Biología de Sistemas

Ricardo Aguilar Garay

Diciembre 2020

1. Modelo

$$\dot{x} = \alpha_1 \left(1 - x\right) - \frac{\beta_1 x \left(\nu y\right)^{\gamma_1}}{K_1 + \left(\nu y\right)^{\gamma_1}}, \tag{1}$$

$$\dot{y} = \alpha_2 \left(1 - y\right) - \frac{\beta_2 y x^{\gamma_2}}{K_2 + x^{\gamma_2}}, \tag{2}$$

2. Puntos de equilibrio

Para el cálculo de los puntos de equilibrio del sistema (1)-(2) se hará $\dot{x} = \dot{y} = 0$, se obtiene

$$\alpha_1 \left(1 - x\right) - \frac{\beta_1 x \left(\nu y\right)^{\gamma_1}}{K_1 + \left(\nu y\right)^{\gamma_1}} = 0,$$

$$\alpha_2 \left(1 - y\right) - \frac{\beta_2 y x^{\gamma_2}}{K_2 + x^{\gamma_2}} = 0.$$

Se consideran 3 casos

2.1. Caso 1 $x_* = 1$, $y \neq 0$

En este caso se considera la carga máxima para x_*, sustituyendo en (2) se obtiene

$$\alpha_2 \left(1 - y_*\right) - \frac{\beta_2 y_*}{K_2 + 1} = 0, \tag{3}$$

donde (x_*, y_*) es punto de equilibrio. Despejando y_* de (3) se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_2 \left(1 - y_*\right)\left(K_2 + 1\right) &= \beta_2 y_* \\ \alpha_2 \left(K_2 + 1\right) - \alpha_2 \left(K_2 + 1\right) y_* &= \beta_2 y_* \\ \alpha_2 \left(K_2 + 1\right) &= \big(\beta_2 + \left(K_2 + 1\right)\alpha_2\big) y_* \end{aligned}$$

por lo tanto

$$y_* = \frac{\alpha_2 (K_2 + 1)}{\beta_2 + (K_2 + 1)\,\alpha_2}. \tag{4}$$

Por lo tanto el punto de equilibrio es

$$E_0 = \left(x_*, \frac{\alpha_2 (K_2 + 1)}{\beta_2 + (K_2 + 1)\,\alpha_2} \right). \tag{5}$$

2.2. Caso 2 $x \neq 0$, $y_{**} = 1$

En este caso se considerá la carga máxima para y_{**}, sustituyendo en (1) se obtiene

$$\alpha_1 (1 - x_{**}) - \frac{\beta_1 x_{**} \nu^{\gamma_1}}{K_1 + \nu^{\gamma_1}} = 0, \tag{6}$$

donde (x_{**}, y_{**}) es punto de equilibrio. Despejando x_{**} de (6) se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_1 (1 - x_{**}) &= \frac{\beta_1 x_{**} \nu^{\gamma_1}}{K_1 + \nu^{\gamma_1}} \\ \alpha_1 (1 - x_{**}) (K_1 + \nu^{\gamma_1}) &= \beta_1 x_{**} \nu^{\gamma_1} \\ \alpha_1 (K_1 + \nu^{\gamma_1}) - \alpha_1 x_{**} (K_1 + \nu^{\gamma_1}) &= \beta_1 x_{**} \nu^{\gamma_1} \\ x_{**} \Big(\beta_1 \nu^{\gamma_1} + \alpha_1 x_{**} (K_1 + \nu^{\gamma_1}) \Big) &= \alpha_1 (K_1 + \nu^{\gamma_1}) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x_{**} = \frac{\alpha_1 (K_1 + \nu^{\gamma_1})}{\beta_1 \nu^{\gamma_1} + \alpha_1 (K_1 + \nu^{\gamma_1})}. \tag{7}$$

Por lo tanto el punto de equilibrio es

$$E_1 = \left(\frac{\alpha_1 (K_1 + \nu^{\gamma_1})}{\beta_1 \nu^{\gamma_1} + \alpha_1 (K_1 + \nu^{\gamma_1})}, y_{**} \right). \tag{8}$$

2.3. Caso 3 $x \neq 0$, $y \neq 0$

En este caso para el cálculo de los puntos de equilibrio, se obtendrá un polinomio Ψ de grado $\gamma_1\gamma_2 + 1$ con raíces r, por lo que los puntos de equilibrio se basarán en las raíces del polinomio Ψ, se considerarían tres casos en los que se pueden enumerar

1. Caso 1: Si $\gamma_1\gamma_2 + 1 \in 2\mathbb{Z}_+$, entonces se tendrían al menos cero raíces reales y máximo $\gamma_1\gamma_2 + 1$ raíces reales.

2. Caso 2: Si $\gamma_1\gamma_2 + 1 \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$, entonces se tendrían al menos una raíz real y máximo $\gamma_1\gamma_2 + 1$ raíces reales.

En este caso de (1)-(2) se obtiene

$$\alpha_1 - \alpha_1 x - \frac{\beta_1 x \left(\nu y\right)^{\gamma_1}}{K_1 + \left(\nu y\right)^{\gamma_1}} = 0$$
$$\alpha_2 - \alpha_2 y - \frac{\beta_2 y x^{\gamma_2}}{K_2 + x^{\gamma_2}} = 0.$$

entonces

$$\alpha_1\Big(K_1 + \left(\nu y\right)^{\gamma_1}\Big) - \alpha_1 x\Big(K_1 + \left(\nu y\right)^{\gamma_1}\Big) - \beta_1 x \left(\nu y\right)^{\gamma_1} = 0$$
$$\alpha_2\Big(K_2 + x^{\gamma_2}\Big) - \alpha_2 y\Big(K_2 + x^{\gamma_2}\Big) - \beta_2 y x^{\gamma_2} = 0$$

por lo tanto

$$-x\Big[\alpha_1 K_1 + \left(\alpha_1 + \beta_1\right)\left(\nu y\right)^{\gamma_1}\Big] + \alpha_1\Big(\left(\nu y\right)^{\gamma_1} + K_1\Big) = 0 \tag{9}$$
$$-y\Big[\alpha_2 K_2 + \left(\alpha_2 + \beta_2\right) x^{\gamma_2}\Big] + \alpha_2\Big(x^{\gamma_2} + K_2\Big) = 0 \tag{10}$$

Despejando x de (10) se obtiene

$$x^{\gamma_2}\Big[\alpha_2 - \left(\alpha_2 + \beta_2\right) y\Big] + \alpha_2 K_2 \left(1 - y\right) = 0$$
$$x^{\gamma_2}\Big[\alpha_2 - \left(\alpha_2 + \beta_2\right) y\Big] = \alpha_2 K_2 \left(y - 1\right)$$
$$x^{\gamma_2} = \frac{\alpha_2 K_2 \left(y - 1\right)}{\alpha_2 - \left(\alpha_2 + \beta_2\right) y}$$

con lo que se obtiene

$$x = \sqrt[\gamma_2]{\frac{\alpha_2 K_2 \left(y - 1\right)}{\alpha_2 - \left(\alpha_2 + \beta_2\right) y}} \tag{11}$$

se sustituye (11) se sustituye en (9) se obtiene

$$\alpha_1\Big(\left(\nu y\right)^{\gamma_1} + K_1\Big) - \sqrt[\gamma_2]{\frac{\alpha_2 K_2 \left(y - 1\right)}{\alpha_2 - \left(\alpha_2 + \beta_2\right) y}}\Big[\alpha_1 K_1 + \left(\alpha_1 + \beta_1\right)\left(\nu y\right)^{\gamma_1}\Big] = 0$$
$$\frac{\alpha_1\Big(\left(\nu y\right)^{\gamma_1} + K_1\Big)}{\alpha_1 K_1 + \left(\alpha_1 + \beta_1\right)\left(\nu y\right)^{\gamma_1}} = \sqrt[\gamma_2]{\frac{\alpha_2 K_2 \left(y - 1\right)}{\alpha_2 - \left(\alpha_2 + \beta_2\right) y}}$$
$$\left(\frac{\alpha_1\Big(\left(\nu y\right)^{\gamma_1} + K_1\Big)}{\alpha_1 K_1 + \left(\alpha_1 + \beta_1\right)\left(\nu y\right)^{\gamma_1}}\right)^{\gamma_2} = \frac{\alpha_2 K_2 \left(y - 1\right)}{\alpha_2 - \left(\alpha_2 + \beta_2\right) y}$$
$$\alpha_1^{\gamma_2}\Big(\left(\nu y\right)^{\gamma_1} + K_1\Big)^{\gamma_2}\Big(\alpha_2 - \left(\alpha_2 + \beta_2\right) y\Big) = \alpha_2 K_2 \left(y - 1\right)\Big(\alpha_1 K_1 + \left(\alpha_1 + \beta_1\right)\left(\nu y\right)^{\gamma_1}\Big)^{\gamma_2}$$

por lo que podemos definir

$$\Psi(y) := \Big[\alpha_1^{\gamma_2}\alpha_2\big(M_1(y)\big)^{\gamma_2} + \alpha_2 K_2\big(M_2(y)\big)^{\gamma_2}\Big] - \Big[\alpha_1^{\gamma_2}\big(\alpha_2 + \beta_2\big)\big(M_1(y)\big)^{\gamma_2} + \alpha_2 K_2\big(M_2(y)\big)^{\gamma_2}\Big] y. \tag{12}$$

donde

$$M_1(y) := (\nu y)^{\gamma_1} + K_1 \qquad ; \qquad M_2(y) := \alpha_1 K_1 + (\alpha_1 + \beta_1)(\nu y)^{\gamma_1}. \tag{13}$$

El interés se centra en aquellas raíces r_* que cumplan

$$y = r_* \in \mathrm{Re}_+ \,|\Psi(r_*) = 0 \tag{14}$$

3. Análisis de estabilidad

Para esta sección se estudiará la estabilidad local del sistema (1)-(2), linealizando el sistema alrededor de los puntos de equilibrio (19) - (21), por lo que primero hay que calcular su matriz Jacobiana, la cual es

$$J = \begin{bmatrix} -\left[\alpha_1 + \dfrac{\beta_1 (\nu y_*)^{\gamma_1}}{K_1 + (\nu y_*)^{\gamma_1}}\right] & \dfrac{\beta_1 \gamma_1 x_* (\nu y_*)^{2\gamma_1 - 1}}{\left(K_1 + (\nu y_*)^{\gamma_1}\right)^2}\left[\left(\nu - 1\right) - K_1 (\nu y_*)^{-\gamma_1}\right] \\ \dfrac{-\beta_2 \gamma_2 K_2 y_* x_*^{\gamma_2 - 1}}{\left(K_2 + x_*^{\gamma_2}\right)^2} & -\left[\alpha_2 + \dfrac{\beta_2 x_*^{\gamma_2}}{K_2 + x_*^{\gamma_2}}\right] \end{bmatrix} \tag{15}$$

cuyos valores propios se calculan mediante $|\lambda I - J|$ por lo que obtenemos lo siguiente

$$|\lambda I - J| = \begin{bmatrix} \lambda + \left[\alpha_1 + \dfrac{\beta_1 (\nu y_*)^{\gamma_1}}{K_1 + (\nu y_*)^{\gamma_1}}\right] & \dfrac{\beta_1 \gamma_1 x_* (\nu y_*)^{2\gamma_1 - 1}}{\left(K_1 + (\nu y_*)^{\gamma_1}\right)^2}\left[K_1 (\nu y_*)^{-\gamma_1} - \left(\nu - 1\right)\right] \\ \dfrac{\beta_2 \gamma_2 K_2 y_* x_*^{\gamma_2 - 1}}{\left(K_2 + x_*^{\gamma_2}\right)^2} & \lambda + \left[\alpha_2 + \dfrac{\beta_2 x_*^{\gamma_2}}{K_2 + x_*^{\gamma_2}}\right] \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico es

$$\lambda^2 + A_1 \lambda + A_2 \tag{16}$$

donde

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\beta_2 x_*^{\gamma_2}}{K_2 + x_*^{\gamma_2}} + \frac{\beta_1 (\nu y_*)^{\gamma_1}}{K_1 + (\nu y_*)^{\gamma_1}},$$

$$A_2 = \frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 K_2 \nu^{2\gamma_1 - 1} x_*^{\gamma_2} y_*^{2\gamma_1}}{\left(K_1 + (\nu y_*)^{\gamma_1}\right)^2 \left(K_2 + x_*^{\gamma_2}\right)^2}\left[\left(\nu - 1\right) - K_1 (\nu y_*)^{-\gamma_1}\right] + \left[\alpha_1 + \frac{\beta_1 (\nu y_*)^{\gamma_1}}{K_1 + (\nu y_*)^{\gamma_1}}\right]\left[\alpha_2 + \frac{\beta_2 x_*^{\gamma_2}}{K_2 + x_*^{\gamma_2}}\right]$$

tiene eigenvalores reales si $A_1^2 - 4A_2 > 0$.

3.1. Estabilidad en sistemas cooperativos y competitivos

Un sistema dinámico autónomo $\dot{x} = f(x)$ donde f es una función continua C^∞ y donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, se denomina cooperativo o competitivo si cumplen con alguna de las siguientes definiciones [1].

Definición 3.1 (Sistema cooperativo) *Dado un sistema $\dot{x} = f(x)$ se denomina cooperativo si todos los elementos de su matriz Jacobiana, excepto los de su diagonal principal, son no negativos, es decir*

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \geq 0 \ \forall i \neq j.$$

Definición 3.2 (Sistema competitivo) *Dado un sistema $\dot{x} = f(x)$ se denomina competitivo si todos los elementos de su matriz Jacobiana, excepto los de su diagonal principal, son no positivos, es decir*

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \leq 0 \ \forall i \neq j.$$

El corolario (3.1) permite establecer convergencia para las trayectorias de sus soluciones sean sistemas cooperativos o competitivos.

Corolario 3.1 *Sea $\{\phi(t)\}$ la solución en $\mathbb{R}^2$ de un sistema cooperativo o competitivo para el cual el cuadrante $\mathbb{R}^2_{0,+}$ es positivamente invariante, entonces cualquier trayectoria cerrada $[0, \infty) \to \mathbb{R}^2_{0,+}$ converge.*

4. Análisis Numérico

En esta sección se utilizarán los valores de la tabla (1)

Parámetro	Valor
α_1	1
α_2	1
β_1	200
β_2	10
γ_1	4
γ_2	4
K_1	30
K_2	1
ν	1

Cuadro 1: Parámetros del modelo

4.1. Puntos de equilibrio

Substituyendo los valores de la tabla (1) en los anteriores casos se tiene

4.1.1. Caso 1

Para este caso se encuentra dada la ecuación (5)

$$E_0 = \left(1, \frac{1}{6}\right) = (1, 0.1667). \tag{17}$$

4.1.2. Caso 2

Para este caso se encuentra dada la ecuación (8)

$$E_1 = \left(\frac{31}{231}, 1\right) = (0.1342, 1). \tag{18}$$

4.1.3. Caso 3

A partir de la ecuación (12) y (13) se obtiene

$$M_1(y) = y^4 + 30 \qquad ; \qquad M_2(y) := 201y^4 + 30$$

por lo tanto el polinomio resulta

$$\begin{aligned}\Psi(y) &= \left[M_1^4(y) + M_2^4(y)\right] - \left[11M_1^4(y) + M_2^4(y)\right]y,\\ &= \left[\left(y^4+30\right)^4 + \left(201y^4+30\right)^4\right] - \left[11\left(y^4+30\right)^4 + \left(201y^4+30\right)^4\right]y,\end{aligned}$$

entonces

$$\left(y^4+30\right)^4 = y^{16} + 120y^{12} + 5400y^8 + 108000y^4 + 810000,$$

por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}\left(201y^4+30\right)^4 =& 1.632240801\times 10^9 y^{16} + 974.47212\times 10^6 y^{12} + 218.1572\times 10^6 y^8 + 21.708\times 10^6 y^4 +\\ & 810000.\end{aligned}$$

ademas

$$11\left(y^4+30\right)^4 = 11y^{16} + 1320y^{12} + 59400y^8 + 1188000y^4 + 8910000,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}M_1^4(y) + M_2^4(y) =& 1.632240802\times 10^9 y^{16} + 974.4724\times 10^6 y^{12} + 218.1626\times 10^6 y^8 + 21.816\times 10^6 y^4 +\\ & 1.62\times 10^6.\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\left[11M_1^4(y) + M_2^4(y)\right]y =& 1.632240812\times 10^9 y^{17} + 974.47344\times 10^6 y^{13} + 218.2166\times 10^6 y^9 +\\ & 22.896\times 10^6 y^5 + 9.72\times 10^6 y.\end{aligned}$$

finalmente el polinomio (12) resulta en

$$\begin{aligned}\Psi(y) =& -1.632240812 \times 10^9 y^{17} + 1.632240802 \times 10^9 y^{16} - 974.47344 \times 10^6 y^{13} + 974.4724 \times 10^6 y^{12} \\ & - 218.2166 \times 10^6 y^9 + 218.1626 \times 10^6 y^8 - 22.896 \times 10^6 y^5 + 21.816 \times 10^6 y^4 - 9.72 \times 10^6 y \\ & + 1.62 \times 10^6.\end{aligned}$$

De las cuales las raíces se muestran en la tabla (2) y por lo tanto solo tomamos a r_9, r_{16} y r_{17} por

Parámetro	Valor
r_1	$-0.4626712664735543 + 0.60941483345216142j$
r_2	$-0.4626712664735543 - 0.60941483345216142j$
r_3	$-0.6002942812276788 + 0.48442058163123397j$
r_4	$-0.6002942812276788 - 0.48442058163123397j$
r_5	$-0.5891518491568397 + 0.2446004725378369j$
r_6	$-0.5891518491568397 - 0.2446004725378369j$
r_7	$-0.19639034227563829 + 0.576255243736233j$
r_8	$-0.19639034227563829 - 0.576255243736233j$
r_9	0.9966187208957835
r_{10}	$0.28594877709256417 + 0.6230645463132196j$
r_{11}	$0.28594877709256417 - 0.6230645463132196j$
r_{12}	$0.5209704823918695 + 0.6041070299623663j$
r_{13}	$0.5209704823918695 - 0.6041070299623663j$
r_{14}	$0.649446149116828 + 0.43197103941221665j$
r_{15}	$0.649446149116828 - 0.43197103941221665j$
r_{16}	0.6195094156157372
r_{17}	0.16815651842683876

Cuadro 2: Raíces del polinomio $\Psi(y)$

ser las que cumplen la condición (14).
Sustituyendo en (11) se obtiene

$$x_{1*} = \sqrt[4]{\frac{r_9 - 1}{1 - 11r_9}}, \qquad x_{2*} = \sqrt[4]{\frac{r_{16} - 1}{1 - 11r_{16}}}, \qquad x_{3*} = \sqrt[4]{\frac{r_{17} - 1}{1 - 11r_{17}}}$$

entonces

$$x_{1*} = \sqrt[4]{\frac{0.9966187208957835 - 1}{1 - 11(0.9966187208957835)}} = \sqrt[4]{\frac{-0.0033812791042164836}{-9.96280592985362}} = \sqrt[4]{0.00033939024086421845},$$

$$x_{2*} = \sqrt[4]{\frac{0.6195094156157372 - 1}{1 - 11(0.6195094156157372)}} = \sqrt[4]{\frac{-0.38049058438426275}{-5.81460357177311}} = \sqrt[4]{0.06543706371167719},$$

$$x_{3*} = \sqrt[4]{\frac{0.16815651842683876 - 1}{1 - 11(0.16815651842683876)}} = \sqrt[4]{\frac{-0.8318434815731612}{-0.8497217026952264}} = \sqrt[4]{0.9789599099736332}.$$

lo que nos resulta en

$$x_{1*} = 0.13572968385223158, \qquad x_{2*} = 0.5057733603874235, \qquad x_{3*} = 0.9946979588849345$$

finalmente los puntos de equilibrio para el Caso 3 son

$$E_2 = \Big(0.13572968385223158, 0.9966187208957835\Big),$$
$$E_3 = \Big(0.5057733603874235, 0.6195094156157372\Big),$$
$$E_4 = \Big(0.9946979588849345, 0.16815651842683876\Big)$$

4.2. Resumen

En resumen los puntos de equilibrio son

$$E_0 = \Big(1, 0.16667\Big), \qquad E_1 = \Big(0.13420, 1\Big), \tag{19}$$
$$E_2 = \Big(0.13573, 0.99662\Big), \qquad E_3 = \Big(0.50577, 0.61951\Big), \tag{20}$$
$$E_4 = \Big(0.99470, 0.16816\Big) \tag{21}$$

4.3. Estabilidad local

Sustituyendo los valores de la tabla (1) en el polinomio característico (16) junto con los puntos de equilibrio (19)-(21) se obtiene De la tabla (4) notamos que $E_0 \approx E_4$ y que $E_1 \approx E_2$, por lo que

Puntos de equilibrio	**Polinomio característico**	**Eigenvalores**		**Estabilidad local**
		λ_1	λ_2	
$E_0 = \Big(1, 0.16667\Big)$	$\lambda^2 + 7.005\lambda + 5.825$	-6.0408583	-0.9642856	estable
$E_1 = \Big(0.13420, 1\Big)$	$\lambda^2 + 8.455\lambda + 7.152$	-7.50144074	-0.9534145	estable
$E_2 = \Big(0.13573, 0.99662\Big)$	$\lambda^2 + 8.371\lambda + 7.058$	-7.41969849	-0.95125399	estable
$E_3 = \Big(0.50577, 0.61951\Big)$	$\lambda^2 + 3.591\lambda - 5.777$	-4.79596905	1.2046115	no estable
$E_4 = \Big(0.99470, 0.16816\Big)$	$\lambda^2 + 6.952\lambda + 5.765$	-5.98961147	-0.96255937	estable

Cuadro 3: Resultados principales.

condensamos esos resultados en solo tres puntos de equilibrio

Puntos de equilibrio	**Polinomio característico**	**Eigenvalores**		**Estabilidad local**
		λ_1	λ_2	
$E_0^* = \Big(0.50577, 0.61951\Big)$	$\lambda^2 + 3.591\lambda - 5.777$	-4.79596905	1.2046115	no estable
$E_1^* = \Big(0.99470, 0.16816\Big)$	$\lambda^2 + 6.952\lambda + 5.765$	-5.98961147	-0.96255937	estable
$E_2^* = \Big(0.13573, 0.99662\Big)$	$\lambda^2 + 8.371\lambda + 7.058$	-7.41969849	-0.95125399	estable

Cuadro 4: Resultados principales.

5. Sistema Competitivo

De acuerdo con la definición (3.2) y de acuerdo con la matriz Jacobiana (15) se tiene los elementos fuera de la diagonal

$$\frac{\beta_1 \gamma_1 x_* \left(\nu y_*\right)^{2\gamma_1 - 1}}{\Big(K_1 + \left(\nu y_*\right)^{\gamma_1}\Big)^2} \Big[\Big(\nu - 1\Big) - K_1 \left(\nu y_*\right)^{-\gamma_1} \Big] \leq 0, \tag{22}$$

$$\frac{-\beta_2 \gamma_2 K_2 y_* x_*^{\gamma_2 - 1}}{\Big(K_2 + x_*^{\gamma_2}\Big)^2} \leq 0, \tag{23}$$

de (23) es claro que se cumple para toda $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ y $K_2 > 0$, con $i = 1, 2$. Por otro lado de (22), si $0 \leq \nu \leq 2$ entonces se cumple

$$\begin{aligned} \big(\nu - 1\big) - K_1 \left(\nu y_*\right)^{-\gamma_1} &\leq 0, \\ \big(\nu - 1\big)\nu^{\gamma_1} &\leq \frac{K_1}{y_*^{\gamma_1}} \\ 0 \leq \nu^{\gamma_1 + 1} - \nu^{\gamma_1} &\leq \frac{K_1}{y_*^{\gamma_1}} \end{aligned}$$

lo cual es claro que se cumple para $K_1 > 0$ y $y_* \leq \dfrac{\sqrt[\gamma_1]{K_1}}{2}$. Sin embargo si $\nu > 2$, entonces se cumple la siguiente condición para que el sistema sea competitivo

$$2 < \nu \leq \max\left\{ \frac{\sqrt[\gamma_1]{K_1}}{y_*} \right\}.$$

6. Simulaciones in silico

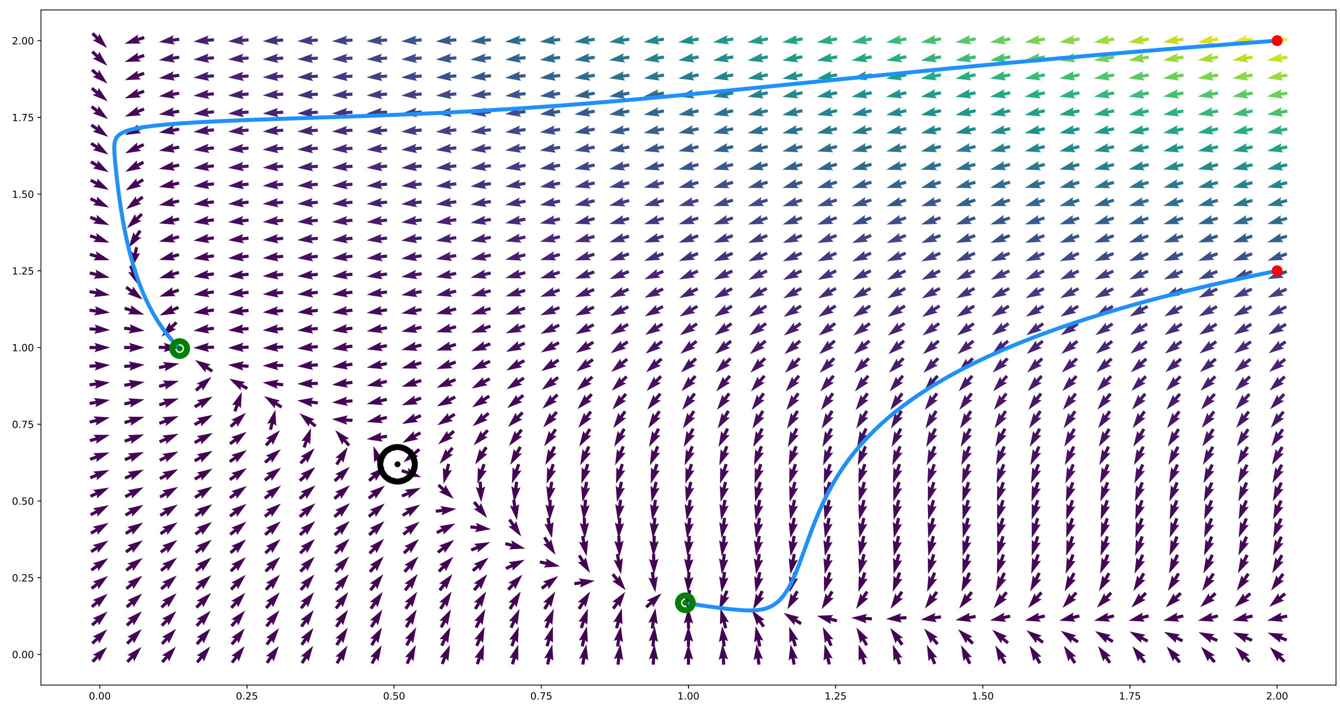

Figura 1: Plano de fase

Referencias

[1] Morris Hirsch. "Systems of Differential Equations that are Competitive or Cooperative II: Convergence Almost Everywhere". En: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 16 (mayo de 1985). DOI: 10.1137/0516030.