

# Теорема о сопротивлении

И. И. Кравченко

Олимпиадная физика

Physway

Пусть имеется цепь *только* из резисторов (*резисторная цепь*), которая подключена к батарее. Для такой цепи справедливо следующее.

**Теорема о сопротивлении.** Если какое-либо сопротивление в цепи увеличить (или уменьшить), то общее сопротивление цепи тоже увеличится (или уменьшится соответственно). Общее сопротивление останется прежним, если по изменяемому сопротивлению не шел ток.

Эта теорема следует из общего принципа — принципа минимума для электрической цепи, который сформулируем в следующем варианте.

**Принцип минимума.** Пусть цепь из резисторов имеет два вывода  $a$  и  $b$ . Если ток  $I$  втекает в цепь через вывод  $a$  и вытекает — через вывод  $b$ , то внутри цепи этот ток распределяется между резисторами так, чтобы суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, была минимальна.

Перед тем, как перейти к работе над задачами, читателю стоит ознакомиться со следующими материалами:

- [О. В. Ляшко. Почему не уменьшится сопротивление. «Квант», 1985, № 1.](#)
- [Е. Соколов. И снова задачи на сопротивления. «Квант», 2011, № 3.](#)
- Дж. К. Максвелл. Трактат об электричестве и магнетизме, Т. I, гл. 6, п. 283.
- [Jaan Kalda. Учебные пособия для IPhO. Электрические цепи, с. 11.](#)

ЗАДАЧА 1. (*Доказательство принципа минимума*) Проведем доказательство принципа минимума для резисторной(!) цепи так, как это сделал Максвелл. Для начала сделаем две вспомогательные задачи.

1. Назовем *полной цепью* цепь, в которой каждый узел связан со всеми другими узлами. Убедитесь, что любую цепь из резисторов можно рассматривать как полную, если считать, что между несвязанными в действительности узлами включено бесконечное сопротивление.
2. Пусть резисторная цепь имеет два вывода  $a$  и  $b$ . Через вывод  $a$  в эту цепь втекает ток  $I$ , через узел  $b$  — этот ток вытекает. Внутри цепи ток  $I$  распределяется между ее участками. По участку между узлами  $i$  и  $j$  внутри цепи в действительности протекает ток  $I_{ij}$ .

Предположим, что ток  $I$  распределился внутри цепи иначе, так что токи участков получили соответствующие изменения и стали равны  $J_{ij} = I_{ij} + \Delta I_{ij}$  (фиктивные токи). Покажите, что если первое правило Кирхгофа выполняется для токов  $I_{ij}$  и  $J_{ij}$ , то оно выполняется и для изменений токов  $\Delta I_{ij}$ .

Продолжим рассмотрение ситуации по п. 2. Суммарная мощность тепловыделения в цепи с *действительными* токами  $I_{ij}$  равна

$$P = \sum_{ij} I_{ij}^2 R_{ij},$$

где  $R_{ij}$  — сопротивление участка между узлами  $i$  и  $j$ ; сумма берется по всем парам  $(i, j)$ .

Запишем выражение для суммарной тепловой мощности в цепи с *фиктивными* токами  $J_{ij}$ :

$$F = \sum_{ij} J_{ij}^2 R_{ij}.$$

Это можно переписать так:

$$F = \sum_{ij} (I_{ij} + \Delta I_{ij})^2 R_{ij},$$

что после преобразований с учетом закона Ома  $\varphi_i - \varphi_j = I_{ij} R_{ij}$  дает

$$F = \sum_{ij} I_{ij}^2 R_{ij} + \sum_{ij} 2(\varphi_i - \varphi_j) \Delta I_{ij} + \sum_{ij} \Delta I_{ij}^2 R_{ij}.$$

Покажите, что  $\sum_{ij} 2(\varphi_i - \varphi_j) \Delta I_{ij} = 0$ , используя тот факт, что для изменений токов выполняется первое правило Кирхгофа (см. п. 2). Может быть удобным проводить суммирование «по узлам» полной цепи (см. п. 1).

Таким образом,  $P < F$ : *суммарная тепловая мощность в резисторной цепи с действительными токами меньше суммарной тепловой мощности в этой цепи с фиктивными токами, удовлетворяющими первому правилу Кирхгофа.*

ЗАДАЧА 2. (*Доказательство теоремы о сопротивлении*) Пусть резисторная цепь имеет два вывода  $a$  и  $b$ . Через вывод  $a$  в эту цепь втекает ток  $I$ , через узел  $b$  — этот ток вытекает. Общее сопротивление цепи обозначим  $R$ , общую тепловую мощность — через  $P$ .

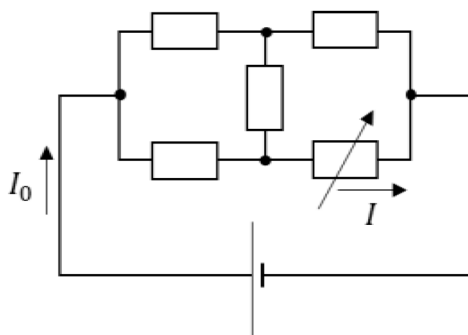
Зафиксируйте значение втекающего тока  $I$  и покажите с помощью принципа минимума и формулы суммарной мощности  $P = I^2 R$ , что:

- при увеличении одного из сопротивлений цепи общее ее сопротивление увеличивается;
- при уменьшении одного из сопротивлений цепи общее ее сопротивление уменьшается.

Объясните, почему общее сопротивление цепи не меняется, если изменяют сопротивление, по которому не идет ток.

ЗАДАЧА 3. (*Всеросс., 2025, МЭ, 11*)

Электрическая цепь собрана из четырёх постоянных резисторов и одного переменного резистора (правый нижний). Эта цепь подключена к идеальному источнику напряжения. Сопротивление переменного резистора увеличивают. Выберите все верные утверждения относительно изменений силы  $I_0$  тока, протекающего через источник, и силы  $I$  тока, текущего через переменный резистор.



1. Ток  $I_0$  строго уменьшается, и ток  $I$  строго уменьшается.
2. Ток  $I_0$  строго уменьшается, а ток  $I$  может как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).
3. Ток  $I_0$  строго уменьшается, а ток  $I$  строго увеличивается.
4. Ток  $I_0$  строго увеличивается, а ток  $I$  может как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).
5. И ток  $I_0$ , и ток  $I$  могут как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).

1