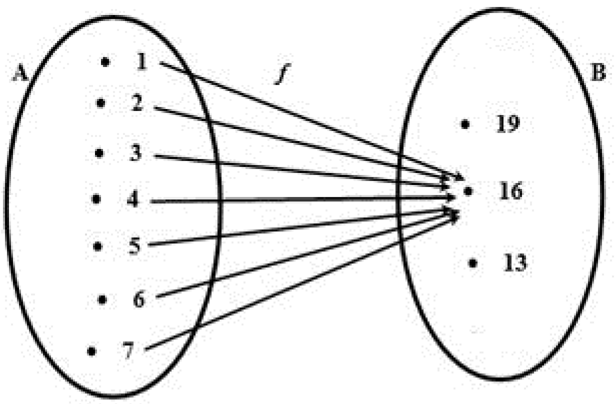
FUNÇÃO

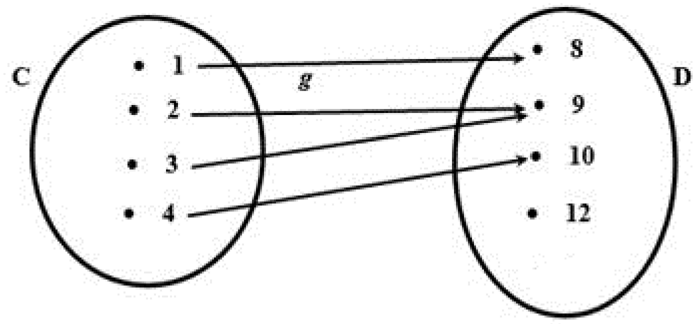
Uma função é uma relação especial que satisfaça a duas condições:

- O domínio obrigatoriamente deve ser todo o conjunto de partida, ou seja, todo primeiro conjunto tem que estar relacionado com o segundo conjunto.
- Todo elemento do domínio só pode estar associado a um único elemento do contradomínio, ou seja, não pode ter um elemento do primeiro conjunto associado a mais que um elemento do segundo conjunto.

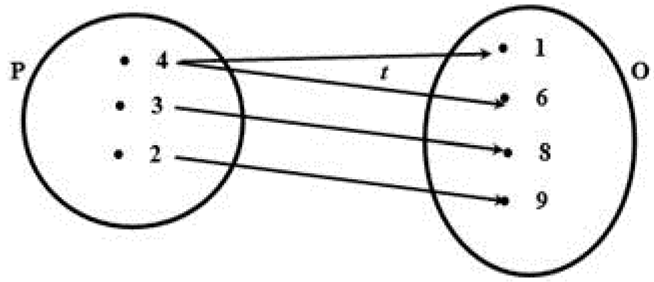
No segundo conjunto podem sobrar elementos sem estar associados para ser função.

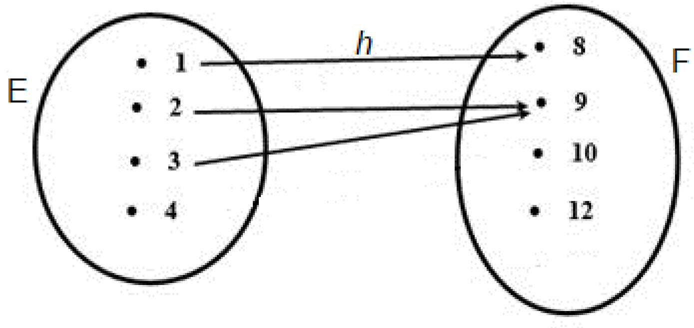
Os diagramas abaixo mostram exemplos de funções:





Os diagramas abaixo mostram exemplos de relações que não são funções:





A relação t não é função porque o elemento 4 do domínio está associado a mais de um elemento do contradomínio, no caso o elemento 1 e o elemento 6.
A relação h não é função porque o domínio não é todo o conjunto partida, ou seja, o elemento 4 do primeiro conjunto não está associado a nenhum elemento do segundo conjunto.

Uma função normalmente é representada por f(x), lê-se “f de x”, pois o resultado é uma função de x, elemento do domínio. Outras formas são g(x), h(x), etc.
Ex.: $f(x) = x + 1$, $g(x) = 5x^2 – 12$.

Valor numérico de uma função
É a imagem de um elemento do domínio em uma função.
Assim se $f(x) = x + 2$
O valor que a função assume quando $x = –1$, denominado valor numérico da função para $x = –1$ e representado por $f(–1) = (–1) + 2 = 1$.
A função f(x) também é representado costumeiramente por y. Assim no exemplo acima, $y = x + 2$.

Função crescente

É uma função cujos elementos imagens associados tem valores aumentados, quando se aumenta o valor do domínio, ou seja, se x_1 e x_2 são elementos do domínio e $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

Ex.: f(x) = x + 2

f(1) = 1 + 2 = 3

f(–2) = (–2) + 2 = 0

Assim, –2 < 1 e f(–2) < f(1) então f(x) é uma função crescente.

Função decrescente

É uma função cujos elementos imagens associados tem valores diminuídos, quando se aumenta o valor do domínio, ou seja, se x_1 e x_2 são elementos do domínio e $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.

Ex.: f(x) = – 2x + 1

f(0) = –2.0 + 1 = 1

f(2) = –2.2 + 1 = – 3

Assim, 0 < 2 e f(0) > f(2) então f(x) é uma função decrescente.

Função constante

É uma função onde para qualquer valor do domínio o valor da imagem é constante.

Ex.: f(x) = 1

f(0) = 1, f(1) = 1, f(–1) = 1

Ou seja, a função é constante.

Função afim ou função do primeiro grau

É toda função do tipo f(x) = ax + b, onde a ≠ 0.

Ex.: f(x) = x + 1, g(x) = 3x, h(x) = –x + 5

Se uma fábrica de luvas produz 10 pares de luvas a cada minuto, a função que mapeia essa produção é:

y = t /10, onde y é o número de pares de luvas e t é o tempo em minutos.

Gráfico de uma função do primeiro grau

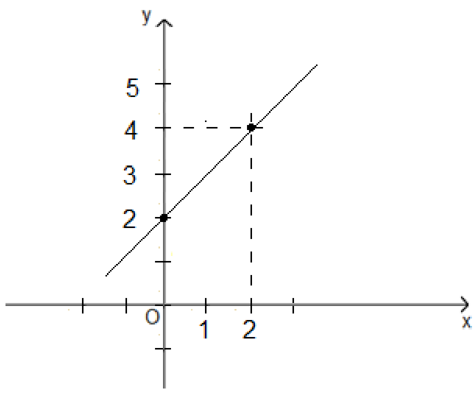
O gráfico de uma função do primeiro grau é uma reta. Para esboçar o gráfico bastam dois pontos já que uma reta é definida por dois pontos.

Ex.: $y = x + 2$

$y(0) = 2$

$y(2) = 4$

Assim, o gráfico fica esboçado como:



Zero da função do primeiro grau

O zero de uma função é o valor da variável x que conduza o valor da função, y, ao valor nulo.

Esse valor é o ponto que o gráfico corta o eixo x.

Ex.: Determine o valor do zero da função $y = x + 6$.

$x + 6 = 0$, $x = -6$, ou seja, -6 é o valor do zero da função $y = x + 6$.

Numa função do primeiro grau $y = ax + b$, o parâmetro “a” é chamado de coeficiente angular e o parâmetro “b” chamado coeficiente linear.

Uma função do primeiro grau é chamada crescente se o coeficiente angular é positivo, ou seja, $a > 0$, caso contrário é chamada decrescente se o coeficiente angular é negativo, ou seja, $a < 0$.

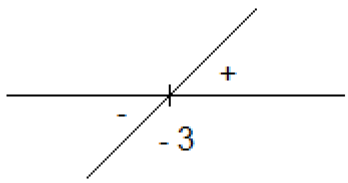
Variação do sinal da função do primeiro grau

Estudar a variação do sinal da função significa definir os valores da variável x que conduza a função ser positiva, negativa e nula.

Para tal define-se inicialmente se a função é crescente ou decrescente. Após determina-se o zero da função, em seguida faz-se um esboço da função e verifica-se onde a função é positiva, negativa e nula.

Ex.: Estudar a variação do sinal da função y = 2x + 6.

A função é crescente por apresentar o coeficiente angular positivo, ou seja, a = 2.



Assim, vê-se que após o valor – 3, o valor da função é positivo e antes de – 3 o valor é negativo, em – 3, o zero da função, a função é nula.

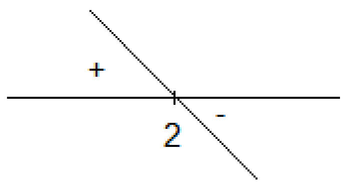
A forma correta de apresentar o resultado da análise da função é:

$$\begin{cases} \text{para } x > -3, & y > 0 \\ \text{para } x = -3, & y = 0 \\ \text{para } x < -3, & y < 0 \end{cases}$$

Ex.: Estudar a variação do sinal da função y = - x + 2.

A função é decrescente por apresentar o coeficiente angular negativo, ou seja, a = –1.

Assim, um esboço é montado:



Assim, vê-se que após o valor 2, o valor da função é negativo e antes de 2 o valor é positivo, em 2, o zero da função, a função é nula.

A forma correta de apresentar o resultado da análise da função é:

$$\begin{cases} \text{para } x > 2, & y < 0 \\ \text{para } x = 2, & y = 0 \\ \text{para } x < 2, & y > 0 \end{cases}$$

Inequação de primeiro grau

É uma desigualdade de primeiro grau. Sua resolução é semelhante a resolução de uma equação do primeiro grau, apenas deve-se atentar quando a variável isolada é negativa, pois quando se multiplica por – 1, para mudar o sinal da variável, muda-se também o sinal da desigualdade.

Ex.: $5 - 2x > 7$

$-2x > 7 - 5$

$-2x > 2 \quad (.\ -1)$

$2x < -2$

$x < -1$

Inequação produto

É toda inequação que se apresenta em uma das seguintes formas:

$f(x)\ .\ g(x) > 0$

$f(x)\ .\ g(x) < 0$

$f(x)\ .\ g(x) \geq 0$

$f(x)\ .\ g(x) \leq 0$

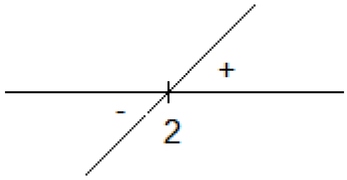
onde f e g são funções quaisquer.

O método de resolução consiste em fazer inicialmente uma análise da variação do sinal de cada uma das funções e depois disponibilizar o resultado dessas análises em uma tabela para efetuar o produto dos sinais obtidos na análise e identificar o que se pede.

Ex.: $(x - 2)\ .\ (-2x - 6) \geq 0$

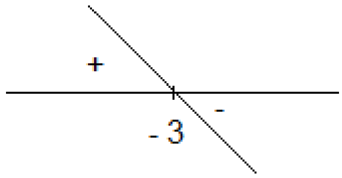
Análise do sinal da função (x – 2)

x – 2 = 0, x = 2



Análise do sinal da função (– 2x – 6)

– 2x – 6 = 0, x = – 3



Tomando as análises em uma única tabela, dispondo os zeros em ordem crescente, vem:

		– 3	2
(x – 2)	–	–	+
(– 2x – 6)	+	–	–
(x – 2) . (– 2x – 6) = 0	–	+	–

Como o que se pede é ≥ 0, encontram-se esses valores, de acordo com a tabela, entre – 3 e 2. Assim a resposta fica:

– 3 ≤ x ≤ 2.

Inequação quociente

Procede-se de forma análoga à inequação produto com apenas uma diferença, deve-se excluir da resposta o zero da função que se encontra no denominador.

Ex.: $(x - 2)/(- 2x - 6) \geq 0$

Realiza-se a mesma análise do sinal das funções, como no exemplo anterior e monta-se a tabela com os resultados das análises. Assim:

	-3		2
$(x - 2)$	$-$	$-$	$+$
$(-2x - 6)$	$+$	$-$	$-$
$(x - 2) / (-2x - 6) = 0$	$-$	$+$	$-$

Como o que se pede é ≥ 0, encontram-se esses valores, de acordo com a tabela, entre -3 e 2, porém o valor -3 deve ser excluído da resposta por zerar o denominador. Assim a resposta fica:

$-3 < x \leq 2$.

Função quadrática

É a função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Ex.: $y = f(x) = 2x^2 + x - 3$

$y = -x^2 + 3x$

$y = 5x^2 - 31$

$y = 3x^2$

O gráfico de uma função quadrática é denominado parábola e pode ter a concavidade voltada para cima, caso em que o coeficiente do termo quadrado "a" é positivo e pode ter a concavidade voltada para baixo, caso em que o coeficiente do termo quadrado "a" é negativo.

$y = ax^2 + bx + c$

Se $a > 0$ ➔Concavidade para cima

Se $a < 0$ ➔Concavidade para baixo

Zeros da função

São os valores que conduzem a função a um valor nulo, ou seja, y = 0.
$ax^2 + bx + c = 0$

Para determinar os valores de x, resolve-se a equação do segundo grau.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Os valores de x definirão os zeros da função, bem como os pontos que a parábola cortará o eixo dos x.

Vértice da parábola

A parábola possui um ponto de máximo ou mínimo. Esse ponto possui uma coordenada x (abscissa) e uma coordenada y (ordenada), assim definidos:

$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a}, \text{onde } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Assim, V (x_V, y_V)

Gráfico da função quadrática

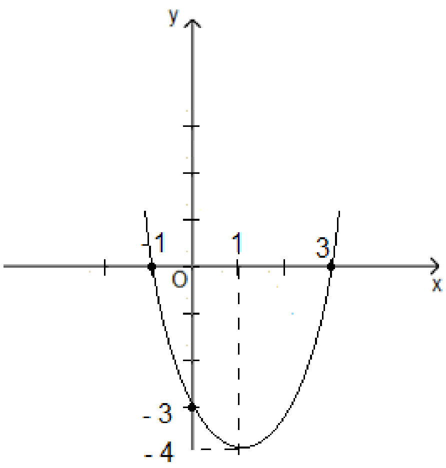
Para esboçar o gráfico de uma função quadrática, deve-se seguir os seguintes passos:

a. Estabelecer a concavidade da parábola em função do sinal do coeficiente do termo quadrado, a > 0 concavidade para cima, a < 0 concavidade para baixo;
b. Determinar os zeros da função e marcá-los sobre o eixo x;
c. Marcar o vértice da parábola;
d. Marcar sobre o eixo y o valor y = c;
e. Unir os pontos.

Ex.: Construir o gráfico da função y = $x^2 - 2x - 3$.

a. Como a > 0, a concavidade é para cima;
b. Para achar os zeros, faz-se:
   $x^2 - 2x - 3 = 0$, resolvendo esta equação do 2º grau, x = – 1 ou x = 3, deve-se marcar esses pontos no eixo x;
c. O vértice da parábola é $x_V = \frac{2}{2} = 1$ e $y_V = \frac{-((-2)^2-4.1.(-3))}{4.1} = \frac{-16}{4} = -4$, V (1, – 4)
d. Deve-se marcar y = – 3 no eixo y.

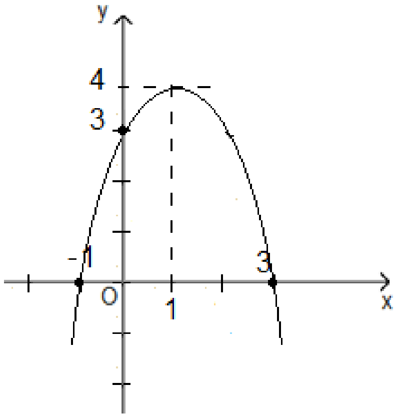
Desta forma, o esboço é:



Ex.: Construir o gráfico da função y = $-x^2 + 2x + 3$.

a. Como a < 0, a concavidade é para baixo;
b. Para achar os zeros, faz-se:
   $-x^2 + 2x + 3 = 0$, resolvendo esta equação do 2º grau, x = – 1 ou x = 3, deve-se marcar esses pontos no eixo x;
c. O vértice da parábola é $x_V = \frac{-2}{2.(-1)} = 1$ e $y_V = \frac{-(2^2-4.(-1).(3))}{4.(-1)} = \frac{-16}{-4} = 4$, V (1, 4)
d. Deve-se marcar y = 3 no eixo y.

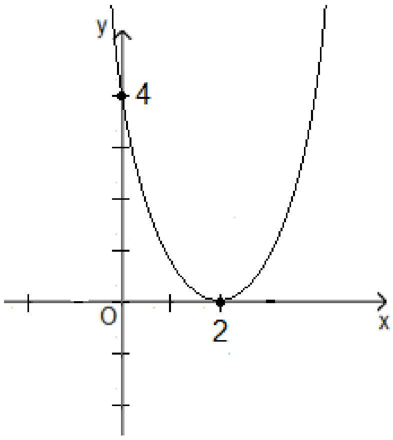
Desta forma, o esboço é:



Ex.: Construir o gráfico da função y = x^2 – 4x + 4.

a. Como a > 0, a concavidade é para cima;
b. Para achar os zeros, faz-se:
   $x^2 - 4x + 4 = 0$, resolvendo esta equação do 2º grau, x = 2, deve-se marcar esse ponto no eixo x;
c. O vértice da parábola é $x_V = \frac{-(-4)}{2.1} = 2$ e $y_V = \frac{-((-4)^2 - 4.1.4)}{4.1} = \frac{0}{4} = 0$, V (2, 0)
d. Deve-se marcar y = 4 no eixo y.

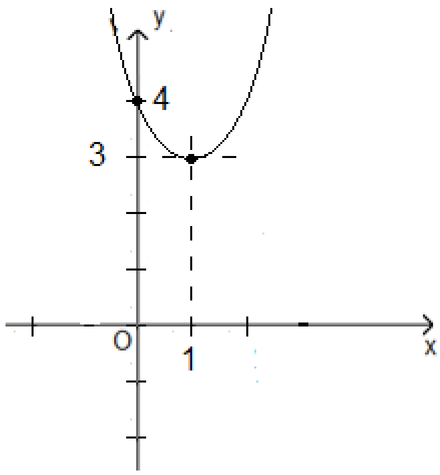
Desta forma, o esboço é:



Ex.: Construir o gráfico da função y = x^2 – 2x + 4.

a. Como a > 0, a concavidade é para cima;
b. Para achar os zeros, faz-se:
   $x^2 - 2x + 4 = 0$, resolvendo esta equação do 2º grau, verifica-se que não há raízes no campo dos reais e portanto não há pontos a se marcar no eixo x;
c. O vértice da parábola é $x_V = \frac{2}{2.1} = 1$ e $y_V = \frac{-((-2)^2-4.1.4)}{4.1} = \frac{12}{4} = 3$, V (1, 3)
d. Deve-se marcar y = 4 no eixo y.

Desta forma, o esboço é:



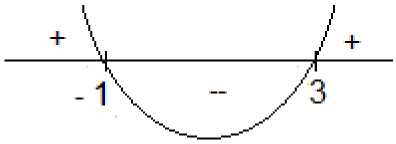
Variação de sinal da função quadrática

Estudar a variação do sinal da função significa definir os valores da variável x que conduza a função quadrática ser positiva, negativa e nula.

Para tal define-se inicialmente os zeros da função dispondo eles sobre uma reta real. Define-se a concavidade observando o sinal do coeficiente “a” do termo quadrado, em seguida faz-se um esboço da função e verifica-se onde a função é positiva, negativa e nula.

Ex.: Fazer uma análise do sinal da função $y = x^2 - 2x - 3$
Inicialmente determinam-se os zeros da função, ou seja, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = -1$ ou $x = 3$.

Como o coeficiente a > 0 então a concavidade é para cima. Assim:



Observa-se na figura que valores de x abaixo de – 1 ou acima de 3, a função y assume valores positivos e para valores entre – 1 e 3 a função y assume valores negativos. Assim:

$$\begin{cases} \text{para } x < -1 \text{ ou } x > 3, y > 0 \\ \text{para } x = -1 \text{ ou } x = 3, y = 0 \\ \text{para } -1 < x < 3, y < 0 \end{cases}$$

Máximo e mínimo da função quadrática

Os valores de máximo e mínimo de uma função quadrática correspondem ao valor que a função assume no vértice da parábola, sendo máximo quando a parábola tiver a concavidade para baixo, ou seja, a < 0 e mínimo quando a parábola tiver a concavidade para cima, ou seja, a > 0.

A determinação de máximo ou mínimo é extremamente importante na engenharia pois pode determinar o máximo de uma produção desde que esta esteja definida por uma função quadrática ou o mínimo de custo de uma produção também se esta estiver defina por uma função quadrática.

Ex.: Determinar o máximo lucro obtido em uma produção sabendo–se que este é definido por uma função y = – x^2 + 6x + 3, onde y é o lucro em mil reais e x é o número de produtos fabricados em centenas.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(6^2 - 4 \,.\, (-1).\, 3)}{4 \,.\, (-1)} = \frac{-48}{-4} = 12$$

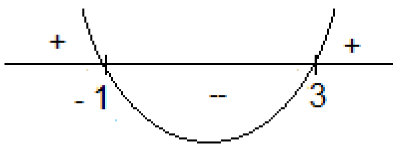
Inequação do segundo grau

É uma desigualdade de segundo grau. Para resolvê-la deve-se proceder uma análise da variação do sinal da função e dar a resposta de acordo com o pedido da desigualdade. Ela pode estar representada por uma dessas formas:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c \geq 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \end{cases}$$

Ex.: Resolver a inequação $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

Fazendo inicialmente uma análise do sinal da função $y = x^2 - 2x - 3$, vem:



Como a inequação requer valores de x que conduzam a valores menores ou igual a zero, vê-se pelo esboço da figura que tal situação ocorre entre – 1 e 3 (valores negativos) bem como nos próprios valores – 1 e 3 (valores iguais a zero).

Assim a solução da inequação é:

$-1 \leq x \leq 3$.