Lösungsvorschlag 2. Klausur

Theoretische Physik 1 (Mechanik)

SS 2008

(Bertram)

$\boxed{1}$ Teilchen im 3-dim. Oszillator.

a) Lagrangefunktion

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (\vec{r} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{2} k r^2$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2)$$

b) Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$= \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) + k\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = 0}$$

oder in Komponenten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) - (-kx) = m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) - (-kx) = m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) - (-kx) = m\ddot{z} + kz = 0$$

c) Zu zeigen:

$$\langle 2T + \vec{F}\cdot\vec{r} \rangle = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

ausgehend von der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = 0$$

Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\vec{r}$

$$m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + k\,\vec{r}\cdot\vec{r} = 0$$

Umschreiben von $m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r}$ als eine totale Ableitung nach der Zeit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right) &= m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + m\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\\ &= m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + 2\tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2\\ &= m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + 2T\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right) - 2T$$

Bildung des zeitlichen Erwartungswertes:

$$\langle m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + k\vec{r}\cdot\vec{r} \rangle = 0$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right) - 2T - \left(-k\vec{r}\cdot\vec{r}\right) \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle 2T + (-k\vec{r})\cdot\vec{r} \rangle = \langle 2T + \vec{F}\cdot\vec{r} \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right)\right\rangle$$

Jetzt benötigen wir die explizite Definition des zeitlichen Erwartungswertes, um den letzten Term abzuschätzen:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\,\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left[m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right]_0^\tau$$

eine Bewegung im Oszillatorpotential ist räumlich beschränkt:

$$|\vec{r}| < R_{max} < \infty \text{ mit z.B. } \frac{1}{2} k R_{max}^2 \leq E < \infty$$

auch die maximale Geschwindigkeit ist beschränkt:

$$|\dot{\vec{r}}| < V_{max} < \infty \text{ mit z.B. } \frac{1}{2} m V_{max}^2 \leq E < \infty$$

und damit

$$\left| \left[m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right]_0^\tau \right| < 2 m R_{max} V_{max} < \infty$$

und daher

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \left| \left[m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right]_0^\tau \right| < \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} 2 m R_{max} V_{max} = 0$$

$\rightarrow$ $\left\langle \frac{d}{dt} (m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \right\rangle = 0$ für eine gebundene Bewegung

$$\Rightarrow \boxed{\langle 2T + \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle = \langle 2T + (-k \vec{r} \cdot \vec{r}) \rangle = 0}$$

d) $\langle 2T + (-k \vec{r} \cdot \vec{r}) \rangle = 0 \rightarrow \langle T \rangle = \frac{1}{2} \langle k \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle$

$$\langle T \rangle = \langle \tfrac{1}{2} k \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle = \langle \tfrac{1}{2} k r^2 \rangle = \langle U \rangle$$

$$\frac{dU}{dr} = k r \qquad \frac{r}{2} \frac{dU}{dr} = \frac{1}{2} k r^2 = U \quad ✓$$

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle$$

e) Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - L$$

hier: $\{q_i\}_{i=1,2,3} = \{x, y, z\}$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \dot{x} = \frac{p_1}{m}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \dot{y} = \frac{p_2}{m}$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \qquad \dot{z} = \frac{p_3}{m}$$

$$H = p_1\dot{x} + p_2\dot{y} + p_3\dot{z} - L$$

$$= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m}$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{p_1^2}{m^2} + \frac{p_2^2}{m^2} + \frac{p_3^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

$$= H(\vec{p}, \vec{r})$$

f) Hamilton'sche Bewegungsgleichungen.

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -ky \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \qquad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{p}_i = -k x_i \qquad \dot{x}_i = \frac{p_i}{m} \longrightarrow p_i = m\dot{x}_i \qquad i=1,2,3$$

$$\dot{p}_i = m\ddot{x}_i$$

$$\Rightarrow \quad \dot{p}_i = m\ddot{x}_i = -k x_i$$

$$\rightarrow \quad m\ddot{x}_i + k x_i = 0 \qquad i=1,2,3$$

→ stimmt mit der Lagrange-Gl. überein, die Bewegungsgleichungen sind äquivalent!

a) $H = T + V$ (durch Inspektion)

$$\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \langle E \rangle$$

mit b) $\langle T \rangle = \langle V \rangle \Rightarrow \langle H \rangle = 2\langle T \rangle = 2\langle V \rangle$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2}\langle H \rangle \qquad \langle V \rangle = \frac{1}{2}\langle H \rangle$$

a) Lagrangefunktion

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}_3^2$$

$$V = -mgl\cos\alpha_1 - mgl\cos\alpha_2 - mgl\cos\alpha_3$$
$$+ \frac{1}{2} k (l\sin\alpha_1 - l\sin\alpha_2)^2 + \frac{1}{2} k (l\sin\alpha_2 - l\sin\alpha_3)^2$$

für kleine Auslenkungen:

$$\sin\alpha \simeq \alpha$$
$$\cos\alpha \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$V = -mgl + \frac{1}{2} mgl\alpha_1^2 - mgl + \frac{1}{2} mgl\alpha_2^2 - mgl + \frac{1}{2} mgl\alpha_3^2$$
$$+ \frac{1}{2} k (l\alpha_1 - l\alpha_2)^2 + \frac{1}{2} k (l\alpha_2 - l\alpha_3)^2$$

weglassen der uninteressanten konstanten Terme:

$$V = \frac{1}{2} mgl\alpha_1^2 + \frac{1}{2} mgl\alpha_2^2 + \frac{1}{2} mgl\alpha_3^2$$
$$+ \frac{1}{2} k l^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \frac{1}{2} k l^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2$$

b) Bewegungsgleichungen: $L = T - V$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$m l^2 \ddot{\alpha}_1 + mgl\alpha_1 + k l^2 (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$m l^2 \ddot{\alpha}_2 + mgl\alpha_2 + k l^2 (\alpha_1 - \alpha_2)(-1) + k l^2 (\alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha_3}\right) = \frac{\partial L}{\partial \alpha_3} = 0$$

$$m l^2 \ddot\alpha_3 + mgl\,\alpha_3 + k l^2 (\alpha_2 - \alpha_3)(-1) = 0$$

$$\ddot\alpha_1 + \frac{g}{l}\alpha_1 + \frac{k}{m}\alpha_1 - \frac{k}{m}\alpha_2 = 0$$

$$\ddot\alpha_2 + \frac{g}{l}\alpha_2 - \frac{k}{m}\alpha_1 + \frac{k}{m}\alpha_2 + \frac{k}{m}\alpha_2 - \frac{k}{m}\alpha_3 = 0$$

$$\ddot\alpha_3 + \frac{g}{l}\alpha_3 - \frac{k}{m}\alpha_2 + \frac{k}{m}\alpha_3 = 0$$

In Matrixschreibweise $\vec\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ $\dot{\vec\alpha} = \begin{pmatrix}\dot\alpha_1\\ \dot\alpha_2\\ \dot\alpha_3\end{pmatrix}$

$$\ddot{\vec\alpha} + \begin{pmatrix} +\frac{g}{l}+\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & +\frac{g}{l}+2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & +\frac{g}{l}+\frac{k}{m} \end{pmatrix} \vec\alpha = 0$$

Eigenfrequenzen: Eigenwerte dieser Matrix

(Ansatz $\vec\alpha = \vec\alpha_I\, e^{i\omega_I t}$ für erste Eigenwert)

$$\ddot{\vec\alpha}_I = -\omega_I^2\, \vec\alpha_I\, e^{i\omega_I t}$$

$$\left[-\omega_I^2\, \mathbb{1} + \left(\quad \right)\right]\vec\alpha_I = 0$$

hat nur Lsg wenn die Determinante verschwindet...

$$\begin{pmatrix} -\omega_I^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\omega_I^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & -\omega_I^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} = 0$$

Berechne die Determinante:

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)^2 \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right) - \left(\frac{k}{m}\right)^2 \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)$$

$$- \left(\frac{k}{m}\right)^2 \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\left[\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right) - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2\right]$$

$$= \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\left[\qquad\qquad\right] = 0$$

$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}$ ist erster Eigenwert.

zweiter Term:

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} + \frac{k}{m}\right) - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2$$

$$= \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)^2 + \frac{k}{m}\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2$$

$$= \left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} + 2\frac{k}{m}\right)\left(-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \frac{k}{m}\right)$$

[nach Regel $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ durch probieren:
$x = -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}$ $\quad a = -\frac{k}{m}$ $\quad b = 2\frac{k}{m}$]

$\omega_{II}^2 = \frac{g}{l}$ $\qquad \omega_{III}^2 = \frac{g}{l} + 3\frac{k}{m}$ ✓

d) langsamste Eigenschwingungen.

$$\omega_{II}^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega_I^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}$$

benötigt! Eigenvektoren!

$$\begin{pmatrix} -\omega_I^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\omega_I^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & -\omega_I^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^I \\ \alpha_2^I \\ \alpha_3^I \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^I \\ \alpha_2^I \\ \alpha_3^I \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\alpha}_I \overset{!}{=} 0$$

erste und letzte Zeile : $\alpha_2^I = 0$

mittlere Zeile $\alpha_I^I + \alpha_3^I = 0 \rightarrow \alpha_1^I = -\alpha_3^I$

$\vec{\alpha}_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ äußere Pendel schwingen gegeneinander, mittleres in Ruhe!

$\omega_{II}^2 = \frac{g}{l}$

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \vec{\alpha}_{II} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{II}^1 \\ \alpha_{II}^2 \\ \alpha_{II}^3 \end{pmatrix} = 0$$

(1) $\quad \alpha_1^{II} - \alpha_2^{II} = 0 \rightarrow \alpha_1^{II} = \alpha_2^{II}$

(3) $\quad -\alpha_2^{II} + \alpha_3^{II} = 0 \rightarrow \alpha_2^{II} = \alpha_3^{II}$

$\rightarrow \alpha_1^{II} = \alpha_2^{II} = \alpha_3^{II}$

durch in (3) $\quad -\alpha_1^{II} + 2\alpha_2^{II} - \alpha_3^{II} = -\alpha_1^{II} + 2\alpha_1^{II} - \alpha_1^{II} = 0$ ✓

$\vec{\alpha}_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ alle Pendel schwingen exakt gleich, so daß die Federn nicht belastet werden / aus der Ruhelage gedehnt werden!

c) Schnellste Mode: muß auf den anderen senkrecht stehen

also $\vec{\alpha}_{III} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ äußere Pendel schwingen in eine Richtung, mittleres schwingt entgegengesetzt mit doppelter Amplitude, und beide Federn üben eine Kraft aus!

$\boxed{3}$

Bewegung eines Teilchens in Kugelkoordinaten,

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\theta = \text{const} \rightarrow \dot{\theta} = 0$$
$$\dot{\varphi} = \text{const} \rightarrow \dot{\varphi} = \omega$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta\, \omega^2$$

$V \equiv 0$ (es gibt kein Potential!)

---

check:
$$\dot{x} = \dot{r} \sin\theta \cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi + r\sin\theta(-\sin\varphi)\dot{\varphi}$$
$$\dot{y} = \dot{r} \sin\theta \sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = {} & \dot{r}^2 \sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\
& \cancel{+ 2\dot{r}\sin\theta\cos\varphi\, r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi} \quad (C) \\
& \cancel{- 2r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi\, r\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}} \quad (A) \\
& \cancel{- 2\dot{r}\sin\theta\cos\varphi\, r\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}} \quad (B) \\
& + \dot{r}^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\
& \cancel{+ 2\dot{r}\sin\theta\sin\varphi\, r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi} \quad (C) \\
& \cancel{+ 2\dot{r}\sin\theta\sin\varphi\, r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}} \quad (B) \\
& \cancel{+ 2r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi\, r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}} \quad (A) \\
& + \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 \cancel{- 2\dot{r}\cos\theta\, r\sin\theta\,\dot{\theta}} \quad (C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \dot{r}^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 \\
& + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2
\end{aligned}$$

$$\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = \dot r^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 + r^2 \dot\theta^2 \quad \checkmark$$

b) Bewegungsgl. → nur eine Koordinate, r!

$$L = \frac{1}{2} m \dot r^2 + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta\, \omega^2 = T$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot r\right) - m r \sin^2\theta\,\omega^2 = 0$$

$$m\ddot r - m r \sin^2\theta\,\omega^2 = 0$$

$$\ddot r - r \sin^2\theta\,\omega^2 = 0$$

$\theta < \frac{\pi}{2}$ angenommen wie nach Zeichnung → $\sin\theta > 0$ (sonst vertauschen sich die Rollen von $\sin\theta \leftrightarrow -\sin\theta$)

$$r(0) = r_0 \qquad \dot r(0) = v_0 = 0$$

Dgl. 2. Ordng: Ansatz $r(t) = A_0 e^{\lambda t}$

$$\ddot r(t) = \lambda^2 A_0 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - \sin^2\theta\,\omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm \sin\theta\,\omega$$

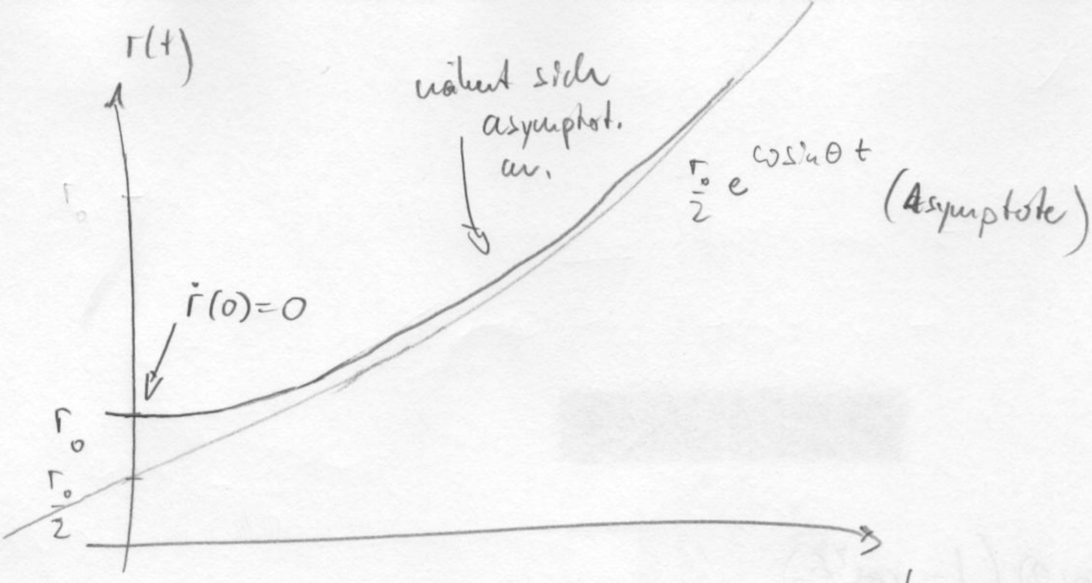
Allg. Lösg $\quad r(t) = A e^{+\sin\theta\,\omega t} + B e^{-\sin\theta\,\omega t}$

$$\dot r(t) = \sin\theta\,\omega\left(A e^{\sin\theta\,\omega t} - B e^{-\sin\theta\,\omega t}\right)$$

$$r(0) = A + B = r_0$$
$$\dot r(0) = \sin\theta\,\omega(A - B) = 0$$

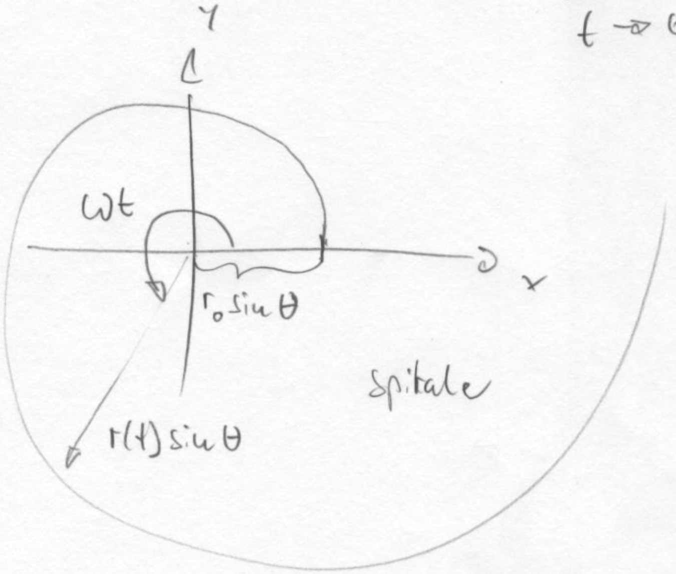
$$\to A = B = \frac{r_0}{2}$$

$$r(t) = \frac{r_0}{2}\left(e^{\omega\sin\theta\, t} + e^{-\omega\sin\theta\, t}\right)$$



für $t \to \infty$ $\quad r(t) \to \frac{r_0}{2} e^{\omega \sin\theta\, t}$

da $\lim_{t \to \infty} \frac{r_0}{2} e^{-\omega \sin\theta\, t} \to 0$

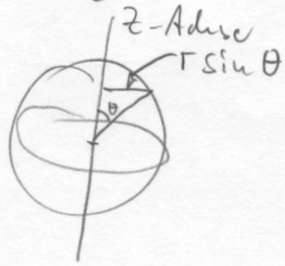


Radius wächst exponentiell!

4

a) Trägheitsmomente

Kugel: $M = \varrho_0 V = \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^R dr\, r^2$



$= \varrho_0 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \; \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R$

$= \varrho_0 4\pi \frac{1}{3} R^3$ ✓

$I_{zz} = \int d^3r \, (r^2 - z^2)$
$= \int d^3r \, (x^2 + y^2 + z^2 - z^2)$
$= \int d^3r \, (x^2 + y^2)$
$= \int d^3r \, (r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)$
$= \int d^3r \, r^2 \sin^2\theta$

$I_{zz} = \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^R dr\, r^2 \; (r^2 \sin^2\theta)$

$= \varrho_0 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\,(1 - \cos^2\theta) \int_0^R dr\, r^4$

$= \varrho_0 2\pi \left[\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\cos\theta = -1}^{\cos\theta = +1} \frac{1}{5} R^5$

$= \varrho_0 2\pi \left(2 - \frac{2}{3}\right) \frac{1}{5} R^5 = \varrho_0 2\pi \frac{4}{3} \frac{1}{5} R^5$

$= \varrho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} M R^2$ ✓

Zylinder:

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$M = \varrho_0 V = \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^R dr\, r$

$= \varrho_0 2\pi h \frac{1}{2} R^2 = \varrho_0 \pi R^2 h$ ✓

$I_{zz} = \varrho_0 \int d^3r \, (r^2 - z^2) = \varrho_0 \int d^3r \, (x^2 + y^2 + z^2 - z^2)$

$= \varrho_0 \int d^3r \, (x^2 + y^2) = \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^R dr\, r \, (r^2 \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\varphi)$

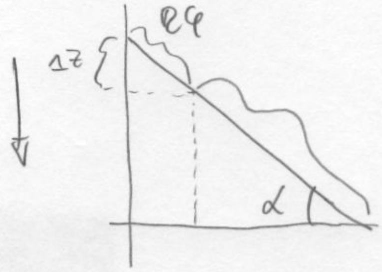
$= \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^R dr\, r^3 = \varrho_0 2\pi h \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} \varrho_0 \pi h R^2 R^2$

$= \frac{1}{2} M R^2$ ✓

b) Lagrange-Funktion

$g>0$

Potential: $V=-mgz$



Abrollstrecke auf der Schiefen Ebene

$l=R\varphi$

$\frac{\Delta z}{l}=\sin\alpha \quad \Delta z=R\varphi\sin\alpha$

$\frac{\Delta z}{R\varphi}=\sin\alpha$

$V=-mgR\varphi\sin\alpha$

Abroll-Bedingung: wenn sich der Körper um φ dreht, bewegt sich der Schwerpunkt entlang der schiefen Ebene um $l=R\varphi$

Geschwindigkeit des Schwerpunkts: $\dot{l}=R\dot{\varphi}$

Gesamte kinetische Energie

$$T=T_{Schwerpunkt}+T_{Rotation}$$
$$=\frac{1}{2}M\dot{l}^2+\frac{1}{2}I_{Roll}\dot{\varphi}^2$$
$$=\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I_{Roll}\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}(MR^2+I_{Roll})\dot{\varphi}^2$$

Kugel:

$$T_{Kugel}=\frac{1}{2}(MR^2+\frac{2}{5}MR^2)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}(\frac{7}{5}MR^2)\dot{\varphi}^2$$

$$T_{Zylinder}=\frac{1}{2}(MR^2+\frac{1}{2}MR^2)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}MR^2)\dot{\varphi}^2$$

$$L=T-V=T+mg\sin\alpha R\varphi$$

$$L_{Kugel}=\frac{1}{2}(\frac{7}{5}MR^2)\dot{\varphi}^2+Mg\sin\alpha R\varphi$$

$$L_{Zylinder}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}MR^2)\dot{\varphi}^2+Mg\sin\alpha R\varphi$$

c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} \overset{!}{=} 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{7}{5} M R^2 \dot{q}\right) - Mg \sin\alpha R \overset{!}{=} 0$

$\frac{7}{5} M R^2 \ddot{q} = Mg \sin\alpha R$

$\boxed{\ddot{q} = \frac{5}{7} \frac{g}{R} \sin\alpha}$ Kugel

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_Z}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} \overset{!}{=} 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2} M R^2 \dot{q}\right) - Mg \sin\alpha R \overset{!}{=} 0$

$\frac{3}{2} M R^2 \ddot{q} = Mg \sin\alpha R$

$\boxed{\ddot{q} = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin\alpha}$ Zylinder

Welche Beschleunigung ist größer?

$\frac{5}{7} = \frac{15}{21} > \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ $\Leftrightarrow$ Kugel rollt schneller
(schneller beschleunigt)
und ist eher unten!