Diplomvorprüfung zur Experimentalphysik 2

13. September 2007

Aufgabe 1 (6 Punkte) Betrachten Sie ein thermisch isoliertes System des Gesamtvolumens $3V$, in dem eine thermisch leitfähige Wand Volumina V und $2V$ voneinander trennt. Im größeren Volumen herrsche der Druck $3p$, während im kleineren Volumen der Druck p herrsche. Die Temperatur T sei in beiden Teilvolumina gleich. Die Trennwand sei nun frei verschiebbar. Berechnen Sie die gesamte innere Energie, die gesamte Änderung der Entropie, sowie Temperatur und Druck des Gases, nachdem sich das Gleichgewicht eingestellt hat.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Nehmen Sie an, die Energie eines Teilchens lasse sich durch den Ausdruck $E(z) = az^2$ beschreiben, wobei z eine Koordinate oder der Impuls seien, die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können.

(a) Berechnen Sie die mittlere Energie $\bar{E}$ der Teilchen in diesem System unter der Annahme, dass diese der Boltzmann-Statistik gehorchen.

(b) Beschreiben Sie das Gleichverteilungsprinzip und diskutieren Sie kurz dessen Relevanz in Bezug auf das Ergebnis von (a).

Aufgabe 3 (6 Punkte) Eine metallische Hohlkugel mit Ladung Q wird in der Mitte mit einem infinitessimal schmalen Schnitt in zwei Hälften getrennt, ohne dass sich die Gesamtladung dabei ändert. Geben Sie die Kraft $\vec{F}$ an mit der die Kugelhälften zusammengehalten werden müssen. Hinweis: die Kraft $d\vec{F}$ auf das Flächenelement $d\vec{A}$ ist gegeben durch $d\vec{F} = \sigma^2 d\vec{A}/2\epsilon_0$, wobei σ die Flächenladungsdichte ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Ein unendlich langer Draht besitze in der Mitte eine halbkreisförmige Abweichung mit Radius $r = 1\,\mathrm{cm}$. Im Draht fließt ein Strom $I = 1\,\mathrm{A}$ (im Halbkreis im Uhrzeigersinn). Berechnen Sie das magnetische Feld im Mittelpunkt des Halbkreises.

Aufgabe 5 (8 Punkte) Eine Leiterschleife mit Fläche A, Trägheitsmoment Θ und elektrischem Widerstand R hänge an einem Torsionsfaden mit Federkonstante k in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_y$. Die Schleife hänge in der y-z Ebene und kann sich um die z-Achse drehen. Nun wird die Schleife um einen Winkel α ausgelenkt. Vernachlässigen Sie die Induktivität der Schleife und nehmen Sie an, dass der Torsionsfaden elektrisch isolierend sei.

(a) Drücken Sie die Bewegungsgleichung der Leiterschleife mit Hilfe der hier angegebenen Parameter aus.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung und skizzieren die Bewegung der Leiterschleife unter Angabe aller wichtigen Zeitkonstanten für den Fall, dass R groß ist.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Kapazität eines quadratischen Plattenkondensators mit Platten der Kantenlänge L und Abstand d. Randeffekte sind zu vernachlässigen.

(b) Nun wird der geladene Kondensator über einen Widerstand R entladen. Zeigen Sie, dass die gesamte elektrische Feldenergie im Widerstand dissipiert wird.

Aufgabe 7 (5 Punkte) Ein Astronaut fliegt mit Geschwindigkeit $v = 0.8c$ an der Erde vorbei. Zum Zeitpunkt des Vorbeiflugs starten der Astronaut im Raumschiff und die Mannschaft auf der Basisstation auf der Erde eine Uhr. Die Mannschaft auf der Erde beobachtet die Uhr des Astronauten mit Hilfe eines Teleskops, während der Astronaut die Uhr auf der Erde mit einem Teleskop beobachtet.

(a) Welche Zeit ist auf der Erde vergangen, wenn die Uhr des Astronauten von der Erde aus betrachtet, eine Stunde anzeigt?

(b) Welche Zeit ist für den Astronauten vergangen, wenn die Uhr auf der Erde vom Astronauten aus betrachtet, eine Stunde anzeigt?

Hinweise

$$\int_0^x x^n \exp(-kx^2)dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2k^{\frac{n+1}{2}}} \tag{1}$$

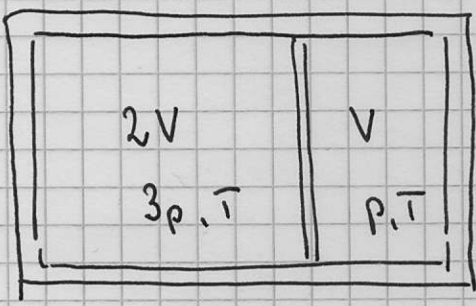
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{2}$$

$$\Gamma(3/2) = 0.88623 \tag{3}$$

$$\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1) \tag{4}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \tag{5}$$

Aufgabe 1



Trennwand wird losgelassen

~~Ansatz~~ Anzahl Mol in 1 und 2 : n_1 , n_2

mit idealem Gasgesetz * erhält man * $pV = nRT$

$$6pV = n_1 RT \quad (**) \quad \text{und} \quad pV = n_2 RT \quad (**)$$

System ist thermisch isoliert

daher <u>Endtemperatur</u>: $T_f = T$ (keine Änd. der inneren Energie)

nun Enddruck aus: $p_f \, 3V = (n_1 + n_2) RT$

$$\Rightarrow p_f = \frac{(n_1 + n_2) RT}{3V} = \frac{p}{3}\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{7}{3} p$$

Änderung der Entropie (quasi-thermischer Vorgang)

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{1}{T}\int p_1 \, dV_1 + \frac{1}{T}\int p_2 \, dV_2$$

mit $p_1 = \frac{n_1 RT}{V_1}$ $\qquad$ $p_2 = \frac{n_2 RT}{V_2}$

$$\Delta S = n_1 R \int_{2V}^{V_1} \frac{dV}{V} + n_2 R \int_{V}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$= n_1 R \ln \frac{V_1}{2V} + n_2 R \ln \frac{V_2}{V}$$

mit $V_1 + V_2 = 3V$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = 6 \qquad \text{(im Gleichgewicht)}$$

aus **

folgt $V_1 = 6V_2 = \frac{18}{7} V$

damit $\Delta S = n_1 R \ln \frac{9}{7} + n_2 R \ln \frac{3}{7} \simeq p\frac{V}{T}$

Aufgabe 2

Achtung: hier System mit 1 Freiheitsgrad

Boltzmann-Faktor $f(z) \propto \exp\left(-\frac{E}{k_T}\right)$

$$= \exp\left(-\frac{az^2}{k_T}\right)$$

(a) mittlere Energie per Definition

$$\bar{E} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} N f(z)\, E(z)\, dz}{N \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz}$$

dabei $N = 1$

$f(z) =$ siehe oben

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2/k_T}\, az^2\, dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2/k_T}\, dz}$$

$$= \frac{2a \int_0^{\infty} e^{-az^2/k_T}\, z^2\, dz}{2 \int_0^{\infty} e^{-az^2/k_T}\, dz}$$

$$= \frac{a\, \Gamma(3/2) \Big/ \left(\frac{a}{k_BT}\right)^{3/2}}{\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\frac{a}{k_BT}}}} = \frac{(k_BT)^{3/2}}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a} k_BT}}$$

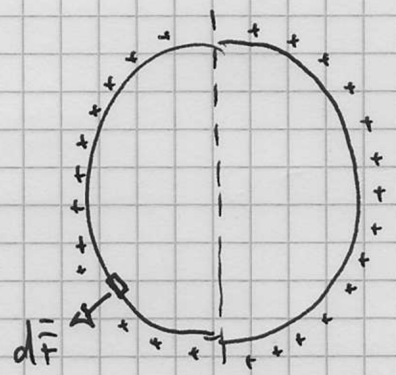
$$\bar{E} = \frac{1}{2} k_BT$$

(b) Gleichverteilungsprinzip :

pro Freiheitsgrad $\frac{1}{2} k_B T$

Dies entspricht genau dem Ergebnis aus (a)

Aufgabe 3



auseinanderschneiden der Hohlkugel

$\to$ keine Veränderung der Ladungsvtlg.

Kraft auf Ladung auf Kugeloberfläche laut

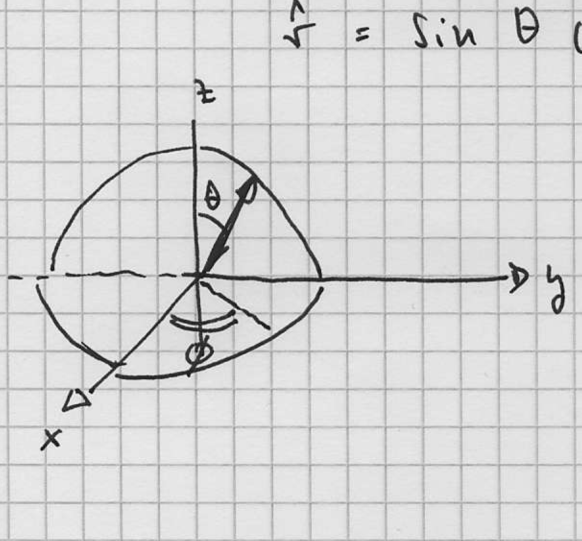
Aufgabe $\quad d\bar{F} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, d\bar{A}$

σ: Flächenladungsdichte

Für Berechnung der resultierenden Kraft zw. Halbkugeln aufintegrieren von $d\bar{F}$. Dazu sphärische Kugelkoord.

$d\bar{A} = R^2 \sin\Theta \, d\Theta \, d\phi \, \hat{r}$

$\hat{r} = \sin\Theta \cos\phi \, \hat{x} + \sin\Theta \sin\varphi \, \hat{y} + \cos \hat{z}$



$$\bar{F} = \bar{F}_z = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} R^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{z} \qquad *$$

$$= \frac{\sigma^2 R^2}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{z}$$

$$= \frac{\sigma^2 R^2}{2\varepsilon_0} 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, \hat{z}$$

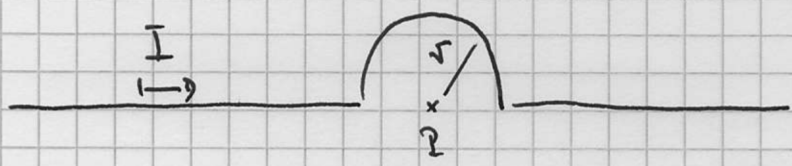
$$= \frac{\sigma^2 R^2 \pi}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta \right]_0^{\pi/2} \hat{z}$$

$$= \frac{\sigma^2 R^2 \pi}{2\varepsilon_0} \hat{z} = \frac{Q}{32 \varepsilon_0 \pi R^2} \hat{z}$$

* z - Achse so gewählt, dass Schnitt senkrecht

zu z

Aufgabe 4



gerade Drahtstücke tragen nicht zu $\bar{B}$ am Ort P bei

Biot Savart: $d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\bar{l} \times \bar{r}}{r^3}$

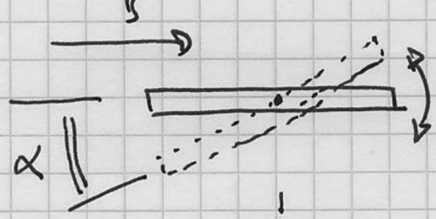
$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4r}$$

mit $I = 1A$, $r = 10^{-2} m$

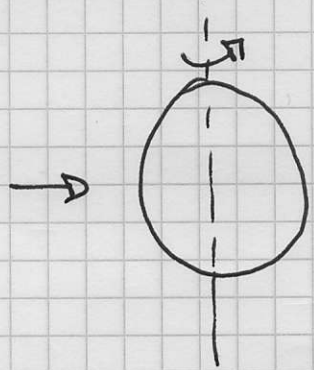
$$B = 3.14 \times 10^{-5}\ T$$

Für den Strom in der gezeigten Richtung ist das Feld in die Ebene hinein gerichtet.

(a) von oben



von Seite



Laut Aufgabe:
$\vec{B}$-Feld in y-Rtg.
Rotation um z-Achse

für Winkel α ist Fluß durch Schleife

$$\phi = BA \sin\alpha$$

dann induziert elektromotorische Kraft

$$U = -\dot{\phi} = -BA \cos\alpha \, \dot{\alpha}$$

und Strom $\quad I = \frac{U}{R} = -\frac{BA}{R}\dot{\alpha}\cos\alpha$

magnetisches Moment der Schleife

$$m = iA = -\frac{BA^2 \cos\alpha}{R}\dot{\alpha}$$

dadurch entsteht ein Drehmoment

$$\tau_m = |\vec{m} \times \vec{B}| = \frac{-B^2A^2\cos^2\alpha}{R}\dot{\alpha}$$

Schleife hat Trägheitsmoment Θ

Draht erzeugt Drehmoment $k\alpha$

dann Bewegungsgleichung

$$\Theta \ddot{\alpha} + \frac{B^2 A^2 \cos^2\alpha}{R} \dot{\alpha} + k\alpha = 0$$

für kleine α folgt $\cos^2\alpha \approx 1$

$$\Theta \ddot{\alpha} + \frac{B^2 A^2}{R} \dot{\alpha} + k\alpha = 0$$

(b) Ansatz $\alpha = e^{Ct}$

damit $\Theta C^2 + \frac{B^2 A^2}{R} C + k = 0$

dann $$C = \frac{1}{2\Theta}\left[-\frac{B^2A^2}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{B^2A^2}{R}\right)^2 - 4\Theta k} \right]$$

$$= -\frac{B^2A^2}{2\Theta R} \pm i \sqrt{\frac{k}{\Theta} - \left(\frac{B^2A^2}{2\Theta R}\right)^2}$$

definiere: $$\beta = \frac{B^2A^2}{2\Theta R}$$

$$\gamma = \sqrt{-\beta^2 + \frac{k}{\Theta}}$$

mit diesen Substitutionen ergeben sich zwei Lösungen

$$C_1 = -\beta + j\gamma \qquad C_2 = -\beta - j\gamma$$

allg. Lösung der Bewegungsgleichung

$$\alpha(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 \cos\gamma t + A_2 \sin\gamma t\right]$$

Startbedingungen $\quad \alpha(t=0) = \alpha_0$

$$\dot{\alpha}(t=0) = 0$$

ergeben $\quad A_1 = \alpha_0$

$$A_2 = \frac{\beta}{\gamma} A_1 = \frac{\beta}{\gamma}\alpha_0$$

damit gedämpfte Schwingung

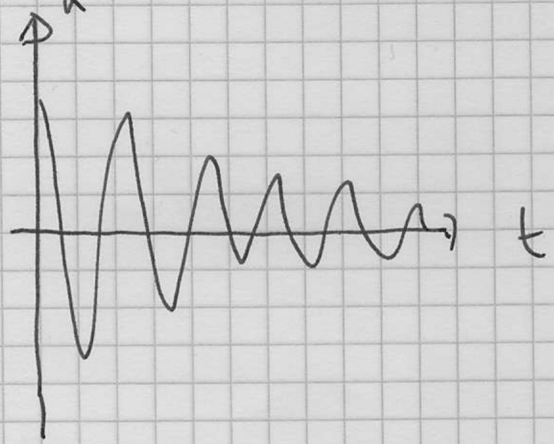
$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\beta t}\left[\cos\gamma t + \frac{\beta}{\gamma}\sin\gamma t\right]$$

für oszillatorische Lösung benötigt:

$$k > \beta^2\Theta = \frac{(B^2A^2)^2}{4R^2\Theta}$$

(b) für größere R wird β kleiner bis schließlich $\beta \ll \gamma$

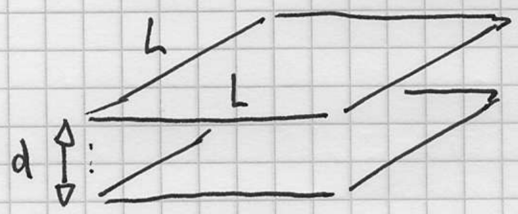
dann $\alpha(t) \approx \alpha_0 \, e^{-\beta t} \cos \gamma t$



exponentiell gedämpfte Amplitude

Aufgabe 6

(a) Kapazität eines quadratischen Plattenkondensators mit Kantenlänge L



Ladung +Q oben, −Q unten
Ladungsverteilung auf Platte $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{L^2}$

mit Gauß $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon} Q$

folgt für einzelne unendlich große Platte

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2A|E| = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma A$$

$$|E| = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma$$

Gauß wurde nicht explizit verlangt – könnte man auch einfacher machen

nun zwei Platten mit ±Q (keine Randeffekte)

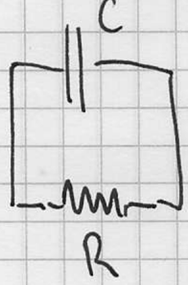
$$|E| = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A}$$

dann Potentialdifferenz zw. Platten

$$U = \frac{Q}{A\varepsilon_0} d$$

und $C = \frac{Q}{U} = \frac{A\varepsilon_0}{d}$

(b) Feldenergie $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2$



entladen über Widerstand

dort dissipierte Leistung

$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot I = I^2 R$

Strom beim entladen

$I = I_0 \, e^{-t/\tau} = \frac{U}{R} \, e^{-t/\tau}$

(aus Maschenregel $U_R + U_C = 0$;

$RI + \frac{Q}{C} = 0$

~~RC~~ $Q(t) = -\frac{1}{RC} \dot{Q}$

$Q(t) = Q_0 \, e^{-t/\tau}$

$I(t) = -\frac{Q_0}{\tau} \, e^{-t/\tau} =$

I(t) einsetzen $\frac{dW}{dt} = \left(\frac{U}{R} \, e^{-t/RC} \right)^2 R$

dann $W_{ges} = \int_0^\infty \frac{dW}{dt} \, dt = R \frac{U^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} \, dt$

Substituieren $\frac{2t}{RC} = x$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{RC}$

damit $W_{ges} = \frac{U^2}{R} \, \frac{RC}{2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} \, dx}_{=1} = \frac{1}{2} C U^2$

Aufgabe 7

Uhr des vorbeifliegenden Astronauten scheint langsamer zu laufen : Zeitdilatation

(=) Konsequenz der endl. Laufzeit des Lichts zw. Astronaut und Erde)

(a)

dann $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\qquad \beta = \frac{v}{c}$

mit $\Delta t' = 1\,h$ und $\beta = 0.8$

folgt $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-0.64}} * 1\,hr = \underline{\underline{1.66\,hr}}$

(Zeit die auf der Erde vergangen ist)

(b) Das Problem ist symmetrisch!

Der Astronaut sieht ebenfalls $\underline{1.66\,hr}$