Diferansiyel Denklemlere Kapsamlı Giris: ÇALISMA NOTU

Detayli ve Basit Anlatim

8 Ekim 2025

Temel Amac: Matematiksel modelleri ve değişim hızlarını temsil eden, içinde $\frac{dy}{dx}$ gibi **türev** bulunan denklemleri anlamak ve çözmek.
Nihai Hedef: Denklemi sağlayan **bilinmeyen fonksiyonun kendisini** (y) bulmak.

---

1 1. Diferansiyel Denklem (DD) Nedir?

DD Tanımı: Bir bilinmeyen fonksiyonun (**bağımlı değişken**, y) bir veya daha fazla değişkene (**bağımsız değişken**, x veya t) göre türevlerini içeren matematiksel bir ifadedir.

- **Bağımlı Değişken (y):** Değeri diğer değişkenlere bağlı olan, bulmak istediğimiz fonksiyon.
- **Bağımsız Değişken (x, t):** Değeri serbestçe değişebilen değişkendir (genellikle zaman t veya konum x).
- **Örnek:** $\frac{dy}{dx} = 4x + 1$

1.1 Uygulama Alanları

DD'ler, değişimi modellediği için mühendislik ve bilimde zorunludur:

- Roket, uydu gibi cisimlerin **hareketini** belirleme.
- Elektrik devrelerindeki **akım** veya yük değişimi.
- Radyoaktif maddelerin **bozunma hızı** veya popülasyon büyümesi.

---

2 2. DD'lerin Siniflandirilmasi: 3 Temel Kriter

2.1 A. Tipe Göre Sınıflandırma

Tip	Tanım	Örnek
Adi Diferansiyel Denklem (ODE)	Yalnızca **tek bir bağımsız değişkene** göre sıradan türevler içerir. ($\frac{d}{dx}$ kullanılır).	$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$
Kısmi Diferansiyel Denklem (PDE)	**İki veya daha fazla bağımsız değişkene** göre kısmi türevler içerir. (∂ sembolü kullanılır).	$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

2.2 B. Mertebeye (Dereceye) Göre Sınıflandırma

Bu, denklemdeki **en yüksek türevin kaçıncı dereceden** olduğunu gösterir.

- **Örnek:** $\frac{d^{\mathbf{2}}y}{dx^2} + 9(\frac{dy}{dx})^3 - 4y = e^x \to$ En yüksek türev 2. mertebeden $\to$ **2. Mertebe ODE**.
- Türevin üssü ($(\frac{dy}{dx})^{\mathbf{3}}$), denklemin mertebesini değiştirmez.

2.3 C. Doğrusallığa (Lineerliğe) Göre Sınıflandırma

Lineer bir DD, bilinmeyen fonksiyonu ve türevlerini (yani $y, y', y'', \ldots$) **doğrusal bir fonksiyon** gibi içerir. Bu **üç kuralın** bozulması, denklemi Non-Lineer yapar:

1. **Kuvvet Kuralı:** y ve tüm türevlerinin kuvveti **sadece 1** olmalıdır. (y^2 veya $(y')^3$ olamaz).
2. **Çarpım Kuralı:** y ve türevlerinin çarpımı **olmamalıdır**. ($y \cdot y'$ olamaz).
3. **Fonksiyon Kuralı:** y'nin transandantal (trigonometrik, üstel, logaritmik) fonksiyonu **olmamalıdır**. ($\cos y$ veya e^y olamaz).

Non-Lineer Örnekler: $\frac{d^4y}{dx^4} + \mathbf{y^2} = 0$ | $(1 - \mathbf{y})y' + 5y = e^x$ | $y'' + \cos \mathbf{y} = 0$

---

3 3. Çözüm Tipleri ve Koşulları

3.1 A. Çözüm Tipleri

- **Genel Çözüm:** Tüm olası çözümleri temsil eder ve **rastgele sabitler** (C) içerir.
- **Özel Çözüm:** Verilen ek koşullarla (C'nin değerinin belirlenmesiyle) elde edilen tek bir çözümdür.

3.2 B. Koşullar

- **Başlangıç Değer Problemi (BDP):** Koşullar **tek bir noktada** verilir (Örn: $y(\pi) = 1$ ve $y'(\pi) = 2$).
- **Sınır Değer Problemi (SDP):** Koşullar **birden fazla farklı noktada** verilir (Örn: $y(2) = 1$ ve $y(5) = 1$).

---

4 4. Temel Çözüm Yöntemi I: Değişkenlerine Ayrılabilen DD'ler

Bu, 1. mertebeden denklemleri çözmenin en basit yoludur, çünkü entegrasyon formuna getirilebilir.

1. **Ayır (Separate):** Denklemi $h(y)dy = g(x)dx$ formunda yazın. (Tüm y'lileri dy'nin yanına, x'lileri dx'in yanına alın.)
2. **Entegre Et (Integrate):** Her iki tarafın integralini alın.
3. **Sabiti Ekle:** Sonuçta tek bir **C** sabiti ekleyin.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}$

- 1. Adım: $y^2dy = (x-5)dx$
- 2. Adım: $\int y^2dy = \int (x-5)dx$
- 3. Adım: $\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + \mathbf{C}$

---

5 5. Temel Çözüm Yöntemi II: Birinci Mertebeden Lineer DD'ler

Bu denklemlerin genel formu $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$'dir ve **Entegrasyon Çarpanı ($\mu(x)$)** kullanılarak çözülür.

1. **1. Standart Form:** Denklemi $\frac{dy}{dx} + \mathbf{P}(\mathbf{x})y = \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ formunda yazın.
2. **2. Entegrasyon Çarpanı ($\mu(x)$):** $P(x)$ fonksiyonunu kullanarak çarpanı hesaplayın. ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$ alın!)
$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$
3. **3. Türev Formuna Getir:** Denklemi $\mu(x)$ ile çarpın. Sol taraf her zaman bir çarpımın türevi olur: $\frac{d}{dx}[\mu(x) \cdot y] = \mu(x) \cdot Q(x)$.
4. **4. Entegre Et ve Çöz:** Her iki tarafın integralini alın ve y'yi yalnız bırakın.
$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)Q(x)dx + C \right]$$

Örnek: $y' - 3y = 6$

- 1. Adım: $P(x) = -3$, $Q(x) = 6$.
- 2. Adım: $\mu(x) = e^{\int -3dx} = \mathbf{e^{-3x}}$.
- 3. Adım: $\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = 6e^{-3x}$.
- 4. Adım: $e^{-3x}y = \int 6e^{-3x}dx \rightarrow e^{-3x}y = -2e^{-3x} + C$
- **Final Çözüm:** $\mathbf{y = -2 + Ce^{3x}}$