$\boxed{1}$ Kraftfeld

a) drei äquivalente Bedingungen für ein konservatives Kraftfeld:

1) Rotation des Feldes verschwindet <u>überall</u>:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad \forall \vec{r}$$

2) Wegintegral über <u>jeden</u> geschlossenen, einfach zusammenhängenden Weg C verschwindet:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \forall C$$

3) Kraftfeld lässt sich als Gradient eines Potentials darstellen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

b) $$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r = (x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\, 2x = \frac{x}{r}$$

$$\partial_y\left(-\frac{y}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^2} - y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^2} - y\left(-2\frac{1}{r^3}\right)\frac{y}{r}$$
$$= -\frac{1}{r^2} + 2y^2\frac{1}{r^4} = -\frac{1}{r^2}\left(1 - 2\frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$\partial_x\left(\frac{x}{r^2}\right) = +\frac{1}{r^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right) = +\frac{1}{r^2} + x\left(-2\frac{1}{r^3}\right)\frac{x}{r} = +\frac{1}{r^2}\left(1 - 2\frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$\partial_x F_y - \partial_y F_z = \partial_x\left(\frac{x}{r^2}\right) - \partial_y\left(\frac{y}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\left(1 - 2\frac{x^2}{r^2} + 1 - 2\frac{y^2}{r^2}\right)$$
$$= \frac{2}{r^2}\left(1 - \frac{(x^2+y^2)}{r^2}\right) \underset{r \neq 0}{=} \frac{2}{r^2}(1-1) = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

$$\partial_y F_z - \partial_z F_y = 0$$

$$\partial_z F_x - \partial_x F_z = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{für} \quad r \neq 0$$

c) Wegintegral entlang eines Kreises in der x-y- Ebene mit Radius r_0

Parametrisierung in ebenen Polarkoordinaten:

$$\vec{r}(\varphi) = r_0 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi] \qquad \vec{r}(\varphi) = r_0 \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = r_0 \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r_0 \vec{e}_\varphi \qquad \vec{F}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}\in C} = \frac{1}{r_0^2}\begin{pmatrix} -r_0\sin\varphi \\ r_0\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0}\vec{e}_\varphi$$

Wegelement: $d\vec{r} = r_0 \vec{e}_\varphi \, d\varphi$

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{r_0} \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}_{=1} r_0$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

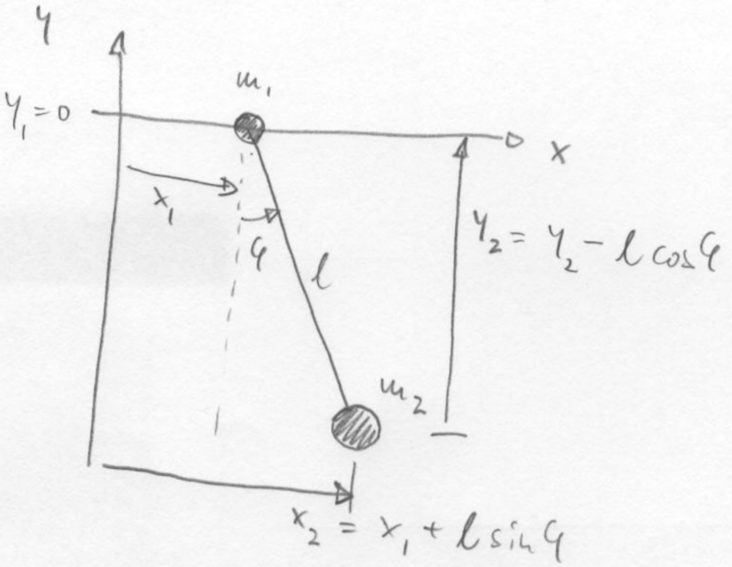
$\rightarrow$ Ergebnis ist unabhängig von r_0!

d) Das Kraftfeld ist nicht konservativ, da das geschlossene Wegintegral für den angegebenen Integrationsweg nicht verschwindet!

Das ist kein Widerspruch zum Ergebnis von b), da dort nur gezeigt wurde, dass $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ für $r \neq 0$, aber nicht für alle $\vec{r}$!

Prompt geht es schief für $\vec{r} = \vec{0}$ und für einen Integrationsweg C, der den Ursprung einschließt!

2 Ebenes Pendel mit gleitender Aufhängung



a) Lagrangefunktion

Koordinaten:

$m_1 \quad (x_1, y_1 = \text{const.})$

$m_2 \quad (x_2, y_2)$

verwende:

$$x_2 = x_1 + l\sin\varphi$$

$$y_2 = y_1 - l\cos\varphi \qquad y_1 = \text{const.}$$

damit gibt es zwei verallgemeinerte Koordinaten: x_1 und φ

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\cos\varphi\,\dot{\varphi} \qquad \dot{x}_2^2 = \dot{x}_1^2 + 2l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\dot{x}_1 + l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2$$

$$\dot{y}_2 = -l(-\sin\varphi)\dot{\varphi} = l\sin\varphi\,\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_2^2 = l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2$$

kinetische Energie: $\quad \dot{y}_1 = 0$ da $y_1 = \text{const.}$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_1^2 + 2l\cos\varphi\,\dot{x}_1\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\cos\varphi\,\dot{x}_1\dot{\varphi}$$

potentielle Energie $\quad y_1 \equiv \text{const.}$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g y_1 + m_2 g y_1 - m_2 g l\cos\varphi$$

$$= \underbrace{(m_1+m_2) g y_1}_{=\text{const}} - m_2 g l\cos\varphi \quad \to \text{konstanter Term kann weggelassen werden}$$

$$\to V = -m_2 g l\cos\varphi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\cos\varphi\,\dot{x}_1\dot{\varphi} + m_2 g l\cos\varphi$$

b) Ableitung der Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$ nicht von x_1 abhängig

→ x_1 ist zyklische Koordinate, assoziierter Impuls ist erhalten!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \cos\varphi\, \dot{\varphi}\right) = 0$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \cos\varphi\, \ddot{\varphi} - m_2 l \sin\varphi\, \dot{\varphi}^2 = 0$$

was ist das für eine Größe?

$$(m_1+m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \cos\varphi\, \dot{\varphi} = m_1 \dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\,\dot{\varphi})$$
$$= m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = M\dot{X}$$

⇨ Gesamtimpuls / Schwerpunktsimpuls in x-Richtung!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \cos\varphi\, \dot{x}_1\right) - \left[-m_2 l \sin\varphi\, \dot{x}_1 \dot{\varphi} - m_2 g l \sin\varphi\right] = 0$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \cos\varphi\, \ddot{x}_1 \underbrace{- m_2 l \sin\varphi\, \dot{\varphi}\, \dot{x}_1 + m_2 l \sin\varphi\, \dot{x}_1 \dot{\varphi}}_{=0}$$
$$+ m_2 g l \sin\varphi = 0$$

⇨ $$\boxed{m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \cos\varphi\, \ddot{x}_1 + m_2 g l \sin\varphi = 0}$$

c) Erhaltungsgrößen

1) keine explizite Zeitabhängigkeit des Potentials

→ Energie ist erhalten!

$E = T + V = \text{const.}$

2) keine Abhängigkeit des Potentials von x → keine Kraft in x-Richtung

→ Impuls in x-Richtung ist erhalten

siehe auch 1. Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \cos\varphi\,\dot{\varphi}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\right) = 0$$

→ Impulserhaltung in x-Richtung!

d) Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen.

1) $(m_1+m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \cos\varphi\,\dot{\varphi} = \text{const.}$

$\simeq (m_1+m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} = \text{const}$ mit $\cos\varphi \simeq 1 + \dots$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left((m_1-m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi}\right) = 0$

$$\boxed{(m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \ddot{\varphi} = 0}$$

2) $m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \cos\varphi\,\ddot{x}_1 + m_2 g l \sin\varphi = 0$

$$\simeq \boxed{m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 + m_2 g l \varphi = 0}$$

$\sin\varphi \simeq \varphi + \dots$
$\cos\varphi \simeq 1 + \dots$

Benutze Impulserhaltung, um $\ddot{x}_1$ zu eliminieren:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)} l \ddot{\varphi} \qquad (1)$$

1) in 2)

$$m_2 l^2 \ddot{q} + m_2 l \left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) l \ddot{q} + m_2 g l q = 0$$

$$\ddot{q}\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) + \frac{g}{l} q = 0 \qquad 1 - \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1+m_2-m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

$$\ddot{q}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) + \frac{g}{l} q = 0$$

$$\ddot{q} + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l} q = 0$$

→ Schwingungsgleichung mit Lösung (reell)

$$q(t) = A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t} \qquad \omega^2 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l}$$

(A, A^* anpassen an Anfangsbedingungen)

$$x_1(t) = x_1^{(0)} + v_1^{(0)} t - \frac{m_2}{m_1+m_2} l q(t)$$ mit zweimaliger Integration von Gleichung (1):

$$\int_0^t dt' \, \ddot{x}_1(t') = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1(t) - v_1^{(0)} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} l \dot{q}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = v_1^{(0)} - \frac{m_2}{m_1+m_2} l \dot{q}(t)$$

$$x_1(t) - x_1^{(0)} = v_1^{(0)} t - \frac{m_2}{m_1+m_2} l \underbrace{q(t)}_{\text{enthält bereits Anfangsbedingungen.}}$$

Betrachtung der Grenzfälle

1) $m_1 \to \infty$ $$\lim_{m_1\to\infty} \omega = \lim_{m_1\to\infty} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_0$$

→ mathematisches Pendel mit festem Aufhängepunkt

2) im Grenzfall $m_1 \to 0$ finden wir aus der 1) Gleichung

$$m_2 \ddot{x}_1 = -m_2 l \ddot{q}$$
$$\ddot{x}_1 = -l \ddot{q}$$

eingesetzt in 2). Gleichung:

$$\frac{\ddot{x}_1}{l} + \ddot{q} + \frac{g}{l} q = 0 \Rightarrow \underbrace{-\ddot{q} + \ddot{q}}_{=0} + \frac{g}{l} q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{l} q = 0$$

$\Rightarrow$ hat nur die Lösung $q \equiv 0$ (keine Schwingungsgl.!)

Interpretation: der masselose "Aufhängepunkt" folgt jeder "Auslenkung" des Pendels instantan, daher bleibt der "Auslenkungswinkel" q identisch $q \equiv 0$ und der Aufhängepunkt bewegt sich einfach mit!

3 Bewegung im Potential

$$U(r) = -\frac{c}{r^\alpha} \qquad \alpha c > 0 \quad \alpha \neq 0 \quad \alpha < 2$$

a) Kraft aus dem Potential

$$\vec F(\vec r) = -\vec\nabla U(r) = -\left(-c(-\alpha)\frac{1}{r^{\alpha+1}}\right)\vec\nabla r$$

$$= -c\alpha \frac{1}{r^{\alpha+1}}\vec e_r = -c\alpha\frac{1}{r^{\alpha+2}}\vec r$$

b) Definition des Drehimpulses:

$$\vec l = \vec r \times \vec p \qquad \vec p = m\dot{\vec r}$$

in ebenen Polarkoordinaten

$$\vec r = r\vec e_r \qquad \vec e_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec r} = \dot r\vec e_r + r\dot{\vec e}_r = \dot r\vec e_r + r\dot\varphi\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}}_{=\vec e_\varphi}$$

$$= \dot r\vec e_r + r\dot\varphi\vec e_\varphi$$

in Kugelkoordinaten: $\vec r = r\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$

für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (x-y-Ebene) $\vec r = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$ ✓

$$\vec r\times\dot{\vec r} = r\vec e_r\times(\dot r\vec e_r + r\dot\varphi\vec e_\varphi)$$

$$= r\dot r\underbrace{(\vec e_r\times\vec e_r)}_{=0} + r^2\dot\varphi\underbrace{(\vec e_r\times\vec e_\varphi)}_{=\vec e_z}$$

da Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet

da $\vec e_r \perp \vec e_\varphi$ und beide $\perp \vec e_z$
$|\vec e_r| = |\vec e_\varphi| = 1$

durch: $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \cos^2\varphi-(-\sin^2\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m r^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

c) In einem Zentralpotential oder einem Zentralkraftfeld ist der Drehimpuls erhalten:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \text{(Newton'sche Bewegungsgl.)}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{r}\, f(r) = 0$$

$=0$ da $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0}$

$\vec{F} = f(r)\, \vec{r}$ im Zentralkraftfeld

Daher verläuft die Bewegung immer in einer Ebene (senkrecht zu $\vec{l}$) und kann durch nur zwei Koordinaten (r, φ) beschrieben werden!

Kinetische Energie der Bewegung:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\, \vec{e}_r + r\dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2\, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r + 2\dot{r} r \dot{\varphi} \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi}_{=0} + r^2\dot{\varphi}^2\, \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

da $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\varphi$

$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

Potential (angegeben) $U = -\dfrac{c}{r^\alpha}$

$$\boxed{L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{c}{r^\alpha}}$$

Erhaltungsgrößen:

1) Drehimpuls (s.o.) da Potential rotationssymmetrisch (es nicht von φ abhängt) / Zentralpotential / Zentralkraftfeld (φ ist zyklische Koordinate)

2) Energie $E = T + U$, da Potential nicht explizit zeitabhängig!

d) Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ zyklische Koordinate,}$$

assoziierte erhaltene Impuls: Drehimpuls!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\varphi}\right) = 0$$

$$= 2 m r \dot{r} \dot{\varphi} + m r^2 \ddot{\varphi} = 0$$

$\Rightarrow$ Betrag $l = |\vec{l}| = m r^2 \dot{\varphi}$ des Drehimpulses ist erhalten.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m \dot{r}\right) - m r \dot{\varphi}^2 + c\alpha \frac{1}{r^{\alpha+1}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$m \ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 + c\alpha \frac{1}{r^{\alpha+1}} \stackrel{!}{=} 0$$

Eliminieren von $\dot{\varphi}$ mit Hilfe des Drehimpulses

$$l = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \qquad \dot{\varphi} = \frac{l}{m r^2}$$

$$m r \dot{\varphi}^2 = m r \left(\frac{l}{m r^2}\right)^2 = m r \frac{l^2}{m^2 r^4} = \frac{l^2}{m r^3}$$

$$\Rightarrow m \ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} + c\alpha \frac{1}{r^{\alpha+1}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad c\alpha > 0$$

e) stabile Kreisbahn: $r = r_0 \quad \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{l^2}{m r_0^3} + c\alpha \frac{1}{r_0^{\alpha+1}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad c\alpha \frac{1}{r_0^{\alpha+1}} = \frac{l^2}{m r_0^3}$$

$$\frac{r_0^3}{r_0^{\alpha+1}} = \boxed{\frac{l^2}{c\alpha m} = r_0^{2-\alpha}}$$

f) Kreisfrequenz des Umlaufs: $\dot{\varphi} = \omega_0 = \text{const.}$

$$l = m r_0^2 \dot{\varphi} = m r_0^2 \omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{l}{m r_0^2} \qquad l^2 = c\alpha m r_0^{2-\alpha} \quad \text{aus e)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{l^2}{m^2 r_0^4} = \frac{c\alpha m r_0^{2-\alpha}}{m^2 r_0^4} = \frac{c\alpha}{m} \frac{1}{r_0^{\alpha+2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\alpha}{m} \frac{1}{r_0^{\alpha+2}}} \quad ✓$$

g) Stabilität der Kreisbahn: Schwingungen in radialer Richtung

$$r = r_0 + \epsilon \qquad \dot{r} = \dot{\epsilon} \qquad \ddot{r} = \ddot{\epsilon} \qquad \text{da } \dot{r}_0 = 0 \quad \ddot{r}_0 = 0$$

$(r_0 = \text{const.})$

Einsetzen in die radiale Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\epsilon} - \frac{l^2}{m(r_0+\epsilon)^3} + c\alpha \frac{1}{(r_0+\epsilon)^{\alpha+1}} = 0$$

Entwicklung für kleine Auslenkungen $\epsilon \ll r_0$: $(1+x)^a = 1 + ax + \dots$

$$\frac{1}{(r_0+\epsilon)^3} = \frac{1}{r_0^3}\left(1+\frac{\epsilon}{r_0}\right)^{-3} = \frac{1}{r_0^3}\left(1 - 3\frac{\epsilon}{r_0} + \dots\right) \qquad \frac{\epsilon}{r_0} \ll 1$$

$$\frac{1}{(r_0+\epsilon)^{\alpha+1}} = \frac{1}{r_0^{\alpha+1}}\left(1+\frac{\epsilon}{r_0}\right)^{-(\alpha+1)} = \frac{1}{r_0^{\alpha+1}}\left(1-(\alpha+1)\frac{\epsilon}{r_0} + \dots\right)$$

Einsetzen der Entwicklung in die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\epsilon} - \frac{l^2}{m r_0^3}\left(1 - 3\frac{\epsilon}{r_0} + \dots\right) + \frac{c\alpha}{r_0^{\alpha+1}}\left(1 - (\alpha+1)\frac{\epsilon}{r_0} + \dots\right) = 0$$

$$m\ddot{\epsilon} \underbrace{- \frac{l^2}{m r_0^3} + \frac{c\alpha}{r_0^{\alpha+1}}}_{=0} + 3\frac{l^2}{m r_0^4}\epsilon - \frac{c\alpha(\alpha+1)}{r_0^{\alpha+2}}\epsilon = 0$$

(Bestimmungsgleichung für r_0!)

$$\boxed{m\ddot{\epsilon} + \left(3\frac{l^2}{mr_0^4} - \frac{c\alpha(\alpha+1)}{r_0^{\alpha+2}}\right)\epsilon = 0} \quad (*)$$

Bewegungsgleichung!

h) Wenn der Koeffizient von ϵ in $(*)$ positiv ist, dann ist $(*)$ eine Schwingungsgleichung mit Schwingungsfrequenz

$$\omega_R^2 = \frac{1}{m}\left(3\frac{l^2}{mr_0^4} - \frac{c\alpha(\alpha+1)}{r_0^{\alpha+2}}\right)$$

Einsetzen der Beziehung zwischen l und r_0 aus e)

$$l^2 = c\alpha m r_0^{2-\alpha}$$

$$\omega_R^2 = \frac{1}{m}\left(3\frac{c\alpha \cancel{m} r_0^{2-\alpha}}{\cancel{m} r_0^4} - \frac{c\alpha(\alpha+1)}{r_0^{\alpha+2}}\right) =$$

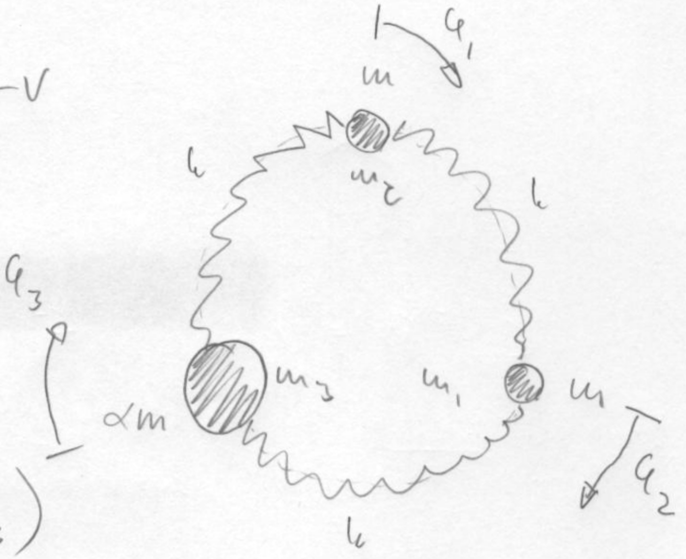
$$= \frac{1}{m}\left(3c\alpha\frac{1}{r_0^{\alpha+2}} - \frac{c\alpha(\alpha+1)}{r_0^{\alpha+2}}\right) = \frac{1}{m}\frac{1}{r_0^{\alpha+2}}c\alpha(2-\alpha) > 0$$

da $c\alpha > 0$ und $\alpha < 2$ nach Voraussetzung

$$\Rightarrow \omega_R = \sqrt{\frac{c\alpha(2-\alpha)}{m\, r_0^{\alpha+2}}} = \sqrt{2-\alpha}\,\omega_0$$

$\boxed{4}$

a) Lagrange-Funktion $L = T - V$



$$T = \frac{1}{2} m_1 (R\dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (R\dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (R\dot{q}_3)^2$$
$$= \frac{1}{2} m R^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \alpha \dot{q}_3^2)$$

$$V = \frac{1}{2} k R^2 (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2} k R^2 (q_2 - q_3)^2 + \frac{1}{2} k R^2 (q_3 - q_1)^2$$

Bogenlängen $s_1 = R q_1 \quad s_2 = R q_2 \quad s_3 = R q_3$

$\dot{s}_1 = R\dot{q}_1 \quad \dot{s}_2 = R\dot{q}_2 \quad \dot{s}_3 = R\dot{q}_3$

sind die relevanten Größen für Auslenkung und Bewegung

b) Bewegungsgleichungen

$$L = T - V = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \alpha \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2} k R^2 \left[(q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + (q_3 - q_1)^2 \right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \overset{!}{=} 0 \qquad i = 1,2,3$$

$$\frac{d}{dt}\left(m R^2 \dot{q}_1\right) + k R^2 \left[(q_1 - q_2) + (q_1 - q_3) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad m \ddot{q}_1 + k \left[2q_1 - q_2 - q_3 \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m R^2 \dot{q}_2\right) + k R^2 \left[(q_2 - q_1) + (q_2 - q_3) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad m \ddot{q}_2 + k \left[-q_1 + 2q_2 - q_3 \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha m R^2 \dot{q}_3\right) + k R^2 \left[(q_3 - q_2) + (q_3 - q_1) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha m \ddot{q}_3 + k \left[-q_1 - q_2 + 2q_3 \right] = 0$$

Bewegungsgleichungen in Matrixform

$$\begin{pmatrix} m & & \\ & m & \\ & & \alpha m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot q_1 \\ \ddot q_2 \\ \ddot q_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

c) Entkoppeln der Bewegungsgleichungen: Bestimmung der Eigenfrequenzen.

Ansatz: $\vec q\,(t) = e^{i\omega t}\,\vec a \qquad \ddot{\vec q} = -\omega^2 e^{i\omega t}\,\vec a$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -m\omega^2+2k & -k & -k \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ -k & -k & -\alpha m\omega^2+2k \end{pmatrix}\vec a \overset{!}{=} 0$$

(nach Multiplizieren mit $e^{-i\omega t} \neq 0$)

kann nur eine nicht-triviale Lösung haben ($\vec a \neq \vec 0$), wenn der Kern der linearen Abb. nicht verschwindet

$\Leftrightarrow$ mindestens ein Eigenwert dieser Matrix 0 ist

$\Leftrightarrow$ charakteristische Gleichung eine Nullstelle hat

$\Rightarrow$ ω^2 muß entsprechend bestimmt werden! Berechne die charakteristische Gleichung:

$$\det\begin{pmatrix} -m\omega^2+2k & -k & -k \\ -k & -m\omega^2+2k & -k \\ -k & -k & -\alpha m\omega^2+2k \end{pmatrix}$$

$$= (2k-m\omega^2)^2(2k-\alpha m\omega^2) - 2k^2(2k-m\omega^2) - k^2(2k-\alpha m\omega^2) - 2k^3$$

$$= \left[(2k-m\omega^2)^2 - k^2\right](2k-\alpha m\omega^2) - 2k^2(2k-m\omega^2) - 2k^3$$

$$= \left[(2k-m\omega^2-k)(2k-m\omega^2+k)\right](2k-\alpha m\omega^2) - 2k^2(2k-m\omega^2+k)$$

$$= (k-m\omega^2)(3k-m\omega^2)(2k-\alpha m\omega^2) - 2k^2(3k-m\omega^2)$$

$$= (3k-m\omega^2)\left[(k-m\omega^2)(2k-\alpha m\omega^2) - 2k^2\right]$$

$$= (3k-m\omega^2)\left[\underline{2k^2} - 2km\omega^2 - \alpha km\omega^2 + \alpha(m\omega^2)^2 \underline{-2k^2}\right]$$

$\det\left(\quad \right) =$

$= (3k - m\omega^2) \left[\alpha (m\omega^2)^2 - \alpha k (m\omega^2) - 2k (m\omega^2) \right] =$

$= (3k - m\omega^2)(m\omega^2) \left[\alpha m\omega^2 - k(2+\alpha) \right]$

Nullstellen:

2) $m\omega^2 = 3k \qquad \omega^2 = 3\frac{k}{m} = 3\omega_0^2 \qquad \omega_0^2 := \frac{k}{m} \qquad \omega = \sqrt{3}\,\omega_0$

1) $m\omega^2 = 0 \qquad \omega^2 = 0 \qquad \omega = 0$

3) $m\omega^2 = \frac{k}{\alpha}(2+\alpha) \quad \omega^2 = \frac{k}{m}\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) = \omega_0^2\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) \qquad \omega = \sqrt{1+\frac{2}{\alpha}}\,\omega_0$

d) Zugehörige Eigenschwingungen.

1) $\omega^2 = 0$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

auflösen: z.B. (1) − (2) um a_{13} zu eliminieren:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2k\,a_{11} - k a_{12} - k a_{13} = 0 \\ (2) \quad & -k a_{11} + 2k a_{12} - k a_{13} = 0 \\ \hline & 3k\,a_{11} - 3k a_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{11} = a_{12} \end{aligned}$$

Einsetzen in (1)

$$2k a_{11} - k a_{11} - k a_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{11} = a_{13} = a_{12}$$

$\vec{a}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad$ normiert $\quad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

gleichförmige Rotation alle Massen (gleiche Amplitude, gleiche Richtung!)

2) $\omega^2 = 3\frac{k}{m} \Leftrightarrow m\omega^2 = 3k$

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -k & -k & -k \\ -k & -k & -k \\ -k & -k & (2-3\alpha)k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

eliminiere a_{21} und a_{22}, z.B. (2) − (3):

$$(2) \quad -ka_{21} - ka_{22} - ka_{23} = 0$$

$$(3) \quad -ka_{21} - ka_{22} + (2-3\alpha)ka_{23} = 0$$

$$(-1-2+3\alpha)k\, a_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{23} = 0$$

dann aus (1) oder (2):

$$-ka_{21} - ka_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{21} = -a_{22}$$

$$\vec{a}_2 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{normiert:} \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schwingung der "kleinen" Massen gegeneinander mit gleicher Amplitude

3) $\omega^2 = \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\frac{k}{m} \Leftrightarrow m\omega^2 = \frac{1}{\alpha}(\alpha+2)k$

$-m\omega^2 + 2k = (-1 - \frac{2}{\alpha} + 2)k = (1 - \frac{2}{\alpha})k$

$-\alpha m\omega^2 + 2k = (-2 - \alpha + 2)k = -\alpha k$

$$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (1-\frac{2}{\alpha})k & -k & -k \\ -k & (1-\frac{2}{\alpha})k & -k \\ -k & -k & -\alpha k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

eliminiere a_{33} aus (1) und (2): (1) − (2):

$$(1) \quad (1-\tfrac{2}{\alpha})ka_{31} - ka_{32} - ka_{33} = 0$$

$$(2) \quad -ka_{31} + (1-\tfrac{2}{\alpha})ka_{32} - ka_{33} = 0$$

$$(2-\tfrac{2}{\alpha})a_{31} - (2-\tfrac{2}{\alpha})a_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{31} = +a_{32}$$

bestimme a_{33} aus (3)

$$-ka_{31} - ka_{32} - \alpha k\, a_{33} = 0$$

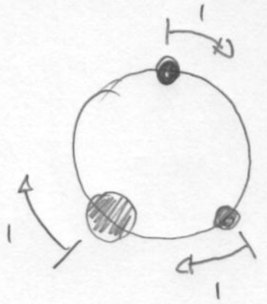
$$-2a_{31} = \alpha a_{33} \quad \Rightarrow \quad a_{33} = -\frac{2}{\alpha} a_{31}$$

$$\vec{a}_3 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{normiert:} \quad \vec{a}_3 = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(2+\frac{4}{\alpha^2}\right)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_3|^2 = 1 + 1 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 = 2 + \frac{4}{\alpha^2} = \frac{4}{\alpha^2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

Skizze der Schwingungsform:

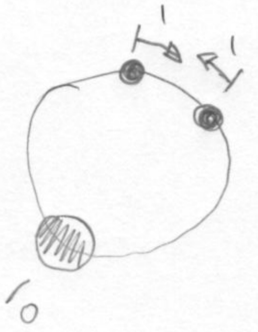
1)



gleichförmige Rotation
alle Massen in die gleiche Richtung, mit gleicher Amplitude

$\omega = 0$

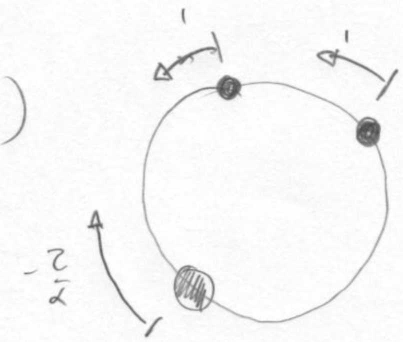
2)



Schwingung der "kleinen" Massen gegeneinander mit gleicher Amplitude, Masse M in Ruhe.

$\omega = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$

3)



Schwingung der "kleinen" Massen m mit gleicher Amplitude und Phase, entgegen der Schwingung der "großen" Masse M mit Amplitude $\frac{2}{\alpha}$ und entgegengesetzter Phase.

---

e) Spezielle Fälle:

$\alpha = 1$

1) $\omega = 0$ $\quad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ unverändert

2) $\omega = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ unverändert

3) $\omega = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad \vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ ist jetzt entartet mit 2) und ich kann eine beliebige Basis im von $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ aufgespannten Unterraum wählen

e) Rotationssymmetrie der auf dem Kreis angeordneten Massen:

wenn man alle Massen um den gleichen Winkel q verschiebt, ändert sich nichts an der Energie des Systems, da keine Feder aus der Ruhelage ausgelenkt wird!

Erhaltungsgröße: Drehimpuls!

Gesamtdrehimpuls $\quad mR^2(2+\alpha)\,\dot{q} = \text{const.}$

$$\text{mit } q_1 = q_2 = q_3 = q \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

zugehörige Eigenfrequenz: $\quad \omega = 0$

„Anregung" des Systems, die keine Energie kostet!