Lösungsskizze Gruppe B.

................
Note

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| $\Sigma$ | | |

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

# Probeklausur, GRUPPE B

# HÖHERE MATHEMATIK II

## Analysis 1 für Physiker, Prof. Dr. M. Wolf

13. Januar 2012, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9 Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 90 min.

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Schreiben Sie nur mit blauer oder schwarzer, nicht löschbarer, Tinte.

Alle Ergebnisse müssen begründet werden, kommentieren Sie stichwortartig.

Gestalten Sie Ihre Argumentation strukturiert und leserlich. Dies gilt insbes. für Beweise.

Markieren Sie Ihre Endresultate deutlich.

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

I ................
Erstkorrektur

II ................
Zweitkorrektur

**Aufgabe 1. Grenzwerte** **[ca. 4 Punkte]**

2 (a) Berechnen Sie für die Folge $(a_n)$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$, mit

$$a_n = \binom{n+m}{k}\frac{1}{n^k}, \qquad k,\ m\ \in \mathbb{N}.$$

2 (b) Berechnen Sie für reelle $a$ und $t$ den Grenzwert

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\,(1+a\tan t)^{\frac{1}{\tan t}}}{1-\mathrm{e}^t}.$$

a) Für n hinr groß

$$a_n = \binom{n+m}{k}\frac{1}{n^k} \overset{\downarrow}{=} \cancel{(n+m)(n+m-1)} \frac{(n+m)!}{k!(n+m-k)!}\frac{1}{n^k}$$

$$= \frac{(n+m)(n+m-1)\dots(n+m-k+1)}{n^k\, k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}\frac{(n+m)}{n}\left(\frac{n+m-1}{n}\right)\dots\left(\frac{n+m-k+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{k!}\underbrace{\lim\left(\frac{n+m}{n}\right)}_{=1}\dots\underbrace{\lim\left(\frac{n+m-k+1}{n}\right)}_{=1}$$

$$\boxed{=\frac{1}{k!}}$$

b) $$\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-e^t} \overset{LH}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{-e^t} = -1$$

$$(1+a\tan t)^{\frac{1}{\tan t}} = e^{\frac{\log(1+a\tan t)}{\tan t}}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+a\tan t)}{\tan t} \overset{LH.}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{a\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}{1+a\tan t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}$$

$$= a$$

$e$ stetig a.d. St $a$.

Somit $\lim\limits_{t \to 0} (1 + a \tan t)^{\frac{1}{\tan t}} = e^a$

und $\lim \dfrac{t \, (1 + a \tan t)^{\frac{1}{\tan t}}}{1 - e^t} = (-1) \cdot e^a = \boxed{-e^a}$

**Aufgabe 2. Limes Inferior** **[ca. 5 Punkte]**

Sei $(a_n)$ eine Folge reeller Zahlen.

1 (a) Geben Sie die Definition des Ausdrucks $\mathrm{Liminf}_{n\to\infty} a_n$ an.

1 (b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Unter welcher Bedingung ist $a$ gemäß Definition ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)$?

3 (c) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist eine Folge $(a_n)$ reeller Zahlen beschränkt, so ist $\mathrm{Liminf}_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt dieser Folge.

(a) $\operatorname{Liminf}_{n\to\infty} a_n := \sup_n \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ ($:= -\infty$ wenn nach unten unbeschr.)

(b) siehe gruppe A.

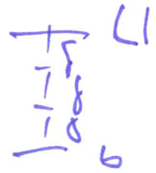
(c) (i) Zeige $\operatorname{Liminf}_{n\to\infty} a_n$ (LI) ist HP.

- Sei $\varepsilon > 0$ $N \in \mathbb{N}$ bel
- $(\inf\{a_k \mid k \geq n\})$ ist beschr. mon. wach. Folge und konvergiert gegen ihr supremum (LI)
- Deshalb gilt $\exists\, n \geq N$ sd $|\inf\{a_k \mid k \geq n\} - LI| < \frac{\varepsilon}{2}$
- Es gibt weiterhin ein $m \geq n \geq N$ mit $|a_m - \inf\{a_k \mid k \geq n\}| < \frac{\varepsilon}{2}$

und damit $|a_m - L\,[redacted]| \underset{\text{Ungl.}}{\overset{\Delta-}{<}} \varepsilon$.

(ii) Zeige LI ist kl. HP.

- Ann.: $b < LI$ ist HP
- Definiere $LI - b =: 3\delta > 0$



- Wie in ~~ii~~ i) $\inf\{a_k \mid k \geq n\} \xrightarrow[\text{wach}]{\text{mon}} L1$

dh $\exists n \in \mathbb{N}$ sd $|\inf\{a_k \mid k \geq n\} - L1| < \varepsilon$

- $\forall k \geq n$ gilt dann $a_k \notin U_\varepsilon(b)$

und damit ist $b$ kein HP $\lightning$ $\boxtimes$

**Aufgabe 3. Reihen** **[ca. 8 Punkte]**

2 (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos\frac{x}{k})\,?$$

2 (b) Für welche $\omega > 0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k(1+\mathrm{i})^k}{\omega^k(k+2^k)}\,?$$

2 (c) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k^2}{k^3+\sin k}\,,$$

und wenn ja, konvergiert sie auch absolut?

2 (d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-\tanh k)^2 z^k\,.$$

(a) $$1-\cos a = 1-\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} = -\frac{e^{ia}-2+e^{-ia}}{2} = -\frac{\left(e^{i\frac{a}{2}}-e^{-i\frac{a}{2}}\right)^2}{2}$$

$$= 2\left(\frac{e^{i\frac{a}{2}}-e^{-i\frac{a}{2}}}{2i}\right)^2 = 2\sin^2\frac{a}{2}$$

Damit $$1-\cos\frac{x}{k} = 2\sin^2\frac{x}{2k} \underset{\uparrow}{\le} 2\left(\frac{x}{2k}\right)^2$$

$|\sin x| \le |x| \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Somit ist $\sum_k 2\left(\frac{x}{2k}\right)^2$ konvergente Majorante.

$$\boxed{\Rightarrow \text{konv } \forall x \in \mathbb{R}}$$

(b) Siehe Gruppe A.

c) $a_k := \frac{k^2}{k^3 + \sin k} = \frac{1}{k + \frac{\sin k}{k^2}}$

ist für $k \geq 2$ monot. Nullfolge

Reihe konvergiert nach Leibniz.

Reihe konv nicht absolut,

da $a_k \geq \frac{2}{k}$

Somit ist $\sum_k \frac{2}{k}$ divergente Minorante.

d) $1 - \tan k = 1 - \frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = \frac{2e^{-k}}{e^k + e^{-k}}$

$$= \frac{2}{e^{2k} + 1}$$

Euler $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{e^{2k}+1}\right)^2 \left(\frac{e^{2(k+1)}+1}{2}\right)^2$

$$= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{e^{2(k+1)}+1}{e^{2k}+1}\right)^2 = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{e^2 + e^{-2k}}{1 + e^{-2k}}\right)^2$$

$$\boxed{= e^4}$$

**Aufgabe 4. Konvergenz von Funktionenfolgen** **[ca. 6 Punkte]**

Sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und sei $(f_n)$ eine Folge von Abbilungen, mit $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$.

1 (a) Unter welcher Bedingung konvergiert $(f_n)$ gemäß Definition gleichmäßig gegen $f$?

Sei $f_n$ definiert durch

$$f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := |x|^{\frac{1}{n}+1}.$$

1 (b) Sind die Funktionen $f_n$ stetig differenzierbar auf $(-1,1)$?

3 (c) Konvergiert die Folge $(f_n)$ gleichmäßig auf $(-1,1)$?

1 (d) Konvergiert die Folge $(f_n')$ gleichmäßig auf $(-1,1)$?

(a) $(f_n)$ konv glm. gg $f$ falls gilt

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in (-1,1):$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

(b) - (d) Siehe Gruppe A.

**Aufgabe 5. Integration** **[ca. 9 Punkte]**

3 (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \log(1+x^2)\mathrm{d}x\,.$$

3 (b) Berechnen Sie

$$\int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\,.$$

3 (c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$$

existiert und geben Sie seinen Wert an.

Siehe Gruppe A Aufgabe 8.

**Aufgabe 6. Stetige Fortsetzung** **[ca. 4 Punkte]**

Für $s \in \mathbb{Q}$ definieren wir die Funktion

$$f_s : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f_s(z) := \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^s}.$$

1 (a) Welche Eigenschaften muss eine Funktion $F_s$ besitzen, um als stetige Fortsetzung von $f_s$ in den Punkt 0 bezeichnet zu werden?

3 (b) Für welche $s \in \mathbb{Q}$ besitzt $f_s$ eine stetige Fortsetzung in den Punkt 0? Geben Sie diese gegebenenfalls an.

(a) siehe Gr. A

(b) siehe Gr. A.

Im 2. Fall: $a_n := (-1)^n i \frac{1}{n}$

Im 3. Fall: $a_n := i \frac{1}{n}$.

**Aufgabe 7. Funktionenfolge** **[ca. 4 Punkte]**

Gegen welche Funktion $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge $f_n$, definiert durch

$$f_n:(-1,1)\to\mathbb{R},\qquad f_n(x):=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-kx}$$

im Limes $n\to\infty$?

Siehe Gr A.

**Aufgabe 8. Metrik** **[ca. 6 Punkte]**

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad f(r) := \frac{r}{1+r}.$$

Zeigen Sie, dass

1 (a) $f$ streng monoton wachsend,

1 (b) $f$ konkav und

4 (c) die Abbildung

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

Siehe Gr A Aufgabe 5.

**Aufgabe 9. Topologie** **[ca. 6 Punkte]**

Sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum.

1 (a) Sei $A \subset X$. Unter welcher Bedingung ist $A$ nach Definition abgeschlossen?

5 (b) Beweisen Sie: Ist $K \subset X$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen, so ist $A$ auch kompakt.

(a) A ist abg wenn für alle $x \in X$ gilt:

$(\forall \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset) \Longrightarrow x \in A$.

oder

A abg falls

$X \setminus A$ offen

oder

A abg falls

für jede Folge $(a_n)$ in $A$ mit $a_n \to x \in X$

gilt: $x \in A$.

(b) Vorauss. $K \subseteq X$ kpkt, $A \subseteq K$ abg.

z.z. A kpkt.

Bew: Sei $(a_k)$ eine Folge in $A$.

Es bleibt z.z., dass $(a_k)$ eine in $A$ konvergente TF besitzt.

$(a_k)$ ist auch Folge in $K$ (da $A \subseteq K$)

K kpkt, somit gibt es TF $(a_{g(n)})$

mit $a_{g(n)} \longrightarrow a \in K$

Da $A$ abg, folgt $a \in A$. ☑