

.....  
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Probeklausur, GRUPPE A

HÖHERE MATHEMATIK II

Analysis 1 für Physiker, Prof. Dr. M. Wolf

13. Januar 2012, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: ..... Reihe: ..... Platz: .....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9 Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 90 min.

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Schreiben Sie nur mit blauer oder schwarzer, nicht löscherbarer, Tinte.

Alle Ergebnisse müssen begründet werden, kommentieren Sie stichwortartig.

Gestalten Sie Ihre Argumentation strukturiert und leserlich. Dies gilt insbes. für Beweise.

Markieren Sie Ihre Endresultate deutlich.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

$\Sigma$		
----------	--	--

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ..... bis .....

I .....  
Erstkorrektur

Vorzeitig abgegeben um .....

II .....  
Zweitkorrektur

Besondere Bemerkungen:

**Aufgabe 1. Grenzwerte****[ca. 4 Punkte]**

- (a) Berechnen Sie für die Folge  $(a_n)$  den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , wobei

$$a_n = \binom{n}{k} \left(\frac{m}{n}\right)^k, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

- (b) Berechnen Sie für reelle  $a$  und  $t$  den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t (1 + a \sin t)^{\frac{1}{\tan t}}}.$$

**Aufgabe 2. Limes Superior****[ca. 5 Punkte]**

Sei  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen.

- (a) Geben Sie die Definition des Ausdrucks  $\text{Limsup}_{n \rightarrow \infty} a_n$  an.
- (b) Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Unter welcher Bedingung ist  $a$  gemäß Definition ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ ?
- (c) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist eine Folge  $(a_n)$  reeller Zahlen beschränkt, so ist  $\text{Limsup}_{n \rightarrow \infty} a_n$  der größte Häufungspunkt dieser Folge.

**Aufgabe 3. Reihen****[ca. 8 Punkte]**(a) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{x}{k} ?$$

(b) Für welche  $\omega > 0$  konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(1+i)^k}{\omega^k(k+2^k)} ?$$

(c) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + \cos k},$$

und wenn ja, konvergiert sie auch absolut?

(d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \tanh k^2) z^k.$$

**Aufgabe 4. Konvergenz von Funktionenfolgen****[ca. 6 Punkte]**

Sei  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und sei  $(f_n)$  eine Folge von Abbilungen, mit  $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Unter welcher Bedingung konvergiert  $(f_n)$  gemäß Definition punktweise gegen  $f$ ?

Sei nun  $f_n$  definiert durch

$$f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := |x|^{\frac{1}{n}+1}.$$

- (b) Sind die Funktionen  $f_n$  stetig differenzierbar auf  $(-1, 1)$ ?

- (c) Konvergiert die Folge  $(f_n)$  gleichmäßig auf  $(-1, 1)$ ?

- (d) Konvergiert die Folge  $(f'_n)$  gleichmäßig auf  $(-1, 1)$ ?

**Aufgabe 5. Metrik****[ca. 6 Punkte]**

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(r) := \frac{r}{1+r}.$$

Zeigen Sie, dass

- (a)  $f$  streng monoton wachsend,
- (b)  $f$  konkav und
- (c) die Abbildung

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \frac{|x - y|}{1 + |x - y|},$$

eine Metrik auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Aufgabe 6. Stetige Fortsetzung****[ca. 4 Punkte]**

Für  $s \in \mathbb{Q}$  definieren wir die Funktion

$$f_s : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_s(z) := \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^s}.$$

- (a) Welche Eigenschaften muss eine Funktion  $F_s$  besitzen, um als stetige Fortsetzung von  $f_s$  in den Punkt 0 bezeichnet zu werden?
- (b) Für welche  $s \in \mathbb{Q}$  besitzt  $f_s$  eine stetige Fortsetzung in den Punkt 0? Geben Sie diese gegebenenfalls an.

**Aufgabe 7. Funktionenfolge****[ca. 4 Punkte]**

Gegen welche Funktion  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert die Funktionenfolge  $f_n$ , definiert durch

$$f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{n - kx}$$

im Limes  $n \rightarrow \infty$ ?

**Aufgabe 8. Integration****[ca. 9 Punkte]**

(a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \log(1+x^2) dx .$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx .$$

(c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} .$$

existiert und geben Sie seinen Wert an.

**Aufgabe 9. Topologie****[ca. 6 Punkte]**

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum.

- (a) Sei  $K \subset X$ . Unter welcher Bedingung ist  $K$  nach Definition kompakt?
- (b) Beweisen Sie: Ist  $K \subset X$  kompakt, so ist  $K$  auch abgeschlossen.