Zentrum Mathematik	Technische Universität München

Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. H.-P. Kruse
Ferienblatt

Analysis 1 für Physik
WS 09/10

Analysis 1 für Physik
Ferienblatt

F1. Zeigen Sie, daß gilt

1) $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
2) $\frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3) \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

F2. Sei $\beta \in \mathbb{C}$ und

$$R(z) = \frac{z + \sqrt{2} + \beta}{z^3 - z + \sqrt{2}}$$

a) Für welche Werte von β ist dies *keine* gekürzte Darstellung?
b) Wie lauten die Nullstellen von $z^3 - z + \sqrt{2}$?

F3. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{a_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, daß $a_n \in [0, 3]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist.
c) Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

F4. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei a_n gegeben ist durch:

a) $2^{n+1} + (-1)^n 3^{n-1}$
b) $\sqrt[n]{2^{n+1}} + (-1)^n \sqrt[n]{3^{n-1}}$

F5. Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^k}{e^k}$$

konvergiert und berechnen Sie $|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^k}{e^k}|$.

F6. Untersuchen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^4}{(-2)^k}$$

konvergiert.

F7. a) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Zeigen Sie, daß dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)$ absolut konvergiert.

b) Untersuchen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{k+1}{k^3} \right)$$

absolut konvergiert, konvergiert bzw. divergiert.

F1

1) Beh: $1^2+2^2+\dots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+\dots+n^2$

Bew: (durch vollständige Induktion)

$n=2$: $\underbrace{1^2}_{1} < \underbrace{\frac{2^3}{3}}_{8/3} < \underbrace{1^2+2^2}_{5}$ ist erfüllt

$2,\dots,n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+\dots+n^2 &= 1^2+\dots+(n-1)^2+n^2 \\
&< \frac{n^3}{3}+n^2 \qquad \text{(nach Ind. Voraussetzung)} \\
&< \frac{1}{3}(n^3+3n^2+3n+1) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+1)^3}{3} &= \frac{1}{3}(n^3+3n^2+3n+1) \\
&= \frac{1}{3}n^3+n^2+n+\frac{1}{3} \\
&< \frac{1}{3}n^3+n^2+2n+1
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + (n+1)^2$$

$$< 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$$ (nach Ind. Voraus.)

Damit ist die Behauptung gezeigt.

2) <u>Beh:</u> $\frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3) \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Bew:</u> (durch vollständige Induktion)

<u>$n=1$</u> $\quad \frac{1}{6}(1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1) = 1 \in \mathbb{N}$

<u>$1,\ldots,n \to n+1$:</u> Es gelte also $\frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3) =: k \in \mathbb{N}$

Dann ist

$$\frac{1}{6}\left((n+1) + 3(n+1)^2 + 2(n+1)^3\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(n + 1 + 3n^2 + 6n + 3 + 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3) + \frac{1}{6}(6 + 12n + 6n^2)$$

$$= k + 1 + 2n + n^2 \in \mathbb{N}.$$ Damit folgt die Beh.

F2

a) $(z^3 - z + \sqrt{2}) : (z + \sqrt{2} + \beta) = z^2 - (\sqrt{2}+\beta)z + ((\sqrt{2}+\beta)^2 - 1) + R$

$$z^3 + (\sqrt{2}+\beta)z^2$$

$$-(\sqrt{2}+\beta)z^2 - z + \sqrt{2}$$

$$-(\sqrt{2}+\beta)z^2 - (\sqrt{2}+\beta)^2 z$$

$$((\sqrt{2}+\beta)^2 - 1)z + \sqrt{2}$$

$$((\sqrt{2}-\beta)^2 - 1)z + (\sqrt{2}+\beta)((\sqrt{2}+\beta)^2 - 1)$$

$$\sqrt{2} - (\sqrt{2}+\beta)((\sqrt{2}+\beta)^2 - 1) = R \text{ (Rest)}$$

Keine gekürzte Darstellung liegt also genau dann vor,

wenn β Nullstelle ist von $\sqrt{2} - (\sqrt{2}+\beta)((\sqrt{2}+\beta)^2 - 1)$

d.h.

$$0 = \sqrt{2} - (\sqrt{2}+\beta)(\beta^2 + 2\sqrt{2}\beta + 1)$$

$$= \sqrt{2} - (\beta^3 + 2\sqrt{2}\beta^2 + \beta + \sqrt{2}\beta^2 + 4\beta + \sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2} - (\beta^3 + 3\sqrt{2}\beta^2 + 5\beta + \sqrt{2})$$

$$= -\beta^3 - 3\sqrt{2}\beta^2 - 5\beta$$

$$= -\beta(\beta^2 + 3\sqrt{2}\beta + 5) \qquad (1)$$

F22

Eine Lösung von (1) ist $\beta_0 = 0$.

Die beiden übrigen sind

$$\beta_{1,2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{18-20}$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Keine gekürzte Darstellung liegt also genau dann vor, wenn

$$\beta \in \left\{0, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

b) $\alpha \in \mathbb{C}$ ist genau dann Nullstelle von $z^3 - z + \sqrt{2}$, wenn $z^3 - z + \sqrt{2}$ durch $(z-\alpha)$ teilbar ist.

Sei $\beta := -\alpha - \sqrt{2}$, d.h. $-\alpha = \beta + \sqrt{2}$

Dann ist α genau dann Nullstelle von $z^3 - z + \sqrt{2}$, wenn $z^3 - z + \sqrt{2}$ durch $(z + \sqrt{2} + \beta)$ teilbar ist, F2.3)

d.h. wenn $\frac{z+\sqrt{2}+\beta}{z^3-z+\sqrt{2}}$ keine gekürzte Darstellung ist.

Nach Teil a) ist das gleichbedeutend mit

$$\beta \in \left\{ 0, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Die Nullstellen von $z^3-z+\sqrt{2}$ sind also

$$\alpha_0 = -\beta_0 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\alpha_1 = -\beta_1 - \sqrt{2} = +\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_3 = -\beta_2 - \sqrt{2} = +\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

F3

a) Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion

$\underline{n=1}$: $\quad 0 \leq a_1 \leq 3$ ist für $a_1 = 1$ erfüllt

$\underline{1,..,n \to n+1}$: Da $a_n \geq 0$ ist $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ wohldef.

und es gilt $a_{n+1} \geq 0$. Außerdem gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \underset{*)}{\leq} \sqrt{3+1} = 2 \leq 3 \quad \text{(}^{*)}\text{nach Ind.-Vorauss.)}$$

Also ist $0 \leq a_{n+1} \leq 3$

↳ folgt $a_n \in [0,3] \ \forall n \in \mathbb{N}$

b) Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass

$a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad (*)$

$\underline{n=1}$ $\quad a_1 = 1 < \sqrt{1+1} = \sqrt{a_1 + 1} = a_2$

$\underline{1,..,n \to n+1}$ $\quad a_n \leq a_{n+1} \implies a_n + 1 \leq a_{n+1} + 1$

$$\implies \sqrt{a_n + 1} \leq \sqrt{a_{n+1} + 1} \underset{\text{Def.}}{\implies} a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Damit ist die Aussage $(*)$ gezeigt.

F3.2

c) Nach a) und b) ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt. Nach Vorlesung folgt daraus die Konvergenz der Folge.

Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann folgt aus

$$a_n + 1 = a_{n+1}^2$$

daß

$$\lim_{n\to\infty} a_n + 1 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2$$

d.h.

$$a + 1 = a^2$$

also

$$a \in \left\{ +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\ ,\ +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right\} \qquad (**)$$

Da $a_n \in [0,3]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt auch $\qquad (***)$

$$a \in [0,3]$$

Aus $(**)$ und $(***)$ folgt $a = +\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

F4

a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{2n+1} + 3^{2n-1}\right) = \infty$$

und

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{2n} - 3^{2n-2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3^{2n} \underbrace{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} - \frac{1}{9}\right)}_{\to -\frac{1}{9} \text{ für } n\to\infty}$$

$$= -\infty$$

Da jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ unendlich viele gerade oder unendlich viele ungerade Indizes n_k hat, hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also keine Häufungspunkte in $\mathbb{R}$.

Häufungspunkte in $\overline{\mathbb{R}}$ sind $-\infty$ und ∞

Es gilt also $\limsup a_n = \infty$ $\liminf a_n = -\infty$

F4.2

b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2^{2n+1}} + \sqrt[2n]{3^{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[2n]{2} + \lim_{n\to\infty} 3\sqrt[2n]{1/3}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} + 3\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1/3}$$

$$= 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \qquad \text{(nach Vorlesung)}$$

$$= 5$$

und

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[2n-1]{2^{2n-1+1}} - \sqrt[2n-1]{3^{2n-1-1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[2n-1]{2} - \lim_{n\to\infty} 3\sqrt[2n-1]{1/3}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{2} - 3\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{1/3}$$

$$= 2\cdot 1 - 3\cdot 1 \qquad \text{(nach Vorlesung)}$$

$$= -1$$

F4.3

5 und -1 sind also Häufungspunkte.

Nach dem Argument aus Teil a) gibt es keine weiteren HP.

5 ist größter HP, -1 ist kleinster HP, also fast

$5 = \limsup a_n$, $-1 = \liminf a_n$

F5 F5.1

Da $|i/e| = 1/e < 1$ gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^k}{e^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (i/e)^k - 1 - i/e$$

$$= \frac{1}{1-i/e} - 1 - i/e \quad \text{(geom. Reihe)}$$

$$= \frac{1-(1+i/e)(1-i/e)}{1-i/e}$$

$$= \frac{1-1-1/e^2}{1-i/e}$$

$$= -\frac{1}{e^2} \frac{1+i/e}{1+\frac{1}{e^2}}$$

$$= -\frac{1}{e^2+1} - i\frac{1}{e^3+e}$$

Es ist $\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^k}{e^k}\right| = \left|-\frac{1}{e^2} \frac{1+i/e}{1+1/e^2}\right|$

$$= \frac{1}{e^2(1+1/e^2)} |1+i/e| = \frac{1}{e^2(1+1/e^2)} \sqrt{1+1/e^2}$$

$$= \frac{1}{e^2\sqrt{1+1/e^2}}$$

F6

Beh: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(2k+1)^4}{(-2)^k}}_{=:a_k}$ konvergiert

Bew:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(2k+3)^4}{2^{k+1}} \, \frac{2^k}{(2k+1)^4}$$

$$= \left(\frac{2+3/k}{2+1/k}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

Nach dem Quotientenkriterium folgt also die Behauptung.

F7

a) Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|a_k - b_k| \leq \underbrace{|a_k| + |b_k|}_{c_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ nach Voraussetzung konvergieren,

konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Aus (1) und dem Majorantenkriterium folgt, daß

auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|$ konvergiert, d.h. die

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ konvergiert absolut.

b) Wir zeigen, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{k+1}{k^3} \right)$ (2)

konvergiert, aber nicht absolut konvergiert:

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konv.

nach Vorlesung.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert nach Z2 von BlattS.

Da $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^2}$ konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ nach

dem Majorantenkriterium

Also konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{k+1}{k^3} \right)}_{=: a_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

und auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k+1}{k^3}}_{=: b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert sogar absolut, da

$b_k > 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Würde auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergieren, dann

auch nach Teil a)

$$\sum (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Diese Reihe konv. aber nicht abs., da die harmonische

Reihe nach Vorl. divergiert.

Also ist die Reihe (2) konv., aber nicht abs. konv.