微積分学 Ⅰ・Ⅱ 演習問題

目 次

微積分学 I 演習問題　第 1 回　数列の極限

1. 次の極限を求めよ．ただし, $|a| < |b|$, $b \neq -1$, $c \neq 0$, k は 0 でない整数, m は整数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^n + c^{-n}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n + 1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(kn+m+1)^n}{(kn+m)^n}$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{kn}\right)$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n}$

2. $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ を定数とし a は 0 でないとする．$x_1 = c$, $x_{n+1} = ax_n + b$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項を求め, この数列が収束するための条件を求めよ．

3. $|r| < 1$ ならば, 任意の実数 α に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} r^n = 0$ であることを示せ．

4. $f(x)$ を x^k の係数が 1 である x の k 次多項式とし, $g(x)$, $h(x)$ を $m-1$ 次以下の x の多項式とする．p, q を相異なる実数, r を正の整数とするとき

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt[r]{n^{m+1}f(n) + pn^m + g(n)} - \sqrt[r]{n^{m+1}f(n) + qn^m + h(n)}\right)$$

が 0 でない値に収束するような α の値と, そのときの極限値を求めよ．

5. (1) 正の実数 a に対し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ であることを示せ．

(2) 「$i = 2, 3, \ldots, m$ に対して $a_1 \geqq a_i \geqq 0$」または「$i = 2, 3, \ldots, m$ に対して $a_1 > |a_i|$」ならば

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1$$

であることを示せ．

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

7. k を正の実数, l を 1 以上の実数とする．0 以上の実数からなる数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が任意の自然数 n に対して, 不等式 $x_{n+1} \leqq kx_n^l$ を満たすとき, 以下の問いに答えよ．

(1) $l = 1$ かつ $k < 1$ ならば, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ．

(2) $l > 1$ であり, $x_m < k^{\frac{1}{1-l}}$ を満たす自然数 m が存在すれば, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ．

8. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項が $0 \leqq a_n < 1$ を満たし, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) = 0$ であることを示せ．

9. $a, b > 0$ とし, $x_1 \geqq -\dfrac{b}{a}$ かつ $x_{n+1} = \sqrt{ax_n + b}$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

(1) α を方程式 $x = \sqrt{ax + b}$ の解とするとき, 「$x_n < \alpha$ ならば $x_{n+1} < \alpha$」と「$x_n > \alpha$ ならば $x_{n+1} > \alpha$」が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $x_1 < \alpha$ ならば単調増加数列であり, $x_1 > \alpha$ ならば単調減少数列であることを示せ．

(3) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めよ．

10. $0 \leqq q \leqq p^2$, $p > 0$ とし, 漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + q}{2p}$ を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための a_1 の範囲を求め, 収束する場合には, その極限値を求めよ．

11. $0 < 4b \leqq a^2$, $a > 0$ とし, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は漸化式 $x_{n+1} = a\sqrt{x_n - b}$ を満たすとする．

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のすべての項が実数であるための x_1 の条件を求めよ．

(2) が (1) の条件を満たすとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めよ．

12. a, b を正の実数 m を 2 以上の自然数とし, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = b$, $a_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{m}\right) a_n + \dfrac{a}{ma_n^{m-1}}$ で定める．

(1) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_n > \sqrt[m]{a}$ であることを示せ．

(2) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_n > a_{n+1}$ であることを示せ．

(3) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_{n+1} - \sqrt[m]{a} < \dfrac{m-1}{m}(a_n - \sqrt[m]{a})$ であることを示せ.

(4) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_{n+1} - \sqrt[m]{a} < \dfrac{m-1}{2\sqrt[m]{a}}(a_n - \sqrt[m]{a})^2$ であることを示せ.

(5) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 3$ ならば $a_n - \sqrt[m]{a} < \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{n-2}\left(\left(1-\dfrac{1}{m}\right)b + \dfrac{a}{mb^{m-1}} - \sqrt[m]{a}\right)$ が成り立つことを示せ.

13. 任意の $n = 2, 3, 4, \ldots$ に対し, 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の第 n 項目までの和と積が等しいとする.

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ とおくとき, S_n を用いて S_{n+1} を表わせ. また, x_n を用いて x_{n+1} を表わせ.

(2) $0 \neq x_1 < 1$ ならば任意の $n \geqq 3$ に対して $1 > x_n > x_{n+1} > 0$ が成り立ち, $x_1 > 1$ ならば任意の $n \geqq 2$ に対して $x_n > x_{n+1} > 1$ が成り立つことを示せ.

(3) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めよ.

14. $a, b > 0$ とし, $x_1, x_2 > 0$ であり, 漸化式 $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. このとき, $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示し, a, b を用いて $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ を表せ.

15. 以下の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束・発散について調べよ.

(1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n^2+1}$ (2) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{a_n^2}{a_n^2+1}$

16. 次の級数の和を求めよ. ただし, k は自然数とする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+k)}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right)}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$

17. (発展問題) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と, すべての項が正の実数である数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられていて, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ と $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \infty$ が成り立つとき, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = c$ であることを示せ.

18. (発展問題) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と任意の自然数 m に対して, 収束する数列 $\{b(m)_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c(m)_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, 次の条件を満たすものが存在するとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = r$ であることを示せ.

(i) 数列 $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ を $\lim_{n\to\infty} b(m)_n = \beta_m$, $\lim_{n\to\infty} c(m)_n = \gamma_m$ で定めれば, $\lim_{m\to\infty} \beta_m = \lim_{m\to\infty} \gamma_m = r$.

(ii) 各自然数 m に対して, 自然数 $N(m)$ で, 条件「$n \geqq N(m)$ ならば $b(m)_n \leqq a_n \leqq c(m)_n$」を満たすものがある.

19. (発展問題) 各項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられていて, 極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在するとき, その値を r とすれば, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ であることを示せ.

20. (発展問題) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を各項が正である数列とする. 正の実数 ρ に対して $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ が成り立つためには, 任意の $0 < r < \dfrac{1}{\rho}$ に対して $\lim_{n\to\infty} r^n a_n = 0$ が成り立ち, かつ任意の $0 < r < \rho$ に対して $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{a_n} = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

21. (発展問題) 2 次正則行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, 写像 $f_A : \boldsymbol{R} \cup \{\infty\} \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ を

$$c \neq 0 \text{ の場合 } f_A(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d} & x \neq -\frac{d}{c}, \infty \\ \infty & x = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & x = \infty \end{cases} \qquad c = 0\,, d \neq 0 \text{ の場合 } f_A(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{d} & x \neq \infty \\ \infty & x = \infty \end{cases}$$

で定義する. また, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は漸化式 $x_{n+1} = f_A(x_n)$ を満たすとする.

(1) 2 次正則行列 A, B に対して f_{AB} は合成写像 $f_A \circ f_B$ に一致することを示せ.

(2) $c \neq 0$ かつ $(a+d)^2 \neq 4(ad-bc)$ の場合, x_n を a, b, c, d と x_1 を用いて表せ.
(3) $c \neq 0$ かつ $(a+d)^2 = 4(ad-bc)$ の場合, x_n を a, b, c, d と x_1 を用いて表せ.
(4) $c \neq 0$ のとき, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための条件を求め, 収束する場合に極限値を求めよ.
(5) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n+8}{x_n+3}$ で定められているとき, この数列の極限値を求めよ.

22. (発展問題) (1) $a, b > 0$ に対して数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に $a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ で定める. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ値に収束することを示せ.
(2) $a, b > 0$ に対して数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に $a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ で定める. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ値に収束することを示し, その極限値を求めよ.

23. (発展問題) $0 < a < b$ に対して数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を帰納的に $a_0 = a,\ b_0 = b,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ で定める. このとき, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ は同じ値に収束することを示し, $a = b\cos\theta\ (0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ とおくとき, その極限値を求めよ. また, $a = \dfrac{1}{4},\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ の場合, a_n は直径 1 の円に外接する正 2^{n+2} 角形の周囲の長さの逆数であり, b_n は直径 1 の円に内接する正 2^{n+2} 角形の周囲の長さの逆数であることを示せ.

24. (発展問題) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ によって数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めるとき, 以下の問に答えよ.
(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であることを示せ.
(2) すべての自然数 n に対して $a_n > e$ が成り立つことを示せ.

25. (発展問題) (1) すべての自然数 n に対して $\dfrac{1}{n}e^{n-1} \leqq \dfrac{n^n}{n!} \leqq e^n$ が成り立つことを示せ.
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ を求めよ.

微積分学 I 演習問題　第 2 回　逆三角関数

1. (1) $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおくとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる自然数を求めよ.

$$\tan 2\alpha = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\ \pi = 8\tan^{-1}\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} + 4\tan^{-1}\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}.$$

(2) $\beta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる自然数を求めよ.

$$\tan 2\beta = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \tan 4\beta = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\ \tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}},\ \pi = 16\tan^{-1}\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} - 4\tan^{-1}\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}.$$

2. 次の関係式が成り立つことを示せ.

(1) $\sin\left(\cos^{-1}x\right) = \cos\left(\sin^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$　(2) $\sin\left(2\cos^{-1}x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$　(3) $\tan\left(\cos^{-1}x\right) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(4) $\tan\left(\sin^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　(5) $\cos\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　(6) $\sin\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3. 次の等式を満たす x をそれぞれ求めよ.

(1) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{2}$　(2) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$　(3) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

(4) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$　(5) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{2}{5} = \dfrac{\pi}{4}$　(6) $2\cos^{-1}x = \tan^{-1}\sqrt{15}$

4. 次の値を, 逆三角関数を用いずに表せ.

(1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　(2) $\tan^{-1}\dfrac{2}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$　(3) $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} + \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(4) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{13}} + \sin^{-1}\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$　(5) $\tan^{-1}\dfrac{4}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$　(6) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(7) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2} - \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$　(8) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{5}{99}$　(9) $\cos^{-1}\dfrac{7}{25} + 2\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$

5. 次の関係式が成り立つことを示せ. ただし (1) では $x > 0$, (2) では $-1 \leqq x < 1$, (3) では $|x| < 1$, (4) では $x < -1$, (6) では $-1 < x \leqq 1$ とする.

(1) $2\tan^{-1}x - \tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x} = \dfrac{\pi}{2}$　(2) $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{\pi}{2} = \sin^{-1}x$　(3) $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

(4) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{3\pi}{4}$　(5) $\tan\left(2\tan^{-1}e^x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sinh x$　(6) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\cos^{-1}x\right) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

6. (発展問題) 等式 $5\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + 2\tan^{-1}\dfrac{3}{79} = \dfrac{\pi}{4}$ が成り立つことを示せ.

7. (発展問題) $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 1]$ に対し, $\cos^{-1}\alpha \leqq \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma$ が成り立つためには $\alpha \geqq \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ または $\beta+\gamma < 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ. また, 上の不等式の等号が成立するためには $\beta+\gamma \geqq 0$ かつ $\alpha = \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

8. (発展問題) 次の不等式を満たす xy 平面上の点 (x, y) 全体からなる領域を図示せよ.

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x + \tan^{-1}y < \dfrac{\pi}{2}$　(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x + \sin^{-1}y \leqq \dfrac{\pi}{2}$

9. (発展問題) $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} + \pi & xy > 1,\ x > 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} - \pi & xy > 1,\ x < 0 \end{cases}$$

10. (発展問題) $x, y \in [-1, 1]$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \begin{cases} \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) & xy \leqq 0 \text{ または } x^2+y^2 \leqq 1 \\ \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right) & x, y \geqq 0 \text{ かつ } x^2+y^2 \geqq 1 \\ -\cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right) & x, y \leqq 0 \text{ かつ } x^2+y^2 \geqq 1 \end{cases}$$

11. (発展問題) (1) $(n+a)(n+b) > 1$ の場合, $\tan^{-1}\dfrac{1}{n} = \tan^{-1}\dfrac{1}{n+a} + \tan^{-1}\dfrac{1}{n+b}$ が成り立つためには, $ab = n^2+1$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) 次の等式を示せ.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8}$ (ii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{70} = \tan^{-1}\dfrac{1}{99} + \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ (iii) $\tan^{-1}\dfrac{5}{99} = \tan^{-1}\dfrac{1}{20} + \tan^{-1}\dfrac{1}{1985}$

(3) 以下の値はすべて $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことを示せ.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8}$ (ii) $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{70} + \tan^{-1}\dfrac{1}{99}$ (iii) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{1}{20} + \tan^{-1}\dfrac{1}{1985}$

12. (発展問題) (1) $|n| > 1$ かつ $(n+a)(n+b) > 1$ の場合, $2\tan^{-1}\dfrac{1}{n} = \tan^{-1}\dfrac{1}{n+a} + \tan^{-1}\dfrac{1}{n+b}$ が成り立つためには, $(a+b)(n^2+1) + 2abn = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) 次の等式を示せ.

$$(i)\ 2\tan^{-1}\frac{1}{10} = \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{515} \quad (ii)\ 2\tan^{-1}\frac{1}{408} = \tan^{-1}\frac{1}{239} + \tan^{-1}\frac{1}{1393}$$

(3) 以下の値はいずれも $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことを示せ.

$$(i)\ 8\tan^{-1}\frac{1}{10} - \tan^{-1}\frac{1}{239} - 4\tan^{-1}\frac{1}{515} \quad (ii)\ 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - 2\tan^{-1}\frac{1}{408} + \tan^{-1}\frac{1}{1393}$$

13. (発展問題) 等式 $\dfrac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\dfrac{1}{18} + 8\tan^{-1}\dfrac{1}{57} - 5\tan^{-1}\dfrac{1}{239} = 6\tan^{-1}\dfrac{1}{8} + 2\tan^{-1}\dfrac{1}{57} + \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ が成り立つことを示せ.

14. (発展問題) x, y の有理式 $F(x, y)$ を $F(x, y) = \dfrac{x+y}{1-xy}$ によって定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $F(0, x) = F(x, 0) = x$, $F(y, x) = F(x, y)$, $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$ が成り立つことを示せ.

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とする有理式 $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を帰納的に $F_1(x_1) = x_1$,

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(F_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

によって定める. このとき, 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して次の等式が成り立つことを示せ.

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}{\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}$$

(3) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とする k 次基本対称式 $\displaystyle\sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ を $s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表すとき, 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して次の等式が成り立つことを示せ.

$$\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{k-1} s_{2k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k s_{2k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

とくに $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ の場合, 次の等式が成り立つ.

$$\mathrm{Im}(1+ix)^n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{k-1} \binom{n}{2k-1} x^{2k-1}, \qquad \mathrm{Re}(1+ix)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{2k}$$

(4) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_m) > 0$ を満たすことと, $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\left|\tan^{-1} x_1 + \tan^{-1} x_2 + \cdots + \tan^{-1} x_m\right| < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすことは同値であることを示せ.

(5) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が, $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\left|\tan^{-1} x_1 + \tan^{-1} x_2 + \cdots + \tan^{-1} x_m\right| < \dfrac{\pi}{2}$ を満たせば, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\tan^{-1} x_1 + \tan^{-1} x_2 + \cdots + \tan^{-1} x_n = \tan^{-1} \frac{\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}{\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}$$

とくに 2 以上の整数 n に対し, $|x| < \tan \dfrac{\pi}{2n}$ ならば $n \tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{\mathrm{Im}(1+ix)^n}{\mathrm{Re}(1+ix)^n}$ である.

15. (発展問題) 以下の等式を示せ.

(1) $\dfrac{\pi}{4} = 44 \tan^{-1} \dfrac{1}{57} + 7 \tan^{-1} \dfrac{1}{239} - 12 \tan^{-1} \dfrac{1}{682} + 24 \tan^{-1} \dfrac{1}{12943}$ (Störmer の公式)

(2) $\dfrac{\pi}{4} = 22 \tan^{-1} \dfrac{1}{28} + 2 \tan^{-1} \dfrac{1}{443} - 5 \tan^{-1} \dfrac{1}{1393} - 10 \tan^{-1} \dfrac{1}{11018}$ (Escott の公式)

(3) $\dfrac{\pi}{4} = 12 \tan^{-1} \dfrac{1}{49} + 32 \tan^{-1} \dfrac{1}{57} - 5 \tan^{-1} \dfrac{1}{239} + 12 \tan^{-1} \dfrac{1}{110443}$ (高野喜久雄の公式)

微積分学 I 演習問題　第 3 回　関数の極限と無限小・無限大の位数

1. 必要ならば $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ であることを用いて, 次の極限値を求めよ. ただし (2) の a, b は正の実数, (17) の m, p は負でない整数, n, q は正の整数, (21) では $a\neq 0$ とする.

(1) $\lim_{x\to 0}(\log|\sin x|-\log|x|)$　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$　(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}$

(5) $\lim_{x\to 0}(\log(1-\cos x)-2\log|x|)$　(6) $\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$　(7) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}+e^{bx}-2}{x}$　(8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$

(9) $\lim_{x\to 0}\frac{\log((1+x)(1+x^2))}{x}$　(10) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$　(11) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{x}$　(12) $\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(13) $\lim_{x\to +0}\frac{2\sin^{-1}(1-x)-\pi}{\sqrt{x}}$　(14) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}$　(15) $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$　(16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x}$

(17) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-(1-x)^{\frac{p}{q}}}{x}$　(18) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$　(19) $\lim_{x\to +0}\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}$　(20) $\lim_{x\to +0}\frac{x^x-1}{x\log x}$

(21) $\lim_{n\to\infty}\frac{(an+b)^n}{(an+c)^n}$

2. a を実数または $\pm\infty$, α を正の実数とし, f, g, F, G を a を含む開区間 (ただし $a=\infty$ のときは (c,∞), $a=-\infty$ のときは $(-\infty,c)$ の形の開区間) で定義された関数とする. $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ と $\lim_{x\to a}|F(x)|=\lim_{x\to a}|G(x)|=\infty$ が成り立つとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる文字を入れよ.

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ならば f は g より $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, g は f より $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という. また, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して 0 でないとき, f と g は $\boxed{オ}$ 位の無限 $\boxed{カ}$ という.

(2) $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=0$ ならば F は G より $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, G は F より $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という. また, $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$ が存在して 0 でないとき, F と G は $\boxed{オ}$ 位の無限 $\boxed{カ}$ という.

(3) a が実数の場合, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{|x-a|^\alpha}$ が存在して 0 でないとき, f は $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, $a=\pm\infty$ の場合, $\lim_{x\to a}|x|^\alpha f(x)$ が存在して 0 でないとき, f は $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という.

(4) a が実数の場合, $\lim_{x\to a}|x-a|^\alpha F(x)$ が存在して 0 でないとき, F は $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, $a=\pm\infty$ の場合, $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{|x|^\alpha}$ が存在して 0 でないとき, F は $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という.

3. 以下の関数について, 無限小または無限大の位数を求めよ.

(1) $1-\cos x$ $(x\to 0)$　(2) $\frac{x-1}{x^3+1}$ $(x\to\infty)$　(3) $\frac{x^3+1}{x-1}$ $(x\to\infty)$　(4) $\frac{1}{e^x-1}$ $(x\to 0)$

(5) $\sqrt{x^6+1}$ $(x\to\infty)$　(6) $\frac{1}{\tan x}$ $(x\to\frac{\pi}{2})$　(7) $\frac{1}{\log(1+x^2)}$ $(x\to 0)$　(8) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ $(x\to\infty)$

(9) $\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ $(x\to\infty)$　(10) $\sqrt{x^4+1}-x^2$ $(x\to\infty)$

4. 任意の正の実数 α に対して $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^\alpha}=0$ であることを示せ.

5. $(0,\varepsilon)$ 上の関数 f がつねに正の値をとり, 実数 α に対し, $\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するとき, $\lim_{x\to +0}f(x)^{\frac{1}{\log x}}=e^\alpha$ であることを示せ.

6. (発展問題) f, g を区間 (a,∞) 上の関数とし, $\alpha,\beta\neq 0$ に対し, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}$ と $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^\beta}$ がともに正の値に収束するとする. このとき $\lim_{x\to\infty}\frac{\log f(x)}{\log g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ であることを示せ.

微積分学 I 演習問題　第 4 回　導関数

1. 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $(x+2)^3(x^3-4)^5$　(2) $\dfrac{x^4-1}{x^3+2}$　(3) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2}$　(4) $\dfrac{cx+d}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

(5) $(x-3)\sqrt{x^2+2x+3}$　(6) $\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^7$　(7) $\sqrt{\dfrac{1-x^n}{1+x^n}}$　(8) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(9) $\cos^3(2x^3)$　(10) $(9x^2-6x-7)e^{x^3}$　(11) $\sqrt{1+e^x}$　(12) $x^2e^{\frac{1}{x}}$

(13) $e^{-3x}(\sin 3x+\cos 3x)$　(14) $e^{-x}\sin^2 x$　(15) $\log(\log x)$　(16) $\log|\cos x|$

(17) $\log\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)$　(18) $(\log(e^x+1))^2$　(19) $\dfrac{(\log|x|)^2}{x}$　(20) $\log\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+3}}$

(21) $\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$　(22) $\log(\sin(e^x))$　(23) $\sin^{-1}(2x^2-1)$　(24) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

(25) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$　(26) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　(27) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$　(28) $\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}$

(29) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$　(30) $\cos^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$　(31) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$　(32) $\sin^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(33) $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}$　(34) $\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$　(35) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　(36) $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

(37) $\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$　(38) $\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$　(39) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(40) $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(41) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$　(42) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　(43) $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$　(44) $\sin^{-1}\sqrt{1-e^{2x}}$

(45) $\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1}x)$　(46) $\log(\sin^{-1}(e^x))$　(47) $\sin^{-1}\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$　(48) $\tan^{-1}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(49) $\sin^{-1}(\tan^{-1}x)$　(50) $\sin^{-1}\sqrt{1-\sin x}$　(51) x^{3x^2}　(52) $(a+x)^{\frac{1}{x}}$

(53) x^{x^a}　(54) $(\cos x)^{\cos x}$　(55) $(\tan x)^{\sin x}$　(56) $x^{(\log x)^a}$

(57) $\tan\left(x^{\sin x}\right)$　(58) $(\log x)^{\frac{1}{x}}$　(59) $e^{\sin^{-1}x}$　(60) $(\cos^{-1}x)^{\log x}$

(61) $\log(\sin^{-1}x)$　(62) $\sin^{-1}(\log x)$　(63) $\tan^{-1}\sqrt{1+x^2}$　(64) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(65) $\log(\sin^{-1}(\tan^{-1}x))$　(66) $\log\left(\tan^{-1}(e^x)\right)$　(67) $\tan^{-1}(\sin^{-1}x)$　(68) $\tan^{-1}(\sin^{-1}x^2)$

(69) $\log(\tan^{-1}(\sin^{-1}x))$　(70) $\sqrt{\log x}$　(71) $\sin^{-1}\left(\sqrt{\log x}\right)$　(72) $\sqrt{e^x\log x}$

(73) $\sin^{-1}(\log(\tan^{-1}x))$　(74) $\sin^{-1}\left(\sqrt{e^x\log x}\right)$　(75) $\sin^{-1}(e^x)$　(76) $\tan^{-1}(e^x)$

(77) $\tan^{-1}(\log(\sin^{-1}x))$　(78) $\sin^{-1}\sqrt{1-e^{2x}}$

2. $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\begin{cases} x^2\log|x| & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ で定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の 0 における微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ を求めよ.

(3) f' は 0 で連続か? 理由を付けて答えよ.

(4) f' は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

3. 関数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ を $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ で定義する.

(1) f は狭義単調減少関数であることを示し, さらに f は全射であることを示せ.

(2) f の逆関数 $f^{-1}:(0,\infty)\to(0,\infty)$ の $\dfrac{1}{e}$ における微分係数 $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ を求めよ.

4. (1) $f:[-1,\infty)\to\left[-\frac{1}{e},\infty\right)$ を $f(x)=xe^x$ で定めれば, f は全単射であるが (証明不要), f の逆関数 $f^{-1}:\left[-\frac{1}{e},\infty\right)\to[-1,\infty)$ の 0 と e における微分係数を求めよ.

(2) $f:\left(e^{-1},\infty\right)\to\left(e^{-e^{-1}},\infty\right)$ を $f(x)=x^x$ で定めれば, f は全単射であるが (証明不要), $f(e)=e^e$ であることに注意して, f の逆関数 $f^{-1}:\left(e^{-e^{-1}},\infty\right)\to\left(e^{-1},\infty\right)$ の e^e における微分係数を求めよ.

(3) $f:(0,e)\to\left(0,e^{\frac{1}{e}}\right)$ を $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ で定めれば, f は全単射であるが (証明不要), $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e^e}$ であることに注意して, f の逆関数 $f^{-1}:\left(0,e^{\frac{1}{e}}\right)\to(0,e)$ の $\dfrac{1}{e^e}$ における微分係数を求めよ.

(4) $f:(-1,1)\to\left(-\tan^{-1}3,\tan^{-1}3\right)$ を $f(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{6}{\pi}\sin^{-1}x\right)$ で定義される関数とするとき, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ であることに注意して, f の逆関数 $f^{-1}:\left(-\tan^{-1}3,\tan^{-1}3\right)\to(-1,1)$ の $\dfrac{\pi}{4}$ における微分係数を求めよ.

(5) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=x-1+\sin^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)$ で定義される関数とする．$f(1)$ の値を求め，この値における f の逆関数 $f^{-1}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ の微分係数を求めよ.

5. 関数 $f,g:\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\to\boldsymbol{R}$ をそれぞれ $f(x)=x^2\cos^{-1}(1-x^2)$, $g(x)=x\cos^{-1}(1-x^2)$ によって定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f, g の 0 における微分係数を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to0}g'(x)$ を求めよ.

(3) f, g の導関数は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

(4) f, g の定義域を $(0,1)$ に制限して得られる関数も $f,g:(0,1)\to\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ で表すとき, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ であることに注意して, f, g の逆関数の, それぞれ $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ における微分係数を求めよ.

6. (発展問題) I を開区間, $f:I\to\boldsymbol{R}$ は I の各点で微分可能であるとする．$a,b\in I$, $a<b$ に対し, $f(a)<f(b)$ かつ $f'(a)=f'(b)=0$ ならば $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(c)$ を満たす $a<c<b$ が存在することを示せ.

7. (発展問題) l, n を 0 でない実数, m を自然数とする．x の多項式 $f(x)$ で $\left(\dfrac{f(x)}{x^n(1+x^m)^l}\right)'=\dfrac{1}{x^{n+1}(1+x^m)^{l+1}}$ 満たすものが存在するための, l, m, n の条件を求めよ．さらに, このような多項式 $f(x)$ が存在するとき, $f(x)$ を求めよ.

微積分学 I 演習問題　第 5 回　高次導関数

1. 次の関数の n 次導関数を求めよ. ただし, m は自然数, a, b, c, p, q, α, β は実数で, (5) では $ap \neq 0$, (7), (8) では $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$ とする.

(1) $\log|x^3-3x+2|$　(2) $\dfrac{x+1}{x-1}$　(3) $(e^{2x}-e^{-x})^3$　(4) $\dfrac{x^3}{1-x^2}$

(5) $\dfrac{1}{apx^2+(aq+bp)x+bq}$　(6) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$　(7) α^x　(8) $\log_\alpha x$

(9) $(ax^2+bx+c)\sin(px+q)$　(10) $e^{ax}\sin(bx+c)$　(11) $e^{ax}\cos(bx+c)$　(12) $\sin^3 x$

(13) $(ax^2+bx+c)\cos(px+q)$　(14) $(ax^2+bx+c)e^{px}$　(15) $\sin ax\cos bx$　(16) $x^2\sin^2 x$

(17) $(ax^2+bx+c)\log(px+q)$　(18) x^3e^{ax}　(19) x^4e^{ax}　(20) $e^x\log(1+x)$

(21) $(ax^2+bx+c)\log\bigl(|x-p|^\alpha|x-q|^\beta\bigr)$　(22) $x^3\sin 3x$　(23) $x^4\cos 2x$　(24) $(x^2-1)^m$

2. $f:(-1,1)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\sin^{-1}x$ で定める.

(1) $\sqrt{1-x^2}f'(x)=1$ の両辺を x で微分することによって $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=0$ を示せ.

(2) n を 2 以上の整数とするとき, (1) で得た等式の両辺を x で $n-2$ 回微分することによって次の等式を示せ.

$$(1-x^2)f^{(n)}(x)-(2n-3)xf^{(n-1)}(x)-(n-2)^2f^{(n-2)}(x)=0$$

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ. (n が偶数の場合と奇数の場合に分けよ.)

3. 次で与えられる関数 f の n 次導関数 $f^{(n)}$ について, 前問に倣って $f^{(n)}(x)$ の漸化式を導き, $f^{(n)}(0)$ を求めよ. ただし, (3), (4) の c は正の実数とする.

(1) $f(x)=e^{x^2}$　(2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$　(3) $f(x)=\sqrt{c^2+x^2}$　(4) $f(x)=\sqrt{c^2-x^2}$

(5) $f(x)=e^{x^3}$　(6) $f(x)=x^2e^{x^2}$　(7) $f(x)=\log\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr)$　(8) $f(x)=\log(x^2+1)$

(9) $f(x)=\tan^{-1}x$　(10) $f(x)=e^{c\sin^{-1}x}$　(11) $f(x)=\log(x^3+1)$　(12) $f(x)=e^x\log(1+x)$

(13) $f(x)=(\sin^{-1}x)^2$　(14) $f(x)=(\log(1+x))^2$

4. n を 0 以上の整数とする. $\dfrac{x^n}{n!}(\log x-a_n)$ の n 次導関数が $\log x$ になるような, 実数の定数 a_n を求めよ.

5. 0 以外の実数全体を定義域とする関数 f, g を $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ で定義する.

(1) 0 以上の整数 n に対し, 等式 $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}f(x)-\dfrac{Q_n(x)}{x^{2n}}g(x)$, $g^{(n)}(x)=\dfrac{Q_n(x)}{x^{2n}}f(x)+\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}g(x)$ を満たす x の多項式 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ が存在することを示し, $P_n(x)$, $Q_n(x)$ を用いて $P_{n+1}(x)$ と $Q_{n+1}(x)$ を表せ.

(2) $n\geqq 2$ に対し $P_n(x)$, $Q_n(x)$ の次数と最高次の係数を求めよ.

(3) $n\geqq 1$ に対し $P_{2n}(x)$ と $Q_{2n+1}(x)$ は x の奇数次の項を含まず, $P_{2n+1}(x)$ と $Q_{2n}(x)$ は x の偶数次の項を含まないことを示せ.

6. (1) 0 を含む開区間 I で定義された連続関数 f と自然数 n に対して関数 $g_n:I\to\boldsymbol{R}$ を $g_n(x)=x^nf(x)$ で定義する. f の定義域を $I-\{0\}$ に制限した関数は n 回微分可能であり, 自然数 l と $k=0,1,\ldots,n-1$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^{kl}f^{(k)}(x)=0$ が成り立つならば g_{ln} は n 回微分可能であることを示せ. さらに $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^{ln}f^{(n)}(x)=0$ ならば g_{ln} の n 次導関数は 0 で連続であることを示せ.

(2) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が次の (i), (ii) で与えられる関数の場合, 任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^nf^{(n)}(x)=0$ が成り立ち, (iii) で与えられる関数の場合, 任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^{2n}f^{(n)}(x)=0$ が成り立つことを示せ.

$$(i)\ f(x)=|x| \qquad (ii)\ f(x)=\begin{cases}x\log|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \qquad (iii)\ f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

7. (発展問題) (1) $f(x)=\tan^{-1}x$ に対して $f^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n f(x)\sin\left(n\left(f(x)+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ が成り立つことを示し, この結果を用いて $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{1+x^2}=n!(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\left((n+1)\left(\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ が成り立つことを示せ.

(2) $g(x) = \tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ に対して $g^{(n)}(x) = (-1)^n(n-1)!\sin^n g(x)\sin(ng(x))$ が成り立つことを示せ.

8. (発展問題) f が n 回微分可能ならば $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が成り立つこと示せ.

9. (発展問題) $x^{n-1}\log x$, $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ の n 次導関数を求めよ.

10. (発展問題) $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$ で定める. また, $x \neq 0$ に対し, $F_n(x) = x^{3n}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)$ とおき, $x > 0$ に対し, $G_n(x) = x^{2n}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x)$ とおく.

(1) $F_1(x)$, $G_1(x)$ を求めよ.

(2) $F_n'(x) = \dfrac{1}{x^3}(F_{n+1}(x) + (3nx^2 - 2)F_n(x))$, $G_n'(x) = \dfrac{1}{x^2}(G_{n+1}(x) + (2nx - 1)G_n(x))$ を示せ.

(3) $F_n(x)$ は x の $2(n-1)$ 次の多項式であり, $G_n(x)$ は x の $n-1$ 次の多項式であることを示せ.

(4) n による数学的帰納法で $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$ であることを示せ. 従って f, g は無限回微分可能である.

微積分学 I 演習問題　第 6 回　平均値の定理とテイラーの定理

1. 以下の等式の両辺の関数の微分を考えることによって, 等式が成り立つことを示せ.

(1) $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}x\ (-1 < x \leqq 1)$

(2) $\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4} & x \leqq -1 \\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \frac{\pi}{4} & x \geqq 1 \end{cases}$

(3) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} -2\sin^{-1}x - \pi & -1 \leqq x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\sin^{-1}x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\sin^{-1}x + \pi & \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$

(4) $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \begin{cases} -2\tan^{-1}x - \frac{3\pi}{4} & x < -1-\sqrt{2} \\ -2\tan^{-1}x + \frac{\pi}{4} & -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \\ -2\tan^{-1}x + \frac{5\pi}{4} & x > -1+\sqrt{2} \end{cases}$

2. マクローリンの定理を用いて, 以下の関数を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式と剰余項を求めよ.

(1) $(e^x+e^{-x})^2$　(2) $\sin^2 x$　(3) $\sin x\cos x$　(4) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$　(5) $\sqrt{1+2x}$

3. 正の実数 m, A, B に対し, $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$ とおく. $n > \dfrac{1}{m}$ である自然数 n に対し, $A^{\frac{1}{m}}$ を多項式

$$B\left(1+\binom{\frac{1}{m}}{1}x+\cdots+\binom{\frac{1}{m}}{k}x^k+\cdots+\binom{\frac{1}{m}}{n}x^n\right)$$

で近似すれば, 誤差は $B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|\dfrac{1}{(1+x)^n}-1\right||x|^n$ 以下であることを示せ.

4. 次の数の近似値を小数第 5 位まで求めよ.　(1) $\sqrt{3}$　(2) $\sqrt[3]{2}$　(3) e　(4) $\log 2$

5. 次の極限 が 0 でない値になるように α, β を定めて, そのときの極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^\alpha}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^\alpha}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^\alpha}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}$

6. 関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ は連続で, $(0,1)$ の各点で微分可能であるとする. すべての $x \in (0,1)$ に対して $f'(x) \neq 1$ ならば, $f(c) = c$ を満たす $c \in [0,1]$ がただ 1 つ存在することを示せ.

7. n を 0 以上の整数とし, $f_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を以下で定める.

$$f_n(x) = \tan^{-1}x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \tan^{-1}x - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

(1) f_n の増減を調べよ.

(2) $x > 0$ ならば $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{2k-1}\dfrac{x^{4k-1}}{4k-1} < \tan^{-1}x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{2k}\dfrac{x^{4k+1}}{4k+1}$ が成り立つことを示せ.

8. e^{e-2} と 2 ではどちらが大きいか答えて, その理由を述べよ.

9. 関数 $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は微分可能であり, 定数 $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in (a,b)$ に対して $|f'(x)| \leqq M$ が成り立つとする. さらに, $f(\alpha) = \alpha$ を満たす $\alpha \in (a,b)$ が存在すると仮定する. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, 任意の自然数 n に対して $x_n \in (a,b)$ かつ $x_{n+1} = f(x_n)$ を満たすならば, $|x_n - \alpha| \leqq M^{n-1}|x_1 - \alpha|$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを示せ.

10. $\dfrac{1}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^3)$ $(x \to 0)$ を満たす a_0, a_1, a_2 を求め, $|x| < \sqrt{2}$ ならば次の不等式が成り立つことを示せ.

$$0 \leqq \frac{1}{\cos x} - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \leqq \frac{x^4}{2(2 - x^2)}$$

11. (発展問題) 関数 $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ は連続で $f(a)f(b) < 0$ を満たし, (a, b) の各点で 2 回微分可能であり, さらに任意の $x \in (a, b)$ に対して $f''(x) > 0$ であるとする. また, $p \in [a, b]$ は $f(p) > 0$ を満たす点とする.

(1) $f(\alpha) = 0$ を満たす $\alpha \in (a, b)$ がただ 1 つだけ存在することを示せ.

(2) $\alpha < p$ かつ $x \in [\alpha, p)$ ならば $f'(x) > 0$ であり, $\alpha > p$ かつ $x \in (p, \alpha]$ ならば $f'(x) < 0$ であることを示せ.

(3) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に $x_0 = p$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ で定義する. $\alpha > p$ ならばすべての自然数 n に対して $x_{n-1} < x_n < \alpha$ が成り立ち, $\alpha < p$ ならばすべての自然数 n に対して $x_{n-1} > x_n > \alpha$ が成り立つことを示せ.

12. (発展問題) 関数 $f : [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ は連続で $f(0) = 0$ を満たし, $(0, \infty)$ の各点で微分可能とする. $f' : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ が単調増加関数ならば $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ で定義される関数 $g : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ も単調増加関数であることを示せ.

13. (発展問題) I は 0, 1 を含む開区間で $f : I \to \boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能であり, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 0$ を満たすとする. このとき $|f''(c)| \geqq 4$ を満たす $c \in [0, 1]$ が存在することを示せ.

14. (発展問題) $f : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能であるとし, すべての $x \in (0, \infty)$ に対して $|f(x)| \leqq A$, $|f''(x)| \leqq B$ を満たす定数 A, B が存在すれば, すべての $x \in (0, \infty)$ に対して $|f'(x)| \leqq 2\sqrt{AB}$ が成り立つことを示せ.

15. (1) 区間 $[a, \infty)$ 上の連続関数 f が (a, ∞) の各点で微分可能であり, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = f(a)$ を満たすならば $f'(\xi) = 0$ を満たす $\xi > a$ が存在することを示せ.

(2) 実数全体で定義された微分可能な関数 f が $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ (l は実数または $\pm\infty$) を満たすならば $f'(\xi) = 0$ を満たす実数 ξ が存在することを示せ.

16. (発展問題) (1) 閉区間 $[a, b]$ を含む開区間で定義された n 回微分可能な関数 f が $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ を満たすとき, 方程式 $f^{(n)}(x) = 0$ は (a, b) に相異なる n 個の解をもつことを示せ.

(2) 区間 $[a, \infty)$ を含む開区間で定義された n 回微分可能な関数 f が $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(a) = \displaystyle\lim_{x \to \infty} f^{(k)}(x) = 0$ を満たすとき, 方程式 $f^{(n)}(x) = 0$ は (a, ∞) に相異なる n 個の解をもつことを示せ.

(3) 実数全体で定義された n 回微分可能な関数 f が $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f^{(k)}(x) = 0$ を満たすとき, 方程式 $f^{(n)}(x) = 0$ は相異なる n 個の実数解をもつことを示せ.

17. (発展問題) x の多項式 $P_n(x)$ を $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ で定める.

(1) $(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$ と $P_{n+1}'(x) = (n+1)P_n(x) + xP_n'(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) $P_{n+1}(x) = xP_n(x) + \dfrac{x^2 - 1}{n+1} P_n'(x)$ が成り立つことを示せ.

(3) $P_n(x) = 0$ は開区間 $(-1, 1)$ の中に n 個の相異なる解をもつことを示せ.

18. (発展問題) x の多項式 $L_n(x)$ を $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^x}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n)$ で定める.

(1) $L_{n+1}(x) = \dfrac{x - n - 1}{n+1} L_n(x) - \dfrac{x}{n+1} L_n'(x)$ と $xL_n''(x) + (1 - x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $L_n(x) = 0$ は n 個の相異なる正の実数解をもつことを示せ.

19. (発展問題) x の多項式 $H_n(x)$ を $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ で定める.

(1) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ と $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $H_n(x) = 0$ は n 個の相異なる実数解をもち, $H_n(x) = 0$ の隣り合う 2 つの解の間に $H_{n-1}(x) = 0$ の解が 1 つ存在することを示せ.

微積分学 I 演習問題　第 7 回　不定形の極限

1. 次の極限を求めよ. ただし (51) の α は正の定数, (91), (92) の α は 0 でない定数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-xe^x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x}{e^x-x-1}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\cos x-x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\log(x+1)-2x+x^2}{x^3}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{(e^x-1)^3}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x-x}{\tan^{-1}x-x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+1)-x^2}{\cos(x^2)-1}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\sin^{-1}x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{1}{x-p}\left(\log\left(\frac{e^x-e^p}{x-p}\right)-p\right)$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\tan^{-1}x-x}$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos^2 x-e^x\sin x+x^2}{x(e^x-1)-\sin^2 x}$　(14) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$　(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x-x}{x^3}$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(x+1)\sin x-\cos x}{x^3}$　(17) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+1)\tan^{-1}\frac{1}{x}$　(18) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^2}}{1-\cos 3x}$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-x}{e^{2x}-1-2x-2x^2}$　(20) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+2)}{\log(x^4+x^3)}$　(21) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin^{-1}\frac{2}{x}$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2+x^2}{x^4}$　(23) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$　(24) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

(25) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}{x^3}$　(26) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{e^x-e^{-x}}$　(27) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\sin x-x}$

(28) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$　(29) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\log(1-x)}{x^2}$　(30) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

(31) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{2}{x^2}\right)$　(32) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{1-\cos x}$　(33) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{\sin^2 x}$

(34) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x}{x\log(1+x)-x^2}$　(35) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin 2x-2x}$　(36) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+2)}{2\sqrt{x}}$

(37) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{1-\cos 2x}$　(38) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$　(39) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(40) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$　(41) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$　(42) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$

(43) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\log\left(\frac{1}{x}-1\right)$　(44) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x\sin x}$　(45) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}$

(46) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$　(47) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$　(48) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x+5}{x+1}$

(49) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin^{-1}x}-\frac{1}{x^2}\right)$　(50) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\sin x(\log x)^2$　(51) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^\alpha}$

(52) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\cos x(x+\sin x)}{\sin^3 x}$　(53) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$　(54) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

(55) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}e^x$　(56) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^{\tan x}$　(57) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

(58) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\log x}}$　(59) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$　(60) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(e^x-1)^{\frac{1}{\log x}}$

(61) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+x^2-1}{x^4}$　(62) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\tan^{-1}x)^{\frac{1}{\log x}}$　(63) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{\log x}}$

(64) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right)$　(65) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}$　(66) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}$

(67) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$　(68) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$　(69) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\right)^x$

(70) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)$　(71) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)$　(72) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\left(x\sin x-\frac{\pi}{2}\right)$

(73) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x-\cos x+2}{x^3}$　(74) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x-\cos x+2}{6x-6\sin x}$　(75) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

(76) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\log(1+x)+\cos x-1}{x^3}$　(77) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{e^{x^2}-1-x^2}$　(78) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x-6x+x^3}{xe^{x^2}-x-x^3}$

(79) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-\sin^{-1}x}{x^3}$　(80) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$　(81) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x}{x^2}$

(82) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-e^x+1}{x^2}$　(83) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$　(84) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(85) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\log(1-x)-1}{x^3}$　(86) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-xe^x}{x\sin x}$　(87) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-\sqrt{2-x^4}\left(\cos^{-1}(1-x^4)+\sqrt{2}x^2\right)}{x^6}$

(88) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^x$　(89) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$　(90) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{x\sin x}$

(91) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{(p-1)x^p-p\alpha x^{p-1}+\alpha^p}{x^{p-1}(x-\alpha)^2}$　(92) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{x^p((p-1)x-(p+1)\alpha)+\alpha^p((p+1)x-(p-1)\alpha)}{x^p(x-\alpha)^3}$

2. 関数 $f:\left(-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2}\right)\to\boldsymbol{R}$, $g:[-2,2]\to\boldsymbol{R}$ をそれぞれ次のように定めるとき, 以下の問いに答えよ.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x} & 0<|x|<\sqrt[4]{2}\\ 0 & x=0\end{cases},\qquad g(x)=\cos^{-1}(1-|x|)-\sqrt{2|x|-x^2}$$

(1) f, g の 0 における微分係数を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}g'(x)$ を求めよ.

(3) f, g の導関数は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

3. α を正の実数, p を実数とするとき, 関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(p-1)x^p-\alpha px^{p-1}+\alpha^p}{x^{p-1}(x-\alpha)^2} & x\neq\alpha\\ \dfrac{p(p-1)}{2\alpha} & x=\alpha\end{cases}$ によって定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の α における微分係数を求めよ.

(2) f の導関数は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

4. 0 を含む開区間で定義されている C^1 級関数 f がつねに正の値をとるとき, $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{f'(0)}{f(0)}}$ であることを示せ.

5. (発展問題) 関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能で 2 次導関数は連続であるとする. 平均値の定理により, $p,x\in(a,b)$ $(x\neq p)$ に対し $f(x)-f(p)=f'(\gamma)(x-p)$ を満たす γ が x と p の間に存在するが, このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{x-p}=\frac{f''(p)}{2}$ が成り立つことを示せ.

(2) $p\in(a,b)$ に対し $f''(p)\neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\gamma-p}{x-p}$, $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f'(x)-f'(\gamma)}{x-p}$ を求めよ.

(3) $f''(p)\neq 0$ の場合 f' は p を含む開区間で単射だから γ は x の関数とみなせる. このとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma'$ を求めよ.

(4) $f''(p)\neq 0$ かつ f が 3 回微分可能であるとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f''(x)-f''(\gamma)}{x-p}$ を求めよ.

(5) $f''(p)\neq 0$ かつ f が 3 回微分可能で 3 次導関数が連続であるとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{2\gamma'-1}{x-p}$, $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma''$ を求めよ.

(6) $f''(p)\neq 0$ かつ f が 4 回微分可能で 4 次導関数が連続であるとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma^{(3)}$ を求めよ.

(7) $f''(p)\neq 0$ かつ f が 5 回微分可能で 5 次導関数が連続であるとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma^{(4)}$ を求めよ.

微積分学 I 演習問題　第 8 回　関数の級数展開

1. 次の関数のマクローリン展開と, その収束半径を求めよ. ただし a, b, c, d は実数, α は 0 でない実数, k は自然数で, (3), (8), (20) では $a > 0$, (4) では $bd \neq 0$ とする.

(1) $e^{\alpha x^2}$　(2) $\dfrac{1}{x+\alpha}$　(3) $(a^2-x^2)^\alpha$　(4) $\log(ax+b)(cx+d)$　(5) $\dfrac{x-1}{x+1}$　(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(7) $\dfrac{x}{1+x^2}$　(8) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$　(9) $(e^x-e^{-x})^2$　(10) $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$　(11) $\cos^2 x$　(12) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$

(13) $\cosh^3 x$　(14) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　(15) $\log(1+\alpha x^2)$　(16) $(ax^2+bx+c)e^x$　(17) $\sin^3 x$　(18) $\tanh^{-1} x$

(19) $\sinh^{-1} x$　(20) $\sqrt{1+a^k x^k}$　(21) $e^x \log(1+x)$　(22) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$　(23) $\sin^{-1}x$　(24) $\tan^{-1}x$

(25) $(\sin^{-1}x)^2$　(26) $(\log(1+x))^2$　(27) $(\tan^{-1}x)^2$　(28) $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$

(29) $(ax^2+bx+c)\log(1+\alpha x)$

2. α, β はともに 0 でないとし, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 漸化式 $a_{n+2} = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$ を満たすとする. このとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ が収束する場合に, この整級数の和を a_0, a_1, α, β, x を用いて表し, 収束半径を答えよ.

3. 以下で与える関数 f の増減, 凹凸, 漸近線の有無を調べてグラフの概形を描け.

(1) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = (2x^2+7x+7)e^{-x}$　(2) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

4. a を実数, b を 0 でない実数の定数する. $f(x) = (x^2-ax+ab)e^{\frac{x}{b}}$ で与えられる関数が次の 2 つの条件 (1) と (2) の両方を満たすとき, a と b の値と, f が極小になる x を求めよ.

(1) f は $x > 0$ の範囲で極小値をとる.

(2) f のグラフは $(-3, f(-3))$ と $(2, f(2))$ を変曲点にもつ.

5. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ の法線のうちで, 原点から最大の距離を持つものを求めよ.

6. α を正の実数, p を 0, ± 1 と異なる実数とする. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は $a_1 \neq \alpha$ と漸化式 $a_{n+1} = \left(1-\dfrac{1}{p}\right)a_n + \dfrac{\alpha^p}{pa_n^{p-1}}$ を満たすとする.

(1) 関数 $f, g : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \left(1-\dfrac{1}{p}\right)x + \dfrac{\alpha^p}{px^{p-1}}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{(p-1)x^p - \alpha p x^{p-1} + \alpha^p}{x^{p-1}(x-\alpha)^2} & x \neq \alpha \\ \dfrac{p(p-1)}{2\alpha} & x = \alpha \end{cases}$ によって定めるとき, f, g の増減を調べよ.

(2) $p > 1$ とする. $n \geqq 2$ ならば $a_n > a_{n+1} > \alpha$ であることを示せ.

(3) $p > 1$ とする. $n \geqq 2$ ならば $a_{n+1} - \alpha < \dfrac{p-1}{p}(a_n-\alpha)$, $a_{n+1} - \alpha < \dfrac{p-1}{2\alpha}(a_n-\alpha)^2$ が成り立つことを示せ.

(4) $p > 1$ とする. $n \geqq 3$ ならば次の不等式が成り立つことを示せ.

$$a_n - \alpha < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-2}\left(a_1 - \alpha - \frac{a_1^p - \alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right), \quad a_n - \alpha < \frac{2\alpha}{p-1}\left(\frac{p-1}{2\alpha}\left(a_1 - \alpha - \frac{a_1^p-\alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right)\right)^{2^{n-2}}$$

(5) $p > 1$ のとき, $a_1 = \alpha\left(\dfrac{p-1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ ならば, $\dfrac{p-1}{2\alpha}\left(a_1 - \alpha - \dfrac{a_1^p-\alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right) < 1$ であることを示せ.

7. (1) 関数 $\varphi : [p,q] \to \boldsymbol{R}$ が凸であるとき, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [p,q]$ と, 正の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ で $a_1+a_2+\cdots+a_n = 1$ を満たすものに対して, $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \in [p,q]$ であり, 不等式 $\displaystyle\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i)$ が成り立つことを示せ.

(2) 0 以上の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し, 関数 $f : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \displaystyle\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ で定める. このとき, f は単調増加関数であることを示せ.

微積分学 I 演習問題　第 9 回　原始関数と積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ．ただし, n は 0 以上の整数, a, b, α は実数とし, (13)∼(16) では $a > 0$, $n \neq 0$, (61) では $a < b$, (62) では $a > -1$ とする．

(1) $\dfrac{(x^2-1)^3}{x^4}$　(2) $\dfrac{x^{n-1}}{x^n+1}$　(3) $\dfrac{x^2}{(x^3+1)(x^3+4)}$　(4) $\dfrac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}$

(5) $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$　(6) $\dfrac{1}{x^2-2x+3}$　(7) $\dfrac{x+a}{(x^2+2ax+b)^\alpha}$　(8) $\dfrac{2x^3(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

(9) $\dfrac{2x}{x^4+x^2+1}$　(10) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$　(11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}$　(12) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(13) $\dfrac{1}{x\sqrt{a^2-x^n}}$　(14) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^n+a^2}}$　(15) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^n-a^2}}$　(16) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-e^x}}$

(17) $\sqrt{e^x-a^2}$　(18) $\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$　(19) $\dfrac{\cos^2 x}{(x\sin x+\cos x)^2}$　(20) $\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$

(21) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$　(22) $\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$　(23) $\dfrac{1}{\cos^3 x}$　(24) $\sin^4 x$

(25) $\tan^n x$　(26) $\dfrac{1}{\sin^4 x}$　(27) $\dfrac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$　(28) $\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$

(29) $\dfrac{\cos x}{3-\cos^2 x}$　(30) $\dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x}$　(31) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(32) $\dfrac{x\sin x}{(x\cos x-\sin x)^2}$

(33) $\dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$　(34) $\dfrac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$　(35) $\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$　(36) $x^{2n}\tan^{-1} x$

(37) $x^{2n+1}\tan^{-1} x$　(38) $x\sin^{-1} x$　(39) $x^{2n}\sin^{-1} x$　(40) $(\sin^{-1} x)^2$

(41) $\dfrac{(\log x)^\alpha}{x}$　(42) $x^\alpha \log x$　(43) $\dfrac{\log x}{x(1+\log x)}$　(44) $x^3(\log|x|)^2$

(45) $x^2\log(x^2+1)$　(46) $x\log(x^2-2x+2)$　(47) $(\log|x|)^3$　(48) $x^5e^{-x^2}$

(49) $\dfrac{2}{(e^x+e^{-x})^2}$　(50) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+5}$　(51) $\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)^2$　(52) $\dfrac{e^x}{e^{2x}-e^x+2}$

(53) x^3e^{2x}　(54) $x^3\cos 2x$　(55) $e^{4x}\sin 3x$　(56) $e^{-x}\sin^2 x$

(57) $\log\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)$　(58) $(\sin x)\log\sin x$　(59) $\tan x\log(1+\tan^2 x)$　(60) $(x+1)e^x\log x$

(61) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$　(62) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{a-\cos x}}$　(63) $\dfrac{\cos x\sin x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$　(64) $x(\tan^{-1} x)^2$

2. 次の積分を求めよ．ただし (33) の α は $|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 2x\log(x^2+3x+2)dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{1}{1+e^{3x}}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\lambda x^{n-1}\sin^{-1}(x^n)dx$　(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x^3\tan^{-1}xdx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2-\sin x+\sin^2 x}{\cos x}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^\lambda x^{n-1}\tan^{-1}(x^n)dx$　(8) $\displaystyle\int_0^\lambda x^2\tan^{-1}xdx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\log\lambda} e^x\log(e^{2x}+1)dx$　(10) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\log\sqrt{3}}\frac{1}{e^x+e^{3x}}dx$　(12) $\displaystyle\int_0^1 2x\tan^{-1}xdx$

(13) $\displaystyle\int_0^1(2-6x^2)\sin^{-1}xdx$　(14) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx$　(15) $\displaystyle\int_1^2 x(2x-3)^5dx$　(16) $\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$

(17) $\displaystyle\int_3^4(x-2)\log(x^3-2x^2)dx$　(18) $\displaystyle\int_0^2 x^5e^{x^2}dx$　(19) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sin^{-1}x}{x^2}dx$　(20) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$

(21) $\displaystyle\int_0^1 3x^2\log(1+x^2)dx$　(22) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^5 xdx$　(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　(24) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos 2xdx$

(25) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\log(e^x+1)dx$　(26) $\displaystyle\int_0^1 x^3\tan^{-1}xdx$　(27) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx$　(28) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sin^{-1}xdx$

(29) $\displaystyle\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^\pi}\frac{(\log x)\sin(\log x)}{x}dx$　(30) $\displaystyle\int_0^1 e^x\tan^{-1}(e^x)dx$　(31) $\displaystyle\int_1^e\frac{\sin^{-1}(\log x)}{x}dx$　(32) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}2x\sin(x^2)dx$

(33) $\displaystyle\int_0^{\sin\alpha}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(34) $\displaystyle\int_0^{\log\frac{\pi}{2}}e^x\cos(e^x)dx$　(35) $\displaystyle\int_{\log\frac{\pi}{2}}^{\log\pi}e^{2x}\sin(e^x)dx$　(36) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\frac{\sin(\log x)}{x}dx$

3. 次の極限値を積分を用いて表し, 値を求めよ. ただし, m は整数で, (2) では $a>1$, (3) では $m \geqq 0$, l は -1 以上の整数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}(ak^p+bn^p)^q}{n^{p(q+1)}}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a^2n^2-k^2}}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^m(n^2-k^2)^{\frac{l}{2}}}{n^{m+l+1}}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn+1}^{qn}\frac{1}{k}$ (7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ (8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^{m-1}}{(n^2+k^2)^{\frac{m}{2}}}$

4. 以下で与えられる I_n に関する漸化式をつくれ. ただし (1) では $a \neq 0$, (3) では $m \neq -1$ とする.

(1) $\displaystyle I_n=\int x^n e^{ax}dx$ (2) $\displaystyle I_n=\int(\sin^{-1}x)^n dx$ (3) $\displaystyle I_n=\int x^m(\log x)^n\,dx$ (4) $\displaystyle I_n=\int\frac{1}{\sin^n x}\,dx$

(5) $\displaystyle I_n=\int\tan^n x\,dx$

5. $\displaystyle I_n=\int x^n\sin x dx$, $\displaystyle J_n=\int x^n\cos x dx$ とおくとき, I_n, J_n に関する漸化式をつくれ.

6. $\lambda\in\boldsymbol{R}$, 整数 n と 0 以上の整数 k に対して $\displaystyle I_n=\int_0^{\lambda}\cos^n x\,dx$ ($n<0$ の場合は $|\lambda|<\frac{\pi}{2}$ とする.), $\displaystyle J_k=\int_0^{\lambda}\sin^k x\,dx$ とおく. I_n, J_k に関する漸化式を求め, さらに I_n, J_k を n, k を用いて表せ.

7. 平面上の点 A, B を直径とする半径 r の半円がある. この半円の弧を $\mathrm{A}=\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n,\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{B}$ と n 等分し $\triangle\mathrm{AP}_k\mathrm{B}$ の面積を S_k とするとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$ を求めよ.

8. $(1+x)^n$ の二項展開を用いて次の等式を証明せよ.

(1) $\displaystyle\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(2) $\displaystyle\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

9. f を閉区間 $[a,b]$ で定義された, つねに 0 以上の値をとる連続関数とする. $f(c)>0$ となる $c\in[a,b]$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx>0$ であることを示せ.

10. 次の不等式を示せ. ただし (3), (4) の n は 2 より大きい実数であるとする.

(1) $\displaystyle\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{2}{3}\left((n+1)\sqrt{n+1}-1\right)$ (2) $\displaystyle 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$

(3) $\displaystyle\log\left(1+\sqrt{2}\right)<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx<1$ (4) $\displaystyle\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx<\frac{\pi}{6}$

(5) $\displaystyle 1-\frac{1}{e}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\sin x}dx<\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ (6) $\displaystyle\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{144}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}$

11. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ が単調減少である連続関数ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\right)$ が存在することを示せ.

12. (発展問題) f, g を閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする. すべての $x\in[a,b]$ に対して $g(x)\geqq 0$ ならば, $c\in(a,b)$ で $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ を満たすものが存在することを示せ.

13. (発展問題) (1) 連続関数 $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)=\exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の極限を求めよ. (*i*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ (*ii*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{an-k}{an+a-k}$ (ただし $a<0$ または $a>1$)

14. (発展問題) (1) 関数 $\varphi:[p,q]\to\boldsymbol{R}$ を凸である連続関数とする. このとき連続関数 $f:[a,b]\to[p,q]$ に対して,

次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx$$

(2) 連続関数 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqq \log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}dx\right)$$

(3) $p \geqq q > 0$ とする. 連続関数 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

15. (発展問題) $f:[a,b]\to[0,\infty)$ を連続関数とし, f の最大値を $\max(f)$ とする.

(1) $\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq (b-a)^{\frac{1}{p}}\max(f)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \max(f)$ が成り立つことを示せ.

(3) $p \geqq 1$ のとき, 正の定数 K で, $[a,b]$ で定義されたすべての連続関数 f に対して不等式

$$\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqq K\max(f)$$

が成り立つようなものは存在しないことを示せ.

微積分学 I 演習問題　第 10 回　有理関数の積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ．ただし (2) では $q \neq 0$, (3), (6) では $pq(p-q) \neq 0$, (5) では $pqr(p-q)(q-r)(p-r) \neq 0$, (7), (12) では $p \neq 0$, (9) では $r(p-q) \neq 0$, (10) では $p \neq 0$ または $q \neq 0$, (11) では $p \neq \pm r$ または $q \neq 0$ とする．

(1) $\dfrac{ax+b}{(x-p)(x-q)}$　(2) $\dfrac{ax+b}{(x-p)^2+q^2}$　(3) $\dfrac{ax^2+bx+c}{x(x-p)(x-q)}$　(4) $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-p)(x^2+q^2)}$

(5) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x(x-p)(x-q)(x-r)}$　(6) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)(x-q)}$　(7) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)^2}$　(8) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^3(x-p)}$

(9) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)(x-q)(x^2+r^2)}$　(10) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}$　(11) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+p^2)((x-q)^2+r^2)}$　(12) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+p^2)^2}$

2. 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(x+7)}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2-2x+2)^2}dx$　(4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{x^2-4x+5}dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-2}{x^2(x^2-2x+2)}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(x-3)}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)^2}dx$　(8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{(x+1)(x^2+1)}dx$　(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx$　(12) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^2-x-6}dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$ と $\dfrac{1}{2}$ の大小を判定せよ．ただし，$\pi = 3.14\cdots$, $e = 2.71\cdots$ である．

4. $\dfrac{ax^2+2bx+c}{(x^2+x+1)^2}$ の原始関数が有理関数になるための必要十分条件は $a+c=b$ であることを証明せよ．

5. (発展問題) l, m, n は 0 以上の整数で $n < m$ であるとする．

(1) $\dfrac{x^n}{x^m-1}$ を部分分数で表せ．　(2) $\dfrac{x^n}{x^m-1}$ の原始関数を求めよ．　(3) $\dfrac{x^{lm+n}}{x^m-1}$ の原始関数を求めよ．

6. (発展問題) a, m を 0 でない実数とし，f は n 回微分可能な関数であるとする．n 以下の自然数 k に対して $x^{km-1}f^{(k)}(ax^m)$ の原始関数を，f の n 次以下の導関数を用いて表せ．

7. (発展問題) 常に 0 の値をとる定数値関数とは異なる連続関数 f と 0 でない実数 λ が次の等式を満たすとき，λ と f を求めよ．

$$\lambda f(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t)dt$$

8. (発展問題) 関数 $f : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ は連続で，$(0,1)$ の各点で微分可能であるとし，f の導関数 $f' : (0,1) \to \boldsymbol{R}$ は有界であるとする．また，$g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は周期が 1 の連続な周期関数とする．このとき次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$$

微積分学 I 演習問題　第 11 回　三角関数と無理関数の積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ．

(1) $\dfrac{3}{\tan x(2+\cos^2 x)}$　(2) $\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$　(3) $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$　(4) $\dfrac{2}{4\cos^2 x+\tan x-3}$

(5) $\dfrac{3\tan x-5}{\tan x+2\cos^2 x}$　(6) $\dfrac{\tan x}{a-\cos^2 x}$　(7) $\dfrac{\cos^2 x}{a-\cos^2 x}$　(8) $\dfrac{2\tan^2 x}{2\tan x-2\sin^2 x-1}$

(9) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$　(10) $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$　(11) $\dfrac{1}{\sin^2 x(1+\tan x)}$　(12) $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)(3-\sin x+2\cos x)}$

(13) $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x+c}$　(14) $\dfrac{x}{1+\cos x}$　(15) $\dfrac{\cos x}{a\cos x+b\sin x+c}$　(16) $\dfrac{2x\sin x\cos x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$

(17) $\dfrac{\sqrt{\cos x\sin x}}{\cos x+\sin x}$　(18) $\dfrac{x}{1+\sin x}$　(19) $\dfrac{\cos^m x\sin^n x}{(\cos x+\sin x)^{m+n+2}}$　(20) $\dfrac{\tan x}{a\cos x+b\sin x+c}$

(21) $\sqrt{\tan x}$　(22) $\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$

2. 次の関数の原始関数を求めよ．ただし (4), (8), (39) の n は自然数, (5), (9) では $a\neq 0$, (6) では $b\neq ac$ かつ $a\neq 0$, (11) では $a<b$, (17), (18), (19) では $a>0$, (28) では $p<q$ とする．

(1) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$　(2) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{x+1}}$　(3) $\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^4}}$　(4) $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^n}{\sqrt{x^2+a}}$

(5) $(x+c)\sqrt{ax+b}$　(6) $\dfrac{x+c}{\sqrt{ax+b}}$　(7) $\dfrac{px+q}{ax+b+2\sqrt{x-c}}$　(8) $x^{n-1}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

(9) $\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x+c}$　(10) $\sqrt{\dfrac{ax+b}{x+c}}$　(11) $\dfrac{px+q}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$　(12) $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)\sqrt{2x-x^2}}$

(13) $\dfrac{px+q}{\sqrt{x^2+2ax+b}}$　(14) $\dfrac{\log x}{2\sqrt{x-1}}$　(15) $\dfrac{x^2+b}{\sqrt{x^2+a}}$　(16) $(x^2+b)\sqrt{x^2+a}$

(17) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(18) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2-b}$　(19) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$　(20) $\dfrac{\sqrt{x^2+a}}{x^2+b}$

(21) $\dfrac{1}{(x^2+b)\sqrt{x^2+a}}$　(22) $\dfrac{2x-1}{x^2\sqrt{x-1}}$　(23) $\dfrac{1}{(x^2-b)\sqrt{a^2-x^2}}$　(24) $\dfrac{1}{(x-r)\sqrt{x^2+2ax+b}}$

(25) $\dfrac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$　(26) $xe^{\sqrt{x-2}}$　(27) $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$　(28) $\dfrac{1}{(x-r)\sqrt{(x-p)(q-x)}}$

(29) $\dfrac{1}{x\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}$　(30) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)}$　(31) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x)}$　(32) $\dfrac{cx+d}{2\left(x+2a\sqrt{x-b}\right)\sqrt{x-b}}$

(33) $2x\tan^{-1}\sqrt{x+1}$　(34) $\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}+1}$　(35) $\dfrac{3}{x+4-3\sqrt[3]{x+2}}$　(36) $\dfrac{x^2}{\left(x+\sqrt{x+2}\right)\sqrt{x+2}}$

(37) $\log\left|x+2\sqrt{x+3}\right|$　(38) $\dfrac{\log x^3}{4\sqrt[4]{x+1}}$　(39) $\dfrac{\log x}{(1+x)^n}$　(40) $\dfrac{1-x^2}{(1+ax+x^2)\sqrt{1+bx+cx^2+bx^3+x^4}}$

3. (発展問題) 次の積分を求めよ．ただし (5) では $0<a<\dfrac{\pi}{2}$, (6) では $0<a<r$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(x+1)}{x^2+1}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3\sin^{-1}x}{(3x^2+1)^4}dx$

(5) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{\cos^2 a}{\cos^2 x}}dx$　(6) $\displaystyle\int_{r-a}^{r}x\cos^{-1}\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax}dx$

4. (発展問題) 連続関数 f と $R(X,Y)=R(Y,X)$ を満たす X, Y の有理式 $R(X,Y)$ について, 次の等式を示せ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(a\sin x+b\cos x)dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx$ (a, b は定数)

(2) f が偶関数ならば $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin xf(\cos x)dx=\pi\int_0^1 f(x)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}xR(\sin x,\cos x)dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R(\sin x,\cos x)dx$

5. (発展問題) 前問を用いて次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)^{10}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{2+\sin^2 x}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

微積分学 I 演習問題　第 12 回　広義積分

1. 次の広義積分を求めよ．ただし a, b, c, k, α は定数で, $a>0$, $c>1$, $1<\alpha<\pi$, (24), (25) では n は 2 以上の自然数, (54) では $0 \leqq a < b \leqq 2\pi - a$, (55) では $a>1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{8x+64}{x(x^2+4)^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x^{2k}+2x^k+2}dx$　(4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin^{-1} x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{1}{e^x\sqrt{e^x-1}}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$　(7) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1}dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{(1+x^2)^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx dx$　(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$　(11) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$　(12) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{4\sin^{-1} x - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(14) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^7}{(1+x^4)^4}dx$　(15) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x+(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(16) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2}dx$

(17) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$　(18) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}dx$　(19) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx$　(20) $\displaystyle\int_0^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$

(21) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$　(22) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)^2}dx$　(23) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}dx$　(24) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^n}dx$

(25) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{(1+x)^n}dx$　(26) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x}dx$　(27) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \log \sin x dx$　(28) $\displaystyle\int_0^{1} x(\log x)^2 dx$

(29) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$　(30) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-ax^n}dx$　(31) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{2x-1}{(x+1)^2(x-1)}dx$　(32) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}dx$

(33) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^3}dx$　(34) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{2x}-e^x}dx$　(35) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(1+\log x)^2}{x^2}dx$　(36) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\log x}{\sqrt{x-1}}dx$

(37) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{x^k}dx$　(38) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^k}dx$　(39) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx$　(40) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\log x}{(1+x)^4}dx$

(41) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x\sqrt{e^x+1}}dx$　(42) $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx$　(43) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log(x^{2a}+1)}{x^{a+1}}dx$　(44) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^3}dx$

(45) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\tan^{-1} x\right)}{1+x^2}dx$　(46) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^n}dx$　(47) $\displaystyle\int_1^{e} \left(\frac{1}{x\log x} - \frac{1}{x-1}\right)dx$　(48) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(49) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\pi - 2\tan^{-1}x}{x^2}dx$　(50) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$　(51) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\log 3} e^{2x}\log(e^x+1)dx$　(52) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{ax^{a-1}}{\sqrt{1-x^a}}dx$

(53) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\, dx$　(54) $\displaystyle\int_a^{b} \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos a - \cos x}}\, dx$　(55) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}dx$　(56) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx$

2. 次の広義積分の収束・発散を調べよ．ただし $\alpha>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{2}{1-x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \tan x dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \tan^{-1} x dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x}dx$

(5) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{2} 2^x \log x dx$　(10) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}dx$　(12) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$　(14) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x+1)\log x}dx$　(15) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x}dx$　(16) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$

(17) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x\sqrt{x-1}}dx$　(18) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx$　(19) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{x}{\sin x}dx$　(20) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx$

(21) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$　(22) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}dx$　(23) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^3}dx$　(24) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin\frac{1}{x^2}dx$

(25) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{1+\log x}dx$　(26) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{x-1}dx$　(27) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$　(28) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\alpha}}{(\sin x)^{\alpha+1}}dx$

(29) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x\cos x}{x}\, dx$　(30) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}dx$　(31) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{\sinh x}dx$　(32) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$

3. 広義積分 $\displaystyle\int_r^{\infty} \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}dx$ (ただし $r>p$) を求めよ．

4. ベータ関数 $B(p,q)$ $(p>0,\, q>0)$ に関する次の等式を示せ.

(1) $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^{p-1}\theta \sin^{q-1}\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^{p+q}} \, d\theta$

(2) $B(p,q) = B(q,p)$

(3) $p,\, q$ が自然数の場合, $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

5. $s>0$ とするとき, 次の級数の収束発散を判定せよ. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{n^s}$ (2) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n(\log n)(\log(\log n))^s}$

6. 以下の各問で与えられたの広義積分と級数の収束・発散を判定せよ.

(1) $\int_0^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x+1}} dx$, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}$ (2) $\int_1^{\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt{x^4+1}} dx$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{\sqrt{n^4+1}}$

(3) $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x} \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) dx$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ (4) $\int_2^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(\log x)^2} dx$, $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}(\log n)^2}$

(5) $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x} \sin\dfrac{1}{x} dx$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin\dfrac{1}{n}$

7. $a>-1$ かつ $a \neq 0$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\int_1^{\infty} \left(\log(x+a) - \log x - \dfrac{a}{x+a}\right) dx$ の値を求めよ.

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1+\dfrac{a}{n}\right) - \dfrac{a}{n+a}\right)$ の収束・発散を判定せよ.

8. 一般項が $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n$ で与えられる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について次の問いに答えよ.

(1) $\log x = \int_1^x \dfrac{dt}{t}$ であることを用いて, $a_n > \log(n+1) - \log n$ が成り立つことを示せ.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であることを示すことにより, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(3) $\dfrac{1}{2} < \lim_{n\to\infty} a_n < \dfrac{5}{6}$ であることを示せ.

9. (発展問題) (1) $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ であることを用いて $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x \, dx$ は収束することを示せ.

(2) $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\dfrac{\sin 2x}{2}\right) dx$ を示し, I の値を求めよ.

10. (発展問題) 前問の結果を用いて, 次の積分の値を求めよ. ただし (14) の a は $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすとする.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{\tan x} dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 dx$ (3) $\int_0^{\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^2 dx$ (4) $\int_0^{\pi} \log(1-\cos x) dx$

(5) $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x) dx$ (6) $\int_0^{\pi} \dfrac{x \sin x}{1-\cos x} dx$ (7) $\int_0^1 \dfrac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (8) $\int_0^1 \dfrac{\sin^{-1} x}{x} dx$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \tan x \, dx$ (10) $\int_0^{\pi} x \log\sin x \, dx$ (11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\tan x \, dx$ (12) $\int_0^1 \dfrac{x^2 \log x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \log\sin x \, dx$ (14) $\int_{-1}^1 \dfrac{\log|a-x|}{\sqrt{1-x^2}} dx$

11. (発展問題) $f:(a,b] \to \boldsymbol{R}$ は単調減少関数であり, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束するとする.

(1) $\lim_{x\to a+0} (x-a)f(x) = 0$ であることを示せ.

(2) 命題「単調減少関数 $g:(0,1] \to \boldsymbol{R}$ が $\lim_{x\to+0} xg(x) = 0$ を満たせば, 広義積分 $\int_0^1 g(x)dx$ は収束する.」が正しければ証明をし, 正しくなければ, 反例を挙げよ.

(3) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \dfrac{k(b-a)}{n}\right) \dfrac{b-a}{n}$ が成り立つことを示せ.

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ を求めよ.

微積分学 I 演習問題　第 13 回　級数の収束・発散

1. 次の級数の収束・発散を判定せよ．一般項に a, b, c, k などの定数が含まれる場合は, 必要ならば場合分けをすること．ただし, (2) の k は 0 以上の整数, (8) では $a>0$ とし, (16) の a, b は負の整数ではないとする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+k)!)^2}{(2n)!}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\log n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{2^n}$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi-2\tan^{-1}n}{n}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{a^n n!}$　(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n(n!)^2}{(2n)!}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^{2n}+1}$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^b}{n^a+1}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n!}$　(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$　(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$　(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+n}$　(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$

2. 次の級数の収束・発散を判定せよ．一般項に a, b などの定数が含まれる場合は, 必要ならば場合分けをすること．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}6^n\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+b}{an}\right)^n$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}b^n$

3. 次の級数の収束・発散を判定せよ．ただし (7) では $a>1$ とする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{2^n}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{(\log n)^n}$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{\log n}}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\frac{a}{n}$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)^{\log n}}$　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{a}{n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$　(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sin\frac{n\pi}{12}$　(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n(n+1)}$　(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{3n+1}$

4. 次の級数の収束半径を求めよ．ただし, (1), (13), (15) の k は自然数とし, (2) の a は $a<0$ または $a>1$ であり, (24) の a は負の整数ではないとする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{an}{n}x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n^2}x^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+a)^n}{n!}x^n$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$　(8) $\displaystyle\sum_{n\geqq 0, n\neq -a}\frac{n!}{(n+a)^n}x^{2n+1}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{(n+1)!}x^n$　(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(n+1)^n}x^n$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n x^n$　(12) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(\tan^{-1}n)^n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn)!}{(n!)^k}x^{kn}$　(14) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}x^n$　(15) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn)!}{n^{kn}}x^n$　(16) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

(17) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\log n}$　(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^n$　(19) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2-n+1}}$　(20) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$

(21) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{\sqrt{n}}}$　(22) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}\right)x^n$　(23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}\right)x^n$　(24) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$

5. 次の級数の収束半径を求め, さらに x の絶対値が収束半径に一致する場合の級数の収束性を判定せよ．ただし, (4) と (8) では a の値によって場合分けをすること．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right)x^{2n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n+1}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n x^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^a x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n}-\sqrt{n-1}}{n}x^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}x^{2n+1}$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2+1}x^n$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^a+1}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^3-n+1}}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)x^n$　(11) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)x^n$

6. 次の整級数によって表される関数を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)^2}{(n-1)!}x^n$ (7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

7. 0 以上の整数 k に対して整級数 $\sigma_k(x)$ を $\sigma_k(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n$ で定義する.

(1) $\sigma_k(x)$ の収束半径を求めよ.

(2) $\sigma_k(x)$ が収束する x に対し, $\sigma_k(x)$ を x の有理関数で表せ.

8. 交代級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan^{-1}\frac{1}{n}$ が収束するかどうかを判定し, 収束する場合は絶対収束するかどうかを判定せよ.

9. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束する単調減少数列ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ は収束することを示せ.

10. (発展問題) 次の級数の収束・発散を判定せよ. ただし, α, β は正の実数, k, l は自然数とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{\sqrt{n+1}}\right)^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{2^n}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^k}{n^k+1}\right)^{n^{k+l+1}}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-[\sqrt{n}]-\frac{1}{2}}{([\sqrt{n}]+1)^3}$ (7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n^\alpha}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$ (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{n^\beta}}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ (12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{\alpha}-1)$ (13) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{n+1}\right)^2$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+1)-\log n}{n+1}$ (16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ (17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha-\cos n\alpha}{n^{\frac{3}{2}}}$ (18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\log n}$ (20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n^2-n+1}$ (21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)$ (22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

11. (発展問題) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束すると仮定する.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項が -1 より大きいとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ も絶対収束することを示せ.

(2) すべての自然数 n に対して $a_n\neq-1$ のとき, 数列 $\displaystyle\left\{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 でない値に収束することを示せ.

12. (発展問題) $a_1>0$, $a_n\geqq 0$ $(n\geqq 2)$ とし, $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく. このとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するためには $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ が収束することが必要十分であることを示せ.

13. (発展問題) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき, 等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=0$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が成り立つことを示せ.

14. (発展問題) $a_n>0$, $b_n>0$ とし, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$, $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおく. $\displaystyle\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であれば, $\displaystyle\left\{\frac{S_n}{T_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ も単調増加であることを示せ.

15. (発展問題) $n=1,2,3,\ldots$ に対し, S_{2n}, T_{3n}, U_{3n} を以下のように定める.

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$T_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$U_{3n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$

(1) $S_{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ を示せ.

(2) $T_{3n}=S_{4n}+\dfrac{1}{2}S_{2n}$ を示せ.

(3) $U_{3n} = \dfrac{1}{2} S_{2n}$ を示せ.

16. (発展問題) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = ab$ であることを示せ.

17. (発展問題) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列で, 各項が 0 以上であるとする. このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するためには, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ が収束することが必要十分であることを示せ.

18. (発展問題) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 であるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $|x| < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n a_{n+1} x^n$ は収束することを示せ. また, 任意の $1 \leqq r \leqq \infty$ に対し, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 で, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n a_{n+1} x^n$ の収束半径が r になるような数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の例を挙げよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n^2}$ の収束半径を求めよ.

(3) $|x| < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) x^n$ は収束することを示せ. また, 任意の $1 \leqq r \leqq \infty$ に対し, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 で, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) x^n$ の収束半径が r になるような数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の例を挙げよ.

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) x^n$ の収束半径を求めよ.

微積分学 I 演習問題　第 14 回　面積・曲線の長さ・回転体の体積

1. a, b $(a \geqq b)$ を正の実数, m, n を自然数とするとき, 以下の領域の面積を求めよ.

(1) 楕円の内部 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ と $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \leqq 1$ の共通部分.

(2) 第一象限の $x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}} \leqq 1$ を満たす部分.

(3) 極座標で表された曲線 $r = a + b\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

(4) 極座標で表された曲線 $r = a\sin n\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{n})$ で囲まれた部分.

(5) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = 2t - t^2 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ と x 軸で囲まれた部分.

(6) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$ と y 軸で囲まれた部分.

(7) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた部分.

(8) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた部分.

(9) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x = 2a\cos t + a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

(10) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

2. 次の曲線の長さを求めよ. ただし a, b, p, q は実数の定数で, (6), (8), (18), (19), (20) では $a > 0$ とし, (13), (14) の n は自然数とする.

(1) $y = ax^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqq x \leqq b)$

(2) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\log x$ $(1 \leqq x \leqq 2)$

(3) $y = \log(x^2 - 1)$ $(2 \leqq x \leqq 3)$

(4) $y = \log(\cos x)$ $(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$

(5) $y = e^x$ $(0 \leqq x \leqq \log 2)$

(6) $y = a^2 e^{\frac{x}{2ab}} + b^2 e^{-\frac{x}{2ab}}$ $(2abp \leqq x \leqq 2abq)$

(7) $y = \log x$ $(a \leqq x \leqq b)$

(8) $y = \dfrac{3a}{2}x^{\frac{2}{3}}$ $(0 \leqq x \leqq b)$

(9) $y = (1 - \sqrt{x})^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$

(10) $y = (a - x)\sqrt{\dfrac{x}{3a}}$ $(0 \leqq x \leqq a)$

(11) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^4 - t^2 \\ y = \frac{4}{3}t^3 \end{cases}$ $(-1 \leqq t \leqq 2)$

(12) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \log t \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t \end{cases}$ $(1 \leqq t \leqq 2\sqrt{2})$

(13) $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \frac{2}{3}t^3 + t^2 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

(14) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

(15) $\begin{cases} x = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y = (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi bn}{a})$

(16) $\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \\ y = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi bn}{a})$

(17) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $(p \leqq t \leqq q)$

(18) $\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \\ z = at \end{cases}$ $(p \leqq t \leqq q)$

(19) $r = e^{a\theta}$ $(\theta \leqq b)$

(20) $r = a\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq b)$

(21) $r = a\theta^2$ $(0 \leqq \theta \leqq b)$

(22) $r = \dfrac{a}{\theta}$ $(1 \leqq \theta \leqq b)$

3. a, p, q を正の実数の定数とし, 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \dfrac{a}{2}\left(pe^{\frac{x}{a}} + qe^{-\frac{x}{a}}\right)$ によって定義する. 正の実数 t に対

し, x 軸, y 軸, 直線 $x=t$ と f のグラフによって囲まれた部分の面積を $S(t)$ とし, 点 $(0,f(0))$ から $(t,f(t))$ までの曲線 $y=f(x)$ の長さを $L(t)$ とする.

(1) $S(t)$ を求めよ.

(2) $pq=1$ ならば, すべての正の実数 t に対して $S(t)=aL(t)$ が成り立つことを示せ.

4. xy 平面において, 原点を中心とする半径 r の円 O に, 長さ $2\pi r$ の伸び縮みしない糸を $(r,0)$ を一方の端点として時計回りに巻き付ける. 糸のもう一方の端点を P として, O に巻き付けた糸を P からピンと張ったまま点 $(r,0)$ から反時計回りにほどいてゆくとき, P が点 $(r,-2\pi r)$ に到達するまでに P が描いた軌跡の曲線の長さを求めよ.

5. 次の (1) から (8) の曲線を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積と表面積を求めよ.

(1) $x^2+y^2=r^2$ $(-r \leqq a<b \leqq r,\ a \leqq x \leqq b)$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0,\ a \neq b)$

(3) $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

(4) $y=\tan x$ $(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4})$

(5) $y=e^x$ $(0 \leqq x \leqq \log 2)$

(6) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(7) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$

(8) $x^2+(y-a)^2=R^2$ $(0<R \leqq a)$

6. 次の回転体の体積を求めよ.

(1) 極座標で表された曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

(2) 双曲線 $xy=1$ と y 軸と直線 $y=1$ で囲まれた部分を y 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

(3) 曲線 $x=a\log\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)-\sqrt{a^2-y^2}$ $(a>0)$ と x 軸と y 軸で囲まれた部分を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

7. a, b を正の実数とし, xy 平面の x 軸上の点 $(a,0)$ を A, y 軸上の点 $(0,b)$ を B とする. さらに原点を O とし, $0<s<1$ を満たす実数 s と $r>-1$ を満たす実数 r に対し, 線分 OA, OB を $s^r:(1-s^r)$ の比に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}(s)$, $\mathrm{Q}(s)$ で表すことにする.

(1) f, g は閉区間 $[0,1]$ で定義された連続関数で, ともに開区間 $(0,1)$ において微分可能であるとし, xy 平面上で $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と媒介変数表示される曲線を C とする. 次の条件 $(*)$ が満たされるとき, $f(t)$, $g(t)$ を a, b, t, r の式で表せ.

$(*)$ 任意の $0<s<1$ に対し, $\mathrm{P}(s)$ と $\mathrm{Q}(1-s)$ を通る直線は, 点 $(f(s),g(s))$ において, C に接する.

(2) 曲線 C と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積をベータ関数を用いて表せ.

(3) 曲線 C と x 軸, y 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転させて得られる回転体の体積をベータ関数を用いて表せ.

8. (1) 関数 f が逆関数 f^{-1} をもつとき, f の定義域に属する実数 $a<b$ と自然数 n に対して以下の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)^n\,dy=b^nf(b)-a^nf(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)\,dx$$

(2) $x>0$ において定義された関数 $f(x)=-x\log x$ を考える. $0<t<\dfrac{1}{e}$ に対し, f のグラフ, y 軸と x 軸に平行な 2 直線 $y=f(t)$, $y=f\left(\dfrac{1}{e}\right)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

(3) $x>0$ において定義された関数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ を考える. $1<s<t$ に対し, f のグラフ, y 軸と x 軸に平行な 2 直線 $y=f(t)$, $y=f(s)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに回転して得られる回転体の体積求めよ.

(4) $x>0$ において定義された関数 $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ を考える. $0<s<t$ に対し, f のグラフ, y 軸と x 軸に平行な 2 直線 $y=f(t)$, $y=f(s)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

(5) $x \geqq 0$ において定義された関数 $f(x) = e^{-x^2}$ を考える. $0 < t < 1$ に対し, f のグラフ, y 軸と x 軸に平行な直線 $y = f(t)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

9. (発展問題) 関数 $f, g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ は連続で, (a, b) の各点で微分可能であり, 導関数 $f', g' : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ は連続であるとする. $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ によって媒介変数表示される曲線を C とし, C は原点を通らないとする.

(1) (a, b) の各点で微分可能な関数 $\theta : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ が, 各 $t \in [a, b]$ に対して $f(t) = \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}\cos\theta(t)$, $g(t) = \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}\sin\theta(t)$ を満たすとき, θ の導関数は $\theta'(t) = \dfrac{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)}{f(t)^2 + g(t)^2}$ で与えられることを示せ.

(2) C が $r = \rho(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ の形に極座標表示され, $f(a) = \rho(\alpha)\cos\alpha$, $g(a) = \rho(\alpha)\sin\alpha$, $f(b) = \rho(\beta)\cos\beta$, $g(b) = \rho(\beta)\sin\beta$ であるとき, C と原点を始点として $(f(a), g(a))$ を通る半直線と原点を始点として $(f(b), g(b))$ を通る半直線で囲まれた部分の面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b (f(t)g'(t) - f'(t)g(t))\,dt$ で与えられることを示せ.

10. (発展問題) a, b は正の実数で, (1) では $a > 2b$, (2) では $a > b$ であるとする. 以下の領域の面積を求めよ.

(1) 曲線 $\begin{cases} x = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y = (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{2\pi b}{a})$ と円弧 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{2\pi b}{a})$ で囲まれた部分.

(2) 曲線 $\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \\ y = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{2\pi b}{a})$ と円弧 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{2\pi b}{a})$ で囲まれた部分.

(3) 曲線 $y^2(2a - x) = x^3$ と直線 $x = 2a$ ではさまれた部分.

(4) 曲線 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ の第 2 象限と第 4 象限にある部分と直線 $x + y + a = 0$ ではさまれた部分.

微積分学 I 演習問題　第 15 回　微分方程式

1. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．ただし (7), (8), (10) の a は 0 でないとする．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x^n(1+y^2)$　(2) $\dfrac{dy}{dx} = ry\left(1-\dfrac{y}{K}\right)$　(3) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x(y-a)$　(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+y}{x}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1+y}{1+x}$　(6) $\dfrac{dy}{dx} = (\sin x)y$　(7) $\dfrac{dy}{dx} = b^2 - a^2y^2$　(8) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax(1+y^2)}{y(1+x^2)}$

(9) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$　(10) $\dfrac{dy}{dx} = ax^my^n$　(11) $\dfrac{dy}{dx} = -(\tan x)y$　(12) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{1+y}{1+x}\right)^2$

2. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$　(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$　(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$　(6) $\dfrac{dy}{dx} = (4x+y+1)^2$

3. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．ただし (16) の α はつねに正の値をとる関数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy + x$　(2) $\dfrac{dy}{dx} = y + \sin x$　(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+1} + x + 1$　(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} + \sin x$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + x$　(6) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + x^2$　(7) $\dfrac{dy}{dx} = -y + \cos x$　(8) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{x^2+1}y + \cos x$

(9) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y+x}{x+1}$　(10) $\dfrac{dy}{dx} = xy + x$　(11) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-1}{x^2}y + 1$　(12) $\dfrac{dy}{dx} = -2xy + 2x^2 + 1$

(13) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+1}{x^2+1}$　(14) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - 1$　(15) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n}{x}y + x^ne^x$　(16) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}y + k\alpha(x)$

4. 微分方程式 $3\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{dy^4}{dx^4} = 5\left(\dfrac{dy^3}{dx^3}\right)^2$ の一般解を求めよ．

5. 以下の微分方程式の解のマクローリン展開の 6 次の項まで求めよ．

(1) $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + (\sin x)y = 0$　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - a(x+b)y = 0$

6. 以下の微分方程式の解のマクローリン展開を求めよ．ただし k は 0 以上の整数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + 1$　(2) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = 2xy + x$　(3) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = y + x + 1$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = y + x(x+1)$　(5) $\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$　(6) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + (a+1)y = 0$

(7) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^ky = 0$　(8) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + ay = 0$　(9) $(x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + 2ay = 0$

7. (発展問題) 関数 $f : [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ は連続な導関数をもち，つねに 0 以上の値をとるとする．正の実数 t に対し，x 軸，y 軸，直線 $x = t$ と f のグラフによって囲まれた部分の面積を $S(t)$ とし，点 $(0, f(0))$ から $(t, f(t))$ までの曲線 $y = f(x)$ の長さを $L(t)$ とする．任意の正の実数 t に対して $\dfrac{S(t)}{L(t)}$ が一定の値 a であるとき，関数 f を求めよ．

微積分学 I 演習問題　第 16 回　応用問題

1. (1) 関数 $f:(1,+\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\log(\log x)$ で定める. f の増減, 凹凸を調べて, f のグラフの概形をかけ.

(2) 直線 $y=e^{-k}x-k$ が $y=f(x)$ のグラフの接線になるような実数 k の値を求め, さらにそのときの接点の座標を求めよ.

2. a を正の実数とするとき, 方程式 $a^x=x$ の解の個数を調べよ.

3. a を正の実数とするとき, 連立方程式 $\begin{cases} a^x=y \\ a^y=x \end{cases}$ の解について調べよ.

4. a を正の実数とし, $x_1=a$, $x_{n+1}=a^{x_n}$ により数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める.

(1) $a>1$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であることを示せ.

(2) $1<a\leqq c^{\frac{1}{c}}$ $(c>1)$ ならば $x_n<c$ であることを示せ.

(3) $a<1$ のとき, $x_{2n-1}<x_{2n+1}<x_{2m+2}<x_{2m}$ が成り立つことを示せ.

(4) $a<1$ のとき, $\alpha=\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}$, $\beta=\lim_{n\to\infty}x_{2n}$ とおくとき, $\alpha=\beta$ となるための条件を求めよ.

(5) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する a の範囲を求めよ.

5. 関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$, $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ を $f(x)=\dfrac{1}{\log(x+1)-\log x}-x$, $g(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$ で定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) g は狭義単調減少関数で, 全単射であることを示せ.

(2) 合成関数 $f\circ g:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ は狭義単調減少関数であることを示すことによって, f は狭義単調増加関数であることを示せ.

(3) 極限 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ.

(4) 任意の正の実数 x に対して, 不等式 $\dfrac{2}{2x+1}<\log(x+1)-\log x<\dfrac{1}{x}$ が成り立つことを示せ.

(5) $x\geqq 1$ ならば 不等式 $\log(x+1)-\log x<\dfrac{5}{5x+2}$ が成り立つことを示せ.

(6) $a>0$ に対し, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に $a_1=a$, $a_{n+1}=\log(a_n+1)$ で定めるとき, 極限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

(7) 極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log a_n}{\log n}$ を求めよ.

6. a を正の定数とする. xy 平面上で $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と媒介変数表示される曲線を C として, C 上に定点 $\mathrm{A}(\pi a, 2a)$ をとる. C 上の動点 $\mathrm{T}(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$ $(0<t<\pi)$ をとり, T における C の接線を ℓ とする.

(1) 2 点 T と A の間の曲線 C の弧の長さ L を求めよ.

(2) $\mathrm{PT}=L$ を満たす ℓ 上の点 P の座標を求めよ. ただし, P の x 座標は T の x 座標より大きいとする.

(3) T が $0<t<\pi$ の範囲で C 上を動くとき, P が描く軌跡を C' とする. C' を平行移動すれば, C の一部に重なることを示せ.

7. a を正の実数とする. 放物線 $C: y=ax^2$ 上の 2 つの点 $\mathrm{P}(s, as^2)$, $\mathrm{Q}(t, at^2)$ $(s<t)$ における接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 として, ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする.

(1) $\angle\mathrm{PRQ}=\theta$ とおくとき, $\cos\theta$ を s, t を用いて表せ.

(2) $\angle\mathrm{PRQ}$ が常に一定の角度 θ であるように P と Q が C 上を動くとき, R が動く曲線の方程式を求めよ.

(3) $\theta>\dfrac{\pi}{2}$ のとき (2) で求めた曲線と ℓ_1 が相異なる 2 点で交わるための s の範囲を求めよ.

(4) $\theta>\dfrac{\pi}{2}$ であり, s が (3) で求めた範囲にあるとき, (2) で求めた曲線と ℓ_1 で囲まれた領域の面積を求めよ.

8. (発展問題) 関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能で, f の導関数は狭義単調増加関数であるとする. f のグラフを C として, C の相異なる 2 点 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$ $(a<\alpha<\beta<b)$ における接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とし, P, Q における法線をそれぞれ L_1, L_2 とする.

(1) ℓ_1, ℓ_2 と C で囲まれた部分の面積を S とするとき, f, α, β を用いて S を表せ.

(2) L_1, L_2 と C で囲まれた部分の面積を T とするとき, T を f, α, β を用いて T を表せ.

(3) 線分 PQ と C で囲まれた部分の面積を U とするとき, U を f, α, β を用いて U を表せ.

(4) $\dfrac{T}{S}$ が P と Q の位置に依存しない一定の値になるような関数 f は存在しないことを示せ.

(5) $\dfrac{T}{U}$ が P と Q の位置に依存しない一定の値になるような関数 f は存在しないことを示せ.

9. (発展問題) 開区間 I で定義された関数 $f:I\to \boldsymbol{R}$ は微分可能で, f の導関数は狭義単調増加関数または狭義単調減少関数であるとする. f のグラフを C として, C の相異なる 2 点 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$ を通る線分と C で囲まれた部分の面積を $S(\alpha,\beta)$ とする. また, $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\gamma)(\beta-\alpha)$ を満たす $\gamma\in(\alpha,\beta)$ はただ一つ存在するが, このとき C 上の点 $\mathrm{R}(\gamma, f(\gamma))$ をとり, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $T(\alpha,\beta)$ とする.

(1) f が 2 回微分可能で, 2 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値ならば, その値は $\dfrac{4}{3}$ であることを示せ.

(2) f が 4 回微分可能で, 4 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値であるような関数 f を求めよ.

10. (発展問題) 開区間 I で定義された関数 $f:I\to \boldsymbol{R}$ は微分可能で, f の導関数は狭義単調増加関数または狭義単調減少関数であるとする. f のグラフ上の相異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$ における接線をそれぞれ ℓ_α, ℓ_β とする. ℓ_α と ℓ_β の交点を C とし, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $S(\alpha,\beta)$ とする. また, $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\gamma)(\beta-\alpha)$ を満たす $\gamma\in(\alpha,\beta)$ はただ一つ存在するが, このとき f のグラフ上の点 $(\gamma, f(\gamma))$ における f のグラフの接線 ℓ_β と ℓ_α, ℓ_β との交点をそれぞれ P, Q として $\triangle\mathrm{PQC}$ の面積を $T(\alpha,\beta)$ とする.

(1) f が 2 回微分可能で, 2 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値ならば, その値は 4 であることを示せ.

(2) f が 4 回微分可能で, 4 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値であるような関数 f を求めよ.

11. (発展問題) 開区間 I で定義された関数 $f:I\to \boldsymbol{R}$ は微分可能で, f の導関数は狭義単調増加関数または狭義単調減少関数であるとする. f のグラフ上の相異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$ における接線をそれぞれ ℓ_α, ℓ_β とする. ℓ_α, ℓ_β と f のグラフで囲まれた部分の面積を $S(\alpha,\beta)$, 線分 PQ と f のグラフで囲まれた部分の面積を $T(\alpha,\beta)$ とする.

(1) f が 2 回微分可能で, 2 次導関数が連続であるとき, $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値ならば, その値は 2 であることを示せ. .

(2) f が 4 回微分可能で, 4 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値であるような関数 f を求めよ.

微積分学 II 演習問題　第 17 回　2 変数関数の極限と連続性

1. 次の極限が存在する場合はその値を求め, 存在しない場合はその理由を答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{2}{1}} \frac{\cos(\pi xy)}{1+2xy}$　(2) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^y\sin(xy)}{xy}$　(3) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(7) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$　(8) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}$　(9) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{x^2+y^4}$　(11) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$　(12) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(13) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$　(14) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$　(15) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

(16) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$　(17) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(18) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

2. 前問の問 (n) $(n=3,4,\dots,18)$ で極限を考えた, $\boldsymbol{R}^2$ から原点を除いた集合で定義される関数を f_n とする. (例えば, f_3 は $f_3\binom{x}{y}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ で与えられる関数.) 関数 $\bar{f}_n:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を

$$\bar{f}_n\binom{x}{y}=\begin{cases} f_n\binom{x}{y} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$$

で定めるとき, 各 $n=3,4,\dots,18$ について, $\bar{f}_n$ の原点における連続性について調べよ.

3. (発展問題) (1) $\boldsymbol{R}^2$ で定義される関数 $\bar{f}_2$ を

$$\bar{f}_2\binom{x}{y}=\begin{cases} \dfrac{e^y\sin(xy)}{xy} & xy\neq 0 \\ e^y & xy=0\end{cases}$$

で定義するとき, 集合 $\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, xy=0\right\}$ の各点における $\bar{f}_2$ の連続性について調べよ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ で定義される関数 $\bar{f}_1$ を

$$\bar{f}_1\binom{x}{y}=\begin{cases} \dfrac{\cos(\pi xy)}{1+2xy} & xy\neq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & xy=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

で定義するとき, 集合 $\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, xy=-\frac{1}{2}\right\}$ の各点における $\bar{f}_1$ の連続性について調べよ.

4. (発展問題) a, b, m, n, p, q を正の実数とする. $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{|x|^m|y|^n}{a|x|^p+b|y|^q}=0$ であるための必要十分条件を求めよ.

5. (発展問題) m, n, p, q, r を正の実数とし, 関数 $f:\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, x>0,\, y>0\right\}\to\boldsymbol{R}$ を

$$f\binom{x}{y}=mx+ny-r\min\{px,qy\}-\min\{x,y\}$$

で定める. このとき, f が負の値をとるための必要十分条件を求めよ.

6. (発展問題) m, n, p, q, r を正の実数とする. $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}=0$ であるための必要十分条件を求めよ.

微積分学 II 演習問題　第 18 回　偏微分と微分可能性

1. 次で定められる関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(1) $f\binom{x}{y} = \sin(xy)\cos y$　(2) $f\binom{x}{y} = \log(x^3y^4)$　(3) $f\binom{x}{y} = \sin^{-1}(x+y)$

(4) $f\binom{x}{y} = xy(ax^2+by^2-1)$　(5) $f\binom{x}{y} = (3x^2+y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$　(6) $f\binom{x}{y} = \tan^{-1}(xy^2)$

(7) $f\binom{x}{y} = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　(8) $f\binom{x}{y} = e^{x-2y}\cos(x^2+4xy)$　(9) $f\binom{x}{y} = \log(x^2-2xy+3y^2)$

2. 下の式で定義される $\left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0, x+y>0\right\}$ 上の関数 f に対し $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{y}$ を求めよ.

$$f\binom{x}{y} = x^{x^{x^{x^y}}} + (\log x)\tan^{-1}(\tan^{-1}(\tan^{-1}(\sin(\cos(xy)) - \log(x+y))))$$

3. $\boldsymbol{v} = \binom{a}{b}$ を零でない $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルとする. 以下の各問で与えられる関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分を求めよ. また, 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求め, それらが原点でも定義されている場合は, 原点における連続性を調べよ. さらに, f の原点での微分可能性を調べて, f が原点で微分可能ならば, 原点における微分 $f'\binom{0}{0}$ を求めよ.

(1) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(2) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(3) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(4) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(5) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(6) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(7) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+4y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(8) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 1 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(9) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(10) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(11) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(12) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(13) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(14) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ \dfrac{1}{2} & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(15) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(16) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{x^3-3xy}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(17) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(18) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(19) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$　(20) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(21) $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{e^y\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ e^y & xy = 0 \end{cases}$　(22) $f\binom{x}{y} = \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2$

4. 以下で定められる関数 f の 2 次偏導関数をすべて求め, それぞれの場合に, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ が一致することを確かめよ. ただし, a, b は定数とする.

(1) $xy^3(1+x^2-y)$ (2) e^{x+y} (3) $\sqrt{x^2+y^2}$ (4) $\log(x^2+y^2)$ (5) $\sqrt{y^2-x}$
(6) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (7) $\sin x^2y$ (8) $\dfrac{x+y}{x-y}$ (9) $\log(x^2+2xy-y^2)$ (10) $\log(x^2+y^4)$
(11) $\cos(x^2+xy^3)$ (12) $e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$ (13) $\sin^{-1}x^2y$ (14) $e^{ax}\sin by$ (15) $\log(e^x+e^{2y})$
(16) $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ (17) $e^{3x}\cos(x+2y)$ (18) $\tan^{-1}\dfrac{x-y}{x+y}$ (19) x^y

5. $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x>0\right\}$, $Y=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x>0\right\}$, $Z=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x,y>0\right\}$, $W=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x+y>0\right\}$ とする. f が (1)〜(9) で与えられるとき, f の定義域の各点 ((1), (2), (4) では $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$, (3), (5)〜(9) では $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$) における微分を求めよ.

(1) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\sin(x\sin y)$. (2) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\sin(xy)$.
(3) $f:X\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=x^y$. (4) $f:Y\to\boldsymbol{R}^3$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\sin(xy)\\ \sin(x\sin y)\\ x^y\end{pmatrix}$.
(5) $f:X\to\boldsymbol{R}^2$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x^y\\z\end{smallmatrix}\right)$. (6) $f:Z\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=x^{y^z}$.
(7) $f:X\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=x^{y+z}$. (8) $f:W\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=(x+y)^z$.
(9) $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\sin(x\sin(y\sin z))$.

6. $g,h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が微分可能なとき, (1) から (4) で与えられる $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g, h を用いて表せ. ただし, (5) では g は常に正の値をとるとする.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(x)$ (2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(y)$ (3) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(x+y)$ (4) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(x)h(y)$ (5) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(x)^{h(y)}$

7. (発展問題) a, b を実数, m, n, p, q, r を正の実数とする. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を

$$f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}ax+by+\dfrac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$$

で定義される関数とするとき f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であるための必要十分条件を求めよ.

8. (発展問題) 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$ で定める. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求め, さらに, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ であることを示せ.

9. (発展問題) 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$ で定める. f の 2 次偏導関数をすべて求め, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ であることを示せ. さらに f の各 2 次偏導関数の原点における連続性を調べよ.

10. (発展問題) $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を連続関数とするとき, (1) から (4) で与えられる $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g を用いて表せ. また, $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x>0\right\}$ として $f:X\to\boldsymbol{R}$ が (5) で与えられるとき, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を g を用いて表せ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_a^{x+y}g(t)dt$ (2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_x^{y}g(t)dt$ (3) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_a^{xy}g(t)dt$
(4) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_a^{\left(\int_x^y g(s)ds\right)}g(t)dt$ (5) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_{x^y}^{\sin(x\sin(y\sin z))}g(t)dt$

微積分学 II 演習問題　第19回　合成写像の微分

1. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\binom{x}{y}=ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g\binom{u}{v}=\binom{u\cos v}{u\sin v}$ により定める．
 (1) f の $\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2$ における微分と g の $\binom{u}{v}\in\boldsymbol{R}^2$ における微分を求めよ．
 (2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\binom{u}{v}$ における微分と $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial u}\binom{u}{v}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial v}\binom{u}{v}$ を求めよ．

2. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}x^2y^2-2y^3\\x^2+xy-y^2\end{pmatrix}$, $g\binom{u}{v}=\begin{pmatrix}u^3-u^2v+v^2\\u^2-uv^3\end{pmatrix}$ により定める．
 (1) f の $\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2$ における微分と g の $\binom{u}{v}\in\boldsymbol{R}^2$ における微分を求めよ．
 (2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ の $\binom{1}{0}$ における微分を求めよ．
 (3) $f_1:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f_1\binom{x}{y}=x^2y^2-2y^3$ で定義される関数とするとき，$\dfrac{\partial f_1\circ g}{\partial u}\binom{1}{0}$, $\dfrac{\partial f_1\circ g}{\partial v}\binom{1}{0}$ を求めよ．

3. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}x^3+y^2\\x^2y+xy-2y^2\end{pmatrix}$, $g\binom{z}{w}=\binom{e^z\cos w}{e^z\sin w}$ により定める．
(1) f, g のそれぞれ $\binom{x}{y}$, $\binom{z}{w}$ における微分を求めよ．
(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ の $\binom{z}{w}$ における微分を求めよ．

4. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\binom{x}{y}=\log(x^2+xy+y^2+1)$, $g\binom{r}{\theta}=\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$, $h(t)=\begin{pmatrix}e^t+e^{-t}\\e^t-e^{-t}\end{pmatrix}$ により定める．
(1) f, g, h のそれぞれ $\binom{x}{y}$, $\binom{r}{\theta}$, t における微分を求めよ．
(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\binom{r}{\theta}$ における微分を求め，$f\circ g$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial\theta}$ を求めよ．
(3) 合成写像 $f\circ h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ の導関数を求めよ．

5. 写像 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ と関数 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}3x^3-2x^2y+y^3\\x^2y-2xy^2\end{pmatrix}$, $g\binom{z}{w}=z^2w^4-4zw^3-5z^2w^2$ で定める．
(1) f の $\binom{x}{y}$ における微分 $f'\binom{x}{y}$ と g の $\binom{z}{w}$ における微分 $g'\binom{z}{w}$ を求めよ．
(2) $\binom{2}{-1}$ における g の $\binom{-1}{1}$ 方向の方向微分を求めよ．
(3) 合成写像 $g\circ f$ の $\binom{1}{1}$ における微分 $(g\circ f)'\binom{1}{1}$ を求めよ．

6. 写像 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ と関数 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}2x^3-y^3\\x^2y-2xy^2\end{pmatrix}$, $g\binom{z}{w}=z^3w^3+zw^2-z^2w$ で定める．
(1) f の $\binom{x}{y}$ における微分 $f'\binom{x}{y}$ と g の $\binom{z}{w}$ における微分 $g'\binom{z}{w}$ を求めよ．
(2) $\binom{1}{1}$ における g の $\binom{1}{2}$ 方向の方向微分を求めよ．
(3) 合成写像 $g\circ f$ の $\binom{1}{1}$ における微分 $(g\circ f)'\binom{1}{1}$ を求め，さらに $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}\binom{1}{1}$ と $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial y}\binom{1}{1}$ の値を求めよ．

7. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\binom{x}{y}=\tan^{-1}(x^2+xy+2y^2)$, $g\binom{r}{\theta}=\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$ により定める．合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\binom{1}{\pi}$ における微分を求め，$f\circ g$ の $\binom{1}{\pi}$ における偏微分 $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}\binom{1}{\pi}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial\theta}\binom{1}{\pi}$ を求めよ．

8. 関数 $f_1,f_2:\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\right\}\to\boldsymbol{R}$, $f_3:\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\neq 0\right\}\to\boldsymbol{R}$, $f_4,f_5:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が，それぞれ $f_1\binom{x}{y}=\log(x^2+y^2)$, $f_2\binom{x}{y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2$, $f_3\binom{x}{y}=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $f_4\binom{x}{y}=\tan^{-1}xy$, $f_5\binom{x}{y}=ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$ で与えられているとする．
 (1) $\omega_1,\omega_2,\omega_3:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ をそれぞれ $\omega_1(t)=\begin{pmatrix}e^t+e^{-t}\\e^t-e^{-t}\end{pmatrix}$, $\omega_2(t)=\binom{t^2-1}{2t}$, $\omega_3(t)=\begin{pmatrix}e^t\cos t\\e^t\sin t\end{pmatrix}$ で定めるとき，$(f_i\circ\omega_j)'(t)$ $(i=1,2,3,4,5,\ j=1,2,3)$ を求めよ．ただし $(i,j)=(3,2)$ のときは $t\neq\pm1$, $(i,j)=(3,3)$ のときは $\dfrac{t}{\pi}-\dfrac{1}{2}\notin\boldsymbol{Z}$ とする．
 (2) $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ をそれぞれ $\varphi_1\binom{u}{v}=\binom{u+v}{uv-1}$, $\varphi_2\binom{u}{v}=\begin{pmatrix}\sin(u+v)\\\cos(u-v)\end{pmatrix}$, $\varphi_3\binom{u}{v}=\binom{u\cos v}{u\sin v}$ で定めるとき，$(f_i\circ\varphi_j)'\binom{u}{v}$, $\dfrac{\partial f_i\circ\varphi_j}{\partial u}\binom{u}{v}$, $\dfrac{\partial f_i\circ\varphi_j}{\partial v}\binom{u}{v}$ $(i=1,2,3,4,\ j=1,2,3)$ を求めよ．ただし $(i,j)=(1,2),(2,2)$ のときは $\dfrac{u+v}{\pi}\notin\boldsymbol{Z}$ または $\dfrac{u-v}{\pi}-\dfrac{1}{2}\notin\boldsymbol{Z}$, $(i,j)=(1,3),(2,3)$ のときは $u\neq0$, $(i,j)=(3,1)$ のときは $u+v\neq0$, $(i,j)=(3,2)$ のときは $\dfrac{u+v}{\pi}\notin\boldsymbol{Z}$, $(i,j)=(3,3)$ のときは $u\neq0$ かつ $\dfrac{v}{\pi}-\dfrac{1}{2}\notin\boldsymbol{Z}$ とする．

9. (発展問題) $g, h, k : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $G : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ が微分可能なとき, (1), (2) で与えられる $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g, h, k, F, G を用いて表せ. また (3) で与えられる $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, (4) で与えられる $f : X \to \boldsymbol{R}$ (ただし $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x, y, z > 0 \right\}$) に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を g, h, k, F, G を用いて表せ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = F \left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y) \end{smallmatrix} \right)$ (2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = G \left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \end{smallmatrix} \right)$ (3) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) = F \left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z) \end{smallmatrix} \right)$ (4) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) = G \left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x \end{smallmatrix} \right)$

微積分学 II 演習問題　第 20 回　高次偏導関数とテイラーの定理

1. 以下で定められる関数 f に対し, $\binom{1}{0}$ と $\binom{1}{1}$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 2 次以下の多項式をそれぞれ求めよ.

(1) $f\binom{x}{y} = \log(x^2+y^2)$　(2) $f\binom{x}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(3) $f\binom{x}{y} = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

2. 以下で定められる関数 f に対し, $\binom{0}{0}$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 3 次以下の多項式をそれぞれ求めよ.

(1) $f\binom{x}{y} = e^{-x}\log(1+2y)$　(2) $f\binom{x}{y} = \log(1+3x+y^2)$

3. $f\binom{x}{y} = e^{x-y}\sin x$ で与えられる関数 f に対し, $\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}\binom{x}{y}$ を求め, さらに $\binom{0}{0}$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 4 次以下の多項式を求めよ.

4. (発展問題) 写像 $\varphi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\binom{r}{\theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ で定める. 関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ は連続な 2 次以下の偏導関数をもつとする.

(1) $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}\binom{r}{\theta}$, $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial\theta}\binom{r}{\theta}$ を, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ および r, θ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r}\binom{r}{\theta}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial r\partial\theta}\binom{r}{\theta}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2\theta}\binom{r}{\theta}$ を f の 2 次以下の偏導関数および r, θ を用いて表せ.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi$ を $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial\theta^2}$, $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}$ と r, θ を用いて表せ.

5. (発展問題) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ で定める. 関数 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ は連続な 2 次以下の偏導関数をもつとする.

(1) $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$ を, f の偏導関数および r, θ, φ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial\theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta\partial\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$ を f の 2 次以下の偏導関数および r, θ, φ を用いて表せ.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi$ を $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 r}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\theta}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\varphi}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}$ と r, θ, φ を用いて表せ.

微積分学 II 演習問題　第 21 回　2 変数関数の極大・極小

1. 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき，f の極値を求めよ．ただし (11) の a, b は同時に 0 ではなく, (9) の n は 3 以上の整数とする．また, (14) では $a\neq 0, b$ とする．

(1) $f\binom{x}{y}=x^4+y^4-4xy$　(2) $f\binom{x}{y}=x^2-2x^3+y^2-2y^4$　(3) $f\binom{x}{y}=x^4-2x^2y^2+y^3-\dfrac{13}{2}y^2+14y$

(4) $f\binom{x}{y}=x^4-4xy+2y^2$　(5) $f\binom{x}{y}=x^4+2x^2-8xy+4y^2$　(6) $f\binom{x}{y}=x^4+y^4-6x^2-8xy-6y^2$

(7) $f\binom{x}{y}=x^3y+xy^3-xy$　(8) $f\binom{x}{y}=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$　(9) $f\binom{x}{y}=nx^{n-2}e^y-(n-2)x^n-e^{ny}$

(10) $f\binom{x}{y}=(x+y)e^{-xy}$　(11) $f\binom{x}{y}=(ax+by)e^{-x^2-y^2}$　(12) $f\binom{x}{y}=x^2y^2+4x^2y-4xy^2-16xy$

(13) $f\binom{x}{y}=(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$　(14) $f\binom{x}{y}=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$　(15) $f\binom{x}{y}=\cos(x+y)+\cos x+\cos y$

(16) $f\binom{x}{y}=xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$　(17) $f\binom{x}{y}=\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin(x+y)$　(18) $f\binom{x}{y}=\sin y\cos(x+y)(\cos x-\sin x)$

(19) $f\binom{x}{y}=\sin^2 x+\sin^2 y-2\sin x\sin y\sin(x+y)$

2. $X\subset\boldsymbol{R}^2$ と関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき，f の極値を求めよ．

(1) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,xy\neq 0\right\}$,　$f\binom{x}{y}=x^2+y^2+xy-\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{y}$

(2) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,xy\neq 0\right\}$,　$f\binom{x}{y}=xy^2+x^2-3\log|x|-2\log|y|$

(3) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x+2y\neq 0\right\}$,　$f\binom{x}{y}=xy^2+\dfrac{9}{x+2y}$

(4) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,|xy|\leqq 1\right\}$,　$f\binom{x}{y}=\sin^{-1}xy$

(5) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 1\right\}$,　$f\binom{x}{y}=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2-y^2}$

3. (発展問題) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ に内接する三角形の面積の最大値を求めよ．

4. (発展問題) 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき，f の極値を求めよ．

(1) $f\binom{x}{y}=y^2+2x^2y-x^4$　(2) $f\binom{x}{y}=x^4-y^4+x^3y-xy^3$　(3) $f\binom{x}{y}=x^2-2xy^2+y^4-y^5$

(4) $f\binom{x}{y}=x^2y^2+2x^2y$　(5) $f\binom{x}{y}=\left(x^2+y^2+r^2\right)\log\left(x^2+y^2+r^2\right)$　(6) $f\binom{x}{y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2$

(7) $f\binom{x}{y}=x^5-x^2y+y^2$　(8) $f\binom{x}{y}=x^3-y^3+3x^2-6xy+3y^2$　(9) $f\binom{x}{y}=2x^3-3ax^2y-3bx^2$

(10) $f\binom{x}{y}=x^2e^{-x^2-y^2}$　(11) $f\binom{x}{y}=2x^2+y^2\sin 2x$　(12) $f\binom{x}{y}=xy^2-ax^2$

5. (発展問題) 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき，f を定義する式に含まれる定数の値によって場合分けして f の極値を求めよ．ただし, (14) では $bc\geqq 0$, (15) では $b\neq 0$, (16) では $a\neq 0$, $b\neq 0, \pm c$, (17) では $a\neq 0$ とする．

(1) $f\binom{x}{y}=x^2y+axy^2+3bxy$　(2) $f\binom{x}{y}=x^2y+axy^2+3bx^2$　(3) $f\binom{x}{y}=ax^3+3xy^2-6bxy-3cx$

(4) $f\binom{x}{y}=x^3+a^3y^3+3bxy$　(5) $f\binom{x}{y}=x^3-3xy-3ax+3by$　(6) $f\binom{x}{y}=x^4+y^4-2a(x+b^3y)^2$

(7) $f\binom{x}{y}=y^2+2x^2y+ax^4$　(8) $f\binom{x}{y}=(ax^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$　(9) $f\binom{x}{y}=x^3-6bxy+3y^2+3\left(b^4-a\right)x$

(10) $f\binom{x}{y}=3ax^3+bxy^2+xy$　(11) $f\binom{x}{y}=8ax^3+24a^2xy+24ay^2+3(b^2-a^4)y$

(12) $f\binom{x}{y}=2x^3-3ax^2y+2b^2y^3-3cx^2-3b(\alpha+\beta)y^2+6\alpha\beta y$

(13) $f\binom{x}{y}=12(2a-1)x^2y+12(2a-1)xy^2+2(3a-1)y^3-12(2a-1)xy-3(3a-1)y^2$

(14) $f\binom{x}{y}=2x^2y+2xy^2+2(3a-2)y^3-2x^2-6xy-(27a-20)y^2+4x+4(9a-8)y$

(15) $f\binom{x}{y}=12x^2y+12axy^2+(3a^2-b^2+c^2)y^3-12(\alpha+\beta)xy-3(2a(\alpha+\beta)-b(\alpha-\beta))y^2+12\alpha\beta y$

(16) $f\binom{x}{y}=2x^3+3(a^2b-\alpha-\beta)x^2+6abxy+3by^2+6(abc+\alpha\beta)x+6bcy$

(17) $f\binom{x}{y}=2x^3-6a^2(b^2-c^2)^2xy^2+2a(d^2-2a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2))y^3-6ad(b^2-c^2)y^2+6a(b^2-c^2)^2y$

(18) $f\binom{x}{y}=2axy^2-8a^2by^3-x^2-8acxy+2a^2dy^2-2a(3\alpha^2-6(b+c)\alpha-9(b+c)^2+8c^2+d+r^2)x$
$\qquad-8a^2(\alpha^3-3(2b+c)\alpha^2+(9b^2+12bc+3c^2-r^2)\alpha-9b^2c-18bc^2-c^3+cd+cr^2)y$

6. (発展問題) a, b, c, n は実数の定数で, $(a,b)\neq(0,0)$, $n\neq 0$ とする．関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\dfrac{ax+by+c}{(x^2+y^2+1)^n}$ で定めるとき, f の極値と最大値・最小値を求めよ．

7. (発展問題) a, b, c, d, p, q, r は実数の定数で, $(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$ かつ $q^2-pr=0$ とする．関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+px^2+2qxy+ry^2$ で定めるとき, f が原点で極値をとるための条件を求めよ．

微積分学 II 演習問題　第22回　陰関数の極値・条件付き極値

1. y を x の関数とみなしたとき, 次の方程式で与えられる陰関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ. ただし (7) では $a\neq -1$, $b\neq c(a-1)$, $c\neq 0, -\dfrac{b}{2}$ とし, (10) では $c\neq -ad$, $d\neq 0$, (13) では $b\neq 0, -a$, $(c,d)\neq(0,0)$, (14) では $a,b>0$ として f はつねに正の値をとるものとし, (15) では $c\neq 3ab^2$, $p\neq q$, $pq\neq 0$, $ap, aq\neq 1$ とする.

(1) $x^2-2xy^2+6xy+16=0$
(2) $2xy^2+x^2y-8=0$
(3) $x^3-2y^3+3x^2y+2=0$
(4) $\log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=0$
(5) $x+2\log y-e^xy^3=0$
(6) $x^3+y^3-3x^2y-1=0$
(7) $ax^2y-(b+c)y^3+x^2+by^2+cy=0$
(8) $x^3y^3-x+y=0$
(9) $x^3-3xy+2y^2-4y=0$
(10) $3ay(x-by)^2-3(x-by)^2+cy^2+dy=0$
(11) $x^4+4xy^3-3y=0$
(12) $x^4+2x^2+y^3-y=0$
(13) $x^2(ay+b)-2xy(y-1)-y(y-1)(cy+d)=0$
(14) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^3=x^4+y^4$
(15) $3ax^2y-6abxy^2+cy^3-3x^2+6bxy-(3b^2+(p+q)(c-3ab^2))y^2+pq(c-3ab^2)y=0$

2. 以下の各問で与えられた $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 X で定義された関数 f の最大値と最小値を求めよ.

(1) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2-4\leqq y\leqq x+2\right\}$, $f\binom{x}{y}=x^3-3xy+3y$
(2) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,2x^2+y^2\leqq 2\right\}$, $f\binom{x}{y}=xy+\sqrt{2}x$
(3) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq 3-2x^2\right\}$, $f\binom{x}{y}=y^2+2x^2y+2x^4-2y$
(4) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 5\right\}$, $f\binom{x}{y}=x^4+y^4-(x+y)^2$
(5) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 6\right\}$, $f\binom{x}{y}=x^4+y^4+4xy$
(6) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+2y^2\leqq 3\right\}$, $f\binom{x}{y}=x^3+3xy^2-3x$
(7) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^4+y^4\leqq 2\right\}$, $f\binom{x}{y}=x^2+2y$
(8) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+2y^2+4y\leqq 7\right\}$, $f\binom{x}{y}=x^3+3x(y+3)(y-1)$
(9) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,2x^2+y^2\leqq 10\right\}$, $f\binom{x}{y}=2x^2+4xy+y^2-4x$
(10) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2-4x+y^2+4y\leqq 10\right\}$, $f\binom{x}{y}=xy(x-4)(y+4)$
(11) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 12\right\}$, $f\binom{x}{y}=x^3-y^3+3(x-y)^2$
(12) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^4+y^4\leqq 4\right\}$, $f\binom{x}{y}=xy(x^4+y^4-6)$
(13) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq 2,\ y\geqq 0\right\}$, $f\binom{x}{y}=x-3y^{\frac{1}{3}}$

3. (発展問題) 以下の各問で与えられた条件のもとで, 関数 f の極値を求めよ.

(1) $2xy^2+x^2y=8$ のとき, $f\binom{x}{y}=x+2y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(2) $x+2\log y+e^xy^2=1$ のとき, $f\binom{x}{y}=x+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(3) $y^4-y^2+x^2=0$ のとき, $f\binom{x}{y}=xy$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(4) $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ のとき, $f\binom{x}{y}=x+2y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(5) $2x^4-2xy+y^2+6y+5=0$ のとき, $f\binom{x}{y}=x-y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(6) $2x^3+y^3-3x^2y+2=0$ のとき, $f\binom{x}{y}=x^2+y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(7) $x^3+x^2-y^2=0$ のとき, $f\binom{x}{y}=xy$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(8) $x^4+y^4=2$ のとき, $f\binom{x}{y}=x^2+2y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(9) $x^4+y^4=4$ のとき, $f\binom{x}{y}=xy(x^4+y^4-6)$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(10) $x^4+y^4=1$ のとき, $f\binom{x}{y}=x^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(11) $2xy+z^2=1$ のとき, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$.
(12) $xy+yz+xz=3a^2$ $(a>0)$ のとき, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=xyz$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$.
(13) $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ のとき, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=x^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}$.

4. (発展問題) (1) r を正の実数, n を 3 以上の自然数とする. $x^2+y^2=r^2$ の条件の下で, $(x+y)^n+(x-y)^n$ の最大値と最小値を求めよ.

(2) x, y が 0 でない実数ならば $\cosh x\cosh y>\cosh\sqrt{x^2+y^2}$ が成り立つことを示せ.

微積分学 II 演習問題　第 23 回　長方形の領域での重積分

1. 次の積分を求めよ．ただし α は正の実数, $a<b$ とし, (10) では $n \geqq \frac{1}{2}$, $m \geqq 0$, (11) と (12) では $n \neq 0$, (17) では $a>-1$, (22) と (24) では $a>0$ とする．

(1) $I=[0,1]\times[0,2]$, $\displaystyle\iint_I (x+y)dxdy$　(2) $I=[0,a]\times[0,b]$, $\displaystyle\iint_I (x^2+y^2)dxdy$

(3) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I x^3y^2dxdy$　(4) $I=[0,1]\times[a,b]$, $\displaystyle\iint_I xy^2dxdy$

(5) $I=[-1,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I 12x^2y^3dxdy$　(6) $I=[0,1]\times[0,\alpha]$, $\displaystyle\iint_I e^x\sin y dxdy$

(7) $I=\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, $\displaystyle\iint_I \sin x\cos y dxdy$　(8) $I=[1,2]\times[2,3]$, $\displaystyle\iint_I \frac{1}{x+y}dxdy$

(9) $I=[0,a]\times[0,b]$, $\displaystyle\iint_I \sin(x+y)dxdy$　(10) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I x^{2n-1}y^me^{x^ny^{m+1}}dxdy$

(11) $I=[0,1]\times[0,a]$, $\displaystyle\iint_I \frac{y^{2n-1}}{xy^n+1}dxdy$　(12) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{y^{2n-1}}{xy^{2n}+1}dxdy$

(13) $I=[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\iint_I y\cos(xy)dxdy$　(14) $I=[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\displaystyle\iint_I \frac{x}{\cos^2(xy)}dxdy$

(15) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I y(x+y)^\alpha dxdy$　(16) $I=[0,2]\times[0,3]\times[0,4]$, $\displaystyle\iiint_I xy^2z^3dxdydz$

(17) $I=[0,1]\times[a,b]$, $\displaystyle\iint_I x^ydxdy$　(18) $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2]$, $\displaystyle\iint_I x^2y\sin(xy^2)dxdy$

(19) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I (x+y^2)^2dxdy$　(20) $I=[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\iint_I x\sin(x+y)dxdy$

(21) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I xydxdy$　(22) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{1}{(x+y+a)^2}dxdy$

(23) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I e^{x+y}dxdy$　(24) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{1}{x+y+a}dxdy$

(25) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{y^2}{x^2y^2+1}dxdy$　(26) $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\iiint_I \sin(x+y+z)dxdydz$

2. (1) $m,n\neq 0$ とし, f を C^2 級関数とする．a, b, c, d, m, n, f を用いて重積分 $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} x^{2m-1}y^{n-1}f''(x^my^n)\,dxdy$ の値を表せ．

(2) $I=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ とし, $l,m,n\neq 0$, f を C^3 級関数とする．a, b, c, d, p, q, l, m, n, f を用いて 3 重積分 $\displaystyle\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdydz$ の値を表せ．

3. (発展問題) すべての成分が 0 以上 1 以下である n 次元数ベクトル全体からなる領域を $[0,1]^n$ で表す．

(1) $k>0$ とするとき, n 重積分 $\displaystyle\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\left(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$ の値を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．ただし, $\displaystyle\binom{n}{j}$ は二項係数 ${}_nC_j=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$ を表す．

$$\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j+1)^{n-1}\log(j+1)$$

(3) $a>0$, $k>-1$ とするとき n 重積分 $\displaystyle\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n+k}}dx_1dx_2\cdots dx_n$ の値を求めよ．

(4) $a>0$ とするとき n 重積分 $\displaystyle\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n-1}}dx_1dx_2\cdots dx_n$ の値を求めよ．

微積分学 II 演習問題　第 24 回　縦線図形における重積分

1. 以下の積分を計算せよ．ただし (3) では $d>1$, (18) では $a,b>0$, (29) では $l>1$, $p,q>0$ であり, m, n は 0 以上の整数

(1) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\leqq y\leqq 2-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$

(2) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 2\right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$

(3) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ (a+d)x^2+(b-d)x+c\leqq y\leqq ax^2+bx+c\right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$

(4) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\geqq 0,\ x^3-x\leqq y\leqq 3x\right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$

(5) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2\leqq y\leqq x+2\right\}$, $\displaystyle\iint_D (2x+3y)dxdy$

(6) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(7) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\geqq y^2,\ y\geqq x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(8) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2\leqq y\leqq 2-x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(24x^2+84y^2\right)dxdy$

(9) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0\leqq x\leqq 2,\ -3x\leqq y\leqq x-x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D 6x^2ydxdy$

(10) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0\leqq y\leqq 1-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D 12x^2ydxdy$

(11) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\leqq y\leqq 2x-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D 12x^2ydxdy$

(12) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 2-x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^3-2xy\right)dxdy$

(13) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\geqq y^2,\ y\geqq x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D (xy+y)dxdy$

(14) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\geqq y^2,\ y\geqq x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(xy+y^2\right)dxdy$

(15) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\leqq y\leqq 3x-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+xy)dxdy$

(16) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ 2x\leqq y\leqq x-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2-y^2\right)dxdy$

(17) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ \frac{1}{2}x^2\leqq y\leqq 6-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2-y\right)dxdy$

(18) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ (a^2-1)x^2\leqq y\leqq a^2b^2-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2-xy\right)dxdy$

(19) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ 11x^2\leqq y\leqq 3-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2+xy\right)dxdy$

(20) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ 3x+x^2\leqq y\leqq -x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(xy-y^2\right)dxdy$

(21) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\leqq y\leqq 3x,\ x+y\leqq 4\right\}$, $\displaystyle\iint_D (2x+y)dxdy$

(22) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x\leqq y\leqq 2x,\ x+y\leqq 3\right\}$, $\displaystyle\iint_D (2x-xy)dxdy$

(23) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ 1\leqq x\leqq 2,\ \frac{1}{x}\leqq y\leqq 2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^3-3xy\right)dxdy$

(24) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0\leqq x\leqq -y^4+y^2+12\right\}$, $\displaystyle\iint_D y^2dxdy$

(25) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ y^2-4\leqq x\leqq -y^4+2y^2+8\right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+2y)dxdy$

(26) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2-x\leqq y\leqq -2x\right\}$, $\displaystyle\iint_D (x^2+3y^2)dxdy$

(27) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-2x+2\leqq y\leqq x-x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D(2xy-3y^2)dxdy$

(28) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,y\geqq -1,\ y-2\leqq x\leqq -y^3+4y\right\}$, $\displaystyle\iint_D(2x-y)dxdy$

(29) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\geqq 0,\ x^l-x\leqq y\leqq -x^l+x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\left(x^p+x^qy^{2m+1}+y^{2n+1}\right)dxdy$

(30) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq \frac{\pi}{4},\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sin(x+3y)dxdy$

(31) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq\pi\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sin(x+y)dxdy$

(32) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 2,\ -x\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D xe^{2y}dxdy$

(33) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 3x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{2y}{1+x}dxdy$

(34) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x\leqq 2,\ x\leqq y\leqq \sqrt{3}x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}dxdy$

(35) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq y\leqq 2-x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{y}{(x+1)^2}dxdy$

(36) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D y^3e^{xy}dxdy$

(37) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x\leqq \sqrt{2},\ x\leqq y\leqq x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D x^4e^{xy}dxdy$

(38) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sqrt{1-x^2}dxdy$

(39) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq \frac{x}{2}\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

(40) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{x^2}dxdy$

(41) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 1\leqq y\leqq e^x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{xe^x}{y}dxdy$

(42) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{4x}{1+y^4}dxdy$

(43) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x^3\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{3y^2}{x^4+1}dxdy$

(44) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

(45) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,y\geqq x^2,\ x\geqq 0,\ 1\leqq y\leqq 3\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{2x}{x^2+y^2}dxdy$

(46) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq \sqrt[3]{\pi},\ 0\leqq y\leqq 3x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sin\left(x^3\right)dxdy$

(47) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{x^7}{\sqrt{1+x^3y}}dxdy$

(48) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ x^2\leqq y^{n-1}\leqq 1\right\}$ $(n\geqq 1)$, $\displaystyle\iint_D 6x\sqrt{1+y^n}\,dxdy$

(49) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq 3,\ \sqrt{\frac{y}{3}}\leqq x\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2+y}\,dxdy$

(50) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq 3x,\ y\leqq 4x-x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dxdy$

(51) $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$, $\displaystyle\iint_D|\cos(x+y)|dxdy$

2. (1) $c>0,\ k>1$ とし, f を 0 と c を含む開区間で定義された C^1 級関数とする. このとき, 累次積分 $\displaystyle\int_0^c\left(\int_{(c-x)^{\frac{1}{k-1}}}^{c^{\frac{1}{k-1}}}f'(y^k)dy\right)dx$ の値を $k,\ m,\ c,\ r$ および f を用いて表せ.

(2) r を自然数, $k,c>0,\ m>\dfrac{1}{r}$ とし, f を 0 と c^{km} を含む開区間で定義された C^r 級関数とする. このとき, 累

次積分 $\displaystyle\int_0^c \left(\int_{x^k}^{c^k} x^{k(mr-1)-1} f^{(r)}(y^m) dy \right) dx$ の値を k, m, c, r および f を用いて表せ.

(3) r, s を自然数, k, n, c を正の実数とし, m は $m+n>0$ を満たす実数であるとする. 0 と $c^{k(m+n)}$ を含む開区間で定義された C^{r+s} 級関数 f に対し, 累次積分 $\displaystyle\int_0^c \left(\int_{x^k}^{c^k} x^{knr-1} y^{m(r+s)+ns-1} f^{(r+s)}(x^{kn}y^m) dy \right) dx$ の値を k, m, n, c, r, s および f を用いて表せ.

微積分学 II 演習問題　第 25 回　重積分の変数変換

1. 以下の積分を計算せよ. ただし $0 < a < b$, mn n は 0 以上の整数とし, p は実数, q は分母が奇数で分子が偶数である正の有理数とする.

(1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy$

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 y^2 dxdy$

(3) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (2x^2 + 3y^2)^2 dxdy$

(4) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D 16x^2 y^2 (x^2 + y^2) dxdy$

(5) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, y \geqq 0,\, 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^4 dxdy$

(6) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, y \geqq 0,\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D y^2 (4x^2 + y^2)^2 dxdy$

(7) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, y \geqq 0,\, x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x(x^2 + 4y^2)^2 dxdy$

(8) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x \geqq 0,\, x^2 + y^2 \leqq 1, \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dxdy$

(9) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq b^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^m y^n \left(x^2 + y^2\right)^p dxdy$

(10) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, y \geqq 0,\ a^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq b^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^m y^n \left(x^2 + y^2\right)^p dxdy$

(11) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, y \geqq x,\ a^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq b^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^m y^n (x^2 + y^2)^p dxdy$

(12) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, y \geqq x,\, x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)^2 dxdy$

(13) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq x \leqq y,\, x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$

(14) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, -y \leqq x \leqq y,\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D xy\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$

(15) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq y \leqq x,\, x^2 + y^2 \leqq \pi \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sin(x^2 + y^2) dxdy$

(16) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\, x^2 + y^2 \leqq \frac{\pi}{4} \right\}$, $\displaystyle\iint_D \tan(x^2 + y^2) dxdy$

(17) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, y \geqq \frac{x}{\sqrt{3}},\, y \geqq -\sqrt{3}x,\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)\right) dxdy$

(18) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\, x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{x^2 + y^2} dxdy$

(19) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x\log(x^2 + y^2) dxdy$

(20) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, -x \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\, 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq e^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$

(21) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, x + y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D 2(x + y)^a (x - y)^q dxdy$

(22) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq y \leqq 1,\, 0 \leqq x \leqq 1 - 2y \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{(x - 2y)^4}{(x + 2y)^2 + 1} dxdy$

(23) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq x + 2y \leqq 1,\, 0 \leqq x - 4y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^a dxdy$

(24) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\, 0 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left((a + 1)(x + y)^a + (x - y)^{a+1}\right) dxdy$

(25) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq x + y \leqq 1,\, 1 \leqq x - y \leqq 2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 e^{x-y} dxdy$

(26) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq x - 2y \leqq \pi,\, 0 \leqq x + 2y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x - 2y)^2 \sin\left(x^2 - 4y^2\right) dxdy$

(27) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 3x \right\},\ \displaystyle\iint_D (3x+y)(3x-y)^a dxdy$

(28) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ -x+1 \leqq 2y \leqq x+1 \right\},\ \displaystyle\iint_D \left((x+2y)^a - (x-2y)^q\right) dxdy$

(29) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x \right\},\ \displaystyle\iint_D (x+y)^a (x-y) dxdy$

(30) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \right\},\ \displaystyle\iint_D (x+y)(x-y)^q dxdy$

(31) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{2y} \leqq 1 \right\},\ \displaystyle\iint_D x^2 dxdy$

(32) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2-2x \leqq 0 \right\},\ \displaystyle\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dxdy$

(33) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqq 1,\ y \geqq 0 \right\},\ \displaystyle\iint_D \left(x^2+y\right) dxdy$

(34) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 1 \leqq x^2+4y^2 \leqq 3 \right\},\ \displaystyle\iint_D \frac{y^2}{\sqrt{4-x^2-4y^2}} dxdy$

(35) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 2x \right\},\ \displaystyle\iint_D xy dxdy$

(36) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2+x+y \leqq \frac{3}{2} \right\},\ \displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2+x+y\right) dxdy$

(37) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ (x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 1 \right\},\ \displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$

(38) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ (x-2)^2+y^2 \leqq 4 \right\},\ \displaystyle\iint_D x dxdy$

(39) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2-2x-2y \leqq 0 \right\},\ \displaystyle\iint_D \sqrt{8-x^2-y^2} dxdy$

(40) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \right\},\ \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$

(41) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 \leqq 2(x+y),\ x \leqq y \right\},\ \displaystyle\iint_D xy dxdy$

(42) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}x,\ 0 \leqq \frac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1 \right\},\ \displaystyle\iint_D x(x^2+4y^2)^2 dxdy$

(43) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ -2x \leqq y \leqq 2\sqrt{3}x,\ 1 \leqq x^2 + \frac{y^2}{4} \leqq 4 \right\},\ \displaystyle\iint_D y^2(4x^2+y^2)^2 dxdy$

(44) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq y,\ 5x^2+6xy+5y^2 \leqq 4 \right\},\ \displaystyle\iint_D (x-y)(x+y)^6 dxdy$

(45) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ y \geqq 0,\ x^2+2xy+5y^2 \leqq 4 \right\},\ \displaystyle\iint_D \left(x^2+3y\right) dxdy$

(46) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 \leqq 1 \right\},\ \displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dxdy$

(47) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ (x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 1 \right\},\ \displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy$

微積分学 II 演習問題　第 26 回　3 重積分

1. a, b, c を正の実数とし, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, z \geqq 0,\, \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} \leqq 1 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ. ただし (6) では $k \neq 0, \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{b}$ とする.

(1) $\displaystyle\iiint_D dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D xzdxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D y^2dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_D xyzdxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_D xyz\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)dxdydz$　(6) $\displaystyle\iiint_D e^{x+ky+z}dxdydz$

2. a を正の実数とし, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, z \geqq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D zdxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D yzdxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D xyzdxdydz$

3. a, b, c を正の実数とし, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D x^2dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D x^2z^2dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_D y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$　(6) $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$

4. $a > b > 0$ とし, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, b^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$

5. a, b, c を正の実数とし, $\boldsymbol{R}^3$ の領域 D_1, D_2, D_3 を $D_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$,
$D_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{z^2}{c^2},\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$, $D_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{z}{c},\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$ で定めるとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_{D_1} z^2dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_{D_1} x^2z^2dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_{D_1} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_{D_2} z^2dxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_{D_2} x^2z^2dxdydz$　(6) $\displaystyle\iiint_{D_2} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$

(7) $\displaystyle\iiint_{D_3} z^2dxdydz$　(8) $\displaystyle\iiint_{D_3} x^2z^2dxdydz$　(9) $\displaystyle\iiint_{D_3} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$

6. $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ z \geqq 0 \right\}$ とするとき $\displaystyle\iiint_D z^2dxdydz$ を計算せよ.

7. 体積を持つ $\boldsymbol{R}^3$ の領域 D に対し, 連続関数 $\rho : D \to [0, \infty)$ を D の密度関数という. m, b_1, b_2, b_3 を

$$m = \iiint_D \rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right)dxdydz,\ b_1 = \iiint_D x\rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right)dxdydz,\ b_2 = \iiint_D y\rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right)dxdydz,\ b_3 = \iiint_D z\rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right)dxdydz$$

で定め, m を D の質量といい, $\dfrac{b_i}{m}$ を第 i 成分とする $\boldsymbol{R}^3$ の点を D の重心という.

(1) $a,\ k,\ \rho_0$ は正の定数で, $ak \leqq \pi$ とする. $D = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, \|\boldsymbol{x}\| \leqq a\}$ とし, D の密度関数 ρ を $\rho(\boldsymbol{0}) = \rho_0$, $\rho(\boldsymbol{x}) = \rho_0\dfrac{\sin k\|\boldsymbol{x}\|}{k\|\boldsymbol{x}\|}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ で定めるとき, D の質量を求めよ.

(2) a を正の実数とし, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z \geqq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$ とする. E の密度関数 ρ が常に一定の正の値 ρ_0 をとる定数値関数であるとき, E の重心を求めよ.

8. 体積を持つ $\boldsymbol{R}^3$ の領域 D に対し, 密度関数 ρ と $\boldsymbol{R}^3$ の直線 l が与えられているとする. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $r(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ から l までの距離とするとき, $I(D; l) = \displaystyle\iiint_D r\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right)^2 \rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right)dxdydz$ とおき, D の l に関する慣性能率という. l_0 が D の重心を通る直線 l に平行な直線で, l と l_0 との距離を a, D の質量を m とするとき, $I(D; l) = I(D; l_0) + a^2m$ が成り立つことを示せ.

微積分学 II 演習問題　第 27 回　重積分の広義積分

1. 以下の広義積分を計算せよ. ただし α, a, b, c は正の実数とし, (39) では $\alpha < \frac{9}{2}$, (40) では $\alpha > 2$, (44) では $\alpha < 3$ とする.

(1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{-y^2} dxdy$

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 < x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2} dxdy$

(3) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 < x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2} dxdy$

(4) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ -x < y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}} dxdy$

(5) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 1 \leqq x \leqq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dxdy$

(6) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 < x \leqq y \leqq 1 \right\}$, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ |x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(7) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2 \leqq y < x \right\}$, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ |y| < x \leqq 1 \right\}$, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y < \min\{x, 1-x\} \right\}$,
$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dxdy$

(8) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x < 1,\ x \leqq y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dxdy$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} dxdy$

(9) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 < x+y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$, $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2(y+x)}\right) dxdy$

(10) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x \geqq 1,\ 0 < y \leqq \frac{1}{x^2} \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dxdy$

(11) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x-y} dxdy$, $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x^2-y^2} dxdy$

(12) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a < x+y \leqq b \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dxdy$

(13) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \log(x+y) dxdy$

(14) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy$

(15) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy$

(16) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2} dxdy$

(17) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^\alpha} dxdy$

(18) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y < x \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x-y)^\alpha} dxdy$

(19) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2+y^2 \geqq 1,\ -x \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(20) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 < x^2+y^2 \leqq b^2 \right\}$, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2+y^2 \geqq a^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$

(21) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 < x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(22) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 < x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy$

(23) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1} e^{-(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$

(24) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 < x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2) dxdy$

(25) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2<a^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\left(-\log\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dxdy$

(26) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{y}{x}e^{-\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

(27) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}$

(28) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2>1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy$

(29) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0<x^2+y^2<1,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$

(30) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\geqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$

(31) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2e^{-x^2-y^2}dxdy$, $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$

(32) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

(33) $D=\boldsymbol{R}^2$, $\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}dxdy$, $\displaystyle\iint_D x^2y^2e^{-x^2-y^2}dxdy$, $\displaystyle\iint_D e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$ $(a>0,\ b^2-ac<0)$

(34) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2<a^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha}dxdy$

(35) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq a^2,\ x>0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D\tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$

(36) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0<y<1,\ y^3\leqq x<y^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dxdy$

(37) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ y>x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{x^2}{x^4+y^2}dxdy$

(38) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0,\ x^2+y^2+z^2<1\right\}$, $\displaystyle\iiint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}dxdy$

(39) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0<x^2+y^2+z^2\leqq a^2\right\}$, $\displaystyle\iiint_D\log(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, $\displaystyle\iiint_D\frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz$

(40) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iiint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz$

(41) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\leqq 1,\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$, $\displaystyle\iiint_D\frac{1}{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}dxdydz$

(42) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dxdy$

(43) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{y^2}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy$

(44) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0<\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iiint_D\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz$

2. (1) 関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ $(0\leqq a<b)$ は単調増加である C^1 級関数であり, $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a<x^2+y^2<b\right\}$ とする. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)$ が存在するとき, $\displaystyle\iint_D f'(x^2+y^2)dxdy$ を, $\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)$ を用いて表せ.

(2) 関数 $f:(a,\infty)\to\boldsymbol{R}$ $(a\geqq 0)$ は単調増加である C^1 級関数であり, $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2>a\right\}$ とする. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ が存在するとき, $\displaystyle\iint_D f'(x^2+y^2)dxdy$ を, $\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を用いて表せ.

3. (発展問題) ベータ関数を用いることによって, 次の広義積分の値を表せ.

(1) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0,\ y>0,\ x+y\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D x^{p-1}y^{q-1}dxdy$　(ただし $p>0,\ q>0$)

(2) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{x^{m-1}y^{n-1}}{\left((1+x^2)^2+y^2\right)^\alpha}dxdy$　(ただし $m>0,\ n>0,\ \alpha>\max\left\{\frac{m}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\right\}$)

(3) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iiint_D\frac{1}{1+x^\alpha+y^\alpha+z^\alpha}dxdy$　(ただし $\alpha>3$)

微積分学 II 演習問題　第 28 回　面積と体積

1. 以下で与えられる領域 D の面積を求めよ．ただし, $a>0$, $b>0$ とする．

(1) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, (x^2+y^2-2ax)^2 \leqq 4a^2(x^2+y^2)\right\}$　(2) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a^4 \leqq (x^2+y^2)^2 \leqq 2a^2(x^2-y^2)\right\}$

(3) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, (x^2+y^2)^2 \leqq 8a^2xy,\, x^2+y^2 \leqq a^2\right\}$　(4) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2 \leqq \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b},\, y \geqq 0\right\}$

2. a, b, c を正の定数とし, (4) の実数 p, q, r は $\dfrac{p^2}{4a}+\dfrac{q^2}{4b}+r>0$ を満たすとする．

(1) $0<a<b$, $0<c<d$ とする．曲面 $z=\sqrt{2xy}$ と xy 平面ではさまれた領域で, $a \leqq x \leqq b$ かつ $c \leqq y \leqq d$ を満たす部分の体積を求めよ．また, 曲面 $z=\sqrt{2xy}$ のうち, $a \leqq x \leqq b$ かつ $c \leqq y \leqq d$ を満たす部分の面積を求めよ．

(2) 楕円放物面 $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ と xy 平面ではさまれた領域で, 楕円柱 $E=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2c^2}+\dfrac{y^2}{b^2c^2} \leqq 1\right\}$ に含まれる部分の体積を求めよ．また, 上の楕円放物面の E に含まれる部分の面積を求めよ．

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{y^2}{2b}$ と xy 平面ではさまれた領域で, 楕円柱 $E=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2c^2}+\dfrac{y^2}{b^2c^2} \leqq 1\right\}$ に含まれる部分の体積を求めよ．また, 上の双曲放物面の E に含まれ, かつ xy 平面より上にある部分の面積を求めよ．

(4) 平面 $z=px+qy+r$ と 楕円放物面 $z=ax^2+by^2$ で囲まれたの部分の体積を求めよ．また, 平面 $z=px+qy+r$ のうち, 楕円放物面 $z=ax^2+by^2$ の内部にある部分の面積を求めよ．

(5) 円柱面 $(x-a)^2+y^2=a^2$, 円放物面 $x^2+y^2=z$ と xy 平面に平行な平面 $z=4a^2$ で囲まれた部分の体積を求めよ．また, 円柱面 $(x-a)^2+y^2=a^2$ のうち, $x^2+y^2 \leqq z \leqq 4a^2$ を満たす部分の面積を求めよ．

(6) 円柱面 $x^2+y^2=a^2$, 曲面 $z=\dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}+e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ と xy 平面で囲まれた部分の体積を求めよ．また, 曲面 $z=\dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}+e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ のうち, 円柱面 $x^2+y^2=a^2$ の内部にある部分の面積を求めよ．

(7) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq ax\right\}$ とおくとき, $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \binom{x}{y}\in D,\ 0 \leqq z \leqq 2\sqrt{ax}\right\}$ の体積を求めよ．また, 曲面 $z=2\sqrt{ax}$ のうち, D の上にある部分の面積を求めよ．

(8) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とおくとき, $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \binom{x}{y}\in D,\ 0 \leqq z \leqq cxy\right\}$ の体積を求めよ．また, 曲面 $z=cxy$ のうち, D の上にある部分の面積を求めよ．

(9) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の内部から 2 つの円柱面 $x^2+y^2=ax$ と $x^2+y^2=-ax$ の内側の部分を除いた部分の体積を求めよ．また, この球面から上記の 2 つの円柱面の内側にある部分を除いた部分の面積を求めよ．

(10) n を 2 以上の整数, R を正の実数, $R\sin\dfrac{\pi}{n} \leqq r \leqq R$ とする．$k=1,2,\ldots,n$ に対し, D_k を球体 $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(x-R\cos\frac{\pi(2k-1)}{n}\right)^2+\left(y-R\sin\frac{\pi(2k-1)}{n}\right)^2+z^2 \leqq r^2\right\}$ とするとき, $D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$ の体積と表面積を求めよ．

(11) $-a \leqq p < q \leqq a$ とする．xy 平面の領域 $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, p \leqq x \leqq q,\ x^2+y^2 \leqq a^2\right\}$ に対し, 曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の D の上にある部分の面積を求めよ．

(12) 曲面 $z=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ の $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ の上にある部分の体積と面積を求めよ．

(13) 曲面 $z=\dfrac{1}{c}(x^2+y^2)$ の $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq ax\right\}$ の上にある部分の体積を求めよ．

3. 以下の領域 D の体積を求めよ．(2) では $a<b$ かつ $b \geqq 0$, $c>0$ とし, (4), (5), (6) では $a,b,c,k>0$ とする．

(1) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 1 \leqq z \leqq e,\ x^2+y^2 \leqq (\log z)^2\right\}$

(2) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \binom{x}{y}\in E,\ 0 \leqq z \leqq x^2+y^2\right\}$, E は $\binom{a}{0}$, $\binom{b}{0}$, $\binom{0}{c}$ を頂点とする xy 平面上の三角形である．

(3) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ y \leqq \cosh x,\ 0 \leqq z \leqq y\tanh x\right\}$

(4) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \binom{x}{y}\in E,\ x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\right\}$, E は xy 平面において, アルキメデスの螺旋 $r=\dfrac{2a\theta}{\pi}$ の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ 部分と y 軸で囲まれた領域である．

(5) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2-z^2 \leqq a^2,\ |z| \leqq b\right\}$

(6) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{|z|^k}{c^k}\leqq 1\right\}$

4. 以下の各問で与えられた領域 D と E の共通部分の体積と表面積を求めよ.

(1) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\leqq 3\right\}$, $E=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+(z-1)^2\leqq 1\right\}$

(2) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\leqq 4\right\}$, $E=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq 1\right\}$

(3) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+(z-3)^2\leqq 5\right\}$, $E=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq z\right\}$

(4) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq 2-z\right\}$, $E=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq 1,\ z\geqq 0\right\}$

(5) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq 2z^2,\ z\geqq 0\right\}$, $E=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq 3-z\right\}$

(6) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq (1-z)^2,\ 0\leqq z\leqq 1\right\}$, $E=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq x\right\}$

(7) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\leqq a^2\right\}$, $E=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2\leqq \dfrac{a^2}{4}\right\}$

(8) $0<R\leqq a$, $a-R\leqq r\leqq\sqrt{a^2+R^2}$ とする. D は xy 平面上の円板 $x^2+(y-a)^2\leqq R^2$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体, $E=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\leqq r^2\right\}$

5. 以下で定義される写像 f でパラメータ表示される曲面の面積を求めよ.

(1) $f\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\\ c\theta\end{pmatrix}$ $(0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$
(2) $f\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\\ \tan^{-1}(\tan\theta)\end{pmatrix}$ $(0\leqq r\leqq\theta\leqq 2\pi,\ \theta\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

(3) $f\begin{pmatrix} s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s+t\\ st\\ s-t\end{pmatrix}$ $(s^2+t^2\leqq 1)$
(4) $f\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar\cos\theta\\ br\sin\theta\\ \frac{r^2}{2}(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)\end{pmatrix}$ $(0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

(5) $f\begin{pmatrix} s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s^2\\ \sqrt{2}st\\ t^2\end{pmatrix}$ $(s^2+t^2\leqq 1)$

6. 極座標で表された曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体の表面積を求めよ.

7. (発展問題) a, b, α, β, k, n を正の実数とする. 以下で与えられる領域 D の面積を求めよ.

(1) $kn\geqq 2$ の場合, $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^k+\left(\dfrac{y}{b}\right)^k\right)^n\leqq \alpha x^{kn-2}+\beta y^{kn-2}\right\}$

(2) $n>2$ の場合, $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^n\leqq \alpha^{n-2}x^{n-2}-\beta^{n-2}y^{n-2}\right\}$

(3) n が 2 以上の整数の場合, $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2\right)^n\leqq \alpha^{2n-2}x^{2n-2}-\beta^{2n-2}y^{2n-2}\right\}$

(4) n が自然数の場合, $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2\right)^n\leqq \alpha^{2n-1}x^{2n-1}+\beta^{2n-1}y^{2n-1}\right\}$

(5) $kn>l+m$ の場合, $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^k+\left(\dfrac{y}{b}\right)^k\right)^n\leqq \alpha x^l y^m\right\}$

8. (発展問題) $D=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}\leqq a^{\frac{2}{3}}\right\}$ $(a>0)$ とするとき, D の体積と表面積を求めよ.

9. (発展問題) a を正の定数とするとき, 次の方程式で与えられる曲面の面積を求めよ.

(1) $(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$　(2) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$　(3) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

10. (発展問題) 以下の曲面の面積を求めよ. ただし, (3) では $0 < a \leqq b$, (22) では $0 \leqq a < b$, $c > 0$ とする.

(1) $0 \leqq \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とし, 放物面 $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ を S とする. S の点 $\boldsymbol{x}$ における法線と z 軸のなす角の鋭角を $\gamma(\boldsymbol{x})$ で表すとき, $\alpha \leqq \gamma(\boldsymbol{x}) \leqq \beta$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S$ 全体からなる部分.

(2) 球面 $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = c^2$ のうちで, 楕円錐面 $z^2 = ax^2 + by^2$ の内部に含まれる部分.

(3) 球面 $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = c^2$ のうちで, 放物面 $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ の内部に含まれる部分.

(4) $p > 0$, $\alpha > \beta$ とする. 曲面 $z = \dfrac{x^2}{2p}$ の $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq a,\ \beta x \leqq y \leqq \alpha x \right\}$ の上にある部分.

(5) a, p, q を正の実数とするとき, 曲面 $z^2 = 2px$ の曲面 $y^2 = 2qx$ と平面 $x = a$ によって切り取られる部分.

(6) 楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > c > 0)$ の楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ によって切り取られる部分.

(7) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ によって切り取られる部分.

(8) 円錐 $y^2 + z^2 = x^2$ の円柱 $x^2 + y^2 \leqq a^2$ に含まれる部分.

(9) 円錐 $y^2 + z^2 = x^2$ が曲面 $y = \dfrac{x^2}{a}$ によって切り取られる部分.

(10) 曲面 $z = \dfrac{1}{2c}(y^2 - x^2 + 2xy\cot\alpha)$ $(0 < \alpha < \pi)$ の $z \geqq 0$, $x^2 + y^2 \leqq a^2$ にある部分.

(11) 曲面 $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2a}$ の柱面 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ によって切り取られる部分.

(12) 曲面 $z = \dfrac{xy}{a}$ の柱面 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ によって切り取られる部分.

(13) 曲面 $z = \dfrac{xy}{a}$ の柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ によって切り取られる部分.

(14) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の柱面 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ の内側にある部分.

(15) 円錐面 $x^2 + y^2 = z^2$ の柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ の内側にある部分.

(16) 曲面 $z = \sqrt{a^2 - (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2}$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ の第一象限の部分.

(17) 曲面 $z = 1 - (x+y)^2$ の第一象限の部分.

(18) 曲面 $z = \sqrt{a^2 - \dfrac{1}{2}(x+y)^2}$ の第一象限の部分.

(19) 曲面 $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ の $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$ の上にある部分.

(20) 上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ の $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a - x \right\}$ の上にある部分.

(21) 曲面 $z = \sqrt{2xy}$ の $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqq 1 \right\}$ の上にある部分.

(22) 曲面 $\sinh x \sinh z = \sin y$ の $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b,\ \frac{c}{\cosh^2 x} \leqq y \leqq c \right\}$ の上にある部分.

11. (発展問題) D を $\boldsymbol{R}^2$ の領域, X を $\boldsymbol{R}^3$ の開集合とし, $\rho : X \to [0, \infty)$ を連続関数とする. S を C^1 級写像 $\varphi : D \to X$ によってパラメータ表示される曲面とし, $\boldsymbol{p} \in D$ に対して $\varphi(\boldsymbol{p})$ の第 i 成分 $(i = 1, 2, 3)$ を $\varphi_i(\boldsymbol{p})$ で表し, $\varphi'(\boldsymbol{p})$ の第 j 列 $(j = 1, 2)$ を $D_j\varphi(\boldsymbol{p})$ によって表す. 実数 $m(S)$, $g_i(S)$ $(i = 1, 2, 3)$ を

$$m(S) = \iint_D \rho(\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}))\|D_1\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) \times D_2\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})\|\, dsdt, \qquad g_i(S) = \iint_D \varphi_i(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})\, \rho(\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}))\|D_1\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) \times D_2\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})\|\, dsdt$$

で定める. このとき $\dfrac{g_i(S)}{m(S)}$ を第 i 成分とする $\boldsymbol{R}^3$ の点を, ρ を密度関数とする S の重心という.

(1) C^1 級写像 $f : E \to D$ に対し, $\psi : E \to X$ を f と φ の合成写像 $\varphi \circ f : E \to X$ とするとき, 次の等式を示せ.

$$\iint_D \rho(\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}))\|D_1\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) \times D_2\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})\|\, dsdt = \iint_E \rho(\psi(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}))\|D_1\psi(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \times D_2\psi(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})\|\, dudv$$

$$\iint_D \varphi_i(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})\, \rho(\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}))\|D_1\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) \times D_2\varphi(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})\|\, dsdt = \iint_E \psi_i(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})\, \rho(\psi(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}))\|D_1\psi(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \times D_2\psi(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})\|\, dudv$$

(2) S が $\boldsymbol{R}^3$ のある平面 H に含まれるとき, S の重心は H 上にあることを示せ.

(3) A, B, C を同一直線上にない $\boldsymbol{R}^3$ の 3 点とする. 密度関数 ρ が定数値関数であるとき, $\triangle$ABC の重心を求めよ.

(4) S を原点を中心とした半径 a の球面の z 座標が 0 以上の部分とする. 密度関数 ρ が定数値関数であるとき, S の重心を求めよ.