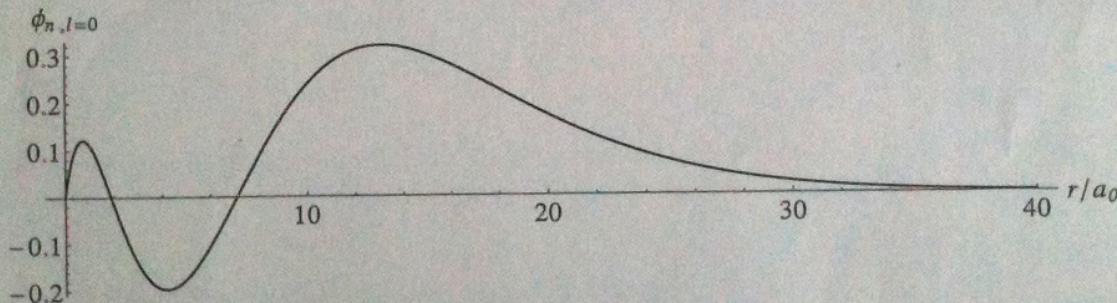


Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)
Sommersemester 2011

Hauptklausur am 16. August 2011

Aufgabe 1: Diverses (14 Punkte) (7 aus 9 Möglichkeiten auswählen, je 2 Punkte)

- (a) Geben Sie eine Wellenfunktion an, welche die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für das freie Teilchen in einer Dimension löst. ✓
- (b) Ein quantenmechanisches System wird durch den Hamiltonoperator \hat{H} beschrieben. Unter welchen Voraussetzungen ist die Observable \hat{O} eine Erhaltungsgröße? ✓
- (c) Ein System werde zum Zeitpunkt $t = 0$ durch folgenden Zustandsvektor beschrieben $|\psi\rangle = \sqrt{4/7}|\psi_1\rangle - \sqrt{3/7}|\psi_2\rangle$, wobei $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ jeweils Energiezustände zu den Eigenwerten E_1 und E_2 sind. Geben Sie den Energieerwartungswert des Zustands $|\psi\rangle$ an und einen expliziten Ausdruck für den zeitabhängigen Zustand $|\psi(t)\rangle$. ✓
- (d) Vergleichen Sie die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems im Schrödinger- und im Heisenbergbild? Nennen Sie den wesentlichen Unterschied. Welche charakteristische Größe einer Observablen ist in beiden Bildern gleich?
- (e) Betrachten Sie ein System aus drei Teilchen, welche mit den Koordinaten $x_i, i \in \{1, 2, 3\}$ beschrieben werden. Stellen Sie eine Wellenfunktion für drei Fermionen auf, von denen sich jeweils eines in Zustand $|\psi_a\rangle$, $|\psi_b\rangle$ und $|\psi_c\rangle$ befindet.
- (f) Die Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms lassen sich schreiben als $\psi_{n,l,m}(\vec{r}) = Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)\phi_{n,l}(r)/r$. Bestimmen Sie aus der untenstehenden Darstellung der Radialwellenfunktion für $l = 0$, $\phi_{n,l=0}(r)$, die Hauptquantenzahl n . Skizzieren Sie den Verlauf der Radialwellenfunktion zur gleichen Hauptquantenzahl in der p -Welle, $l = 1$. Begründen Sie beides kurz.



- (g) Nennen Sie zwei der relativistischen Korrekturen im Energiespektrum des Wasserstoffatoms und geben Sie jeweils eine kurze physikalische Erklärung. Von welchen Quantenzahlen hängen die relativistisch korrigierten Energieeigenwerte des Wasserstoffatoms ab? ✓
- (h) Welche Symmetrie unter Teilchenvertauschung besitzt die Ortsraumwellenfunktion von zwei gekoppelten Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen im Singulett-, welche im Triplett-Zustand? ✓
- (i) Welcher Operator erzeugt im Ortsraum eine Translation um den Vektor \vec{a} ? Welcher eine Drehung um den Winkel φ um die z -Achse?

$$\cancel{\text{Handwritten text}}$$

Aufgabe 2: Spin-Spin-Kopplung (11 Punkte)

Das Positronium ist ein Zwei-Teilchen-System aus einem Elektron und einem Positron (Antiteilchen des Elektrons), dessen gebundene Zustände denen des Wasserstoffatoms ähneln. Betrachten Sie nur die Spin-Freiheitsgrade des Systems, die unter Einwirkung eines externen magnetischen Feldes durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben werden:

$$\hat{H} = A \hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 + \frac{eB}{mc} (\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}). \quad (1)$$

A ist eine positive Konstante und $\hat{\vec{S}}_1$ ($\hat{\vec{S}}_2$) der Spin-Operator des Elektrons (Positrons). Der Gesamtspin ist $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$.

- (a) Drücken Sie die Eigenzustände $|SM\rangle$ von \hat{S}^2 und \hat{S}_z durch die Eigenzustände $|m_s = +\frac{1}{2}\rangle$ und $|m_s = -\frac{1}{2}\rangle$ der nicht gekoppelten Einteilchen-Spins aus.
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von \hat{H} bei verschwindender Magnetfeldstärke, $B = 0$. Der Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand ($S = 0$) und dem angeregten Zustand ($S = 1$) wurde experimentell bestimmt und beträgt $\Delta E = 8.41 \times 10^{-4}$ eV. Bestimmen Sie die Konstante A .
- (c) Bei endlicher Magnetfeldstärke betrachten wir den zweiten Term auf der rechten Seite von (1) als Störung. Stellen Sie die Matrix des Störoperators in der Basis $|SM\rangle$ auf. Zeigen Sie, dass die Energieverschiebungen in erster Ordnung Störungstheorie verschwinden.
- (d) Berechnen Sie die durch das Magnetfeld verursachten Energieverschiebungen in zweiter Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 3: Störungsrechnung bei Entartung (6 Punkte)

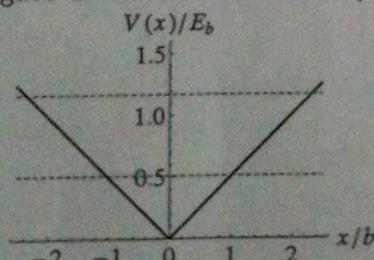
Der Hamiltonoperator für zwei ungekoppelte harmonische Oszillatoren lautet:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{b}_x^\dagger \hat{b}_x + \hat{b}_y^\dagger \hat{b}_y).$$

Die Operatoren sind gegeben durch $\hat{b}_x = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}_x/(m\omega))$ usw.

- (a) Geben Sie den Entartungsgrad des Energieniveaus $E_{N=2} = 2\hbar\omega$ und die zugehörigen Eigenzustände an.
- (b) Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Energieverschiebungen durch das Störpotential $\lambda\hat{W} = \lambda\hat{x}^2\hat{y}^2$ für die Energien dieses Energieniveaus ($E_{N=2}$).

Aufgabe 4: Variationsverfahren (9 Punkte)



Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer räumlichen Dimension unter dem Einfluss eines linearen Potentials,

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}, \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad V(x) = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \frac{|x|}{b}.$$

In Einheiten der Energie $E_b = \hbar^2/(mb^2)$ sind die niedrigsten zwei Energieniveaus $E_0 \approx 0.509 E_b$ und $E_1 \approx 1.169 E_b$.

- (a) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der zugehörigen Eigenfunktionen $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$.
- (b) Benutzen Sie als Testfunktionen die normierten Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit den Oszillatorkräften α und β :

$$\varphi_0(x, \alpha) = \left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}x^2/\alpha^2}, \quad \varphi_1(x, \beta) = \left(\frac{2}{\beta\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \frac{x}{\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2/\beta^2},$$

und berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \varphi_i | \hat{T} | \varphi_i \rangle$ der kinetischen und $\langle \varphi_i | \hat{V} | \varphi_i \rangle$ der potentiellen Energie.

- (c) Berechnen Sie jeweils den minimalen Energieerwartungswert, den man bei geeigneter Wahl von α und β erhält. Vergleichen Sie mit den exakten Werten.