$\boxed{1}$

$$U(r) = -\frac{G m M_{MBM}}{r} = -\frac{k}{r}$$ Potential für Bewegung eines Sterns der Masse m im Gravitationsfeld der Masse M_{MBM}

a) Erhaltungsgrößen: Energie E und Drehimpuls $\vec{l}$

Energie $E = T + V$

Separation der Schwerpunktsbewegung erfordert reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m M_{MBM}}{m + M_{MBM}} = \frac{m M_{MBM}}{M} \qquad M = m + M_{MBM}$$

$\vec{r}$ Ortsvektor der Relativbewegung $\qquad \vec{r} = r\vec{e}_r$ in Polarkoordinaten.

$$T = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \quad \text{da } \vec{e}_r\cdot\vec{e}_r = 1, \ \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi = 0, \ \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\varphi = 0$$

Bahndrehimpuls:

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = r\vec{e}_r \times (\mu\dot{\vec{r}}) = r\vec{e}_r \times (\mu\dot{r}\vec{e}_r + \mu r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) =$$

$$= \mu r\dot{r}\underbrace{(\vec{e}_r\times\vec{e}_r)}_{=0} + \mu r^2\dot{\varphi}\underbrace{(\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi)}_{=\vec{e}_z} \qquad \begin{matrix}\vec{e}_z \perp \vec{e}_r \\ \vec{e}_z \perp \vec{e}_\varphi\end{matrix}$$

$$= \mu r^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

ebene Polarkoordinaten: nur r und φ werden benötigt, da die Bewegung aufgrund der Drehimpulserhaltung immer in einer Ebene $\perp \vec{e}_z$ abläuft ($\vec{r} \perp \vec{e}_z$ und $\dot{\vec{r}} \perp \vec{e}_z$, also bewegt sich die Masse μ nie aus der Ebene heraus, auf der der Drehimpulsvektor senkrecht steht)

b) Drehimpulserhaltung: $\frac{d}{dt}(\vec{l}) = 0$

Bewegungsgleichungen:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\vec{\nabla} U(r) = -\Big(+\frac{k}{r^2} \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{=\vec{e}_r}\Big) = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{l}) = \frac{d}{dt}(\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu\Big[\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\Big]$$

$= 0$ da $\dot{\vec{r}} \parallel \dot{\vec{r}}$ und dann das Kreuzprodukt verschwindet

$$= \vec{r} \times (\mu \ddot{\vec{r}}) \overset{\text{Bewegungsgl.}}{=} \vec{r} \times \Big(-\frac{k}{r^3}\vec{r}\Big) = -\frac{k}{r^3}(\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0}) = 0$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{l} = 0$, d.h. der Drehimpuls ist nach Betrag und Richtung erhalten.

c) Energieerhaltung: $\frac{d}{dt}(E) = 0$

Bewegungsgleichung:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U(r) = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} U(r)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{\vec{r}}^2) = 2\mu \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \qquad \frac{d}{dt} U(r) = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} U(r)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2\Big) = \frac{d}{dt}(-U(r))$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r)\Big) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}E = 0$, d.h. Energie ist erhalten!

d) Bahnparametrisierung $r(\varphi)$

Erhaltungsgrößen: $l = |\vec{l}| = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\varphi}^2 + U(r)$$

$$= \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{r}$$

$$\frac{d}{dt} r(\varphi) = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Drehimpulserhaltung}}}{=} \frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2}$$

Drehimpulserhaltung zur Elimination von $\dot{\varphi}$ in E:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \left(\frac{l}{\mu r^2}\right)^2 - \frac{k}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

Auflösen nach $\dot{r}$:

$$E - \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu}E + \frac{2}{\mu}\frac{k}{r} - \frac{l^2}{r^2} = \frac{2}{\mu}\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = \pm\left(\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2} = \pm\left[\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$1 = \pm \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{\mu r^2} \left[\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{k}{r} \right) - \frac{l^2}{r^2} \right]^{-1/2}$$

Integration beide Seiten nach $\int d\varphi$ (Trennung der Variablen)

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' \frac{dr'}{d\varphi'} \frac{l}{\mu r'^2} \left[\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{k}{r} \right) - \frac{l^2}{r^2} \right]^{-1/2}$$

$$= \int_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)} dr' \frac{l}{\mu r'^2} \left[\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{k}{r'} \right) - \frac{l^2}{r'^2} \right]^{-1/2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{l}{\mu r'^2} \left[\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{k}{r'} \right) - \frac{l^2}{r'^2} \right]^{-1/2}$$

e) Ausführen der Integration und Bestimmung der Bahnparameter

$$x = \frac{1}{r'} \qquad \frac{dx}{dr'} = -\frac{1}{r'^2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} dr' \left(-\frac{dx}{dr'} \right) l \left[2\mu (E + kx) - l^2 x^2 \right]^{-1/2}$$

$$= -\int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} dx\, l \left[2\mu E + 2\mu k x - l^2 x^2 \right]^{-1/2} =$$

$$= -\int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} dx \left[\frac{2\mu E}{l^2} + 2\frac{\mu k}{l^2} x - x^2 \right]^{-1/2} =$$

$$= -\int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} dx \left[\frac{2\mu E}{l^2} + \left(\frac{\mu k}{l^2} \right)^2 - \left(\frac{\mu k}{l^2} \right)^2 + 2\frac{\mu k}{l} x - x^2 \right]^{-1/2}$$

$$= -\int_{\frac{1}{r_0}}^{\frac{1}{r}} dx \left[\left(\frac{\mu k}{l^2} \right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2} \right) - \left(x - \frac{\mu k}{l} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}} dx \left[\left(\frac{\mu k}{\ell^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}\right) - \left(x - \frac{\mu k}{\ell}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$= \int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}} dx \left[\frac{1}{p^2}\varepsilon^2 - \left(x - \frac{1}{p}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{x - \frac{1}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}} \right) \right]_{\frac{1}{r(\varphi)}}^{\frac{1}{r_0}}$$

$$= \underbrace{- \arccos\left(\frac{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}} \right)}_{\text{eine Konstante}} + \arccos\left(\frac{\frac{p}{r(\varphi)} - 1}{\varepsilon} \right)$$

$$\varphi - \underbrace{\left(\varphi_0 - \arccos\left(\frac{\frac{p}{r_0} - 1}{\varepsilon} \right)\right)}_{= \tilde{\varphi}_0} = \arccos\left(\frac{\frac{p}{r(\varphi)} - 1}{\varepsilon} \right)$$

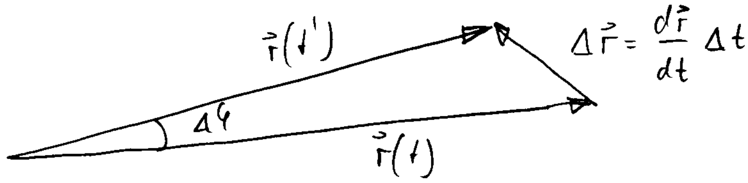
Auflösen nach $r(\varphi)$

$$\varepsilon \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0) = \frac{p}{r(\varphi)} - 1$$

$$1 + \varepsilon \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0) = \frac{p}{r(\varphi)} \Rightarrow \boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)}}$$

$$p = \frac{\ell^2}{\mu k} \checkmark \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}} \checkmark$$

f) Zweites Kepler'sches Gesetz



$$\Delta \vec r = \vec r(t') - \vec r(t)$$

Fläche des Dreiecks, das von $r(t)$ zwischen der Zeit t und $t' = t + \Delta t$ überstrichen wird:

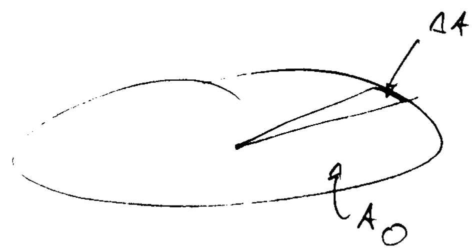
$$\Delta A = \frac{1}{2}\left|\vec r(t) \times \vec r(t')\right| = \frac{1}{2}\left|\vec r(t) \times \Delta\vec r(t)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\vec r(t) \times \dot{\vec r}(t)\,\Delta t\right| = \frac{1}{2}\left|\vec r(t) \times \dot{\vec r}(t)\right| \Delta t$$

Erinnerung: $\vec l = \mu\, \vec r \times \dot{\vec r} \Rightarrow \frac{l}{\mu} = \frac{|\vec l|}{\mu} = |\vec r \times \dot{\vec r}|$

$$\boxed{\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{l}{2\mu}}$$

$\Rightarrow$ Änderungsrate wird durch den Betrag des Drehimpulses l (und die reduzierte Masse μ) bestimmt.



$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$$

Integration über eine volle Periode

$$\int_0^T dA = \int_0^T \frac{l}{2\mu} = \frac{l}{2\mu} T = \pi a b = \pi \frac{p}{1-\varepsilon^2} \frac{p}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} = \pi \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$p = \frac{l^2}{\mu k} \qquad p^2 = \frac{l^4}{\mu^2 k^2} \qquad 1-\varepsilon^2 = \frac{2El^2}{\mu k^2}$$

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{l^2}{\mu k}\frac{\mu k^2}{2El^2} = \frac{k}{2E}$$

$$b = \frac{p}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} = \frac{l^2}{\mu k}\frac{\sqrt{\mu k^2}}{\sqrt{2El^2}} = \frac{l}{\sqrt{\mu}}\frac{1}{\sqrt{2E}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu E}}$$

$$A = \pi a b = \pi \frac{k}{2E}\frac{l}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{l}{2\mu} T$$

$$\Rightarrow T = \frac{\cancel{2}\mu}{l}\pi \frac{k}{\cancel{2}E}\frac{l}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{\pi\sqrt{\mu}\,k}{\sqrt{2}\,E^{3/2}} = \frac{\pi k \mu}{E\sqrt{2\mu E}}$$

g) Drittes Kepler'sches Gesetz

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^3}{(2E)^3} \frac{\left(E\sqrt{2\mu E}\right)^2}{(\pi k \mu)^2} = \frac{k^3}{8E^3} \frac{E^3 2\mu}{\pi^2 k^2 \mu^2} = \frac{k}{4\pi^2} \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2} \frac{1}{\mu} = \frac{G m M_{MBH}}{4\pi^2} \frac{M_{MBH} + m}{m M_{BH}} = \frac{G}{4\pi^2} (M_{MBH} + m)$$

$$= \frac{G}{4\pi^2} M_{MBH} \left(1 + \frac{m}{M_{MBH}}\right) \simeq \frac{G}{4\pi^2} M_{MBH}$$

$\Rightarrow$ in dieser Näherung ist das Ergebnis unabhängig von der Masse m des den Zentralkörper umkreisenden Sterns

h) Bahnbewegung des Sterns S2

$a \simeq 1.5 \cdot 10^{14}\,m \simeq 4.8 \cdot 10^{-3}$ parsec

$T \simeq 15$ Jahre

$\frac{G}{4\pi^2} \simeq 1.7 \cdot 10^{12}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$

$\simeq 1.1 \cdot 10^{16}$ parsec$^3 M_\odot^{-1} a^{-2}$

$\frac{4\pi^2}{G} \simeq 5.9 \cdot 10^{11}\, m^{-3} kg\, s^2$

$\simeq 8.8 \cdot 10^{15}$ parsec$^{-3} M_\odot a^2$

$M_{MBH} \simeq \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2}$ $\qquad T^2 = (15\,a)^2 = 225\,a^2$

$a = 4.8 \cdot 10^{-3}$ parsec

$$\begin{array}{r} 4.8 \times 4.8 \\ \hline 192 \\ 384 \\ \hline 23.04 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23.04 \times 4.8 \\ \hline 9216 \\ 18432 \\ \hline 110.592 \end{array} \simeq 110$$

$a^3 \simeq 110 \cdot 10^{-9}$ parsec$^3 \simeq 1.1 \cdot 10^{-7}$ parsec^3

$\simeq 1100 \cdot 10^{-10}$ parsec^3

$\frac{a^3}{T^2}$ $\quad 1100 : 225 = 4.888\ldots$

$$\begin{array}{r} 900 \\ \hline 2000 \\ 1800 \\ \hline 2000 \end{array}$$

$\simeq 4.9$

$\frac{a^3}{T^2} \simeq 4.9 \cdot 10^{-10}$ parsec$^3\, a^{-2}$

$$M_{MBH} = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{a^3}{T^2} \simeq 8.8 \cdot 10^{15}\,\text{parsec}^{-3}\, M_\odot\, a^2 \cdot 4.9 \cdot 10^{-10}\,\text{parsec}^3\, a^{-2}$$

$$\simeq 8.8 \times 4.9 \cdot 10^5\, M_\odot \simeq 43 \cdot 10^5\, M_\odot \simeq 4.3 \cdot 10^6\, M_\odot$$

$$\begin{array}{r} 352 \\ 792 \\ \hline 43{,}12 \end{array}$$

⇨ Das Objekt im galaktischen Zentrum der Milchstraße hat demnach aufgrund der Bahnmessung am Stern S2 eine Masse von $M_{MBM} \simeq 4.3 \cdot 10^6\, M_\odot$, d.h. etwas mehr als 4 Millionen mal die Sonnenmasse

⇝ es dürfte sich daher um ein sehr massives Schwarzes Loch handeln (MBH – Massive Black Hole)

$\boxed{2}$ Geladenes Teilchen

Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

a) Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \qquad m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q\left[\begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= q\left[\begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{y}B_0 \\ -\dot{x}B_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B_0$$
$$m\ddot{y} = qE_0 - q\dot{x}B_0$$
$$m\ddot{z} = 0$$

b) Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ddot{x}(0) = \frac{q}{m} 0 B_0 = 0$ → keine Beschleunigung in x-Richtung.

$\ddot{y}(0) = \frac{q}{m}(E_0 - v_0 B_0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow v_0 = \frac{E_0}{B_0}$ → keine Beschleunigung in y-Richtung für <u>diese</u> Wahl von v_0

$\ddot{z}(0) = 0$ immer erfüllt.

c) Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$m\ddot{z} = 0 \xrightarrow[\text{Integration}]{} \dot{z}(t) = \dot{z}(0) = \text{const} = 0$$

$$z(t) = z(0) = \text{const.} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{z}(t) \equiv 0 \\ z(t) \equiv 0 \end{array}\right\} \text{ Lösung für } z\text{-Richtung.}$$

$$\text{①} \quad \ddot{x} = \frac{q}{m} B_0 \dot{y}$$

$$\text{②} \quad \ddot{y} = -\frac{q}{m} B_0 \dot{x} + \frac{q}{m} E_0$$

einfache Integration der Gleichung ①

$$\dot{x}(t) = \frac{q}{m} B_0 y(t) + C_1$$

Bestimmung der Konstanten aus den Anfangsbed.:

$$\dot{x}(0) = v_0 = \frac{q}{m} B_0 \underbrace{y(0)}_{=0} + C_1 = C_1$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{q}{m} B_0 y(t) + v_0$$

Einsetzen in ②:

$$\ddot{y}(t) + \frac{q}{m} B_0 \dot{x}(t) - \frac{q}{m} E_0 = 0$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{q}{m} B_0 \left(\frac{q}{m} B_0 y(t) + v_0 \right) - \frac{q}{m} E_0 = 0$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{q}{m} B_0 \right)^2 y + \frac{q}{m} (v_0 B_0 - E_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = C \qquad \omega^2 = \left(\frac{q}{m} B_0 \right)^2$$

$$C = \frac{q}{m} (E_0 - v_0 B_0)$$

Ansatz $y = u + \frac{C}{\omega^2}$

$$\dot{y} = \dot{u}$$
$$\ddot{y} = \ddot{u} \qquad \ddot{u} + \omega^2 \left(u + \frac{C}{\omega^2} \right) = C$$

$$\ddot{u} + \omega^2 u + C = C \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

Lösung für Dgl $u(t) = D e^{i\omega t} + D^* e^{-i\omega t}$

$$= A \cos\omega t + B \sin\omega t$$

$$\dot{u}(t) = -\omega A \sin\omega t + \omega B \cos\omega t$$
$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 A \cos\omega t - \omega^2 B \sin\omega t$$

Anpassung an Anfangsbedingungen:

$$\dot{y}(0) = \dot{u}(0) = \omega B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$
$$y(0) = u(0) + \frac{C}{\omega^2} = A + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{q}{m}(E_0 - v_0 B)\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$A = -\frac{1}{\omega^2}\frac{q}{m}E_0 + \frac{1}{\omega^2}\underbrace{\left(\frac{q}{m}B_0\right)}_{=\omega} v_0$$

$$= -\frac{1}{\omega^2}\frac{q}{m}E_0 + \frac{v_0}{\omega}$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{1}{\omega}\frac{q}{m}E_0\right)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\left(\frac{E_0}{B_0} - v_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{m}{q}\frac{1}{B_0}\frac{q}{m}E_0\right)(\cos\omega t - 1) = \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)(\cos\omega t - 1)$$

$$\dot{x}(t) = v_0 + \frac{q}{m}B_0 y(t) = v_0 + \omega\frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)(\cos\omega t - 1)$$

$$= v_0 + \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\cos\omega t - v_0 + \frac{E_0}{B_0} = \frac{E_0}{B_0} + \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\cos\omega t$$

Integration:

$$x(t) = \frac{E_0}{B_0}t + \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\frac{1}{\omega}\sin\omega t + C_2$$

Anpassen an Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 + 0 + C_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{E_0}{B_0}t + \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\sin\omega t$$

$z(t) \equiv 0$ schon vorher gelöst.

d) Bahnkurve für Anfangsbedingung $v_0 = 0$

$$z(t) \equiv 0$$

$$x(t) = \frac{E_0}{B_0} t + \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \sin \omega t$$

$$= \frac{E_0}{B_0} t - \frac{1}{\omega}\frac{E_0}{B_0} \sin \omega t = \frac{E_0}{B_0}\left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)(\cos \omega t - 1) = \frac{1}{\omega}\frac{E_0}{B_0}(1 - \cos \omega t)$$

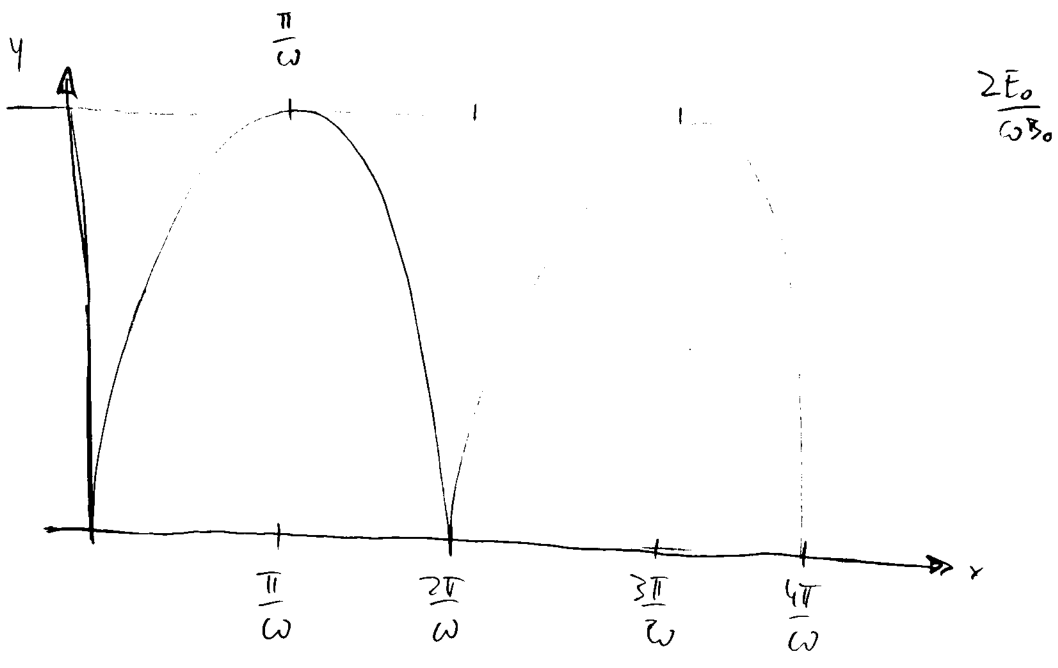
überprüfe, dass Anfangsbedingungen erfüllt sind!

$$x(0) = 0 \quad ✓$$

$$\dot{x}(0) = \frac{E_0}{B_0} - \frac{E_0}{B_0} \cos(0) = 0 \quad ✓$$

$$y(0) = \frac{1}{\omega}\frac{E_0}{B_0}(1 - \cos(0)) = 0 \quad ✓$$

$$\dot{y}(0) = \frac{1}{\omega}\frac{E_0}{B_0}\, \omega\left(\sin(\omega 0)\right) = 0 \quad ✓$$



Zykloide (Bahn eines Punktes auf dem Umfang eines abrollenden Kreises)

$\boxed{3}$ Mit Federn verbundene Massenpunkte

a) Lagrangefunktion

Koordinaten der Massen

$$q_1 = x_1 \qquad \dot{q}_1 = \dot{x}_1$$

$$q_2 = x_2 - l_1 \qquad \dot{q}_2 = \dot{x}_2$$

$$q_3 = x_3 - (l_2 + l_1) \qquad \dot{q}_3 = \dot{x}_3 \qquad \text{da } \dot{l}_1 = \dot{l}_2 = 0$$

kinetische Energie

$$T_i = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 \qquad T = \sum_{i=1}^{3} T_i = \frac{1}{2} m \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 \right)$$

potentielle Energie: Auslenkung der Federn aus der Ruhelage ist entscheidend

Feder 1: $$V_1 = \frac{1}{2} k_1 (\underbrace{x_2 - x_1 - l_1}_{=\Delta_{12}})^2 = \frac{1}{2} k_1 \Delta_{12}^2$$

$$= \frac{1}{2} k_1 (q_2 - q_1)^2$$

Feder 2 $$V_2 = \frac{1}{2} k_2 (x_3 - x_2 - l_2)^2 = \frac{1}{2} k_2 \Delta_{23}^2$$

$$= \frac{1}{2} k_2 \left(x_3 - l_2 - l_1 - (x_2 - l_1) \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} k_2 (q_3 - q_2)^2$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} k_1 (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_3 - q_2)^2$$

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2} k_1 (q_2 - q_1)^2 - \frac{1}{2} k_2 (q_3 - q_2)^2$$

b) Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{Euler-Lagrange-Gl.}$$

$$① \quad m\ddot{q}_1 + k_1(q_2 - q_1)(-1) = 0$$

$$② \quad m\ddot{q}_2 + k_1(q_2 - q_1) + k_2(q_3 - q_2)(-1) = 0$$

$$③ \quad m\ddot{q}_3 + k_2(q_3 - q_2) = 0$$

$$m\ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_1 q_2 = 0$$
$$m\ddot{q}_2 - k_1 q_1 + (k_1 + k_2) q_2 - k_2 q_3 = 0$$
$$m\ddot{q}_3 - k_2 q_2 + k_2 q_3 = 0$$

c) Eigenfrequenzen des Systems?

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{Ansatz: } \vec{q}(t) = \vec{a}\, e^{i\omega t}, \quad \ddot{\vec{q}}(t) = -\omega^2 \vec{a}\, e^{i\omega t}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{\vec{q}}(t) + \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \vec{q}(t) = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 - m\omega^2 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) - m\omega^2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 - m\omega^2 \end{pmatrix} \vec{a}\, e^{i\omega t} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ kann nur eine nicht-triviale $(\vec{a} \neq \vec{0})$ Lösung haben, wenn der Kern der von der Matrix repräsentierten Abb. nicht $\emptyset$ ist, daher muß die Determinante der Matrix verschwinden -> ω^2 entsprechend bestimmen!

Berechnen der Determinante

$\lambda = m\omega^2$

$$(k_1 - m\omega^2)\left((k_1+k_2) - m\omega^2\right)(k_2 - m\omega^2)$$

$$-(-k_2)^2(k_1 - m\omega^2) - (-k_1)^2(k_2 - m\omega^2) =$$

$$= (k_1-\lambda)(k_1+k_2-\lambda)(k_2-\lambda) - k_2^2(k_1-\lambda) - k_1^2(k_2-\lambda) =$$

$$= [k_1(k_1+k_2) - \lambda(2k_1+k_2) + \lambda^2](k_2-\lambda) - k_2^2 k_1 + k_2^2\lambda - k_1^2 k_2 + k_1^2\lambda$$

$$= k_1^2 k_2 + k_1 k_2^2 - 2\lambda k_1 k_2 - \lambda k_2^2 + \lambda^2 k_2 - k_1^2\lambda - k_1 k_2\lambda + 2k_1\lambda^2 + k_2\lambda^2$$
$$-\lambda^3 - k_2^2 k_1 + k_2^2\lambda - k_1^2 k_2 + k_1^2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(2k_1+2k_2) - 3k_1k_2\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - 2(k_1+k_2)\lambda + 3k_1k_2\right) \overset{!}{=} 0$$

$\lambda_3 = 0$ ist eine Lösung

$$\lambda^2 - 2(k_1+k_2)\lambda + 3k_1k_2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = (k_1+k_2) \pm \left((k_1+k_2)^2 - 3k_1k_2\right)^{1/2}$$
$$= (k_1+k_2) \pm \left(k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 - 3k_1k_2\right)^{1/2}$$
$$= k_1+k_2 \pm \left(k_1^2 - k_1k_2 + k_2^2\right)^{1/2}$$
$$= k_1+k_2 \pm \left(k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2 + k_1k_2\right)^{1/2}$$
$$= k_1+k_2 \pm \left((k_1-k_2)^2 + k_1k_2\right)^{1/2}$$

sind die beiden anderen Lösungen

zurückübersetzen in Frequenzen ($\lambda = m\omega^2$)

$\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$ $\qquad \omega_3^2 = 0 \qquad \omega_3 = 0$

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \left(\left(\frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m}\right)^2 + \frac{k_1k_2}{m^2}\right)^{1/2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} - \left(\left(\frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m}\right)^2 + \frac{k_1k_2}{m^2}\right)^{1/2}$$

d) Normalkoordinaten zu Eigenfrequenz $\omega = 0$

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Gleichungssystem

(1) $k_1 a_1 - k_1 a_2 = 0$

(2) $-k_1 a_1 + (k_1+k_2) a_2 - k_2 a_3 = 0$

(3) $-k_2 a_2 + k_2 a_3 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow a_1 = a_2 \\ (3) \rightarrow a_2 = a_3 \end{array}\right\} \text{ in } (2) \quad -k_1 a_1 + (k_1+k_2) a_1 - k_2 a_1 = 0 \ \checkmark$$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3$ $\qquad \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Normierung

$\rightarrow$ beschreibt eine Translationsbewegung des Systems.

Erhaltungsgröße: Schwerpunktsimpuls (Gesamtimpuls) in x-Richtung.

Erhaltung folgt aus Translationsinvarianz des Systems in x-Richtung (Invarianz unter $x_i \rightarrow x_i + b$ für alle i)

e) Normalkoordinaten für $k_2 \ll k_1$

Def: $\epsilon = \frac{k_2}{k_1} \ll 1$ $\qquad (1+x)^n = 1 + nx + \dots$

Entwicklung der Eigenfrequenzen für diesen Fall

$\omega_3 = 0$ unverändert

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \left(\left(\frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m} \right)^2 + \frac{k_1 k_2}{m^2} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{m} \left(k_1 + k_2 + \left((k_1 - k_2)^2 + k_1 k_2 \right)^{1/2} \right)$$

$$= \frac{1}{m} k_1 \left(1 + \frac{k_2}{k_1} + \left(\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)^2 + \frac{k_2}{k_1} \right)^{1/2} \right)$$

$$= \frac{k_1}{m} \left(1 + \epsilon + \left((1-\epsilon)^2 + \epsilon \right)^{1/2} \right)$$

$$= \frac{k_1}{m} \left(1 + \epsilon + \left(1 - 2\epsilon + O(\epsilon^2) + \epsilon \right)^{1/2} \right)$$

$$= \frac{k_1}{m} \left(1 + \epsilon + \left(1 - \epsilon + O(\epsilon^2) \right)^{1/2} \right)$$

$$= \frac{k_1}{m} \left(1 + \epsilon + \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2) \right) \right)$$

$$= \frac{k_1}{m} \left(1 + \epsilon + 1 - \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2) \right)$$

$$= \frac{k_1}{m} \left(2 + \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2) \right)$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_1}{m} \left(1 + \epsilon - \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2) \right) \right)$$

$$= \frac{k_1}{m} \left(1 + \epsilon - 1 + \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2) \right)$$

$$= \frac{k_1}{m} \left(\frac{3}{2}\epsilon + O(\epsilon^2) \right)$$

ω_1^2:

$$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+\epsilon & -\epsilon \\ & -\epsilon & \epsilon \end{pmatrix}$$

Normalkoordinate zu Eigenfrequenz $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}\left(2 + \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2)\right)$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1-(2+\frac{1}{2}\epsilon+O(\epsilon^2)) & -1 & 0 \\ -1 & 1+\epsilon-(2+\frac{1}{2}\epsilon+\ldots) & -\epsilon \\ & -\epsilon & \epsilon-(2+\frac{1}{2}\epsilon+\ldots) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} -1-\frac{1}{2}\epsilon+\ldots & -1 & 0 \\ -1 & -1+\frac{3}{2}\epsilon+\ldots & -\epsilon \\ & -\epsilon & -2+\frac{1}{2}\epsilon+\ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Gleichungssystem

① $(1+\frac{1}{2}\epsilon+\ldots)a_1 + a_2 = 0$

② $a_1 + (1-\frac{3}{2}\epsilon+\ldots)a_2 + \epsilon a_3 = 0$

③ $-\epsilon a_2 + (-2+\frac{1}{2}\epsilon+\ldots)a_3 = 0$

③: $a_3 = \dfrac{\epsilon}{(-2+\frac{1}{2}\epsilon+\ldots)} a_2 = \left(\frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2)\right) a_2$

②: $a_1 + (1-\frac{3}{2}\epsilon+\ldots)a_2 + O(\epsilon^2) = 0$

①: $(1+\frac{1}{2}\epsilon+\ldots)a_1 + a_2 = 0$

$\mathcal{O}(\epsilon^0)$

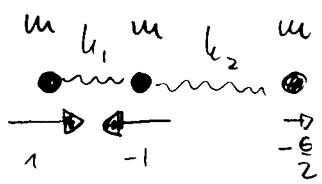
$$\left.\begin{array}{lll} ① & a_1 + a_2 & = 0 \\ ② & a_1 + a_2 & = 0 \end{array}\right\} \quad a_1 = -a_2$$

$a_3 = \mathcal{O}(\epsilon) \qquad a_3 = -\frac{\epsilon}{2} a_2$

führende Ordnung:

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \mathcal{O}(\epsilon) \end{pmatrix}$$

Skizze



ω_2^2:

$$k_1 \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}\epsilon+\dots & -1 & 0 \\ -1 & 1+\epsilon-\frac{3}{2}\epsilon+\dots & -\epsilon \\ 0 & -\epsilon & \epsilon-\frac{3}{2}\epsilon+\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Gleichungssystem:

① $\left(1-\frac{3}{2}\epsilon+\dots\right) a_1 - a_2 = 0$

② $-a_1 + \left(1-\frac{\epsilon}{2}+\dots\right) a_2 - \epsilon a_3 = 0$

③ $-\epsilon a_2 \quad \left(-\frac{\epsilon}{2}+\dots\right) a_3 = 0$

③: $-a_2 - \frac{1}{2} a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} a_3 \Leftrightarrow a_3 = -2a_2$

②: $-a_1 + a_2 + \mathcal{O}(\epsilon) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$

①: $a_1 - a_2 + \mathcal{O}(\epsilon) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$ ✓ konsistent.

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Skizze