

Теорема о сопротивлении

И. И. Кравченко

Олимпиадная физика Physway

Пусть имеется цепь *только* из резисторов (*резисторная цепь*), которая подключена к батарее. Для такой цепи справедливо следующее.

Теорема о сопротивлении. Если какое-либо сопротивление в цепи увеличить (или уменьшить), то общее сопротивление цепи тоже увеличится (или уменьшится соответственно). Общее сопротивление останется прежним, если по изменяемому сопротивлению не шел ток.

Эта теорема следует из общего принципа — принципа минимума для электрической цепи, который сформулируем в следующем варианте.

Принцип минимума. Пусть цепь из резисторов имеет два вывода *a* и *b*. Если ток *I* втекает в цепь через вывод *a* и вытекает — через вывод *b*, то внутри цепи этот ток распределяется между резисторами так, чтобы суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, была минимальна.

Перед тем, как перейти к работе над задачами, читателю стоит ознакомиться со следующими материалами:

- О. В. Ляшко. Почему не уменьшится сопротивление. «Квант», 1985, № 1.
- Е. Соколов. И снова задачи на сопротивления. «Квант», 2011, № 3.
- Дж. К. Максвелл. Трактат об электричестве и магнетизме, Т. I, гл. 6, п. 283.
- Jaan Kalda. Учебные пособия для IPhO. Электрические цепи, с. 11.

ЗАДАЧА 1. (*Доказательство принципа минимума*) Проведем доказательство принципа минимума для резисторной(!) цепи так, как это сделал Максвелл. Для начала сделаем две вспомогательные задачи.

1. Назовем *полной цепью* цепь, в которой каждый узел связан со всеми другими узлами. Убедитесь, что любую цепь из резисторов можно рассматривать как полную, если считать, что между несвязанными в действительности узлами включено бесконечное сопротивление.
2. Пусть резисторная цепь имеет два вывода a и b . Через вывод a в эту цепь втекает ток I , через узел b — этот ток вытекает. Внутри цепи ток I распределяется между ее участками. По участку между узлами i и j внутри цепи в действительности протекает ток I_{ij} .

Предположим, что ток I распределился внутри цепи иначе, так что токи участков получили соответствующие изменения и стали равны $J_{ij} = I_{ij} + \Delta I_{ij}$ (фиктивные токи). Покажите, что если первое правило Кирхгофа выполняется для токов I_{ij} и J_{ij} , то оно выполняется и для изменений токов ΔI_{ij} .

Продолжим рассмотрение ситуации по п. 2. Суммарная мощность тепловыделения в цепи с *действительными* токами I_{ij} равна

$$P = \sum_{ij} I_{ij}^2 R_{ij},$$

где R_{ij} — сопротивление участка между узлами i и j ; сумма берется по всем парам (i, j) .

Запишем выражение для суммарной тепловой мощности в цепи с *фиктивными* токами J_{ij} :

$$F = \sum_{ij} J_{ij}^2 R_{ij}.$$

Это можно переписать так:

$$F = \sum_{ij} (I_{ij} + \Delta I_{ij})^2 R_{ij},$$

что после преобразований с учетом закона Ома $\varphi_i - \varphi_j = I_{ij} R_{ij}$ дает

$$F = \sum_{ij} I_{ij}^2 R_{ij} + \sum_{ij} 2(\varphi_i - \varphi_j) \Delta I_{ij} + \sum_{ij} \Delta I_{ij}^2 R_{ij}.$$

Покажите, что $\sum_{ij} 2(\varphi_i - \varphi_j) \Delta I_{ij} = 0$, используя тот факт, что для изменений токов выполняется первое правило Кирхгофа (см. п. 2). Может быть удобным проводить суммирование «по узлам» полной цепи (см. п. 1).

Таким образом, $P < F$: *суммарная тепловая мощность в резисторной цепи с действительными токами меньше суммарной тепловой мощности в этой цепи с фиктивными токами, удовлетворяющими первому правилу Кирхгофа.*

ЗАДАЧА 2. (*Доказательство теоремы о сопротивлении*) Пусть резисторная цепь имеет два вывода a и b . Через вывод a в эту цепь втекает ток I , через узел b — этот ток вытекает. Общее сопротивление цепи обозначим R , общую тепловую мощность — через P .

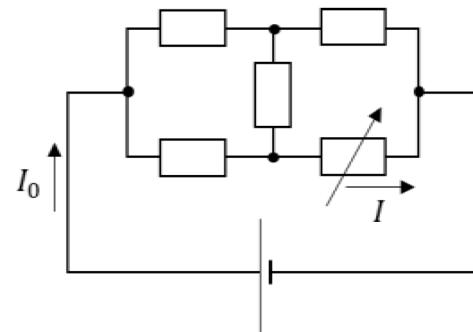
Зафиксируйте значение втекающего тока I и покажите с помощью принципа минимума и формулы суммарной мощности $P = I^2R$, что:

- при увеличении одного из сопротивлений цепи общее ее сопротивление увеличивается;
- при уменьшении одного из сопротивлений цепи общее ее сопротивление уменьшается.

Объясните, почему общее сопротивление цепи не меняется, если изменяют сопротивление, по которому не идет ток.

ЗАДАЧА 3. (*Всеросс., 2025, МЭ, 11*)

Электрическая цепь собрана из четырёх постоянных резисторов и одного переменного резистора (правый нижний). Эта цепь подключена к идеальному источнику напряжения. Сопротивление переменного резистора увеличиваю. Выберите все верные утверждения относительно изменений силы I_0 тока, протекающего через источник, и силы I тока, текущего через переменный резистор.



1. Ток I_0 строго уменьшается, и ток I строго уменьшается.
2. Ток I_0 строго уменьшается, а ток I может как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).
3. Ток I_0 строго уменьшается, а ток I строго увеличивается.
4. Ток I_0 строго увеличивается, а ток I может как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).
5. И ток I_0 , и ток I могут как увеличиваться, так и уменьшаться (зависит от сопротивлений постоянных резисторов в цепи).

(1)