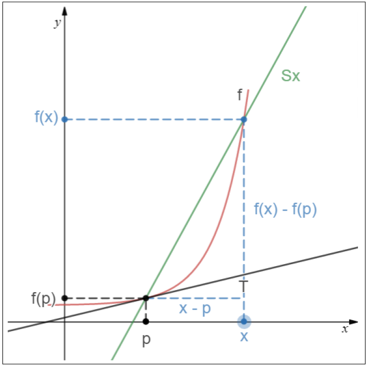


Reta tangente

O coeficiente angular de S_x é

$$C_{S_x} = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{4}$$

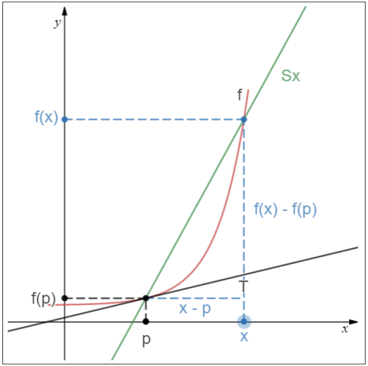
Como determinar o coeficiente angular da reta tangente se conhecemos apenas um ponto por onde a reta passa, o ponto $(p, f(p))$?



Reta tangente

Observe que ao aproximar x de p, a reta secante S_x se aproxima da reta tangente T e portanto o coeficiente angular de S_x tende ao coeficiente angular de T

Como determinar o coeficiente angular da reta tangente se conhecemos apenas um ponto por onde a reta passa, o ponto $(p, f(p))$?



Reta tangente

Fazendo o limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

obtemos o coeficiente angular da reta tangente T

Definição 1 (Derivada)

Sejam f *uma função e* $p \in D_f$. *O limite*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, é chamado **derivada de** f **em** p *e é denotado por* $f'(p)$.

Definição 1 (Derivada)

Sejam f uma função e $p \in D_f$. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, é chamado **derivada de f em p** *e é denotado por $f'(p)$.*

Assim

Limite I

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{4}$$

Podemos reescrever a definição de derivada em (4) fazendo $x - p = h$.

Podemos reescrever a definição de derivada em (4) fazendo $x - p = h$.

Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

se torna

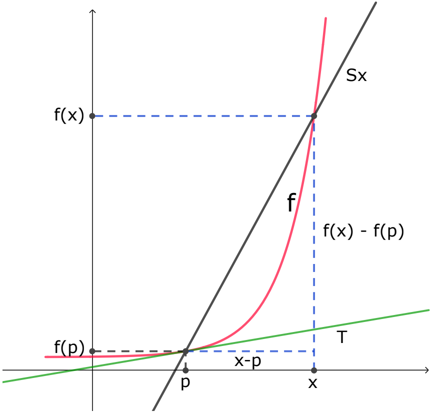
Limite II

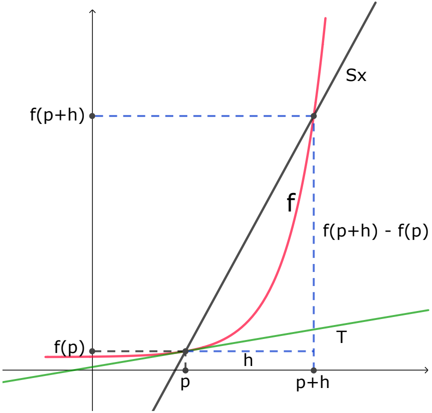
$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \tag{5}$$

Os limites I e II são equivalentes.

$\frac{df}{dx}$ 9

Comparação dos limites I e II

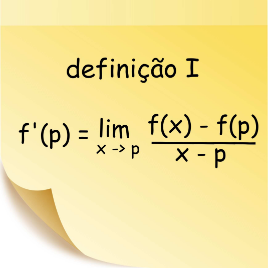




Interpretação geométrica da derivada

Exemplo: Seja $f(x) = x^2$. Calcule

a) $f'(1)$



Exemplo: Seja $f(x) = x^2$. Calcule

a) $f'(1)$

Pelo limite I temos

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

definição I

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^2$. Calcule

a) $f'(1)$

Pelo limite I temos

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^2$. Calcule

a) $f'(1)$

Pelo limite I temos

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

definição I

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

diferença de quadrados

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^2$. Calcule

a) $f'(1)$

Pelo limite I temos

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1}$$

definição I

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

diferença de quadrados

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^2$. Calcule

a) $f'(1)$

Pelo limite I temos

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 1} (x+1)$$

definição I

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

diferença de quadrados

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^2$. Calcule

a) $f'(1)$

Pelo limite I temos

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

definição I

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

diferença de quadrados

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

definição I

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^2$. Calcule

a) $f'(1)$

Pelo limite I temos

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Portanto $f'(1) = 2$

diferença de quadrados

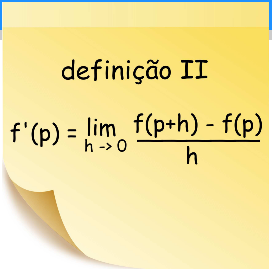
$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

b) $f'(x)$

b) $f'(x)$

Pelo limite II temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



b) $f'(x)$

Pelo limite II temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

definição II

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

definição II

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

b) $f'(x)$

Pelo limite II temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \end{aligned}$$

b) $f'(x)$

Pelo limite II temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}
\end{aligned}
$$

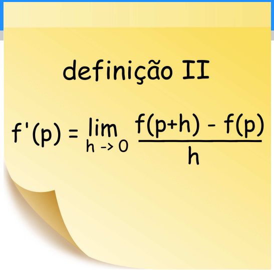
definição II

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

b) $f'(x)$

Pelo limite II temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \end{aligned}$$



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

b) $f'(x)$

Pelo limite II temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \end{aligned}$$

definição II

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) \end{aligned}$$

b) $f'(x)$

Pelo limite II temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}
\end{aligned}
$$

definição II

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x+h) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

b) $f'(x)$

Pelo limite II temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}
\end{aligned}
$$

definição II

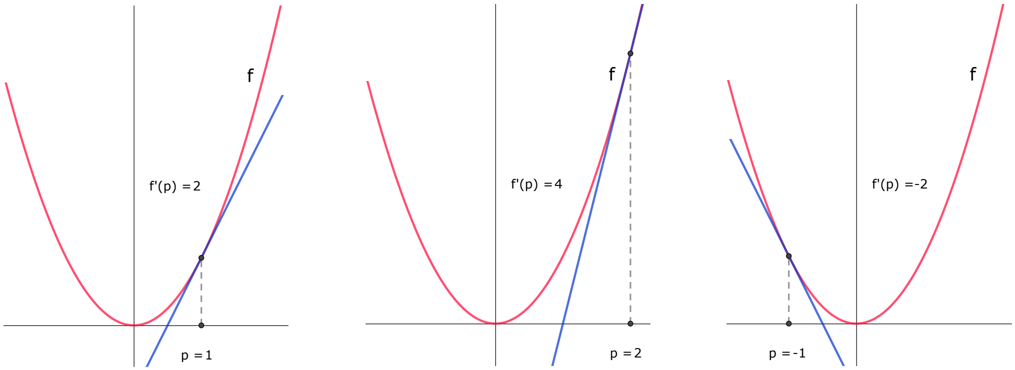
$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h)\\
&= 2x
\end{aligned}
$$

Portanto $f'(x) = 2x$

As figuras abaixo apresentam os gráficos da função $f(x) = x^2$ e a reta tangente ao gráfico de f nos pontos $(p, f(p))$ para $p = 1$, $p = 2$ e $p = -1$.

$f'(p)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$.



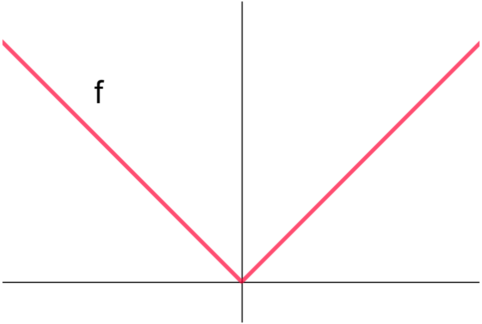
Resumo

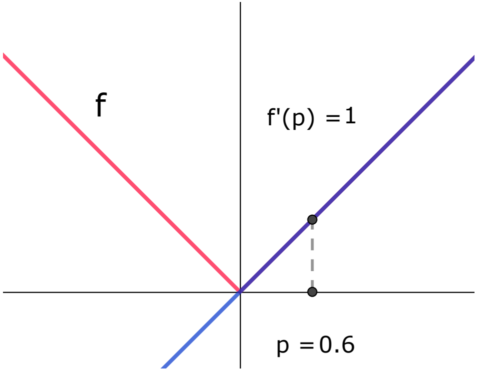
- $f'(p)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(p, f(p))$, ou seja, é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$
- $f'(p)$ mede a taxa de variação instantânea da função f em p
- se $f'(p) > 0$ então f é crescente em uma vizinhança de p
- se $f'(p) < 0$ então f é decrescente em uma vizinhança de p

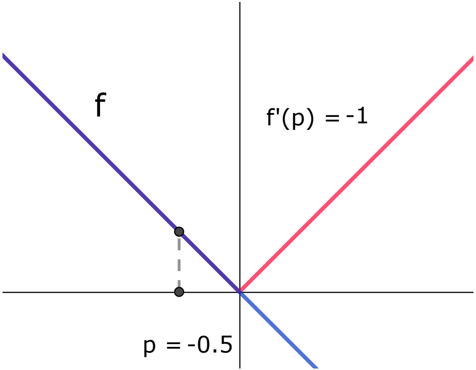
Exercício. Seja $f(x) = C$, onde C é uma constante. Determine $f'(x)$.

A derivada de uma função pode não existir em determinados pontos de seu domínio, ou seja, os limites que definem a derivada não existem nestes pontos. Geometricamente, em tais pontos, não se pode obter reta tangente ao gráfico da função. Pontos do gráfico que são "bicos" têm esta característica.

$$f(x) = |x|$$







Exercício. Mostre que a função $f(x) = |x|$ não possui derivada em $p = 0$.