Lösungsskizze Gruppe A

.... Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Σ		

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Probeklausur, GRUPPE A

HÖHERE MATHEMATIK II

Analysis 1 für Physiker, Prof. Dr. M. Wolf

13. Januar 2012, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9 Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 90 min.

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Schreiben Sie nur mit blauer oder schwarzer, nicht löschbarer, Tinte.

Alle Ergebnisse müssen begründet werden, kommentieren Sie stichwortartig.

Gestalten Sie Ihre Argumentation strukturiert und leserlich. Dies gilt insbes. für Beweise.

Markieren Sie Ihre Endresultate deutlich.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

Aufgabe 1. Grenzwerte **[ca. 4 Punkte]**

(a) Berechnen Sie für die Folge (a_n) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$, wobei

2

$$a_n = \binom{n}{k}\left(\frac{m}{n}\right)^k, \qquad k, m \in \mathbb{N}.$$

(b) Berechnen Sie für reelle a und t den Grenzwert

2

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t\,(1 + a\sin t)^{\frac{1}{\tan t}}}.$$

a) $a_n = \binom{n}{k}\left(\frac{m}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{m^k}{n^k} = \frac{m^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{m^k}{k!}\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\right)}_{=1}\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\right)}_{=1}\cdots\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-k+1}{n}\right)}_{=1}$

Aufspalten des Lim erlaubt da die Grenzwerte exist.

$= \boxed{\frac{m^k}{k!}}$

b) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \overset{L'H.}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1} = 1$

$(1+a\sin t)^{\frac{1}{\tan t}} = e^{\frac{\log(1+a\sin t)}{\tan t}}$

$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+a\sin t)}{\tan t} \overset{LH}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{a\cos t}{1+a\sin t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = a$

e stetig a.d.St. a : $\lim_{t\to 0}(1+a\sin t)^{\frac{1}{\tan t}} = e^{\lim\frac{\log(1+a\sin t)}{\tan t}}$

$= e^a$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\,\frac{1}{(1+a\sin t)^{\frac{1}{\tan t}}} = \frac{1}{e^a} = \boxed{e^{-a}}.$

Aufgabe 2. Limes Superior **[ca. 5 Punkte]**

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

1 (a) Geben Sie die Definition des Ausdrucks $\operatorname{Limsup}_{n\to\infty} a_n$ an.

1 (b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Unter welcher Bedingung ist a gemäß Definition ein Häufungspunkt der Folge (a_n)?

(c) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist eine Folge (a_n) reeller Zahlen beschränkt, so ist $\operatorname{Limsup}_{n\to\infty} a_n$ der größte Häufungspunkt dieser Folge.

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \inf\limits_n \sup \{a_k \mid k \underset{\text{oder } >}{\geq} n\}$ $(:= \infty$ wenn nach oben unbeschr.$)$

b) $a \in \mathbb{R}$ heißt HP von $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ falls

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \underset{\text{oder } \geq}{>} N : |a_n - a| \underset{\text{oder } \leq}{<} \varepsilon$

c) i) Zeige $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (LS) ist HP.

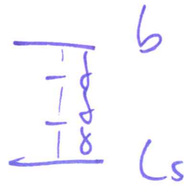
- Sei $\varepsilon > 0$ $N \in \mathbb{N}$ bel.
- $(\sup\{a_k \mid k \geq n\})$ ist beschr. mon. fall. Folge und konv damit gegen ihr infimum (LS).
- Deshalb gilt $\exists n > N$ sd $|\sup\{a_k \mid k \geq n\} - LS| < \frac{\varepsilon}{2}$
- Es gibt weiterhin ein $m \geq n > N$ mit $|a_m - \sup\{a_k \mid k \geq n\}| < \frac{\varepsilon}{2}$

und damit $|a_m - LS| \overset{\Delta\text{-Ung}}{\leq} |a_m - \sup..| + |\sup... - LS|$

$< \varepsilon.$

ii) Zeige LS ist gr. HP.

- Ann $b > LS$ ist HP
- Definiere $b - LS =: 3\delta > 0$



- Wie in i) $\sup\{a_k \mid k \geq n\} \xrightarrow[\text{fall.}]{\text{mon}} LS$

  dh $\exists\, n \in \mathbb{N}$ sd $|\sup\{a_k \mid k \geq n\} - LS| < \delta$

- $\forall\, k \geq n$ gilt dann $a_k \notin U_\delta(b)$

  und damit ist b kein HP ↯

$\blacksquare$

Aufgabe 3. Reihen **[ca. 8 Punkte]**

2 (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{x}{k}\ ?$$

2 (b) Für welche $\omega > 0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(1+\mathrm{i})^k}{\omega^k(k+2^k)}\ ?$$

2 (c) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+\cos k}\,,$$

und wenn ja, konvergiert sie auch absolut?

2 (d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

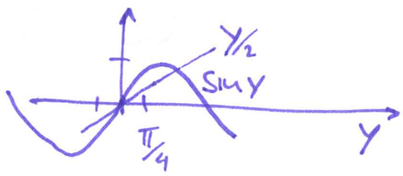
$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-\tanh k^2) z^k\,.$$

(a) • $\boxed{\text{Für } x=0 \text{ konv. die Reihe.}}$

• $$\sum_{k=1}^{N} \sin\frac{x}{k} \underset{\substack{\text{für } N \\ \text{hinr. groß}}}{=} \sum_{k=1}^{n(x)} \sin\frac{x}{k} + \underbrace{\sum_{k=n(x)+1}^{N} \sin\frac{x}{k}}_{(*)}$$

Wähle dabei $n(x)$ so dass $\frac{|x|}{k} \le \frac{\pi}{4}$ für $k > n(x)$

Dann gilt $\left|\sin\frac{x}{k}\right| > \frac{|x|}{2k}$



$\boxed{\text{Damit ist } (*) \text{ divergent für } x \neq 0}$ da die harmon. Reihe divergiert.

(b) Quotkrit: $$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim \frac{k+1}{k} \cdot \frac{|1+i|}{\omega} \cdot \frac{k+2^k}{k+1+2^{k+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\omega} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{2^k}+1}{\frac{k+1}{2^k}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\omega}$$

Dh für $\frac{\sqrt{2}}{2\omega} < 1 \iff \boxed{\omega > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ abs konv}}$

für $\frac{\sqrt{2}}{2\omega} > 1 \iff \boxed{\omega < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ divergent.}}$

Für $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt

$$\left| \frac{2k\,(1+i)^k}{\omega^k\,(k+2^k)} \right| = \frac{2k\;2^k}{k+2^k} = \cancel{\frac{2k}{2}}\ \frac{2k}{\frac{k}{2^k}+1}$$

$$\to 2k$$

Damit handelt es sich bei den Summanden nicht um Nullfolge

$\boxed{\Rightarrow \text{ Div für } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

c) $a_k = \frac{k}{k^2+\cos k} = \frac{1}{k + \frac{\cos k}{k}}$

cos ist im Betrag durch 1 beschränkt.

für $k \geq 2$ gilt somit

$$k+1 + \frac{\cos k+1}{k+1} \geq k + \frac{\cos k}{k}$$

$\Rightarrow a_k$ monot. f. NullF.

Leibnitz: $\boxed{\sum(-1)^k a_k \text{ konvergiert}}$

Weiters $\cancel{\nexists}\, a_k \geq \frac{1}{2k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Reihe nicht abs konv}}$, $\frac{1}{2k}$ ist div. Minorante d)

$$1 - \tanh a = 1 - \frac{e^{a} - e^{-a}}{e^{a} + e^{-a}}$$

$$= \frac{2e^{-a}}{e^{a} + e^{-a}} = \frac{2}{e^{2a} + 1}$$

$$1 - \tanh k^2 = \frac{2}{e^{2k^2} + 1}$$

Euler: konv'rad $R = \lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{e^{2(k+1)^2} + 1}{e^{2k^2} + 1}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{e^{2k^2 + 4k + 2} + 1}{e^{2k^2} + 1}$$

$$= \lim \frac{e^{4k+2} + e^{-2k^2}}{1 + e^{-2k^2}} = \infty$$

$$\boxed{R = \infty}$$

Aufgabe 4. Konvergenz von Funktionenfolgen **[ca. 6 Punkte]**

Sei $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ eine Abbildung und sei (f_n) eine Folge von Abbilungen, mit $f_n:(-1,1)\to\mathbb{R}$.

1 (a) Unter welcher Bedingung konvergiert (f_n) gemäß Definition punktweise gegen f?

Sei nun f_n definiert durch

$$f_n:(-1,1)\to\mathbb{R},\qquad f_n(x):=|x|^{\frac{1}{n}+1}.$$

1 (b) Sind die Funktionen f_n stetig differenzierbar auf $(-1,1)$?

3 (c) Konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig auf $(-1,1)$?

1 (d) Konvergiert die Folge (f_n') gleichmäßig auf $(-1,1)$?

a) (f_n) konv. ~~glm~~. pktweise gegen f falls gilt

$\forall \varepsilon>0\ \forall x\in(-1,1)\ \exists N\ \forall n\geq N: |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

oder $>$ oder $\leq$

b) für $x>0$: $f_n'(x) = (1+\frac{1}{n})x^{\frac{1}{n}}$

für $x<0$: $f_n'(x) = (1+\frac{1}{n})(-x)^{\frac{1}{n}}\cdot(-1) = -(1+\frac{1}{n})(-x)^{\frac{1}{n}}$

$= -(1+\frac{1}{n})|x|^{\frac{1}{n}}$

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|^{\frac{1}{n}+1}}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\downarrow 0} f_n'(x) = 0$

$\lim\limits_{x\uparrow 0} f_n'(x) = 0$

f_n ist stetig diffbar.

c) f_n konv pkt.w. gegen f mit

$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}|x|\,|x|^{\frac{1}{n}} = |x|$

Damit $|f(x)-f_n(x)| = \big||x| - |x||x|^{\frac{1}{n}}\big| = |x|\,\big|1-|x|^{\frac{1}{n}}\big|$ (*)

Sei nun $\varepsilon > 0$

für $|x| \leq \varepsilon$ gilt $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

für $|x| > \varepsilon$ gilt $|f(x) - f_n(x)| \leq |1 - |x|^{\frac{1}{n}}| \leq 1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}}$

Wähle nun N sd $\forall n \geq N \ \forall x \in (-1,1)$

$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Dazu muss $1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon$ gelten

$\Longleftrightarrow 1 - \varepsilon \leq \varepsilon^{\frac{1}{n}}$

$\Longleftrightarrow \log(1-\varepsilon) \leq \frac{1}{n} \log \varepsilon$

$\Longleftrightarrow n \geq \dfrac{\log \varepsilon}{\log(1-\varepsilon)}$

Wähle also $N \geq \dfrac{\log \varepsilon}{\log(1-\varepsilon)}$

(f_n) konv also glm.

d) (f'_n) konvergiert pkt'weise gegen g mit

$g: (-1,1) \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0,1) \\ -1 & x \in (-1,0) \end{cases}$,

unstetig a. d. St. 0

alle f'_n sind stetig (a)

Damit kann (f'_n) nicht glm. gegen g konvergieren, da dies im Widerspr. zur Unstet. von g stünde

Aufgabe 5. Metrik **[ca. 6 Punkte]**

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad f(r) := \frac{r}{1+r}.$$

Zeigen Sie, dass

1 (a) f streng monoton wachsend,

1 (b) f konkav und

4 (c) die Abbildung

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

a) $f'(r) = \frac{(1+r)-r}{(1+r)^2} = \frac{1}{(1+r)^2} > 0$ für $r \in [0,\infty)$

damit ist f s.m.w.

b) $f''(r) = \cdot(-2)\frac{1}{(1+r)^3} < 0$ für $r \in [0,\infty)$

damit ist f. konkav.

c) (i) d ist offens. symm in den beiden Argumenten

(ii) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$.

und $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$.

(iii) zu zeigen: d erfüllt die Δ-Ungl.

dh $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt ~~$d(x,y) \leq d(x,z$~~

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Es gilt $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

f s.m.w: $f(|x-z|) \leq f\left(2\,\frac{|x-y| + |y-z|}{2}\right)$

f konkav

$$\leq \frac{f(2|x-y|) + f(2|y-z|)}{2}$$

Damit gilt also

$$2 f(|x-z|) \leq f(2|x-y|) + f(2|y-z|)$$

D.h.

$$\frac{2|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{2|x-y|}{1+2|x-y|} + \frac{2|y-z|}{1+2|y-z|}$$

$$\leq \frac{2|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{2|y-z|}{1+|y-z|}$$

Wegkürzen der 2 führt zu

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

☒

Aufgabe 6. Stetige Fortsetzung **[ca. 4 Punkte]**

Für $s \in \mathbb{Q}$ definieren wir die Funktion

$$f_s : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f_s(z) := \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^s}.$$

1 (a) Welche Eigenschaften muss eine Funktion F_s besitzen, um als stetige Fortsetzung von f_s in den Punkt 0 bezeichnet zu werden?

3 (b) Für welche $s \in \mathbb{Q}$ besitzt f_s eine stetige Fortsetzung in den Punkt 0? Geben Sie diese gegebenenfalls an.

a) $F_s : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$F_s(z) = f_s(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

F_s ist stetig in 0.

b) ~~1 Fall: s~~

f_s besitzt genau dann im Pkt 0 die st. Forts. $F_s(0)$ falls für jede Folge (a_n) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $a_n \to 0$ gilt $f_s(a_n) \to F_s(0)$.

1 Fall: $s < 1$:

$$\left| \frac{\operatorname{Re} a_n}{|a_n|^s} \right| \leq \frac{|a_n|}{|a_n|^s} = |a_n|^{1-s} \xrightarrow[a_n \to 0]{} 0$$

Dh $|f_s(a_n)|$ und somit auf $f_s(a_n) \to 0$ für $a_n \to 0$

$\Rightarrow$ st. F'setzung $\boxed{F_s(0) = 0}$

2. Fall $\quad s = 1$

Betrachte $\quad a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$

$$f_s(a_n) = \frac{(-1)^n \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n \quad \text{konv. nicht}$$

$\Rightarrow$ keine st. F'setz.

3. Fall $\quad s > 1$

Betrachte $\quad a_n := \frac{1}{n}$

$$f_s(a_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^s} = n^{s-1} \to \infty$$

$\Rightarrow$ keine st. F'setz.

Aufgabe 7. Funktionenfolge **[ca. 4 Punkte]**

Gegen welche Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge f_n, definiert durch

$$f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n - kx}$$

im Limes $n \to \infty$?

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-kx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{k}{n}x} \cdot \frac{1}{n}$$

1 Fall: $x = 0$

$$f_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

2. Fall $x \neq 0$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{k}{n}x} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{k}{n}x} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\overset{\text{Riemann}}{\underset{\text{Summe.}}{=:}} \int_0^1 \frac{1}{1-yx}\, dy = \ldots$$

Subst: $xy = z \qquad dy = \frac{dz}{x}$

$$\ldots = \int_0^x \frac{1}{1-z} \frac{dz}{x} = \frac{1}{x}(-1) \log(1-z) \Big|_0^x$$

$$= -\frac{1}{x} \log(1-x)$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ -\frac{1}{x}\log(1-x) & x \neq 0 \end{cases}}$$

Aufgabe 8. Integration **[ca. 9 Punkte]**

3 (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \log(1+x^2)\mathrm{d}x\,.$$

3 (b) Berechnen Sie

$$\int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\,.$$

3 (c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$$

existiert und geben Sie seinen Wert an.

a) $\int \log(1+x^2)\,dx \overset{PI}{=} x\log(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= x\log(1+x^2) - \int 2x^2 \arctan'(x)\,dx = \ldots$

• **Subst** $\arctan x = y \qquad \tan y = x$

$\int 2x^2 \arctan' x\,dx = \int 2\tan^2 y\,dy = 2(\tan y - y) + C.$

• **Benutze** $\tan' x = \tan^2 x + 1$

$\ldots = x\log(1+x^2) - 2\tan y + 2y$

$= \boxed{\underline{x\log(1+x^2) - 2x} + \underline{2\arctan x. + \text{Konst.}}}$

Re-subst.

b) $$\int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \dots$$

<u>Subst</u> $$\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} = y$$

$$1+\sqrt[4]{x} = y^3$$

$$x = (y^3-1)^4$$

$$dx = dy\; 4(y^3-1)^3\, 3y^2 = 12\,(y^3-1)^3 y^2$$

$$\dots = \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{y}{(y^3-1)^2}\, dy \cdot 12\,(y^3-1)^3 y^2$$

$$= \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} dy\; 12\, y^3\, (y^3-1) = 12\left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}$$

$$= 12\left[\frac{1}{7}\left(9\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{2}\right) - \frac{1}{4}\left(3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt[3]{3}\left(\frac{108}{7} - \frac{36}{4}\right) + \sqrt[3]{2}\left(-\frac{48}{7} + \frac{24}{4}\right))$$

$$= \boxed{\frac{45}{7}\sqrt[3]{3} - \frac{6}{7}\sqrt[3]{2}.}$$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}$

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} = \ldots$$

<u>Subst</u> $\sqrt{1-x} = y$

$1 - x = y^2$

$x = 1 - y^2$

$dx = -2y\,dy$

$$\ldots = -2 \int_{\sqrt{1-\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}\cdot y} = 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= 2 \arcsin y \Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}}$$

$\underline{\arcsin y' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

$$= 2\left(\arcsin\sqrt{1-\varepsilon} - \arcsin\sqrt{\varepsilon}\right)$$

Somit $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{-x+1}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\left(\operatorname{asin}\sqrt{1-\varepsilon} - \operatorname{asin}\sqrt{\varepsilon}\right)$

$$= 2\left(\operatorname{asin} 1 - \operatorname{asin} 0\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \boxed{\pi.}$$

Aufgabe 9. Topologie **[ca. 6 Punkte]**

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum.

1 (a) Sei $K \subset X$. Unter welcher Bedingung ist K nach Definition kompakt?

5 (b) Beweisen Sie: Ist $K \subset X$ kompakt, so ist K auch abgeschlossen.

a) K ist kpkt falls jede Folge (a_n) mit $a_n \in K$ eine Teilfolge $(a_{g(n)})$ besitzt, die gegen ein $a \in K$ konvergiert.

b) Sei also K kpkt.

~~Sei (a_n) eine~~.

Sei (a_n) eine Folge in K dh. $a_n \in K \ \forall n$.

Und (a_n) konvergiere gegen $x \in X$.

Gemäß des Folgenkrit. für Abgeschlossenheit genügt es zu zeigen, dass $x \in K$.

Nun liegt x tatsächlich in K da ~~laut a)~~ jede TF von (a_n) gegen x konvergiert, Folgengrenzwerte eindeutig sind und (a_n) laut a) eine TF besitzt, die gegen ein Element aus K konvergiert.

$\square$