Klausur

Prof. Ratz **Quantenmechanik 1** **01.08.2013**

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

- Diese Klausur beinhaltet 5 Fragen und 90 Punkte auf 7 Seiten.
- Die Punkte sind jeweils am Rand des Blattes angegeben.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Schreiben Sie Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** lesbar auf jedes Blatt.
- Schreiben Sie die Antworten in die dafür vorgesehenen **Kästen** und benutzen Sie die **Konventionen der Vorlesung**.

Viel Erfolg!

Hilfe: Die Paulimatrizen sind:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe	Punkte	Korrektor
1		
2		
3		
4		
5		
Σ		

1. **Wissensfragen**

1 (a) Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung in drei Dimensionen in Ortsdarstellung für ein freies Teilchen?

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{r},t)\left(= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r},t)\right)$$

1 (b) Es sei $\Psi(\vec{r},t)$ die Wellenfunktion einer Lösung der freien Schrödingergleichung. Definieren Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte.

$$\vec{j}(\vec{r},t) := \frac{\hbar}{2mi}\left[\Psi^*(\vec{r},t)\left(\vec{\nabla}\Psi(\vec{r},t)\right) - \left(\vec{\nabla}\Psi^*(\vec{r},t)\right)\Psi(\vec{r},t)\right]$$

2 (c) Sei $\boldsymbol{O}$ ein Operator einer Observablen. Wie berechnet sich der Mittelwert von $\boldsymbol{O}$ in Orts- und Impulsdarstellung?

$$\langle \boldsymbol{O}\rangle = \int d^3r\,\Psi^*(\vec{r},t)\,\boldsymbol{O}\Psi(\vec{r},t) = \int d^3p\,\phi^*(\vec{p},t)\,\boldsymbol{O}\phi(\vec{p},t)$$

1 (d) Wie hängen die Energieeigenzustände E_n im Wasserstoffatom von n ab? Es reicht, die Proportionalität anzugeben.

$$E_n \propto -\frac{1}{n^2}$$

2 (e) Wie lautet das Ehrenfestsche Theorem für einen allgemeinen Operator $\boldsymbol{A}$?

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{A}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\boldsymbol{H},\boldsymbol{A}]\rangle + \left\langle\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right\rangle$$

2 (f) Wie lautet die Unschärferelation für hermitesche Operatoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$?

$$(\Delta \boldsymbol{A})\cdot(\Delta \boldsymbol{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}]\rangle|$$

2 (g) Betrachten Sie den Drehimpulseigenzustand $|\ell,m\rangle$. Was sind die Eigenwerte der Drehimpulsoperatoren $\boldsymbol{L}^2$ und $\boldsymbol{L}_z$?

$$\boldsymbol{L}^2|\ell,m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell,m\rangle$$

$$\boldsymbol{L}_z|\ell,m\rangle = \hbar m|\ell,m\rangle$$

2 (h) Was sind die Kommutatoren $[\sigma_i,\sigma_j]$ und die Antikommutatoren $\{\sigma_i,\sigma_j\}$?

$$[\sigma_i,\sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$\{\sigma_i,\sigma_j\} = 2\mathbb{1}\delta_{ij}$$

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

$\boxed{2}$ (i) Können unitäre Operatoren rein imaginäre Eigenwerte besitzen und wenn ja, welche?

Ja, i und $-$i!

$\boxed{1}$ (j) Unter welcher Bedingung beschreibt ein hermitescher Operator $\boldsymbol{A}$ eine Erhaltungsgröße?

$$[\boldsymbol{H},\boldsymbol{A}] \stackrel{!}{=} 0$$

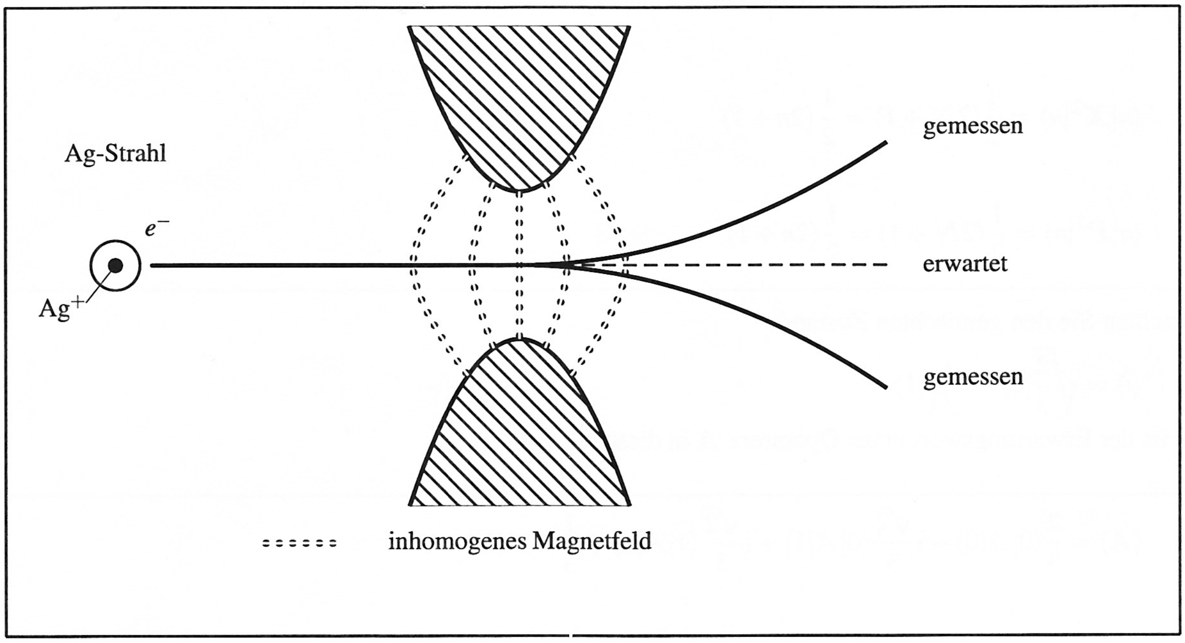
$\boxed{2}$ (k) Wie lautet das Parsevalsche Theorem für zwei $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$–Funktionen f und g?

$$\int \mathrm{d}^3 r f(\vec{r}) g^*(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 k \hat{f}(\vec{k}) \hat{g}^*(\vec{k})$$

$\boxed{2}$ (l) Betrachten Sie ein System, das durch einen ungestörten Hamiltonoperator $\boldsymbol{H}_0$ und einen Störterm $\lambda \boldsymbol{V}$ beschrieben wird: $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \lambda \boldsymbol{V}$. Es seien $\left|n^{(0)}\right\rangle$ Eigenzustände von $\boldsymbol{H}_0$ mit Energie $E_n^{(0)}$. Wie lautet die erste Korrektur $\left|n^{(1)}\right\rangle$ zum Eigenzustand $|n\rangle$ in Störungstheorie für **nicht entartete** Zustände?

$$\left|n^{(1)}\right\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m^{(0)} | \lambda \boldsymbol{V} | n^{(0)} \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \left|m^{(0)}\right\rangle$$

$\boxed{6}$ 2. Skizzieren Sie den Aufbau des **Stern–Gerlach Versuchs**. Kennzeichnen Sie den in einer Quantentheorie ohne Spin erwarteten und den tatsächlichen Verlauf.



3. **Eindimensionaler harmonischer Oszillator**

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator, beschrieben durch die dimensionslosen Operatoren $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{P}$ mit $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{P}] = \mathrm{i}$.

4 (a) Es seien

$$\boldsymbol{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{X} \mp \mathrm{i}\boldsymbol{P});$$

Drücken Sie $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{X}^2$ und $\boldsymbol{P}^2$ in $\boldsymbol{a}_-$ und $\boldsymbol{a}_+$ aus.

(***Hinweis:*** *für die nächste Teilaufgabe ist es hilfreich, Produkte $\boldsymbol{a}_-\boldsymbol{a}_+$ durch Nutzen von Kommutatorrelationen zu eliminieren.*)

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_+ + \boldsymbol{a}_-); \qquad \boldsymbol{P} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_+ - \boldsymbol{a}_-)$$

$$\boldsymbol{X}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_+ + \boldsymbol{a}_-)\cdot(\boldsymbol{a}_+ + \boldsymbol{a}_-) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_+\boldsymbol{a}_+ + \boldsymbol{a}_-\boldsymbol{a}_+ + \boldsymbol{a}_+\boldsymbol{a}_- + \boldsymbol{a}_-\boldsymbol{a}_-)$$

$$= \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{a}_+)^2 + 2\boldsymbol{a}_+\boldsymbol{a}_- + 1 + (\boldsymbol{a}_-)^2\right)$$

$$\boldsymbol{P}^2 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_+ - \boldsymbol{a}_-)\cdot(\boldsymbol{a}_+ - \boldsymbol{a}_-) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_+\boldsymbol{a}_+ - \boldsymbol{a}_-\boldsymbol{a}_+ - \boldsymbol{a}_+\boldsymbol{a}_- + \boldsymbol{a}_-\boldsymbol{a}_-)$$

$$= -\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{a}_+)^2 - (2\boldsymbol{a}_+\boldsymbol{a}_- + 1) + (\boldsymbol{a}_-)^2\right)$$

6 (b) Berechnen Sie für die Energieeigenzustände $|n\rangle$ die Erwartungswerte $\langle n|\boldsymbol{X}|n\rangle$, $\langle n|\boldsymbol{X}^2|n\rangle$, $\langle n|\boldsymbol{P}|n\rangle$ sowie $\langle n|\boldsymbol{P}^2|n\rangle$.

$$\langle n|\boldsymbol{X}|n\rangle = \langle n|\boldsymbol{P}|n\rangle = 0 \qquad \text{(Ungerade in den } \boldsymbol{a}_\pm\text{)}$$

$$\langle n|\boldsymbol{X}^2|n\rangle = \frac{1}{2}\langle 2\boldsymbol{N}+1\rangle = \frac{1}{2}(2n+1)$$

$$\langle n|\boldsymbol{P}^2|n\rangle = \frac{1}{2}\langle 2\boldsymbol{N}+1\rangle = \frac{1}{2}(2n+1)$$

4 (c) Betrachten Sie den gemischten Zustand

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}|1\rangle.$$

Was ist der Erwartungswert eines Operators $\boldsymbol{A}$ in diesem Zustand?

$$\langle \boldsymbol{A}\rangle = \frac{2}{3}\langle 0|\boldsymbol{A}|0\rangle - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 0|\boldsymbol{A}|1\rangle + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 1|\boldsymbol{A}|0\rangle + \frac{1}{3}\langle 1|\boldsymbol{A}|1\rangle$$

$$= \frac{2}{3}\langle 0|\boldsymbol{A}|0\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{3}\Im\left[\langle 0|\boldsymbol{A}|1\rangle\right] + \frac{1}{3}\langle 1|\boldsymbol{A}|1\rangle$$

Name: ______________ Matrikelnummer: ______________

10 (d) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}^2$, $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{P}^2$ im Zustand $|\psi\rangle$.

$$\langle 0|\boldsymbol{X}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \langle 0|\boldsymbol{P}|1\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 0|\boldsymbol{X}^2|1\rangle = \langle 0|\boldsymbol{P}^2|1\rangle = 0$$

$$\langle\psi|\boldsymbol{X}|\psi\rangle = 0$$

$$\langle\psi|\boldsymbol{X}^2|\psi\rangle = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\Im 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\langle\psi|\boldsymbol{P}|\psi\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3}\Im\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$\langle\psi|\boldsymbol{P}^2|\psi\rangle = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\Im 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

4 (e) Was ist das Unschärfeprodukt $\Delta x \cdot \Delta p$ für den Zustand $|\psi\rangle$?
(***Hinweis:*** *Wenn Sie die vorherige Teilaufgabe nicht lösen konnten, benutzen Sie stattdessen folgende Erwartungswerte:*

$$\langle\boldsymbol{X}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \langle\boldsymbol{X}^2\rangle = \frac{3}{4}, \qquad \langle\boldsymbol{P}\rangle = 0, \qquad \langle\boldsymbol{P}^2\rangle = \frac{2}{3}.)$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{5}{6} - 0^2 = \frac{5}{6}, \qquad (\Delta p)^2 = \frac{5}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{18}$$

$$\Longrightarrow \qquad \Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{18}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{35}{27}} \approx 0.569$$

$$\text{FF} - \text{Rechnung}: (\Delta x)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}, \qquad (\Delta p)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{\frac{22}{60}} = \sqrt{\frac{11}{30}}$$

4. **Baker-Campbell-Hausdorff-Theorem**

Betrachten Sie zwei Operatoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, die mit ihrem Kommutator vertauschen:

$$[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]] = 0 = [\boldsymbol{B},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]. \tag{1}$$

8 (a) Betrachten Sie den Operator $\boldsymbol{F}(\lambda) = \exp(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\exp(-\lambda\boldsymbol{A})$. Wie lässt sich $\boldsymbol{F}(\lambda)$ ohne Exponentialfunktion schreiben?

(***Hinweis:*** *Entwickeln Sie $\boldsymbol{F}(\lambda)$ in eine Taylorreihe um $\lambda = 0$ und nutzen Sie Gleichung 1.*)

$$\boldsymbol{F}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{F}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^n}\right|_{\lambda=0} \lambda^n$$

$$= \boldsymbol{B} + \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}\lambda + \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}\lambda^2}_{=0} + \underbrace{O(\lambda^3)}_{=0}$$

$$= \boldsymbol{B} + \lambda[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$$

8 (b) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{G}(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}}$ der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}\lambda} = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{G}$$

genügt. Wie lautet $\boldsymbol{X}$?

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}} + \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B} = \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}} + \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}} = \underbrace{\left(\boldsymbol{A}+\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{A}}\right)}_{=\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{G}$$

4 (c) Man kann $\boldsymbol{G}(\lambda)$ auch als

$$\exp\left(\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}+\lambda^2[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]/2\right)$$

schreiben (ohne Beweis). Was ergibt sich für $\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ für ein Ausdruck?

$$\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{B}} = e^{\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}}\mathrm{e}^{\lambda^2[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]/2}$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\mathrm{e}^{-[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]/2}$$

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

5. **Potentialproblem**

Betrachten Sie ein eindimensionales Potentialproblem, welches durch das Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m\cosh^2(ax)},$$

wobei $a > 0$ eine Konstante und $\cosh(x) = 1/2\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ der Kosinus Hyperbolicus ist.

10 (a) Zeigen Sie, dass $\psi_0(x) = \frac{A}{\cosh(ax)}$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung für dieses Problem löst und bestimmen Sie die Energie E_0 des Zustands.
(***Hinweis:*** *Die Ableitungen der Hyperbelfunktionen sind* $\partial_x^2 \sinh(x) = \partial_x \cosh(x) = \sinh(x)$. *Außerdem gilt die Identität* $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - \frac{\hbar^2 a^2}{m\cosh^2(ax)} - E_0\right)\frac{A}{\cosh(ax)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$+\frac{\hbar^2 A}{2m}\partial_x \frac{\tanh(ax)}{\cosh(ax)}a - \frac{\hbar^2 a^2 A}{m\cosh^3(ax)} = \frac{E_0 A}{\cosh(ax)}$$

$$\frac{\hbar^2 A a^2}{2m}\left(-\frac{\tanh^2(ax)}{\cosh(ax)} + \frac{1}{\cosh^3(ax)}\right) - \frac{\hbar^2 a^2 A}{m\cosh^3(ax)} = \frac{E_0 A}{\cosh(ax)}$$

$$\frac{\hbar^2 a^2}{2m}\left(\frac{1}{\cosh^2(ax)} - \tanh^2(ax)\right) - \frac{\hbar^2 a^2}{m\cosh^2(ax)} = E_0$$

$$-\frac{\hbar^2 a^2}{2m}\underbrace{\left(\frac{1}{\cosh^2(ax)} + \tanh^2(ax)\right)}_{=1} = E_0 = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}$$

6 (b) Wie muss A gewählt werden, damit ψ_0 auf 1 normiert ist?

$$\int \psi_0^*(x)\psi_0(x)\mathrm{d}x = A^2\int \frac{1}{\cosh^2(ax)}\mathrm{d}x = \frac{A^2}{a}\left[\tanh(ax)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2A^2}{a} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow A = \sqrt{a/2}$$