TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

PROF. DR. CHRISTIAN LIEDTKE

Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra)
MA9201
Prüfung im Anschluss an das WS 2017/18
am Montag, den 19. Februar 2018

Name: ____________ Vorname: ____________

Matrikelnummer: ____________ Semester: ____________

Studiengang: ______________________

Hörsaal: ________ Reihe: ________ Sitz: ________

UNTERSCHRIFT: ______________________

NOTE:

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

Korrektor:

NUR VON DER AUFSICHT AUSZUFÜLLEN:

Hörsaal verlassen von ________ bis ________ .

Vorzeitig abgegeben um ________ .

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt.
- Es sind **keinerlei weitere Hilfsmittel** (Skripten, Bücher, Rechner,...) erlaubt!
- Die Klausur hat 6 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie diese Angabe auf Vollständigkeit!
- Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen zunächst jeweils auf das Blatt mit der Aufgabe und benutzen Sie erst dann Zusatzblätter.
- Zum Bestehen der Klausur sind ca. **25 Punkte** erforderlich.
- Viel Erfolg!

Diese Klausurlösung wurde von Studierenden erstellt, die die Klausur selber geschrieben haben. Sie soll als Orientierung dienen und erhebt keinen Anspruch auf absolute Richtigkeit. Ak & FJ

Aufgabe 1 (9 Punkte). Richtig oder falsch. Geben Sie zu jeder Aussage an, ob diese richtig oder falsch ist. Eine Begründung ist nicht notwendig. Jede korrekte Antwort gibt 1 Punkt, nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte und jede inkorrekte Antwort gibt -1 Punkt. Insgesamt erhalten Sie auf diese Aufgabe jedoch mindestens 0 Punkte.

1. Sei $A \in M_2(\mathbb{Q})$ mit $A^2 = 0$. Dann gilt $A = 0$.
2. Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ Untervektorräume. Dann ist auch $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
3. Seien $A, B \in M_5(\mathbb{C})$. Dann gilt $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$.
4. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f^3 = 0$. Dann ist $\mathrm{id} + f$ ein Isomorphismus.
5. Sei $A \in M_5(\mathbb{R})$ diagonalisierbar. Dann gibt es eine eindeutige Diagonalmatrix $B \in M_5(\mathbb{R})$, sodass A zu B ähnlich ist.
6. Sei $A \in M_3(\mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = X^3 + 1$. Dann ist A invertierbar.
7. Sei $A \in M_4(\mathbb{Q})$ invertierbar. Dann gilt $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
8. Seien $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ symmetrische Matrizen. Dann ist auch AB eine symmetrische Matrix.
9. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ist positiv definit.

1) Falsch ① z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Falsch ① (Inverse nicht eindeutig)

3) Richtig ① Übungsblatt

4) Richtig ① (Übung) f nilpotent ⇒ f hat nur Eigenwert 0 ⇒ $\ker(f+id) = \{0\}$
(da $f(v)$ nie $-v$ ist, kann $(f+id)(v)$ niemals 0 sein, außer $v=0$)
⇒ $f+id$ injektiv ⇒ $f+id$ bijektiv ⇒ Isomorphismus

5) Falsch ① Jordanblöcke können vertauscht werden
Endomorphismus

6) Richtig ① $\chi_A(x) = \dots$ ⇒ Rang voll ⇒ invertierbar

7) Richtig ① (VL)

8) Falsch ① Gegenbeispiel $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{sym.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nicht sym.}}$

9) Falsch ① $\det(xI_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x+3 & -1 \\ -1 & x+2 \end{pmatrix} = x^2 + 5x + 5$
EW $x_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$
⇒ nicht positiv definit

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.** Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen in $M_3(\mathbb{Q})$ invertierbar sind, und berechnen Sie, falls möglich die Inversen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 11 & 9 & 7 \\ -6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A: $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 11 & 9 & 7 \\ -6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{\cdot(-1)}{} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix} \underset{\cdot 1,\ \cdot\frac{1}{2}}{} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 11 & 1 & 18 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\cdot(-3),\ \cdot\frac{1}{9}}{} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\cdot(-4)}{} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) < 3 \Rightarrow A$ nicht invertierbar 3

B: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{matrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{rg}(B) = 3$ voller Rang

$\Rightarrow B$ invertierbar

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \cdot(-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ 4

Aufgabe 3 (8 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & -1 & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie: es gilt

$$\det(A_n) = n + 1.$$

Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten! z.B. Vollst. Induktion, ...

Ein Beispiel:

3×3: $\det(A_3) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ ]\cdot\frac{1}{2} \\ \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ ]\cdot\frac{2}{3} \\ \end{matrix} =$

$\det(A_n)$ ändert sich unter Gauß-Umformungen vom Typ III nicht

$= \underbrace{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2 \cdot 2 = 4$

$\Rightarrow$ $n\times n$: ① Das $(-\frac{1}{2})$-fache der 1. auf die 2. Zeile addieren
$\Rightarrow (-1)$ auf der unteren Nebendiagonalen wird eliminiert
(auf der Diagonalen steht nun $\frac{3}{2}$)

② $(\frac{2}{3})$-fache der 2. auf die 3. Zeile addieren
$\Rightarrow (-1)$ wird auf der unteren Nebendiagonalen erneut eliminiert

③ Immer das $\frac{1}{n\text{-te}}$ der Diagonale auf die ~~n-te~~ $(n+1)$-te Zeile addieren $\Rightarrow$ Es entsteht eine obere Dreiecksmatrix mit $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$ auf der Diagonalen.

④ $\det(A_n) \underset{\text{obere Dreiecksmatrix}}{=} \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\boxed{n+1}}{\cancel{n}} = n+1$ bleibt übrig

8

Je nach Reihenfolge von v_1, v_2 & v_3 kann das Ergebnis abweichen

Aufgabe 4 (8 Punkte). Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\colon M_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (a_{ij})_{ij} &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

die Spurform. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\begin{aligned} \nu\colon M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \operatorname{tr}(AB^T) \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt definiert.

Sei U der von den Matrizen $\overset{=:v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$, $\overset{=:v_2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ und $\overset{=:v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ aufgespannte Unterraum von $M_2(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U bezüglich ν.

$v_3 =: u_1$; $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\|u_1\| = \sqrt{tr(u_1 \cdot u_1^T)} = \sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]} = \sqrt{tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$

$u_2 = v_1 - tr(w_1, v_1) \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - tr\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \underbrace{tr\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]}_{=0} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = v_1$

$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\|u_2\| = \|v_1\| = \sqrt{tr(v_1 \cdot v_1^T)} = \sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]} = \sqrt{tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}$

$u_3 = v_2 - tr(w_1, v_2) w_1 - tr(w_2, v_2) w_2 =$

$= v_2 - tr\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot w_1 - tr\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] w_2 =$

$= v_2 - \underbrace{tr\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=0} w_1 - tr\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] w_2 =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ 0 & 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 & 0 \\ 0 & -3/5 \end{pmatrix}$

$w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 6/5 & 0 \\ 0 & -3/5 \end{pmatrix}$

$\|u_3\| = \sqrt{tr(u_3 \cdot u_3^T)} = \sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 6/5 & 0 \\ 0 & -3/5 \end{pmatrix}^2\right]} = \sqrt{tr\begin{pmatrix} 36/25 & 0 \\ 0 & 9/25 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

w_1, w_2 & w_3 sind ONB von U

Aufgabe 5 (6 Punkte). Sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Weiterhin sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.
a) Zeigen Sie: falls $f \circ f = 0$, dann gilt $\dim \ker f \geq \frac{1}{2}\dim V$.
b) Gilt auch die Umkehrung von a)? Beweis oder Gegenbeispiel.

a) $f(f(v)) = 0 \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow \operatorname{im}(f) \subseteq \ker(f) \Rightarrow \dim \operatorname{im}(f) \leq \dim\ker(f)$

4

$\dim V = \dim\ker(f) + \dim \operatorname{im}(f)$

$\Rightarrow \dim V \leq \dim\ker(f) + \dim\ker(f) = 2 \dim\ker(f)$

$\Rightarrow \dim\ker(f) \geq \frac{1}{2}\dim V \quad \square$

b) Gegenbeispiel:

$V = \mathbb{R}^3, \quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2

$\dim\ker(f) = 2 \geq \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}\dim V$

aber $f\left(f\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square$

Aufgabe 6 (12 Punkte). Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A über $\mathbb{Q}$.
c) Berechnen Sie Basen der Eigenräume von A über $\mathbb{Q}$.
d) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Ist A trigonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Begründen Sie!

a) $\chi_A(x) = \det(x\cdot I_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x+2 & -4 & -1 \\ 1 & x-3 & -1 \\ 3 & -3 & x-2 \end{pmatrix} =$ (1)

$= (x+2)(x-3)(x-2) + 12 + 3 + 3(x-3) - 3(x+2) + 4(x-2) =$

$= (x-3)(x^2-4) + 15 + \cancel{3x} - 9 \cancel{-3x} - 6 + 4x - 8 =$

$= x^3 - 3x^2 \cancel{-4x} + 12 + \cancel{15} - \cancel{15} - 8 \cancel{+4x} = x^3 - 3x^2 + 4$ (2)

b) $x_1 = -1 \Rightarrow (x^3 - 3x^2 + 4) : (x+1) = x^2 - 4x + 4$ (1)

$-(x^3 + x^2)$
$-4x^2 + 4$
$-(-4x^2 - 4x)$
$4x + 4$
$-(4x+4)$
0

$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 4}}{2} = 2$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ (1)

c) $x_1 = -1$, $m_a(-1) = 1 \Rightarrow m_g(-1) = 1$

$(A - (-1)\cdot I_3)\cdot v = 0 \Rightarrow (A + I_3)\cdot v_1 = 0$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot v = 0$

Gauß
$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-4) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow -v_1 + v_3 = 0$, $v_2 = 0$ $\Rightarrow v_1 = v_3 =: t$ $\Rightarrow E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{Q} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (1)

$x_2 = 2$, $m_a(2) = 2$, $m_g(2) = 3 - rg(A - 2I_3) = 3 - rg\begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} = 3 - 2 = 1$

NR: $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) \cdot(-4) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$m_g(2) = \dim E_2 \Rightarrow 1$ Jordanblock

$(A - 2I_3)\cdot v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$ $\Rightarrow v_3 = 0$, $-v_1 + v_2 = 0$ $\Rightarrow v_1 = v_2 =: s$

$\Rightarrow E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{Q} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ (2)

d) $\chi_A(x)$ zerfällt über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren $\overset{VL}{\Rightarrow}$ A ist trigonalisierbar (1)

$m_a(2) \neq m_g(2) \underset{VL}{\Rightarrow}$ A nicht diagonalisierbar (2)

d) $\chi_A(x)$ zerfällt über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren $\overset{VL}{\Rightarrow}$ A ist triagonalisierbar 1

A nicht diagonalisierbar, da $m_a(2) \neq m_g(2)$ 2