Musterlösung Klausur

Aufgabe 1

1a) $$\frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\dot{\psi}|\hat{A}|\psi\rangle + \langle\psi|\underbrace{\frac{d}{dt}\hat{A}}_{=0}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{A}|\dot{\psi}\rangle$$

=0 Voraussetzung

mit $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$

$-i\hbar\langle\psi|\frac{\partial}{\partial t} = \langle\psi|\hat{H}$

folgt: $$\frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\underbrace{\frac{-\hat{H}\hat{A}+\hat{A}\hat{H}}{i\hbar}}_{=0}|\psi\rangle = 0$$

=0 Voraussetzung

3P

1b) $$a_n\langle\psi_n|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle \underset{\uparrow}{=} \langle\hat{A}\psi_n|\psi_n\rangle = a_n^*\langle\psi_n|\psi_n\rangle$$

hermitesch

$\Rightarrow a_n = a_n^*$

2P

1c) $$|j_1 j_2 j\, m_j\rangle = \sum_{m_1 m_2}^{m_1+m_2=m_j}\langle j_1 j_2 m_1 m_2|j_1 j_2 j\, m_j\rangle\,|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

hier $j_1, j_2 = \frac{1}{2}$

wir untersuchen Zustände zu $j = j_1 + j_2 - 1$ mit maximale magnetischer Quantenzahl m_j:

$$|j_1 j_2 \underbrace{(j_1+j_2-1)}_{=j}\underbrace{(j_1+j_2-1)}_{=m_j}\rangle = \alpha\,|j_1 j_2 \underbrace{(j_1-1)}_{m_{j_1}}\underbrace{j_2}_{m_{j_2}}\rangle + \beta\,|j_1 j_2 \underbrace{j_1}_{m_{j_1}}\underbrace{(j_2-1)}_{m_{j_2}}\rangle$$

α, β sind Clebsch-Gordon Koeffizienten

$|j_1 j_2 j\, m_j\rangle$ sind orthonormierte Zustände!

$$\langle j_1 j_2 (j_1+j_2)(j_1+j_2-1)|j_1 j_2 (j_1+j_2-1)(j_1+j_2-1)\rangle = 0$$

Bem. siehe Rückseite!

$$\Rightarrow \alpha\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} + \beta\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} = 0$$

; fordert man noch zusätzlich die Normierung der Zustände

$$|j_1 j_2 (j_1+j_2-1)(j_1+j_2-1)\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_2+j_1}}\,|j_1 j_2 (j_1-1) j_2\rangle - \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\,|j_1 j_2\, j_1 (j_2-1)\rangle$$

$j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}00\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\downarrow\uparrow\rangle - |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\uparrow\downarrow\rangle\right)$

5P

Bew.

für den Zustand $\langle j_1 \, j_2 \, (j_1+j_2) \, (j_1+j_2-1) |$ überlege man sich:

$$| j_1 j_2 \underbrace{(j_1+j_2)}_{j} \underbrace{(j_1+j_2)}_{m_j} \rangle = | j_1 j_2 \underbrace{j_1}_{m_{j_1}} \underbrace{j_2}_{m_{j_2}} \rangle$$

$$J_- = J_{1-} + J_{2-}$$

$$J_- | j_1 j_2 (j_1+j_2)(j_1+j_2) \rangle = \sqrt{2(j_1+j_2)} \, | j_1 j_2 (j_1+j_2)(j_1+j_2-1) \rangle$$

$$(J_{1-} + J_{2-}) | j_1 j_2 j_1 j_2 \rangle = \sqrt{2j_1} \, | j_1 j_2 \underbrace{(j_1-1)}_{m_{j_1}} \underbrace{j_2}_{m_{j_2}} \rangle + \sqrt{2j_2} \, | j_1 j_2 \underbrace{j_1}_{m_{j_1}} \underbrace{(j_2-1)}_{m_{j_2}} \rangle$$

$$\to | j_1 j_2 (j_1+j_2)(j_1+j_2-1) \rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \, | j_1 j_2 (j_1-1) j_2 \rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}} \, | j_1 j_2 j_1 (j_2-1) \rangle$$

nun läßt sich das Skalarprodukt trivial ausführen!

alternativer Weg für $\underline{1c)}$

$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

$\vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2 S_{1z} S_{2z} + 2 S_{1x} S_{2x} + 2 S_{1y} S_{2y}$

es gilt: $\quad S_{i\pm} = S_{ix} \pm i S_{iy}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{1+} = S_{1x} + i S_{1y} \\ S_{1-} = S_{1x} - i S_{1y} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S_{1x} = \frac{1}{2}(S_{1+} + S_{1-}) \\ S_{1y} = \frac{1}{2i}(S_{1+} - S_{1-}) \end{array}$$

S_{2x}, S_{2y} analog!

$\curvearrowright \quad 2 S_{1x} S_{2x} = \frac{1}{2}(S_{1+} + S_{1-})(S_{2+} + S_{2-}) = \frac{1}{2} S_{1+} S_{2+} + \frac{1}{2} S_{1+} S_{2-} + \frac{1}{2} S_{1-} S_{2+} + \frac{1}{2} S_{1-} S_{2-}$

$2 S_{1y} S_{2y} = -\frac{1}{2}(S_{1+} - S_{1-})(S_{2+} - S_{2-}) = -\frac{1}{2} S_{1+} S_{2+} + \frac{1}{2} S_{1+} S_{2-} - \frac{1}{2} S_{1-} S_{2+} - \frac{1}{2} S_{1-} S_{2-}$

$$\curvearrowright \quad \underline{\underline{\vec{S}^2 = \overbrace{\vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2}^{a)} + \overbrace{2 S_{1z} S_{2z}}^{b)} + \overbrace{S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}}^{c)}}}$$

$S_+ |\downarrow\rangle = \hbar |\uparrow\rangle \quad ; S_+ |\uparrow\rangle = 0$

$S_- |\downarrow\rangle = 0 \quad ; S_- |\uparrow\rangle = \hbar |\downarrow\rangle$

$S^2 |\uparrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\uparrow\rangle \quad ; S^2 |\downarrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\downarrow\rangle$

$S_z |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \quad ; S_z |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle$

$$\vec{S}^2(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = \underbrace{2\tfrac{3}{4}\hbar^2(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}_{a)} \underbrace{- 2\frac{\hbar^2}{4}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}_{b)} \underbrace{- \hbar^2(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}_{c)}$$

$$= \hbar^2 \underbrace{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1\right)}_{=0} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$\underline{3P}$

1d) Schrödinger Bild $\quad \psi(t)$ trägt volle Zeitabhängigkeit

Heisenberg Bild $\quad \hat{O}$ trägt volle Zeitabhängigkeit

$\curvearrowright |\psi_H(t)\rangle \equiv |\psi_H\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle$ $\qquad t_0$ beliebig, aber fest

es gilt: $\quad |\psi_H\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle = U(t_0,t)\,|\psi_S(t)\rangle$

$$\curvearrowright |\psi_S(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi_H\rangle$$

$$A_H(t) = U^+(t,t_0)\,A_S\,U(t,t_0)$$

$$U(t,t_0) = U(t_0,t)^{-1} = U(t_0,t)^+$$

$$A_S|\psi_S(t)\rangle = \lambda|\psi_S(t)\rangle$$

$$\curvearrowright \underbrace{U^+(t,t_0)A_S\,U(t,t_0)}_{A_H}\,\underbrace{U^+(t,t_0)}_{=U^{-1}(t,t_0)=U(t_0,t)}|\psi_S(t)\rangle = \lambda\,U^+(t,t_0)|\psi_S(t)\rangle$$

$$\curvearrowright A_H(t)|\psi_H\rangle = \lambda|\psi_H\rangle$$

3P

1e) „$\Leftarrow$" $\quad A|\varphi_n\rangle = a_n|\varphi_n\rangle\,;\quad B|\varphi_n\rangle = b_n|\varphi_n\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle$$

$$AB|\psi\rangle = \sum_n b_n A|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle = \sum_n b_n a_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle$$

$$BA|\psi\rangle = \sum_n a_n B|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle = \sum_n a_n b_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle$$

$\curvearrowright$ gleiche Spektraldarstellung $\Longrightarrow AB = BA$

„$\Longrightarrow$" $\quad [A,B] = 0\,,\quad A|\varphi_n\rangle = a_n|\varphi_n\rangle$

$$A\underbrace{B|\varphi_n\rangle}_{} = BA|\varphi_n\rangle = a_n B|\varphi_n\rangle$$

Eigenzustand von A zum Eigenwert a_n

$\curvearrowright \quad B|\varphi_n\rangle \sim \underbrace{|\varphi_n\rangle}_{}$

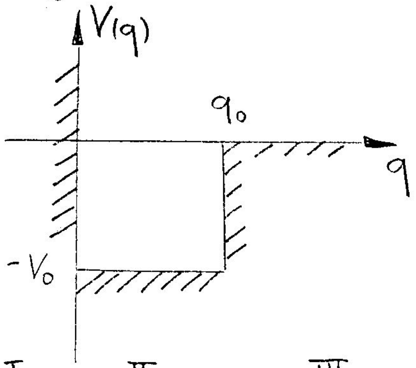
da dies Zustand ebenfalls Eigenzustand von A zum Eigenwert a_n ist

$\curvearrowright$

$$B|\varphi_n\rangle = b_n|\varphi_n\rangle$$

5P

Aufgabe 2



I II III

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2}\psi_A(q) + (E-V)\,\psi_A(q) = 0$$

i) Bereich I trivial $\underline{\underline{\psi_I(q) = 0}}$

Bereich II $\psi_{II}''(q) + K^2\,\psi_{II}(q) = 0$ mit $K^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} > 0$

$$\underline{\underline{\psi_{II} = A\sin Kq + B\cos Kq}}$$

Bereich III $\psi_{III}''(q) - \kappa^2\,\psi_{III}(q) = 0$ mit $\kappa^2 = \frac{2m|E|}{\hbar}$

$$\underline{\underline{\psi_{III}(q) = C\,e^{-\kappa q}}}$$

4P

ii) für $q=0$ muß ψ stetig sein (ψ' muß nicht notwendig stetig sein!)

$\Rightarrow \psi_I(q=0) = \psi_{II}(q=0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{B=0}}$

für $q=q_0$ muß ψ und ψ' stetig sein

$\Rightarrow \psi_{II}(q_0) = \psi_{III}(q_0) \qquad A\sin Kq_0 = C e^{-\kappa q_0}$

$\Rightarrow \psi_{II}'(q_0) = \psi_{III}'(q_0) \qquad KA\cos Kq_0 = -\kappa C e^{-\kappa q_0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{K}\tan Kq_0 = -\frac{1}{\kappa}$ bzw. $\underline{\underline{\cot Kq_0 = -\frac{\kappa}{K}}}$

letzte Gleichung bestimmt die Energieeigenwerte!

für $q \to \infty$ muß die Wellenfunktion genügend schnell verschwinden, um die Normierbarkeit zu garantieren!

Normierbarkeit: $\int_0^{q_0} AA^* \sin^2 Kq \, dq + \int_{q_0}^{\infty} CC^* e^{-2\kappa q} dq = 1$

$$\Leftrightarrow \quad AA^* \left[\int_0^{q_0} \sin^2 Kq \, dq + \frac{\sin^2 Kq_0}{e^{-2\kappa q_0}} \int_{q_0}^{\infty} e^{-2\kappa q} dq \right] = 1$$

für die letzte Gleichung wurde $C = A \frac{\sin Kq_0}{e^{-\kappa q_0}}$ benutzt. Aus der Normierbarkeitsforderung sind wir nun in der Lage, A zu bestimmen (bis auf ein unphysikalische Phase).

$$AA^* \left[\frac{q_0}{2} - \frac{\sin 2Kq_0}{4K} + \frac{\sin^2 Kq_0}{e^{-2\kappa q_0}} \frac{1}{2\kappa} e^{-2\kappa q_0} \right] = 1$$

$$AA^* \left[\frac{q_0}{2} + \frac{\sin^2 Kq_0}{2\kappa} - \frac{\sin 2Kq_0}{4K} \right] = 1$$

o. B. d. A $\quad A \in \mathbb{R}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{[\quad]}}$$

7 P

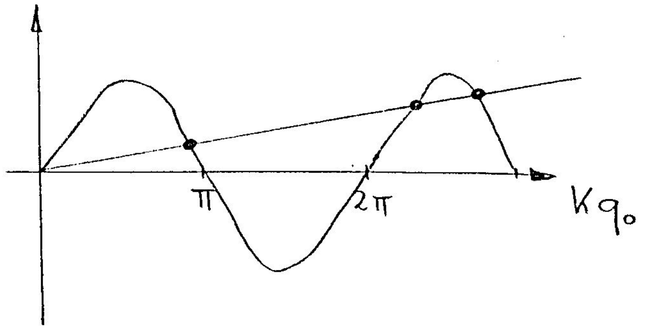
iii) Bestimmung der Energieeigenwerte benutzen wir

$\cot Kq_0 = -\frac{\kappa}{K}$ (siehe ii)

$$\cot^2 Kq_0 = \frac{1}{\sin^2 Kq_0} - 1 = \frac{\kappa^2}{K^2} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 Kq_0} = \frac{\kappa^2}{K^2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 Kq_0 = \frac{V_0 + E}{V_0} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{q_0^2 V_0} (\cdot K^2 q_0^2)$$

$$\sin Kq_0 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m q_0^2 V_0}} (Kq_0) \quad \text{graphische Lösung}$$



• mögliche Lösungen

Es gibt keinen gebundenen Zustand falls keine Schnittpunkte existieren!

4 P

iv) Anstieg der Geraden : $\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mq_0^2V_0}}$

aus Teil ii) haben wir gelernt $\cot Kq_0 = -\frac{\kappa}{K} \leq 0$

$\curvearrowright$ $Kq_0 \leq \frac{\pi}{2}$ $\nexists$ kein gebundener Zustand

$\curvearrowright$ Anstieg der Geraden muß kleiner als $\frac{1}{\frac{\pi}{2}}$ sein

$\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mq_0^2V_0}} < \frac{2}{\pi}$ damit mindestens ein gebundener Zustand existiert!

4 P

3. Aufgabe

i)

$$\langle\psi|S_z|\psi\rangle = \sum_m \langle\psi|\underbrace{S_z|\tfrac{3}{2},m\rangle}_{=\hbar m}\langle\tfrac{3}{2},m|\psi\rangle$$

$$= \sum_m \hbar m\,|\langle\psi|\tfrac{3}{2},m\rangle|^2 = \frac{3}{2}\hbar \qquad (1)$$

Normierung: $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_m |\langle\psi|\tfrac{3}{2},m\rangle|^2 = 1 \qquad (2)$

(1) u. (2) $\sum_m \hbar m\,|\langle\psi|\tfrac{3}{2},m\rangle|^2 = \frac{3}{2}\hbar \underbrace{\sum_m |\langle\psi|\tfrac{3}{2},m\rangle|^2}_{\text{da } =1}$

$$\Leftrightarrow \sum_m \underbrace{\left(m-\frac{3}{2}\right)}_{\leq 0}\underbrace{|\langle\psi|\tfrac{3}{2},m\rangle|^2}_{\geq 0} = 0 \qquad (3)$$

weil $m = -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$

(3) ist für alle $m \neq \frac{3}{2}$ nur erfüllbar falls

$\langle\psi|\tfrac{3}{2},m\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow |\psi\rangle \sim |\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle$ steht senkrecht zu allen anderen $|\tfrac{3}{2};m\rangle;\ m\neq\frac{3}{2}$

wegen Normierung: $\underline{\underline{|\psi\rangle = |\tfrac{3}{2};\tfrac{3}{2}\rangle}}$ 5 P

ii) $m = -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \implies$ 4x4 Matrizen

$\dim \mathcal{H} = 4$

trivial: $\underline{\underline{J_z = \hbar\begin{pmatrix} 3/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & -1/2 & \\ & & & -3/2\end{pmatrix}}}$ wobei $|\tfrac{3}{2};\tfrac{3}{2}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \ldots$

$|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{c|cccc}
m & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\
\hline
\sqrt{j(j+1)-m(m+1)} & 0 & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \\
\sqrt{j(j+1)-m(m-1)} & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} & 0
\end{array}
$$

$$
\curvearrowright \quad J_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & & \\ & 0 & 2 & \\ & & 0 & \sqrt{3} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \sqrt{3} & 0 & & \\ & 2 & 0 & \\ & & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\left.\begin{aligned} J_+ &= J_x + i J_y \\ J_- &= J_x - i J_y \end{aligned}\right\} \quad J_x = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right) \quad , \quad J_y = \frac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right)
$$

$$
J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & & \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & \\ & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ & & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad J_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & & \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 & \\ & -2 & 0 & \sqrt{3} \\ & & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}
$$

4P

Aufgabe 4

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \underbrace{\alpha \frac{1}{2} m \omega^2 q^2}_{= H_1}$$

i)

$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{4} \hbar\omega (a + a^+)^2$$

$$H_1 = \frac{\alpha}{4} \hbar\omega \left(aa + a^+ a^+ + 2 a^+ a + 1 \right)$$

2P

ii) $E_n^{(1)} = \langle {}^{(0)}n | H_1 | n^{(0)} \rangle$

$$= \frac{\alpha}{2} \hbar\omega \langle n^{(0)} | \underbrace{a^+ a}_{= \hat{n}} + \frac{1}{2} | n^{(0)} \rangle = \frac{\alpha}{2} \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Teilchenzahl operator

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{\substack{m \\ n \neq m}} |m^{(0)}\rangle \frac{\langle {}^{(0)}m | H_1 | n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = \hbar\omega (n - m)$$

$$\langle {}^{(0)}m | H_1 | n^{(0)} \rangle = \frac{\alpha}{4} \hbar\omega \langle {}^{(0)}m | a^2 + a^{+2} \underbrace{+ 2a^+ a + 1}_{} | n^{(0)} \rangle$$

liefern keinen Beitrag, da $m \neq n$

$$= \frac{\alpha}{4} \hbar\omega \left\{ \delta_{m(n-2)} \sqrt{n(n-1)} + \delta_{m(n+2)} \sqrt{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$$a |n^{(0)}\rangle = \sqrt{n} |n^{(0)} - 1\rangle \; ; \; a^+ |n^{(0)}\rangle = \sqrt{n+1} |n^{(0)} + 1\rangle$$

$$|n^{(1)}\rangle = \frac{\alpha\hbar\omega}{4} \left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{E_n^{(0)} - E_{n-2}^{(0)}} |n-2^{(0)}\rangle + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{E_n^{(0)} - E_{n+2}^{(0)}} |n+2^{(0)}\rangle \right)$$

$$= \frac{\alpha}{8} \left(\sqrt{n(n-1)} \, |n-2^{(0)}\rangle - \sqrt{(n+1)(n+2)} \, |n+2^{(0)}\rangle \right)$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{\substack{m \\ m \neq n}} \frac{|\langle m^{(0)} | H_1 | n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$|\langle m^{(0)} | H_1 | n^{(0)} \rangle|^2 \underset{\text{s.o.}}{=} \frac{\alpha^2 \hbar^2 \omega^2}{16} \left[n(n-1)\, \delta_{m(n-2)} + (n+1)(n+2)\, \delta_{m(n+2)} \right]$$

$$E_n^{(2)} = \frac{\alpha^2 \hbar^2 \omega^2}{16} \left[\frac{n(n-1)}{E_n^{(0)} - E_{n-2}^{(0)}} + \frac{(n+1)(n+2)}{E_n^{(0)} - E_{n+2}^{(0)}} \right]$$

$$= \frac{\alpha^2 \hbar\omega}{32} \left[n^2 - n - n^2 - 3n - 2 \right] = \underline{\underline{-\frac{\alpha^2 \hbar\omega}{16} \left[2n+1 \right]}}$$

6P

iii) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega'^2 q^2$ mit $\omega' = \omega\sqrt{1+\alpha}$

$$E_n = \hbar\omega' \left(n + \frac{1}{2}\right) \underset{\uparrow}{=} \hbar\omega \left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\omega' = \omega\left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}\right)$$

$$= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \alpha\, \hbar\omega \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) + \alpha^2 \hbar\omega\left(-\frac{n}{8} - \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Resultat aus ii)

$$E_n = E_n^{(0)} + \alpha E_n^{(1)} + \alpha^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \alpha\, \hbar\omega\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) + \alpha^2 \hbar\omega\left(-\frac{n}{8} - \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Beide Ergebnisse stimmen überein bis zur gewünschten Ordnung in der Störungstheorie!

3P