Aufgabe 1 (8 Punkte)

$$y'y\,(x^3+3x+2) = 1 \;,\; y\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \sqrt{\ln 2}\,.$$

Trennung der Variablen

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\sqrt{\ln 2}}^{y} = \int_{\sqrt{\ln 2}}^{y} t\,dt \overset{(1)}{=} \int_{-3/2}^{x} \frac{1\cdot dt}{t^2+3t+2} = I$$

(1)

I mittels PBZ $\quad t^2+3t+2 = (t+1)(t+2)\,,\quad \dfrac{1}{t^2+3t+2} = \dfrac{A}{t+1} + \dfrac{B}{t+2}$

$\Rightarrow (A+B)t + B + 2A = 1 \Rightarrow A+B = 0\,,\; 2A+B = 1 \Rightarrow A = 1,$ (1)

$B = -1.$

$$\Rightarrow I = \int_{-3/2}^{x} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \left[\ln\frac{|t+1|}{|t+2|}\right]_{-3/2}^{x} = \ln\frac{|x+1|}{|x+2|} - 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow y^2 = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + \ln 2 = \ln\left(2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\right)$$

Da $y\left(-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\ln 2} > 0 \Rightarrow y = \sqrt{\ln\left(2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right)^2}$. (1)

Damit für $x \in \mathbb{R}$ die Lösung existiert muß gelten

$$\ln\left(2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\right) \overset{(1)}{\geq} 0 \iff 2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 \geq 1 \iff 2x^2+4x+2 \geq x^2+4x+4$$

$\iff x^2 \geq 2 \iff |x| \leq -\sqrt{2}$ oder $|x| \geq \sqrt{2}$. (1) Wegen der Singularität bei -2 ist also das größte Intervall, ~~zu~~, auf dem die Lösung existiert, $]-2, -\sqrt{2}]$ (1) $\quad \left(-\frac{3}{2} \in\,]-2, -\sqrt{2}]\right)$.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Gegeben $\quad y'(t) + f(t)\,y(t) = g(t) \quad , t \in \mathbb{R} \quad (*)$

a) Seien y_1, y_2 Lsg. von $(*)$, $y_1 \neq y_2$.

$0 \neq y_1 - y_2$ Lsg. von $y' + fy = 0$ (1)

$L = \{\lambda y_1 - \lambda y_2 + y_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ (1)

b) (i) ist falsch: $f(t) := -1$, $g(t) := 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. $u_1(t) = e^t = u_2(t)$ sind dann Lösungen, $(u_1 u_2)(t) = e^{2t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, also $(u_1 u_2)'(t) = 2e^{2t} \neq e^{2t}$ f.a. $t \in \mathbb{R}$

1 für die Angabe eines Beispiels

1 " ausreichende Begründung.

(ii) Einsetzen: 1

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben $y' = (x+y-1)^2$, $y(0) = 2$.

Setze $u(x) \overset{1}{:=} x + y(x) - 1 \implies u'(x) = 1 + y'(x)$, $u(0) = 1$.

$\Rightarrow u'(x) - 1 = u(x)^2 \iff u'(x) = 1 + u^2(x)$. 1

Trennung der Variablen:

$$\arctan u - \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} = \int_1^u \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x dx = x \quad 1$$

$\Rightarrow u = \tan(x + \frac{\pi}{4}) \implies y(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4}) - x + 1$. 1

Da der Anfangswert 0 ist ~~muss~~ und tan auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ definiert ist, muss gelten $|x + \frac{\pi}{4}| < \frac{\pi}{2}$ f.a. x aus dem Lösungsintervall, d.h. $x \in]-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi[$.

1

Aufgabe 4 (10 Punkte)

1. Lösungsmenge der homogenen Gleichung bestimmen:

Charakteristisches Polynom $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 5 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ 1

$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1+i$ oder $\lambda = 1-i$. 1

Eigenraum zu $\lambda = 1+i$:

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix} \cdot\left(-\frac{5}{2+i}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow EV = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \quad 1$$

⇒ Komplexe Lösg: $y_c(t) = \begin{pmatrix}1\\2+i\end{pmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{pmatrix}1\\2+i\end{pmatrix}(\cos t + i\sin t)\,e^t$ (1)

$$= \begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t - \sin t\end{pmatrix} e^t + i \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t + 2\sin t\end{pmatrix} e^t$$

⇒ Basis für die Lösungsmenge des homogenen Systems sind

$$y_1(t) := \begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t - \sin t\end{pmatrix} e^t,\quad y_2(t) := \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t + 2\sin t\end{pmatrix} e^t .$$ (1)

Eine spezielle Lösg des inhomogenen Systems:

<u>1. Möglichkeit</u>: (durch Ansatz): $y_i(t) := \begin{pmatrix} a e^t \\ b e^t\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a e^t\\ b e^t\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}(-a+b)\,e^t\\(-5a+3b+1)\,e^t\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a - b = 0\\ 5a - 2b = 1\end{matrix} \Rightarrow a=1,\ b=2$$

⇒ $y_i = \begin{pmatrix}e^t\\2e^t\end{pmatrix}$ ist spezielle Lösung. (4P)

<u>2. Möglichkeit</u> (Variation der Konstanten)

<u>Ansatz</u>: $y_i = c_1 y_1 + c_2 y_2$ mit noch zu bestimmenden C^1-Funktionen c_1, c_2. ⇒ $c_1' y_1 + c_2' y_2 = \begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}$ (1)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} e^t\cos t & e^t\sin t & 0\\ e^t(2\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + 2\sin t) & e^t\end{array}\right) \begin{array}{l} |:e^t \quad \cdot\left(-\frac{2\cos t - \sin t}{\cos t}\right) \\ |:e^t \quad + \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \cos t & \sin t & 0\\ 0 & \frac{-2\sin t\cos t + \sin^2 t}{\cos t} + \cos t + 2\sin t & 1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \cos t & \sin t & 0\\ 0 & \sin^2 + \cos^2 t & \cos t\end{array}\right) \Rightarrow \underline{c_2' = \cos t \Rightarrow c_2 = \sin t}$$ (1)

$$\Rightarrow \underline{c_1'(t) = -\sin t \Rightarrow c_1(t) = \cos t}.$$ (1)

$$\Rightarrow y_i(t) = \begin{pmatrix}\cos^2 t + \sin^2 t\\ 2\cos^2 - \sin t\cos t + \sin t\cos t + 2\sin^2 t\end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix}e^t\\2e^t\end{pmatrix}.$$ (1)

Allg. Lsg: $y(t) = \lambda y_1 + \mu y_2 + y_i$. (1)

Aufgabe 5. (13 Punkte)

a) Kennt man den Satz von der Gebietstreue, so ist die Aussage einfach ein Korollar davon.

Elementar: Sei $|f|^2$ konstant, $f = u + iv$, $z = x + iy$

$\Rightarrow |f|^2 = u^2 + v^2$ ist konstant. Ableiten nach x, y:

$0 = 2uu_x + 2vv_x, \quad 0 = 2uu_y + 2vv_y$

$\Rightarrow 0 = uu_x + vv_x, \quad 0 = uu_y + vv_y$ 1 auf G.

Da f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannsche DGL'en:

$u_x = v_y, \; u_y = -v_x$. 1

$\Rightarrow \; 0 = u^2 u_x + uvv_x, \quad 0 = uvu_y + v^2 v_y \overset{C-R}{=} uv(-v_x) + v^2 u_x$

Addition der beiden Gleichungen: $(u^2+v^2)u_x = 0$ (*), und analog erhält man: $(u^2+v^2)v_x = 0$. (**) 1

hierfür eine schlüssige Argumentation 2 Punkte.

1. Fall $\forall z \in G: f(z) = 0$ ✓

2. Fall $\exists z_0 \in G: f(z_0) \neq 0$.

1. $f^{-1}(z_0)$ ist abgeschlossen in G, da f stetig ist.
2. $f^{-1}(z_0)$ ist offen: Sei $z \in f^{-1}(z_0)$, $\Rightarrow f(z) \neq 0$

Da f stetig ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $f(w) \neq 0$ f.a. $w \in K(z,\varepsilon)$.

$\Rightarrow$ Wegen (*), (**) $u_x(w) \stackrel{=0}{;} v_x(w) = 0$ f.a. $w \in K(z,\varepsilon)$.

$\Rightarrow f'(w) = u_x(w) + iv_x(w) = 0$ f.a. $w \in K(z,\varepsilon)$

$\Rightarrow f$ ist konstant auf $K(z,\varepsilon)$ mit $f(w) = f(z_0)$ $\forall w \in K(z,\varepsilon)$.

$\Rightarrow K(z,\varepsilon) \subseteq f^{-1}(z_0)$, wzbw.

Also ist $f^{-1}(z_0) = G$, da G zusammenhängend ist, ~~d.h.~~ also f konstant auf G.

b) $f(z) = \dfrac{i}{(z-1)(z+1)}$ Partialbruchzerlegung: $\dfrac{i}{(z-1)(z+1)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+1}$

$\Rightarrow i = (A+B)z + A - B \Rightarrow A + B = 0, \; A - B = i \Rightarrow A = \frac{i}{2}, \; B = -\frac{i}{2}$.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{i}{2}\,\frac{1}{z-1} - \frac{i}{2}\,\frac{1}{z+1} \; ; \quad \cancel{1} \; 1$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{1-(-(z-2))} = \sum_{k=0}^{\infty} (-(z-2))^k \quad 1$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3\left(1-\left(-\frac{1}{3}(z-2)\right)\right)} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}(z-2)\right)^k \quad 1$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{-}\frac{i}{2}\left((-1)^k + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right)(z-2)^k \quad \text{f.a. } z \text{ mit } |z-2|<1.$$

1

c) Man berechne $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{z^2-2z+2}\,dz =: I$

$$z^2-2z+2 = (z-(1+i))(z-(1-i)) \; , \; f(z) := \frac{z}{z^2-2z+2}$$

1 Nach dem Residuensatz ist $I = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{1+i} \cancel{\frac{z}{z^2-2z+2}}\, f(z) + \operatorname{res}_{1-i} \cancel{\frac{z}{z^2-2z+2}}\, f(z)\right)$

$\cancel{1}$ 1. $\displaystyle\operatorname{res}_{1+i} f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-(1+i)|<\frac{1}{4}} \frac{z}{z-(1-i)}\cdot\frac{1}{z-(1+i)}\,dz = \frac{1+i}{1+i-(1-i)}$ 1

Cauchy'sche Integralformel

2. $\displaystyle\operatorname{res}_{1-i} f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-(1-i)|<\frac{1}{4}} \frac{z}{z-(1+i)}\cdot\frac{1}{z-(1-i)}\,dz = \frac{1-i}{1-i-(1+i)}$ 1

$$\Rightarrow I = 2\pi i\left(\frac{1+i}{2i} + \frac{1-i}{-2i}\right) = \pi\left(1+i-(1-i)\right) = 2\pi i. \quad 1$$

Alternativ kann man auch eine Partialbruchzerlegung machen und die beiden Integrale mit dem Cauchyschen Integralsatz berechnen.