NON LINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS.

STEFANO BIONDI

1. Problem 1

Data la funzione polinomiale non lineare

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2 \tag{1}$$

si può concludere che è continua in tutto $\mathbb{R}$. Considerando inoltre come intervallo tutto il suo dominio, si ha che i limiti agli estremi sono di segno opposto, quindi, per il teorema di Bolzano, sicuramente esiste almeno un punto in cui $f(x) = 0$.

$$\begin{gathered} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{gathered} \tag{2}$$

Analiticamente è facile dimostrare che ce ne sono esattamente 3 visto che ci sono 2 punti di massimo/minimo.

$$\begin{gathered} f'(x) = -\,3x^2 + 8x = 0 \\ x = 0 \lor x = \frac{3}{8} \end{gathered} \tag{3}$$

Considerando l'intervallo $[0, 1]$ in cui esiste uno zero della funzione, infatti $f(0) \cdot f(1) = -2 \cdot 2 < 0$ applicchiamo il metodo di bisezione.

- il punto medio dell'intervallo è $x_m = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$
- $f(x_m) = f(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{8}$
- sfruttando il teorema di Bolzano il nuovo intervallo da considerare è quindi $[\frac{1}{2}, 1]$

Iterando questi 3 step avremmo la convergenza alla soluzione cercata, come mostrato in figura 1.

```
> f<-function(x){-x^3+4*x^2-2}
> BFfzero(f, 0, 1)
[1] 1
[1] 0.7892426
[1] -6.958254e-06
[1] "finding root is successful"
```

Figura 1. Zero della funzione nell'intervallo $[0, 1]$ trovato con il metodo di Bisezione

2. Problem 2

Esercizio 1. Dato il problema di ottimo non lineare

$$\min\ f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + 2(x_2 - 3)^2 \tag{4}$$

è stato utilizzato il metodo di discesa del gradiente per approssimare la soluzione. Nel dettaglio è stato costruito il gradiente tramite le derivate parziali

$$\nabla f(x_1, x_2) = [4x_1 + x_2, x_1 + 4x_2 - 12] \tag{5}$$

ed è stato sucessivamente calcolato nel punto dato, $A = (-1, 4)^T$

$$\nabla f(A) = [0, 3] \tag{6}$$

Supponendo l'utilizzo di un ϵ abbastanza piccolo da non interrompere l'algoritmo, cioè che non soddisfi la seguente condizione

$$||\nabla f(A)|| = \sqrt{0 + 3^2} < \epsilon \tag{7}$$

il metodo di discesa del gradiente prevede che l'iterazione $k + 1$ sia

$$x_{k+1} = x_k + a_k d_k \tag{8}$$

con

$$d_0 = -\nabla f(A) = [0, -3] \tag{9}$$

quindi

$$\begin{aligned}
&B = [-1, 4] + a_0[0, -3] = [-1, 4 - 3a_0] \\
&f(B) = 18a_0^2 - 9a_0 \\
&\frac{df(B)}{da_0} = 36a_0 - 9 = 0 \\
&a_0 = \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{10}$$

quindi $B = [-1, 13/4]$ ed infine si calcola il gradiente della funziona nel nuovo punto B

$$\nabla f(B) = [-4 + \frac{13}{4}, -1 + 4\frac{13}{4} - 12] = [-\frac{3}{4}, 0] \tag{11}$$

Confrontando nuovamente la norma con ϵ si decide se proseguire con l'iterazione sucessiva o se fermarsi e considerare il punto trovato come soluzione approssimata del problema

$$||\nabla f(B)|| = \sqrt{(-\frac{3}{4})^2 + 0} = 0.75 < \epsilon \tag{12}$$

Esercizio 2. Utilizzando il metodo di Newton per risolvere il problema di ottimizzazione non lineare precedente viene calcolato il gradiente

$$\nabla f(x_1, x_2) = [4x_1 + x_2, x_1 + 4x_2 - 12] \tag{13}$$

e la matrice Hessiana

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Dopo aver dimostrato che la matrice è invertibile, $det(H) = 15 \neq 0$ calcoliamo l'inversa

$$H^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Il metodo di Newton utilizza la seire di Taylor al secondo ordine per approssimare la funzione all'iterazione sucessiva, quindi

$$\begin{aligned}
&x_{k+1} = x_k - H(X_k)^{-1}\nabla f(x_k) \\
&B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/15 & -1/15 \\ -1/15 & 4/15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 16/5 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{16}$$

Infine calcolando il gradiente nel punto B si ha che lo stesso si annulla. Considerando inoltre che il gradiente è lineare e la matrice Hessiana è definita positiva si può concludere che B è l'unico minimo della funzione f ed è quindi minimo globale.

Esercizio 3. Considerando che il metodo di Newton utilizza la serie di Taylor al secondo ordine, se la funzione è quadratica un'iterazione è sufficiente per trovare la soluzione ottima. Il punto precedente è un esempio di funzione quadratica approssimata in un'iterazione.

3. Problem 3

Si vuole trovare il minimo globale della funzione

$$f(x) = 34 \exp^{\frac{1}{2}(\frac{x-88}{2})^2} + (\frac{x}{10} - 2sin(\frac{x}{10}))^2 \tag{17}$$

utilizzando ilsimulated annealing.
$f(x)$ ha diversi minimi locali dati dalla parte trigonometrica della funzione. Quindi nella ricerca del minimo globale sono stati utilizzati diversi intervalli iniziali, ognuno dei quali ha avuto al suo interno il minimo trovato ai passi precedenti.
Il risultato è che il minimo globale è nel punto $(0, 0)$, come mostrato in figura 2

```
> result <- GenSA(fn = f2, lower=c(-1100), upper=c(-100))
> result$par
[1] -100
> result$value
[1] 122.9447
> result <- GenSA(fn = f2, lower=c(-100), upper=c(0))
> result$par
[1] 0
> result$value
[1] 0
> result <- GenSA(fn = f2, lower=c(0), upper=c(100))
> result$par
[1] 0
> result$value
[1] 0
> result <- GenSA(fn = f2, lower=c(0), upper=c(1000))
> result$par
[1] 0
> result$value
[1] 0
> result <- GenSA(fn = f2, lower=c(-100), upper=c(100))
> result$par
[1] -1.543108e-14
> result$value
[1] 2.381182e-30
```

Figura 2. Minimi locali al variare dell'intervallo di ricerca