Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Hiermit bestätige ich, daß ich vor Prüfungsbeginn darüber in Kenntnis gesetzt wurde, daß ich im Falle einer plötzlich während der Prüfung auftretenden Erkrankung das Aufsichtspersonal umgehend informieren muß. Dies wird im Prüfungsprotokoll vermerkt. Danach muß unverzüglich ein Rücktritt von der Prüfung beim zuständigen Prüfungsausschuß beantragt werden. Ein vertrauensärztliches Attest - ausgestellt am Prüfungstag - kann gegebenenfalls innerhalb der nächsten Tage nachgereicht werden. Wird die Prüfung hingegen in Kenntnis der gesundheitlichen Beeinträchtigung dennoch regulär beendet, kann im Nachhinein kein Prüfungsrücktritt aufgrund von Erkrankung beantragt werden.

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

Hörsaal Reihe Platz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

GOP Analysis 1 für Physiker
WS 09/10

PROF. DR. D. CASTRIGIANO
15. FEBRUAR 2010

Hinweise:

- Überprüfen Sie die Angabe: Die Klausur enthält **6 Aufgaben**. Vergleichen Sie die Angaben mit dem Übersichtsblatt. Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Jede Aufgabe ist in dem unmittelbar anschließenden eingerahmten Platz zu bearbeiten. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.
- Zum Bestehen sind voraussichtlich mindestens 17 Punkte nötig!
- Das letzte Blatt mit der Aufgabenübersicht kann zur Bearbeitung abgetrennt werden. Bei vorzeitiger Abgabe sind *alle* Blätter einschließlich des Übersichtsblattes abzugeben!
- Erlaubte Hilfsmittel: Der Ausdruck unseres online-verfügbaren Vorlesungsskriptes sowie der Ausdruck der Aufgabenblätter und Musterlösungen und Ihr persönliches handschriftliches Vorlesungsskript.

Note:

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

Erstkorrektur (I)

Zweitkorrektur (II)

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von: ________ bis: ________

Vorzeitig abgegeben um: ________

Besondere Bemerkungen:

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen ist rekursiv durch $b_0 := 1$, $b_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+b_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, definiert.

a) Zeigen Sie sorgfältig durch vollständige Induktion, daß

1) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist und
2) alle b_n, $n \in \mathbb{N}_0$, positiv sind.

b) Besitzt die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ einen Grenzwert? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Berechnen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

Vergleiche auch die ähnlichen Übungsaufgaben H3, 3) von Blatt 1, H4 von Blatt 7 und F3 vom Ferienblatt)

a) 1) Wir zeigen durch vollständige Induktion: $b_{n+1} \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsanfang: $n=0$: $b_1 = 1 - \frac{1}{2+b_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1 = b_0$

Induktionsannahme: $b_1 < b_0, \ldots, b_{n+1} \leq b_n$

Induktionsschritt: Aus $b_{n+1} \leq b_n$ folgt $\frac{1}{2+b_{n+1}} \geq \frac{1}{2+b_n}$

Also $b_{n+2} = 1 - \frac{1}{2+b_{n+1}} \leq 1 - \frac{1}{2+b_n} = b_{n+1}$ ✓

2) Wir zeigen durch vollst. Ind.: $b_n > 0$

Ind.-Anfang: $b_0 = 1 > 0$ ✓

Ind.-Annahme: $b_0 > 0, \ldots, b_n > 0$ (*)

Ind.-Schritt: $b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+b_n} \underset{(*)}{\geq} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ ✓

b) Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist, existiert $b := \lim_{n\to\infty} b_n$

c) Aus $b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+b_n}$ folgt mit b) für $n \to \infty$

$b = 1 - \frac{1}{2+b} \implies b(2+b) + 1 = 2+b \implies b^2+b-1=0$

$\implies b \in \{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\}$. Wegen $b \geq 0$ (vgl. a)2)) folgt $b = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit

$$a_k = e^{-k+ik^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

b) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(\arctan k)a_k$ absolut konvergiert und daß gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(\arctan k)a_k\right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

Hinweis zu b): Es gilt $\frac{5}{2} < e < 3$.

Es ist $a_k = \frac{e^{ik^2}}{e^k}$, die Reihe lautet also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik^2}}{e^k}$

(Auf dem Ferienblatt wurde in F5 die sehr ähnliche Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^k}{e^k}$ untersucht.)

a) Es ist $|a_k| = |e^{ik^2}|/|e^k| = \frac{1}{e^k} = \left(\frac{1}{e}\right)^k$

wegen $1/e < 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1 \quad \text{(geom. Reihe!)}$$

$$= \frac{e}{e-1} - \frac{e-1}{e-1} = \frac{1}{e-1}.$$

Insbesondere ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

b) Wegen $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2} \; \forall x \in \mathbb{R}$ ist $|\arctan(k)\, a_k| \leq \frac{\pi}{2}|a_k|$ (*)

Nach a) ist $\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}|a_k|$ konvergent, nach (*) ist diese Reihe eine Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty}(\arctan k)\, a_k$.

Nach dem Majorantenkriterium ist also $\sum_{k=1}^{\infty}(\arctan k)\, a_k$ absolut konvergent mit

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \arctan(k)\, a_k\right| \leq \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \overset{a)}{=} \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{e-1} \underset{\text{nach Hinweis}}{<} \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{5}{2}-1\right)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \in]0,1]\,, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

a) Durch welchen Wert an der Stelle 0 läßt sich $f|]0,1]$ auf $[0,1]$ stetig ergänzen?

b) Ist f stetig?

c) Ist f eine Regelfunktion?

d) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^{1/n} - 1} - n \right).$$

Begründen Sie sorgfältig Ihre Antworten!

(Vergleiche auch die ähnliche Aufgabe Z 2 von Blatt 13 und z.B. H5,7) von Blatt 11)

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)} \quad (\text{Typ } \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"})$$

$$\underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0, x>0} \frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\text{Typ "}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0, x>0} \frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x} = -\frac{1}{2}$$

Also läßt sich $f|]0,1]$ durch den Wert $-\frac{1}{2}$ an der Stelle 0 stetig ergänzen (vergleiche (7.27)).

b) f ist <u>nicht</u> stetig, da $f(0) = 0 \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0, x>0} f(x)$

(Bemerkung: (7.27) (ii) besagt, daß die stetige Ergänzung eindeutig bestimmt ist)

c) Auf $]0,1]$ ist f stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen, insbesondere existieren also an jeder Stelle $x \in]0,1]$ die einseitigen Grenzwerte von f. Nach Teil a) existiert auch an der Stelle 0 der einseitige Grenzwert von f. Also ist f eine Regelfunktion (vergleiche Satz 15 in Kapitel 9)

d) $$\frac{1}{e^{1/n}-1} - n = \frac{1}{e^{1/n}-1} - \frac{1}{(1/n)} = f(1/n)$$

Also folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{1/n}-1} - n = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \underset{a)}{=} -\frac{1}{2}.$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b[$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

a) Zeigen Sie, daß $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. c sei ihr Grenzwert.

b) Sei $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in $[a, b[$ mit $\lim_{n\to\infty} x'_n = b$. Sei $c' := \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Gilt $c = c'$?

c) Besitzt f eine stetige Fortsetzung in b?

Hinweis zu b): Betrachten Sie die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots)$. Begründen Sie Ihre Antworten sorgfältig!

---

a) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Da f gleichmäßig stetig ist, ex. $\delta > 0$, so daß für alle $x, x' \in [a,b[$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ (*)

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchyfolge.
Also ex. $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m > N$ gilt $|x_n - x_m| < \delta$

Wegen (*) folgt also für alle $n, m > N$, daß $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Also ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge

b) Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_1', x_2, x_2', \dots)$ konvergiert nach Voraussetzung über (x_n), (x_n') ebenfalls gegen b.
Nach Teil a) existiert also $c'' := \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. $(f(x_n))$, $(f(x_n'))$ sind Teilfolgen von $(f(y_n))$.
Also folgt $c = c'' = c'$.

c) Nach b) existiert $\lim_{x\to b} f(x)$. Nach (7.27) ist f also stetig in den Punkt b fortsetzbar.

Aufgabe 5 (ca. 11 Punkte)

I	II

Sei $c \in]0,1[$ und $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad x \in [0,c[\,, \\ 5 & \text{für} \quad x = c\,, \\ -1 & \text{für} \quad x \in]c,1]\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $F(x) := \int_0^x \varphi(t)\,dt$ für $x \in [0,1]$.

b) Zeichnen Sie den Graphen von $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ für den Fall $F(1) = 0$. Welchen Wert hat hierbei c?

Beantworten Sie die folgenden Fragen für allgemeines $c \in]0,1[$:

c) Ist F stetig oder gar gleichmäßig stetig?

d) Ist F differenzierbar?

Hinweis zu d): Betrachten Sie den Differenzenquotienten an der Stelle c. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

(Vergleiche auch die ähnliche Aufgabe H7 von Blatt 13)

a) Für $x \in [0,c[$ ist $F(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^x 2dt = 2x$

Ist $x \in]c,1]$, so ist zunächst $\int_c^x \varphi(t)dt = \int_c^x (-1)dt = -(x-c)$

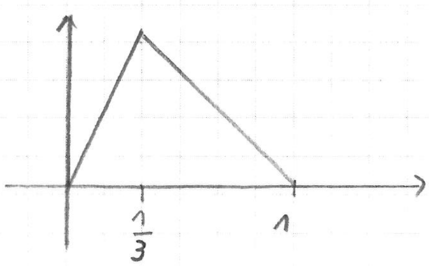
und damit für $x \in]c,1]$ $F(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^c \varphi(t)dt + \int_c^x (-1)dt = 2c+(-(x-c))$

Da $F(c) = 2(c-0) = 2c$ (direkt aus Definition des Integrals für Treppenfunktionen, Def 5 in Kap. 9) folgt

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in [0,c[\\ 3c-x & \text{für } x \in [c,1] \end{cases}$$

Der Wert von φ am Teilungspunkt c ist für das Integral unerheblich (siehe Def. 5 in Kap. 9 und die Bemerkung dazu)

b) $F(1) = 3c-1 = 0 \Longrightarrow c = \frac{1}{3}$



c) Nach a) ist F stetig als Verknüpfung stetiger Fkt auf $[0,c[$ und auf $[c,1]$. Einzig mögliche Unstetigkeitsstelle ist also $x=c$

Da $\lim_{x\to c,\, x<c} F(x) = \lim_{x\to c,\, x<c} 2x = 2c = F(c) = \lim_{x\to c,\, x>c} F(x)$

ist F auch bei $x=c$ stetig. F ist also stetig auf $[0,1]$.

Da $[0,1]$ kompakt und F stetig ist, ist F sogar gleichmäßig stetig (vergleiche auch z.B. Aufgabe H5b) von Blatt 10)

d) Da

$$\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \begin{cases} \frac{3c-(c+h)-2c}{h} & \text{für } h>0 \\ \frac{2(c+h)-2c}{h} & \text{für } h<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -h/h = -1 & \text{für } h>0 \\ 2h/h = 2 & \text{für } h<0 \end{cases}$$

existiert $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{F(c+h)-F(c)}{h}$ <u>nicht</u>. F ist also nicht differenzierbar.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in R[a,b]$ und dazu $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Zeigen Sie, daß
$$|F(x) - F(x')| \leq \|f\|_s \, |x - x'| \quad \forall x, x' \in [a,b] \,.$$

b) Sei f nun stetig und reellwertig. Dann ist bekanntlich F eine Stammfunktion von f. Begründen Sie, daß $\xi \in [a,b]$ existiert mit
$$|F'(\xi)| = \|f\|_s \,.$$

c) Gibt es $f \in R[a,b] \backslash C[a,b]$ derart, daß F differenzierbar ist?

d) Gibt es $f \in R[a,b]$ derart, daß F nicht differenzierbar ist?

e) Gibt es $f \in R[a,b]$ derart, daß F nicht stetig ist?

Begründen Sie Ihre Antwort gegebenenfalls durch Angabe eines Beispiels.

---

a) $|F(x) - F(x')| = \left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{x'} f(t)\,dt \right|$

$= \left| \int_{x'}^{x} f(t)\,dt \right| \leq |x - x'| \sup\limits_{\substack{t \in [x,x'] \text{ bzw.} \\ t \in [x',x]}} |f(t)| = |x - x'| \, \|f\|_s$

↑ vgl. (9.17), (9.18) und H3 von Blatt 13 ↑ (9.13)

(Bemerkung: Für den Fall von Treppenfunktionen vergleiche Z5 von Blatt 12)

b) Nach (9.20) ist $F' = f$

Da f stetig auf kompakter Menge $[a,b]$, ist auch $|f|$ stetig auf kompakter Menge $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $|f|$ nimmt sein Maximum auf $[a,b]$ an (vgl. Satz 16, Kap 7). D.h. $\exists\, \xi \in [a,b]$ mit

$|f(\xi)| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)| = \|f\|_s$.

c) Sei $f : [\overset{a}{\overset{\shortparallel}{0}}, \overset{b}{\overset{\shortparallel}{1}}] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1$ für $x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ und $f(\frac{1}{2}) := 0$

Dann ist f nicht stetig, aber nach Def 5, Kap 9 des Integrals für Treppenfunktionen ist $F(x) = x$ $\forall x \in [0,1]$. F ist also differenzierbar

d) Ja, nach Aufgabe 5 d)

e) Nein. Nach Teil a) ist F nämlich Lipschitz-stetig und jede Lipschitz-stetige Funktion ist insbesondere stetig.